Développement : Formule de Héron

Proposition : Soit Δ un triangle de côtés de mesures a, b et c. Alors $\mathscr{A}(\Delta) = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, où $p = \frac{a+b+c}{3}$.

Preuve

<u>Lemme</u> : $\mathscr{A}(\Delta) = \frac{1}{2}bc\sin\alpha$.

Preuve du lemme

$\sin\alpha = \frac{h}{b} \implies h = b\sin\alpha$, on conclut avec $\mathscr{A}(\Delta) = \frac{1}{2}$base $\times$ hauteur. La preuve fonctionne même lorsque le pied de la hauteur associée à γ sort du triangle.

Preuve principale

Le théorème d'Al-Kashi donne $b^2 + c^2 = a^2 - 2bc\cos\alpha$. Donc $\cos\alpha = \frac{a^2-b^2-c^2}{2bc}$. Le lemme donne $\mathscr{A}(\Delta) = \frac{1}{2}bc\sin\alpha = \frac{1}{2}bc\sqrt{(1-\cos\alpha)(1+\cos\alpha)}$. La dernière égalité vient de $\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha}$. Remplacer ensuite $\cos\alpha$ par ce que donne le théorème d'Al-Kashi, ne jamais développer, factoriser avec la troisième identité remarquable et conclure.

Application : à inventer en live.