Développement : majoration des racines d'un polynôme

Ce développement est simple à caler dans une leçon / exercice où l'on parle de racines de polynômes.

Proposition : Soit $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0 \in \mathbb{C}[X]$.

On pose $A = |a_{n-1}| + \cdots + |a_0|$.

Soit z une racine de P.

Alors $z \leq \max\{1, A\}$.

Solution : (on suppose $n \geq 1$, sinon l'énoncé est trivial à analyser)

On a les égalité suivantes :

$$\begin{aligned} 0 &= z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0 \\ z^n &= -a_{n-1}z^{n-1} - \cdots - a_0 \\ |z|^n &\leq |a_{n-1}| \cdot |z|^{n-1} + \cdots + |a_0| \end{aligned}$$

Si $A = |a_{n-1}| + \cdots + |a_0| \leq 1$ alors les $|a_k|$ sont tous ≤ 1 (par l'absurde). Aussi :

$$\begin{aligned} |z|^n &\leq |a_{n-1}| \cdot |z|^{n-1} + |a_0| \\ &\leq |z|^{n-1} + \cdots + 1 \\ &= \frac{1 - |z|^n}{1 - |z|} \end{aligned}$$

Cela revient à dire que

$$0 \leq \frac{1 - |z|^n}{1 - |z|} - |z|^n = \frac{1 - |z|^n - |z|^n + |z|^{n+1}}{1 - |z|} = \frac{1 - 2|z|^n + |z|^{n+1}}{1 - |z|}$$

Alors si $|z| > 1$, $1 - 2|z|^n + |z|^{n+1} > 0$ (factoriser par $|z|^n$ et distinguer les cas $|z| = 1$ et $|z| \geq 2$) et $1 - |z| < 0$, autrement dit la fraction est strictement négative ce qui est absurde car elle majore aussi 0, et donc $|z| < 1$.

Sinon si $1 \leq |a_{n-1}| + \cdots + |a_0| = A$, supposons par l'absurde que $|a_0| + \cdots + |a_{n-1}| < z$ et alors $(\times |z|^{n-1})$

$$|a_0| \cdot |z|^{n-1} + \cdots + |a_{n-1}| \cdot |z|^{n-1} < |z|^n$$

C'est absurde car comme montré précédemment $|z|^n \leq |a_0| + \cdots + |a_{n-1}| \cdot |z|^{n-1}$ or terme par terme on peut montrer que $|a_k| \cdot |z|^k \leq |a_{n-1}| \cdot |z|^{k-1}$ (incohérence avec les bouts des chaînes de minoration / majoration).