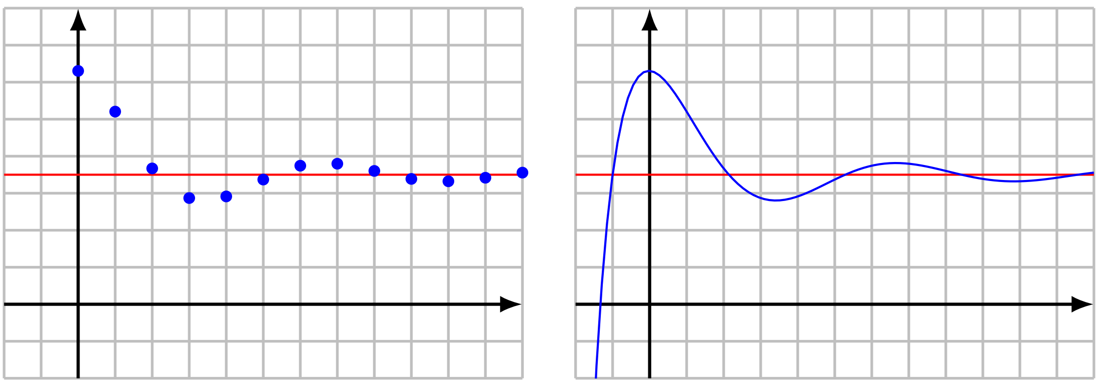
Limites et continuité de fonctions

Le terme d'une progression est la fin des séries, à laquelle aucune progression ne peut aboutir, s'il nous est permis de la poursuivre à l'infini ; mais à laquelle il est possible d'accéder d'aussi près que de n'importe quel intervalle donné.

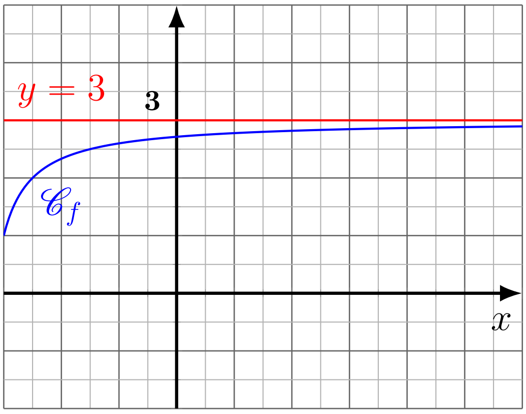
OPUS GEOMETRICUM (1647), Gréoire de Saint-Vincent.



Deux concepts similaires : limite de suite et limite de fonction.

Partie 1 : Limites en $+\infty$ et en $-\infty$

Définition : limite finie

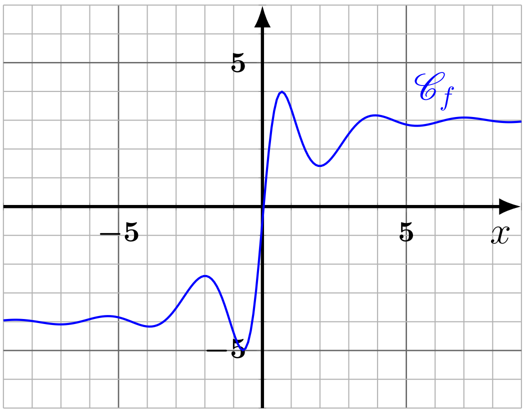


On dit que la fonction f admet pour limite un réel l lorsque x tend vers $+\infty$ si $f(x)$ se rapproche autant de l que l'on veut dès que x est assez grand.
On note $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = l$.

On définit la limite de manière similaire en $-\infty$.
On note $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = l$.

Ici, il semblerait que $\lim\limits_{x \to +\infty} = 3$: $f(x)$ se rapproche de 3 autant que possible quand x est assez grand.

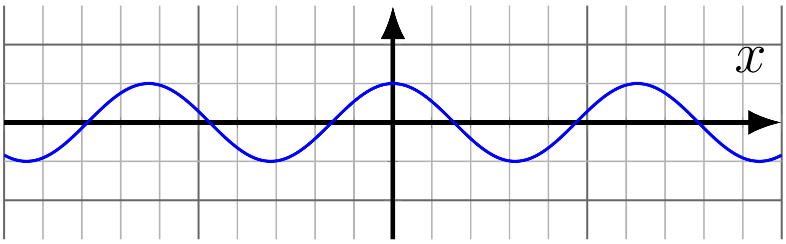
Exemples



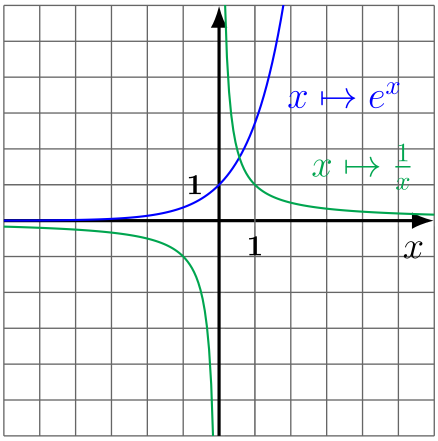
On a tracé ci-contre la courbe représentative de la fonction f.
Graphiquement, on peut conjecturer que :

— $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 3$.
— $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -4$.

Voici un exemple de fonction qui n'admet pas de limite en $+\infty$, la fonction cosinus :



Limites de fonctions de référence (admises)



$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$$

Définition : asymptote horizontale

La droite d'équation $y = l$ est dite une asymptote horizontale à la courbe représentative de f :

— en $+\infty$ si $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = l$;

— en $-\infty$ si $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = l$.

Exemple

Dans l'exemple de la page précédente, on peut conjecturer deux asymptotes au graphe $\mathscr{C}_f$ de f :

— La droite d'équation $y = 3$ en $+\infty$.

— La droite d'équation $y = -4$ en $-\infty$.

Pour utiliser une limite de référence : la courbe représentative de la fonction exponentielle admet la droite d'équation $y = 0$ comme asymptote horizontale en $+\infty$.

Mot asymptote

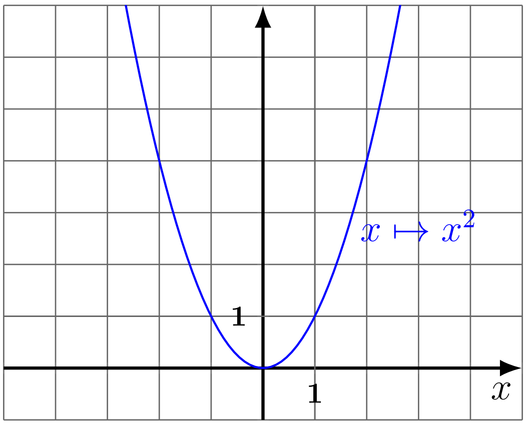
Le mot "asymptote" vient du grec ἀσύμπτωτος (asumptōtos) : signifiant « qui ne coïncide pas ». Ce mot fut introduit par le mathématicien Apollonios de Perga (c.a. 240 avant J.C.) au moment où il étudiait les intersections de plans et de cônes (appellées *coniques*).

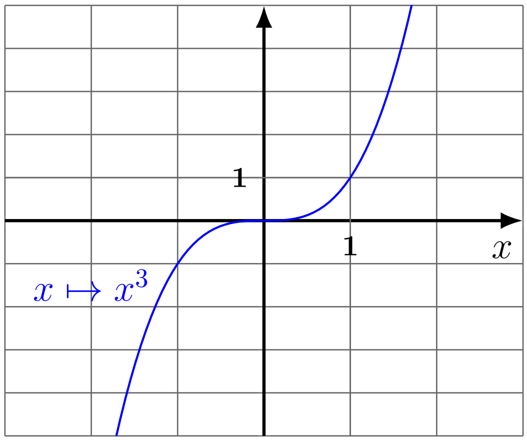
Définition : limite infinie

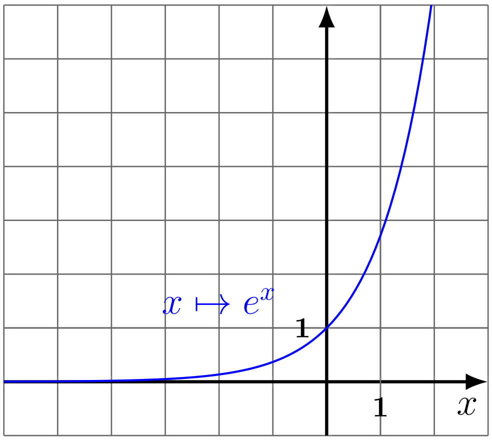
On dit que f admet pour limite $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$ si $f(x)$ prend des valeurs de plus en plus grandes pour x suffisament grand.
On note $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.
Si $f(x)$ prend des valeurs de plus en plus « basses » pour x suffisament grand alors la limite en $+\infty$ de la fonction f est $-\infty$.
On note $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

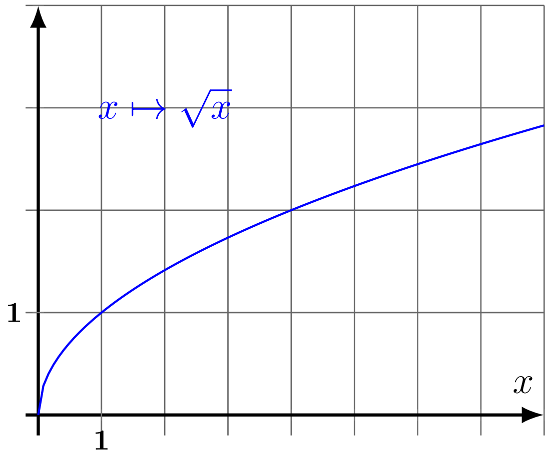
On définit de manière similaire les écritures $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

🔧 Limites de fonctions de référence (admises)









$$\lim_{x \to +\infty} x^2 = +\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} x^3 = +\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} x^2 = +\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$$

Compétences travaillées en exercices

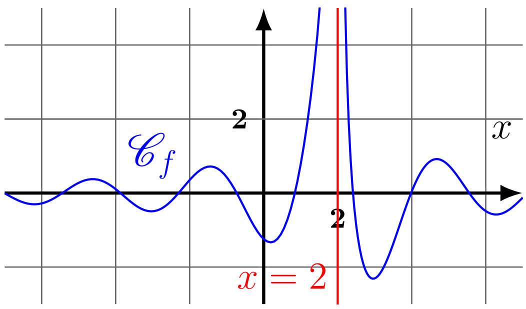
— Conjecturer des limites graphiquement sur schéma (donné ou sur la calculatrice).

— Conjecturer des limites à l'aide d'une expression sur la calculatrice.

Partie 2 : Limites en un réel a

Définition : limite infinie

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Soit a un nombre réel.



On dit que la fonction f admet pour limite $+\infty$ lorsque x tend vers a si $f(x)$ prend des valeurs de plus en plus grandes pour x très proche de a.

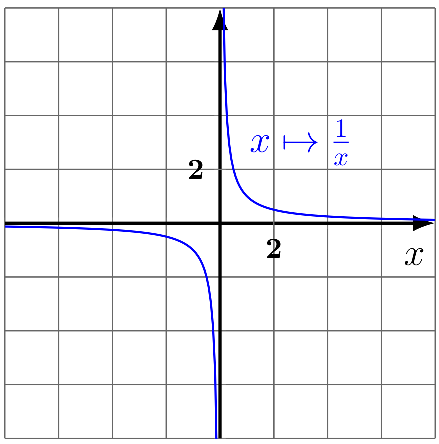
On note $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$.

On définit de la même manière la limite $-\infty$ de f quand x tend vers a.

On note $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$.

Limites à gauche et à droite

Une fonction peut avoir une limite à gauche et une limite à droite qui sont différentes.



Dans l'exemple ci-contre on note :

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \frac{1}{x} = +\infty$$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} = -\infty$$

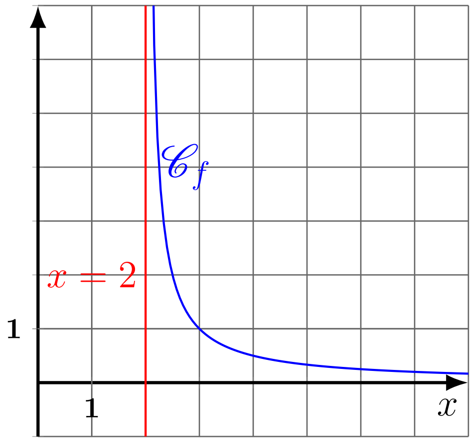
Cela se lit :

— La limite à gauche de f lorsque x tend vers 0 est $-\infty$.

— La limite à droite de f lorsque x tend vers 0 est $+\infty$.

Définition : asymptote verticale

Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$ alors on dit que la courbe représentative de la fonction f admet la droite d'équation $x = a$ comme asymptote verticale.



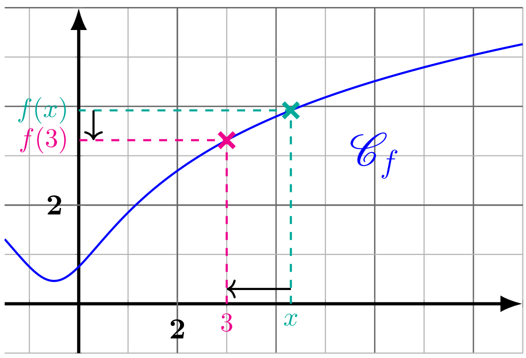
Dans l'exemple ci-contre, $\mathscr{C}_f$ semble admettre la droite d'équation $x = 2$ comme asymptote verticale.

Définition : limite finie

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Soit a un réel.

On dit que f admet pour limite le réel l lorsque x tend vers a si $f(x)$ se rapproche autant que l'on veut de l pour x suffisament proche de a.

Exemples



Ici $f(x)$ semble bien se rapprocher de $f(3)$ quand x tend vers 3. Autrement dit il semblerait que $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = f(3)$.

Là il semblerait que $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 0}} g(x) = 4$.

Compétences travaillées en exercices

— Étudier les asymptotes d'une fonction à l'aide de sa représentation graphique.

— Conjecturer une limite à l'aide de la calculatrice.

— Déterminer une limite finie.

Partie 3 : Opérations sur les limites

Soient f et g deux fonctions à valeurs réelles de même ensemble de définition.

Propriétés : Sommes (admises)

$\lim f(x)$	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim g(x)$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim f(x)+g(x)$	$l+l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	**F.I.**

Forme indéterminée (F.I.) : c'est un cas où le résultat varie, il faut alors lever la forme indéterminée avec des techniques de calcul (voir propriétés sur les produits).

Exemples

Déterminer les limites suivantes :

- $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2+x^3$: $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} = +\infty$, donc par somme de limites $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2+x^3 = +\infty$.
- $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x - 8$: $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} -8 = -8$, donc par somme de limites $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x - 8 = 0-8=-8$.
- $\lim\limits_{x\to-\infty} 1-\frac{1}{x}+e^x$: $\lim\limits_{x\to-\infty} 1 = 1$, $\lim\limits_{x\to-\infty} -\frac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$. Donc par somme de limites, $\lim\limits_{x\to-\infty} 1-\frac{1}{x}+e^x = 1-0+0=0$.

Propriétés : Produits (admises)

$\lim f(x)$	l	$l\neq 0$	∞	0
$\lim g(x)$	l'	∞	∞	∞
$\lim f(x)\times g(x)$	$l\times l'$	∞	∞	**F.I.**

Signe de ∞

Pour déterminer le signe de ∞, on utilise à chaque fois la règle du signe d'un produit.

Par exemple : pour déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-1+\frac{1}{x}\right)\times\sqrt{x}$, comme $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-1+\frac{1}{x}\right) = \boxed{-1}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x} = \boxed{+\infty}$, alors la limite est ∞ du signe de $\boxed{-}\times\boxed{+}$ c'est-à-dire $-\infty$.

Autrement dit $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-1+\frac{1}{x}\right)\times\sqrt{x} = -\infty$.

Exemples et méthode

Exemples :

— $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{5}{x^2}$: $\dfrac{5}{x^2} = 5 \times \dfrac{1}{x^2}$. Or comme $\lim\limits_{x\to+\infty} 5 = 5$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$, on a par produit de limites que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{5}{x^2} = 5 \times 0 = 0$.

— $\lim\limits_{x\to+\infty} (e^x+1)\left(2+\dfrac{3}{x}\right)$: D'une par $\lim\limits_{x\to+\infty} (e^x+1) = +\infty$ (par somme de limites). D'autre part $\lim\limits_{x\to+\infty} 2+\dfrac{3}{x} = 2$ (par somme de limites). Donc par produit de limites $\lim\limits_{x\to+\infty} (e^x+1)\left(2+\dfrac{3}{x}\right) = +\infty$.

Lever de forme indéterminée :

Pour déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x^2-4x+3$, **on factorise par la puissance de x la plus élevée**.

Dans cet exemple : $2x^2-4x+3 = x^2 \times \left(2-\dfrac{4x}{x^2}+\dfrac{3}{x^2}\right) = x^2 \times \left(2-\dfrac{4}{x}+\dfrac{3}{x^2}\right)$.

Or on sait déterminer les limites de chaque fonction sommée entre parenthèses :

$$\lim_{x\to+\infty} 2 = 2 \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{4}{x} = 0 \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{3}{x^2} = 0$$

Donc *par somme de limites* : $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(2-\dfrac{4}{x}+\dfrac{3}{x^2}\right) = 2-0+0 = \boxed{2}$.

Comme de plus $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = \boxed{+\infty}$, on obtient *par produit de limites* :

$$\lim_{x\to+\infty} 2x^2-4x+3 = +\infty$$

Propriétés : Quotients (admises)

$\lim f(x)$	l	l	l	∞	∞	0
$\lim g(x)$	$l' \neq 0$	0 ⚠	∞	l'	∞	0
$\lim \dfrac{f(x)}{g(x)}$	$\dfrac{l}{l'}$	∞	0	∞	**F.I.**	**F.I.**

⚠ : quand g reste de signe constant.

Même méthode pour déterminer le signe de ∞ que dans la propriété sur les produits.

Exemples

Limite de $f : x \mapsto \dfrac{1}{x-2}$ en 2 à gauche et à droite :

— $\lim\limits_{x\to2^+} f(x)$: Quand $x > 2$, $\boxed{x-2>0}$. Donc lorsque x approche 2 par la droite, $x-2$ approche 0 par la droite. Donc par quotient de limites (3ème colonne du tableau) : $\lim\limits_{x\to2^+} f(x) = +\infty$.

— $\lim\limits_{x\to2^-} f(x)$: Quand $x < 2$, $\boxed{x-2<0}$. Donc lorsque x approche 2 par la gauche, $x-2$ approche 0 par la gauche. Donc par quotient de limites : $\lim\limits_{x\to2^+} f(x) = -\infty$.

Compétences travaillées en exercices

— Savoir déterminer des limites de sommes, produits et quotients de fonctions de référence ;

— Lever les formes indéterminées de fonctions de la forme $x \mapsto 4x^3-2x^2+x+8$ et $x \mapsto \frac{2x^2+3x+1}{x^2+4}$;

— Étudier les limites d'une fonction comme $x \mapsto \frac{1}{x-2}$ à gauche et à droite de 2.

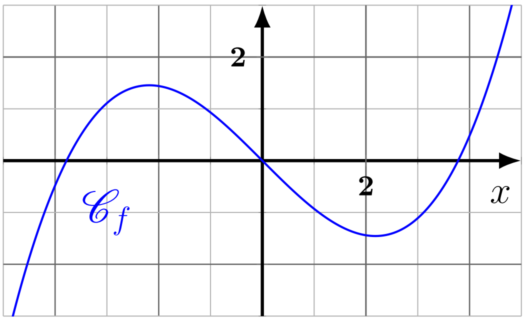
Partie 4 : Continuité

Définition : continuité sur un intervalle

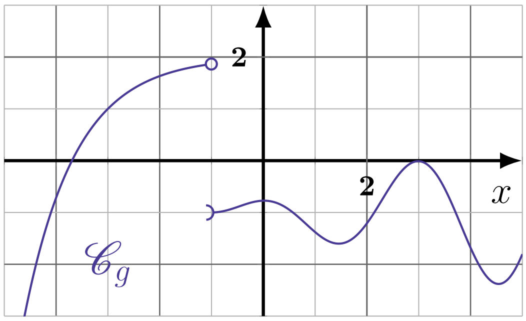
Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

On dit que f est continue sur I si on peut tracer sa courbe représentative sans lever le crayon.

Exemples



La fonction f représentée ci-dessus est contiune sur $[-5;5]$.



La fonction g représentée ci-dessus n'est pas contiune sur $[-5;5]$.

Définition : continuité sur un intervalle

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Soit $a \in I$.

On dit que f est continue en a si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Exemple

La fonction g de l'exemple précédent n'est pas continue en -1, mais elle l'est partout ailleurs sur $[-5;5]$.

Propriété : Continuité des fonctions usuelles

Les fonctions suivantes sont continues :

$x \mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}$	$x \mapsto x^3$ sur $\mathbb{R}$	Fonctions affines et polynômes sur $\mathbb{R}$
$x \mapsto \sqrt{x}$ sur $\mathbb{R}$	$x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}^*$	$x \mapsto e^x$ sur $\mathbb{R}$

Partie 5 : Théorème des valeurs intermédiaires

Le théorème des valeurs intermédiaires (admis)

On considère une fonction f définie sur $[a;b]$ et un réel k. Si :
- f est continue sur $[a;b]$,
- k est compris entre $f(a)$ et $f(b)$,

alors il existe $c \in [a;b]$ tel que $f(c) = k$. Autrement dit l'équation $f(x) = k$ admet au moins une solution.

Exemples

Question : *L'équation $v(t) = 5$ admet-elle une solution sur l'intervalle $[0;2]$?*

Réponse : On sait que :
- v est continue sur l'intervalle $[0;2]$ (à justifier),
- $v(0) = 5$ et $v(2) = 3$ or $v(0) \geq 5 \geq v(2)$.

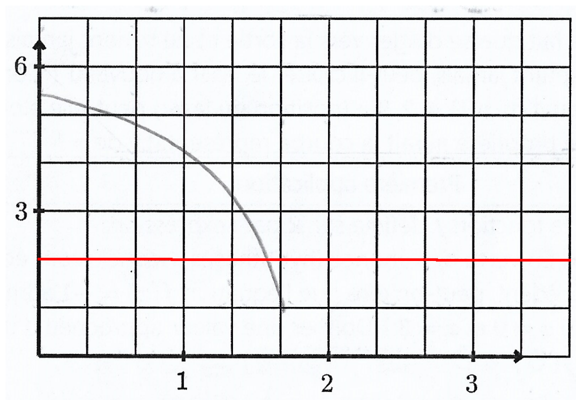
Donc par le théorème des valeurs intermédiaires l'équation $v(t) = 5$ admet au moins une solution sur $[0;2]$.

Théorème des valeurs intermédiaires version monotone (admis)

On considère une fonction f définie sur $[a;b]$ et un réel k. Si :
- f est continue sur $[a;b]$ et strictement croissante ou strictement décroissante,
- k est compris entre $f(a)$ et $f(b)$,

alors il existe un unique $c \in [a;b]$ tel que $f(c) = k$. Autrement dit l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution : $x = c$.

Exemples



Question : *L'équation $v(t) = 2$ admet-elle une solution sur l'intervalle $[0;1,66]$?*

Réponse : On sait que :
- v est continue sur l'intervalle $[0;1,66]$ et strictement décroissante (à justifier),
- $v(0) = 5,5$ et $v(1,66) = 1$ donc $v(0) \geq 2 \geq v(1,66)$.

Donc par le théorème des valeurs intermédiaires (version monotone) l'équation $v(t) = 2$ admet une unique une solution sur $[0;1,66]$.