Correction DS

Limites et continuité de fonctions

Sujet qui commence par $f(x) = \frac{2x+3}{7-x}$

Exercice 1

Soit la fonction f définie par l'expression $f(x) = \frac{2x+3}{7-x}$.

1) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

/ 2 Peut-on en déduire que la courbe représentative de f admet une asymptote ?

Si oui laquelle ?

Correction

On factorise numérateur et dénominateur dans l'expression de f :

$$f(x) = \frac{2x+3}{7-x} = \frac{x \cdot \left(2 + \frac{3}{x}\right)}{x \cdot \left(\frac{7}{x} - 1\right)} = \frac{2 + \frac{3}{x}}{\frac{7}{x} - 1}.$$

Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} 2 + \frac{3}{x} = 2$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{7}{x} - 1 = -1$ alors par quotient de limites $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \frac{2}{-1} = -2$.
On peut en déduire que la courbe représentative de f admet une asymptote horizontale : la droite d'équation $y = -2$.

Remarque(s)

- Attention à bien regarder la limite en $+\infty$, il n'était dans cette question pas le moment de regarder « $x > 7$ donc $0 > 7 - x$ etc ».
- Il s'agissait effectivement d'une forme indéterminée, il fallait donc lever l'indétermination en factorisant. **Remarque** : il est bien de faire remarquer la FI à l'écrit, mais pour ceux qui l'ont noté je pense que vous avez passé un certain temps à l'écrire, temps que vous n'avez pas pu investir dans les autres exercices.
- Attention aussi à ne pas avoir dans la parenthèse du dénominateur $1 - \frac{7}{x}$ au lieu de $\frac{7}{x} - 1$, ni $7 - \frac{1}{x}$ ou $\frac{1}{x} - 7$.
- Ça n'est pas f qui admet une asymptote mais sa courbe représentative (notée $\mathscr{C}_f$ pour ceux qui ont la compréhensible atonie d'écrire toute l'expression).
- L'asymptote n'est pas « en $y = -2$ » ni « en $+\infty$ » (même si c'est l'idée) mais est une droite d'équation $y = -2$.

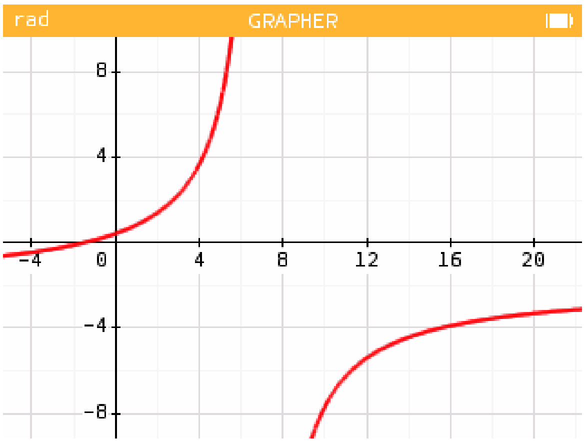
2) Conjecturer si la courbe représentative de f admet une asymptote verticale (s'aider de la calcu-

/ 2 latrice).

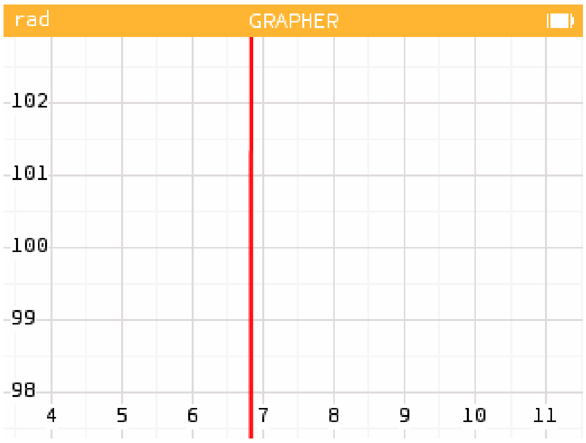
Si oui laquelle ?

Correction

On peut conjecturer à l'aide de la calculatrice que la courbe représentative de f admet la droite d'équation $x = 7$ comme asymptote verticale.



La courbe semble monter autour d'une valeur proche de 8.



Elle monte effectivement et plus précisément proche de 7.

Remarque(s)

— Comme à la question précédente et à chaque fois que l'on parle d'asymptote : n'oublier ni **droite**, ni **verticale** (le cas échéant) ni son **équation**.

— L'expression de f pouvait donner un indice : en regardant le dénominateur, c'est la valeur $x = 7$ qui pose problème ; la fonction n'est pas définie en 7 (elle y explose, c'est ce que l'on montre à la question précédente).

/ 2 **3)** Confirmer la conjecture par un calcul de limite.

Correction

On calcule $\lim\limits_{x \to 7^+} f(x)$.
Lorsque $x > 7$, $0 > 7 - x$. Donc $\lim\limits_{x \to 7^+} -x = 0^-$. De plus $\lim\limits_{x \to 7^+} 2x + 3 = 17$.
Ainsi par quotient de limites on a $\lim\limits_{x \to 7^+} f(x) = -\infty$.
Ceci confirme la conjecture : $\mathscr{C}_f$ admet bien la droite d'équation $x = 7$ comme asymptote verticale.

Remarque(s)

— On aurait pu calculer la limite en 7^-, on aurait trouvé $+\infty$ mais ça n'aurait pas changé le résultat (on pouvait le faire en plus aussi, mais attention à la perte de temps par rapport à la longueur du sujet).

— Ne pas oublier de répondre à la question en concluant par une phrase. Un simple « Cela confirme la conjecture » suffisait.

Exercice 2

Soit la fonction h définie par l'expression $h(x) = e^x + 2x + 1$.

/ 1 **1)** Déterminer la dérivée de h.

Correction

La dérivée de h est la fonction h' définie par l'expression $h'(x) = e^x + 2$.

Remarque(s)

— Attention à ne pas tomber dans le piège de confondre la dérivée de la fonction exponentielle avec celle de la fonction $x \mapsto x^n$. Cette erreur amenait à transformer e^x en xe^{x-1} en dérivant, erreur à ne plus reproduire !

— Autre petite erreur à ne plus commettre : dériver $2x$ en x à la place de 2.

/ 1 **2)** Montrer que h est strictement croissante.

Correction

Comme $e^x > 0$ et $2 > 0$, on a $e^x + 2 > 0$. Autrement dit $h'(x) > 0$, et donc (comme h est continue) alors h est strictement croissante.

Remarque(s)

— La remarque entre parenthèses « comme h est continue » n'était pas nécessaire à citer pour obtenir tous les points. La précision est malgré cela importante car sans elle c'est faux de manière générale.

— La croissance au sens large (non stricte, avec un $\geq$), même si elle est vraie, ne permettait pas de conclure à la question suivante.

— Il est très bien de préciser que les opérations effectuées se déroulent sur $\mathbb{R}$. Il est tolérable de ne pas le préciser ici, c'est sous-entendu.

— Certains d'entres vous ont proposé une réponse argumentée. J'ai accordé une partie des points lorsque l'argumentation montrait un minimum de réflexion (donc à chaque fois il me semble).

— Ni h ni sa dérivée ne sont des fonctions polynômes : ne pas partir dans un calcul de discriminant !

/ 3,5 **3)** On admet que h est continue sur $\mathbb{R}$.
En déduire que l'équation $h(x) = 8$ admet une unique solution sur l'intervalle $[-10; 10]$.

Correction

On sait que :

- h est continue sur $\mathbb{R}$ donc sur $[-10; 10]$ et strictement croissante.
- $h(-10) \approx -19$ et $h(10) \approx 22047$, donc $h(-10) \leq 8 \leq h(10)$.

Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires (TVI) monotone l'équation $h(x) = 8$ admet une unique solution sur $[-10; 10]$.

Remarque(s)

— Ne pas oublier la **stricte** croissance en hypothèse : c'est elle qui garantit l'unicité de la solution.

— Ne pas non plus oublier que c'est du TVI monotone dont il s'agit et non du simple TVI.

— Il faut me montrer que vous avez bien calculé $h(-10)$ et $h(10)$, que vous ne vous contentez pas simplement de l'écrire sans le vérifier.

— Ne pas écrire $h(-10) \leq h(x) = 8 \leq h(10)$ mais plutôt $h(-10) \leq 8 \leq h(10)$. $h(x) = 8$ est une équation, cela n'a pas *officiellement* de sens de la mettre dans une inéquation.

Exercice 3

On considère la fonction g définie par l'expression $g(x) = x^3 - x^2 - x + 1$.

/ 2 **1)** Calculer les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ de g.

Correction

On commence par factoriser l'expression de g :

$$g(x) = x^3 - x^2 - x + 1 = x^3 \cdot \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right).$$

En $+\infty$

D'une part $\lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$.

D'autre part, $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right) = 1$ (par somme de limites).

Donc par produit de limites $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$.

En $-\infty$

D'une part $\lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$.

D'autre part, $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right) = 1$ (par somme de limites).

Donc par produit de limites $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = -\infty$.

Remarque(s)

— Le « par somme de limites » entre parenthèses n'était pas essentiel : c'est le « par produit de limites » que l'on applique en dernier et donc surtout lui que j'attendais (mais mettre la justification pour la somme était très bien).

— Ne pas oublier le signe $-$ qui se balade pour la limite finale en $-\infty$.

/ 3 **2)** Étudier les variations de la fonction g puis dresser son tableau de variations.

Correction

On dérive d'abord g : $g'(x) = 3x^2 - 2x - 1$.

On détermine le signe de g' en déterminant les racines de cette fonction polynôme.

$\Delta = (-2)^2 - 4 \times 3 \times (-1) = 4 + 12 = 16$. La fonction g' possède deux racines :

$\frac{-(-2)-\sqrt{\Delta}}{2\times 3} = \frac{-2}{6} = -\frac{1}{3}$ et $\frac{-(-2)+\sqrt{\Delta}}{2\times 3} = \cdots = 1$.

On en déduit le tableau de signe / variations suivant :

x	$-\infty$		$-1/3$		1		$+\infty$
Signe de g'		$+$		$-$		$+$	
Variations de g	$-\infty$	$\nearrow$	$\approx 1,19$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Remarque(s)

— Ne pas oublier de rajouter les limites en $+\infty$ en $-\infty$ dans le tableau (calculées dans la première question).

— Source d'erreurs : la calcul du discriminant et des racines. Cela demandait certains calculs qui pouvaient amener certaines erreurs.

— Signe du coefficient devant x^2 à l'exterieur des racines : 3 est positif donc $+$ en dehors de $[-1/3; 1]$ et $-$ à l'interieur.

— Il n'était pas nécessaire de calculer $g(-1/3)$ et $g(1)$ à cette question et les mettre dans le tableau mais ces valeurs étaient presque nécessaires pour répondre à la question qui suit.

— Si à la première question vous trouviez par exemple $\lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$ le tableau vous indiquait votre mauvaise réponse : la fonction ne peut pas croître et tendre vers $-\infty$!

— Certains n'ont pas correctement calculé $g(-1/3)$ à la calculatrice : attention aux parenthèses et au signe (surtout pour le $-\left(-\frac{1}{3}\right)^2$.

/ 3,5 **3)** Montrer que l'équation $g(x) = 1$ admet <u>au moins</u> trois solutions sur $\mathbb{R}$.

Correction

On applique le théorème des valeurs intermédiaires sur l'intervalle $[-10; -1/3]$.

On sait que :

- g est continue sur $[-10; -1/3]$ car est une fonction polynôme.
- $g(-10) = -1089$ et $g(-1/3) \approx 1,19$, donc $g(-10) \leq 1 \leq g(-1/3)$.

Donc d'après le TVI, l'équation $g(x) = 1$ admet au moins une solution sur l'intervalle $[-10; -1/3]$.

On applique à nouveau le TVI sur les intervalles $[-1/3; 1]$ et $[1; 10]$ $(1,19 \geq 1 \geq 0$ et $0 \leq 1 \leq g(10)$ où $g(10) = 891)$.

Ainsi l'équation $g(x) = 1$ admet au moins trois solutions sur $\mathbb{R}$.

Remarque(s)

— Si vous aviez le temps c'est bien d'avoir rédigé trois fois en entier l'application du TVI, cependant ce que j'ai écrit en correction suffisait. Montrez une fois que vous savez très bien le rédiger et pas besoin de ré-écrire presque la même chose deux nouvelles fois.

— Les -10 et 10 ont été choisis car ils permettaient d'appliquer le TVI. -100 et 100 fonctionnaient aussi, ou encore -1000 et 1000 etc.

Correction DS

Limites et continuité de fonctions

Sujet qui commence par $f(x) = \frac{3x+2}{4-x}$

Exercice 4

Soit la fonction f définie par l'expression $f(x) = \frac{3x+2}{4-x}$.

1) Calculer $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.

/ 2 Peut-on en déduire que la courbe représentative de f admet une asymptote ?

Si oui laquelle ?

Correction

On factorise numérateur et dénominateur dans l'expression de f :

$$f(x) = \frac{3x+2}{4-x} = \frac{x \cdot \left(3 + \frac{2}{x}\right)}{x \cdot \left(\frac{4}{x} - 1\right)} = \frac{3 + \frac{2}{x}}{\frac{4}{x} - 1}.$$

Comme $\lim_{x \to +\infty} 3 + \frac{2}{x} = 3$ et $\lim_{x \to +\infty} \frac{4}{x} - 1 = -1$ alors par quotient de limites $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \frac{3}{-1} = -3$.
On peut en déduire que la courbe représentative de f admet une asymptote horizontale : la droite d'équation $y = -3$.

Remarque(s)

- Attention à bien regarder la limite en $+\infty$, il n'était dans cette question pas le moment de regarder « $x > 4$ donc $0 > 4 - x$ etc ».
- Il s'agissait effectivement d'une forme indéterminée, il fallait donc lever l'indétermination en factorisant. **Remarque** : il est bien de faire remarquer la FI à l'écrit, mais pour ceux qui l'ont noté je pense que vous avez passé un certain temps à l'écrire, temps que vous n'avez pas pu investir dans les autres exercices.
- Attention aussi à ne pas avoir dans la parenthèse du dénominateur $1 - \frac{4}{x}$ au lieu de $\frac{4}{x} - 1$, ni $4 - \frac{1}{x}$ ou $\frac{1}{x} - 4$.
- Ça n'est pas f qui admet une asymptote mais sa courbe représentative (notée $\mathscr{C}_f$ pour ceux qui ont la compréhensible atonie d'écrire toute l'expression).
- L'asymptote n'est pas « en $y = -3$ » ni « en $+\infty$ » (même si c'est l'idée) mais est une <u>droite</u> d'équation $y = -3$.

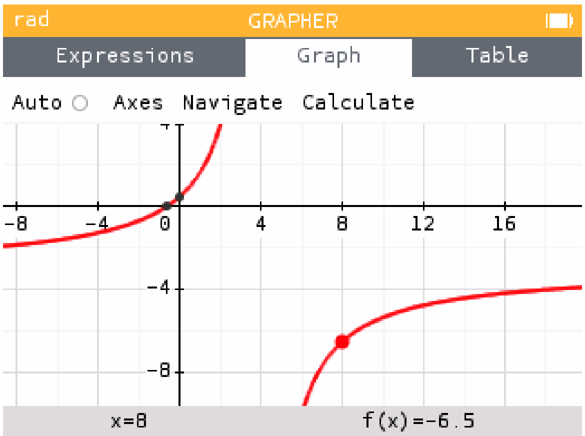
2) Conjecturer si la courbe représentative de f admet une asymptote <u>verticale</u> (s'aider de la calcu-

/ 2 latrice).

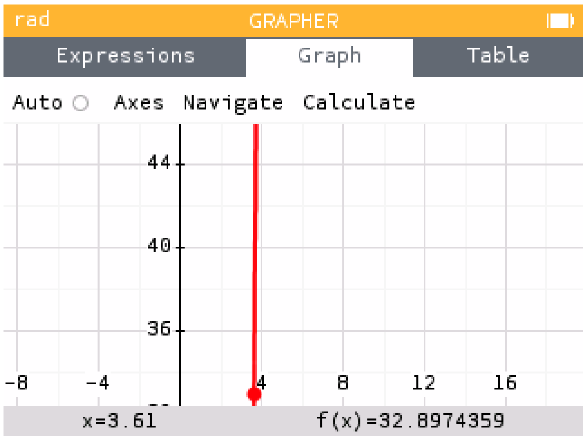
Si oui laquelle ?

Correction

On peut conjecturer à l'aide de la calculatrice que la courbe représentative de f admet la droite d'équation $x = 4$ comme asymptote verticale.



La courbe semble monter autour d'une valeur proche de 4.



Elle monte effectivement et précisément proche de 4.

Remarque(s)

— Comme à la question précédente et à chaque fois que l'on parle d'asymptote : n'oublier ni **droite**, ni **verticale** (le cas échéant) ni son **équation**.

— L'expression de f pouvait donner un indice : en regardant le dénominateur, c'est la valeur $x = 4$ qui pose problème ; la fonction n'est pas définie en 4 (elle y explose, c'est ce que l'on montre à la question précédente).

/ 2 **3)** Confirmer la conjecture par un calcul de limite.

Correction

On calcule $\lim\limits_{x \to 4^+} f(x)$.
Lorsque $x > 4$, $0 > 4 - x$. Donc $\lim\limits_{x \to 4^+} -x = 0^-$. De plus $\lim\limits_{x \to 4^+} 3x + 2 = 14$.
Ainsi par quotient de limites on a $\lim\limits_{x \to 4^+} f(x) = -\infty$.
Ceci confirme la conjecture : $\mathscr{C}_f$ admet bien la droite d'équation $x = 4$ comme asymptote verticale.

Remarque(s)

— On aurait pu calculer la limite en 4^-, on aurait trouvé $+\infty$ mais ça n'aurait pas changé le résultat (on pouvait le faire en plus aussi, mais attention à la perte de temps par rapport à la longueur du sujet).

— Ne pas oublier de répondre à la question en concluant par une phrase. Un simple « Cela confirme la conjecture » suffisait.

Exercice 5

Soit la fonction h définie par l'expression $h(x) = e^x + x + 12$.

/ 1

1) Déterminer la dérivée de h.

Correction

La dérivée de h est la fonction h' définie par l'expression $h'(x) = e^x + 1$.

Remarque(s)

Attention à ne pas tomber dans le piège de confondre la dérivée de la fonction exponentielle avec celle de la fonction $x \mapsto x^n$. Cette erreur amenait à transformer e^x en xe^{x-1} en dérivant, erreur à ne plus reproduire !

/ 1

2) Montrer que h est strictement croissante.

Correction

Comme $e^x > 0$ et $1 > 0$, on a $e^x + 1 > 0$. Autrement dit $h'(x) > 0$, et donc (comme h est continue) alors h est strictement croissante.

Remarque(s)

- La remarque entre parenthèses « comme h est continue » n'était pas nécessaire à citer pour obtenir tous les points. La précision est malgré cela importante car sans elle c'est faux de manière générale.
- La croissance au sens large (non stricte, avec un $\geq$), même si elle est vraie, ne permettait pas de conclure à la question suivante.
- Il est très bien de préciser que les opérations effectuées se déroulent sur $\mathbb{R}$. Il est tolérable de ne pas le préciser ici, c'est sous-entendu.
- Certains d'entres vous ont proposé une réponse argumentée. J'ai accordé une partie des points lorsque l'argumentation montrait un minimum de réflexion (donc à chaque fois il me semble).
- Ni h ni sa dérivée ne sont des fonctions polynômes : ne pas partir dans un calcul de discriminant !

/ 3,5

3) On admet que h est continue sur $\mathbb{R}$.
En déduire que l'équation $h(x) = 20$ admet une <u>unique</u> solution sur l'intervalle $[0; 10]$.

Correction

On sait que :
- h est continue sur $\mathbb{R}$ donc sur $[0; 10]$ et strictement croissante.
- $h(0) = -12$ et $h(10) \approx 22048$, donc $h(0) \leq 20 \leq h(10)$.

Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires (TVI) monotone l'équation $h(x) = 20$ admet une unique solution sur $[0; 10]$.

Remarque(s)

— Ne pas oublier la **stricte** croissance en hypothèse : c'est elle qui garantit l'unicité de la solution.

— Ne pas non plus oublier que c'est du TVI monotone dont il s'agit et non du simple TVI.

— Il faut me montrer que vous avez bien calculé $h(0)$ et $h(10)$, que vous ne vous contentez pas simplement de l'écrire sans le vérifier.

— Ne pas écrire $h(0) \leq h(x) = 20 \leq h(10)$ mais plutôt $h(0) \leq 20 \leq h(10)$. $h(x) = 20$ est une équation, cela n'a pas *officiellement* de sens de la mettre dans une inéquation.

Exercice 6

On considère la fonction g définie par l'expression $g(x) = -x^3 + x^2 + x - 1$.

/ 2 **1)** Calculer les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ de g.

Correction

On commence par factoriser l'expression de g :

$$g(x) = -x^3 + x^2 + x - 1 = x^3 \cdot \left(-1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}\right).$$

En $+\infty$

D'une part $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$.

D'autre part, $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(-1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}\right) = -1$ (par somme de limites).

Donc par produit de limites $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$.

En $-\infty$

D'une part $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$.

D'autre part, $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(-1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}\right) = -$ (par somme de limites).

Donc par produit de limites $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$.

Remarque(s)

- Le « par somme de limites » entre parenthèses n'était pas essentiel : c'est le « par produit de limites » que l'on applique en dernier et donc surtout lui que j'attendais (mais mettre la justification pour la somme était très bien).
- Ne pas oublier le signe $-$ qui se balade pour la limite finale en $-\infty$ ($-$ par $-$ font $+$ pour la règle des signes).

/ 3 **2)** Étudier les variations de la fonction g puis dresser son tableau de variations.

Correction

On dérive d'abord g : $g'(x) = -3x^2 + 2x + 1$.
On détermine le signe de g' en déterminant les racines de cette fonction polynôme.
$\Delta = 2^2 - 4 \times (-3) \times 1 = 4 + 12 = 16$. La fonction g' possède deux racines :
$\frac{-2-\sqrt{\Delta}}{2\times(-3)} = \frac{-6}{-6} = 1$ et $\frac{-2+\sqrt{\Delta}}{2\times(-3)} = \cdots = -\frac{1}{3}$.
On en déduit le tableau de signe / variations suivant :

x	$-\infty$		$-1/3$		1		$+\infty$
Signe de g'		$-$		$+$		$-$	
Variations de g	$+\infty$	$\searrow$	$\approx -1,19$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

Remarque(s)

- Ne pas oublier de rajouter les limites en $+\infty$ en $-\infty$ dans le tableau (calculées dans la première question).
- Source d'erreurs : la calcul du discriminant et des racines. Cela demandait certains calculs qui pouvaient amener certaines erreurs.
- Signe du coefficient devant x^2 à l'exterieur des racines : -3 est positif donc $-$ en dehors de $[-1/3; 1]$ et $+$ à l'interieur.
- Il n'était pas nécessaire de calculer $g(-1/3)$ et $g(1)$ à cette question et les mettre dans le tableau mais ces valeurs étaient presque nécessaires pour répondre à la question qui suit.
- Si à la première question vous trouviez par exemple $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ le tableau vous indiquait votre mauvaise réponse : la fonction ne peut pas décroître et tendre vers $+\infty$!
- Certains n'ont pas correctement calculé $g(-1/3)$ à la calculatrice : attention aux parenthèses et au signe (surtout pour le $+\left(-\frac{1}{3}\right)^2$).

/ 3,5 **3)** Montrer que l'équation $g(x) = -1$ admet au moins trois solutions sur $\mathbb{R}$.

Correction

On applique le théorème des valeurs intermédiaires sur l'intervalle $[-10; -1/3]$.

On sait que :

- g est continue sur $[-10; -1/3]$ car est une fonction polynôme.
- $g(-10) = 1089$ et $g(-1/3) \approx -1,19$, donc $g(-10) \geq -1 \leq g(-1/3)$.

Donc d'après le TVI, l'équation $g(x) = -1$ admet au moins une solution sur l'intervalle $[-10; -1/3]$.

On applique à nouveau le TVI sur les intervalles $[-1/3; 1]$ et $[1; 10]$ ($-1,19 \leq -1 \leq 0$ et $0 \geq -1 \geq g(10)$ où $g(10) = -891$).

Ainsi l'équation $g(x) = -1$ admet au moins trois solutions sur $\mathbb{R}$.

Remarque(s)

— Si vous aviez le temps c'est bien d'avoir rédigé trois fois en entier l'application du TVI, cependant ce que j'ai écrit en correction suffisait. Montrez une fois que vous savez très bien le rédiger et pas besoin de ré-écrire presque la même chose deux nouvelles fois.

— Les -10 et 10 ont été choisis car ils permettaient d'appliquer le TVI. -100 et 100 fonctionnaient aussi, ou encore -1000 et 1000 etc.