UNIVERSIDADE ESTADUAL DO RIO GRANDE DO SUL

PROF. DR. ÉDER JULIO KINAST <eder-kinast@uergs.edu.br>

MÉTODOS NUMÉRICOS – APONTAMENTOS DE AULA

06. Método da Secante

Versão 06 – 28/09/2020

Método da Secante

Algoritmo SECANTE

Programa C-secante

Planilha MetNum06

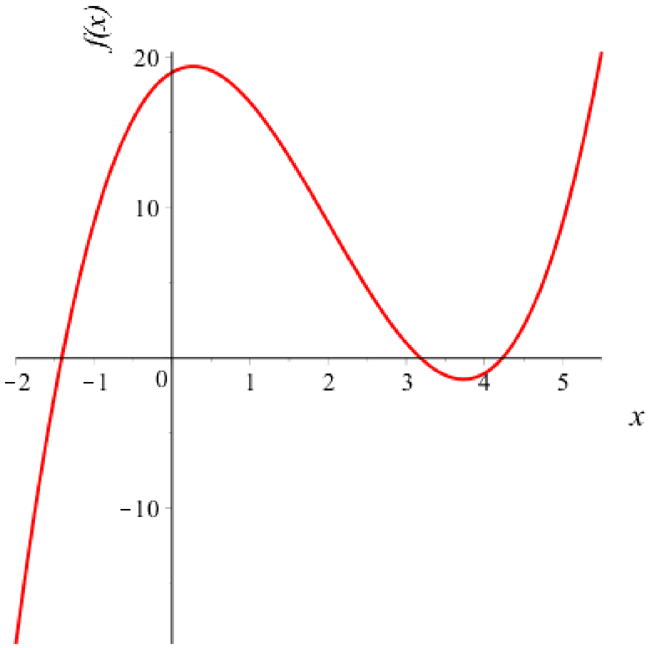
Método da Secante

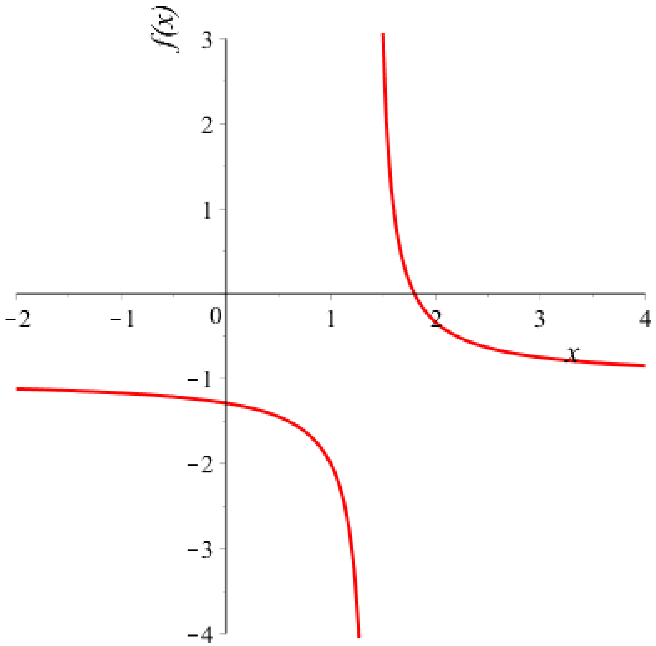
A desvantagem do Método de Newton-Raphson é o cálculo da derivada da função da qual se deseja estimar raízes. No método da Secante não é necessário calcular esta derivada, pois ele utiliza a convergência para a raiz da reta secante em dois pontos *próximos* da raiz.

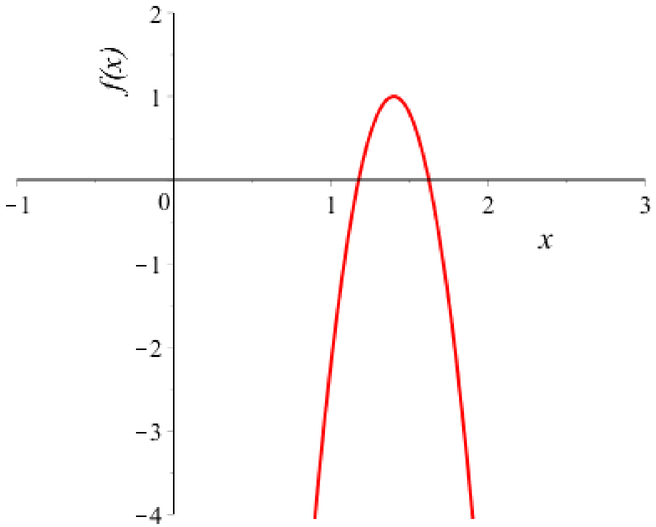
CUIDADO! “Próximo” da raiz quer dizer dois pontos que estejam dentro de um intervalo contínuo da função e da sua derivada, dentro do qual a raiz também esteja contida, e que não apresente pontos de máximo, de mínimo ou de inflexão entre a raiz e os dois pontos escolhidos.

Método da Secante

Exemplos

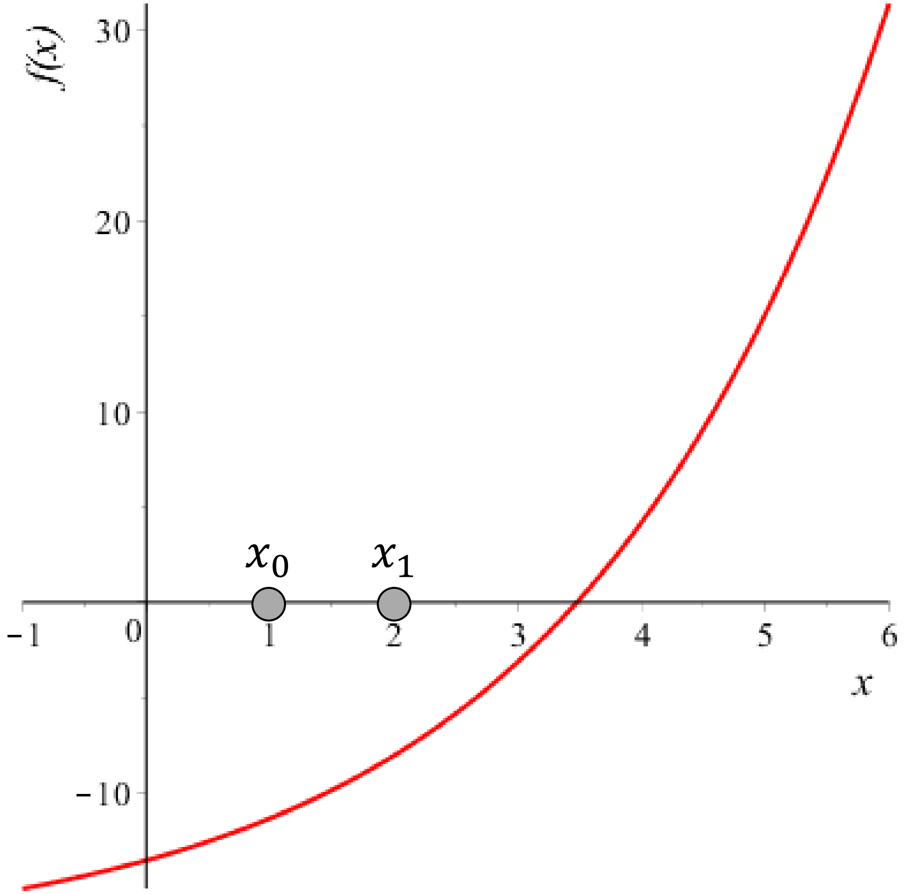






Método da Secante

Exemplo visual: $f_1(x) = e^{\left(\frac{2}{5}x+\frac{3}{2}\right)} - 18$. Considere, $x_0 = 1$ e $x_1 = 2$.

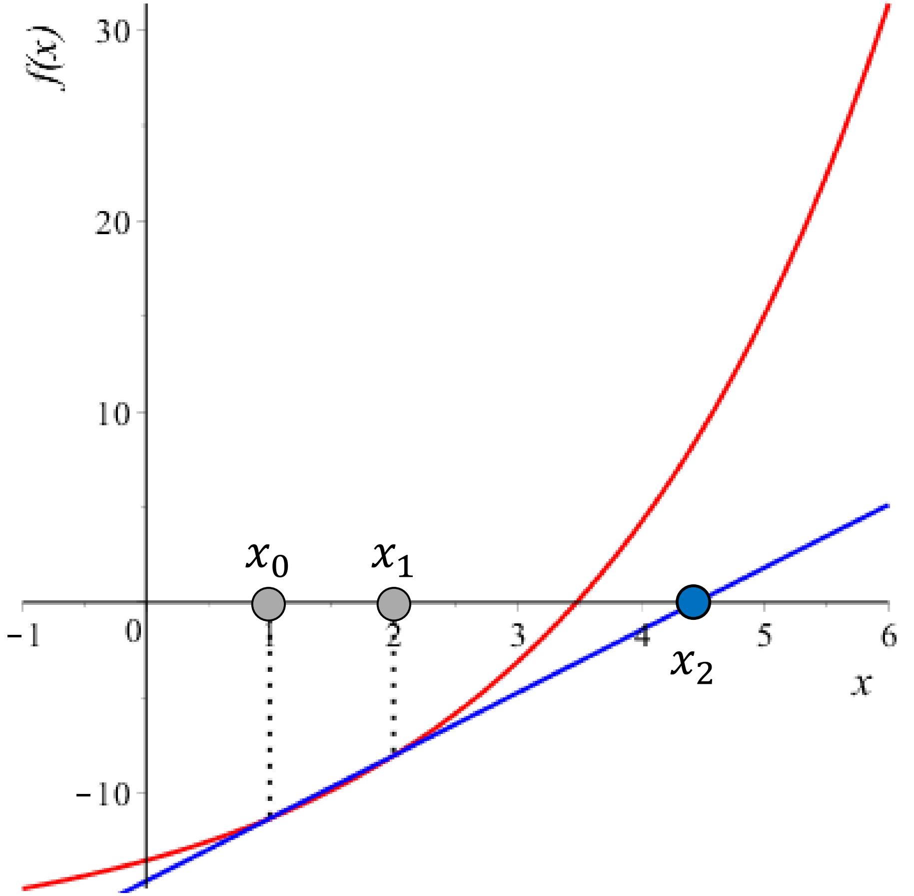


Método da Secante

Exemplo visual: $f_1(x) = e^{\left(\frac{2}{5}x+\frac{3}{2}\right)} - 18$. Considere, $x_0 = 1$ e $x_1 = 2$.

Traçar a reta secante em x_0 e x_1.

O ponto onde a reta corta o eixo x é o valor x_2.

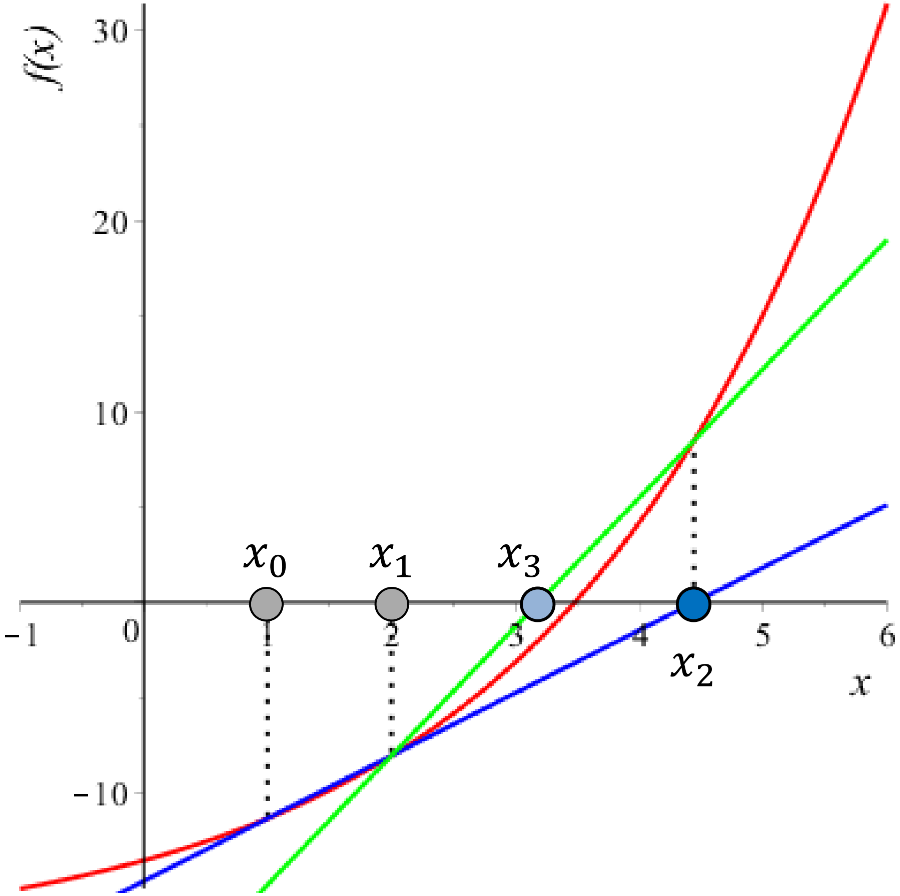


Método da Secante

Exemplo visual: $f_1(x) = e^{\left(\frac{2}{5}x+\frac{3}{2}\right)} - 18$. Considere, $x_0 = 1$ e $x_1 = 2$.

Traçar a reta secante em x_1 e x_2.

O ponto onde a reta corta o eixo x é o valor x_3.



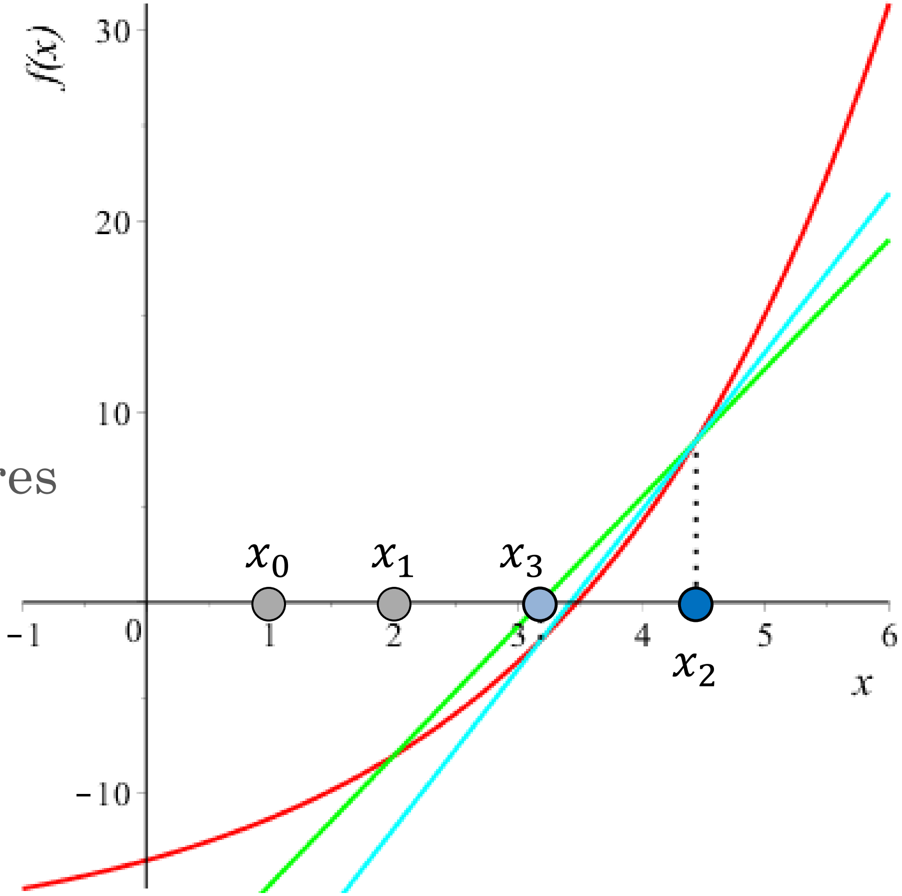
Método da Secante

Exemplo visual: $f_1(x) = e^{\left(\frac{2}{5}x+\frac{3}{2}\right)} - 18$. Considere, $x_0 = 1$ e $x_1 = 2$.

Traçar a reta secante em x_2 e x_3.

O ponto onde a reta corta o eixo x é o valor x_4.

Visualmente, os valores de x_4 e da raiz estão "próximos".



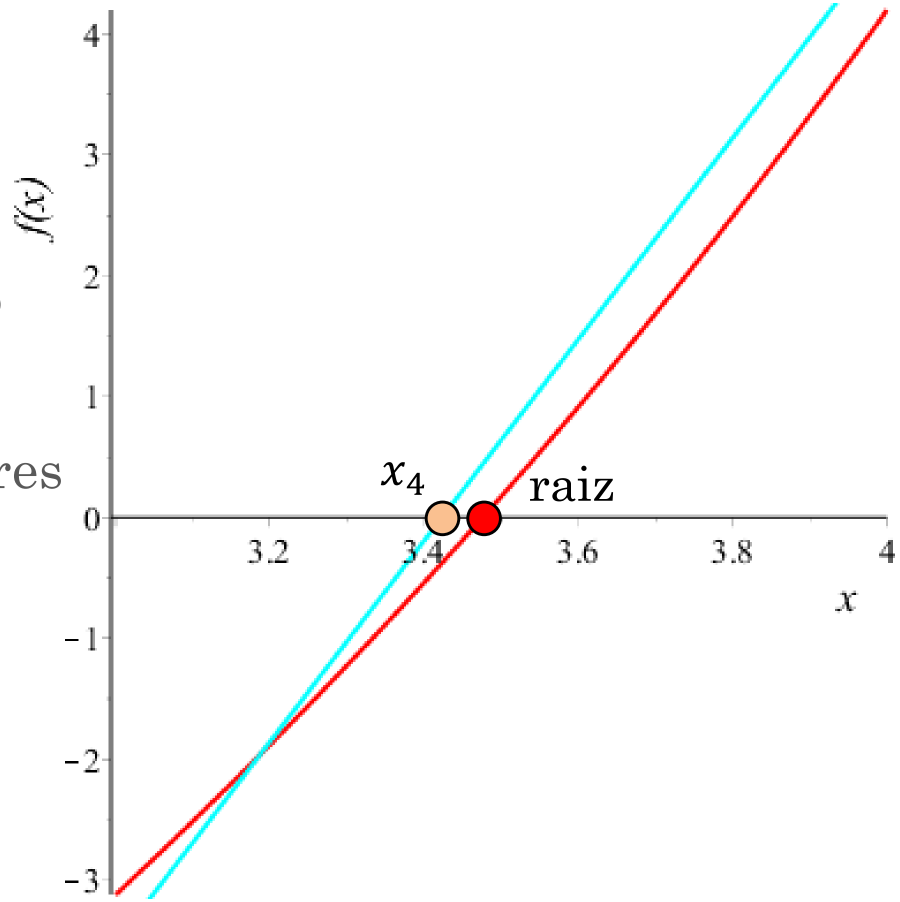
Método da Secante

Exemplo visual: $f_1(x) = e^{\left(\frac{2}{5}x+\frac{3}{2}\right)} - 18$. Considere, $x_0 = 1$ e $x_1 = 2$.

Traçar a reta secante em x_2 e x_3.

O ponto onde a reta corta o eixo x é o valor x_4.

Visualmente, os valores de x_4 e da raiz estão "próximos".



Método da Secante

Equação da reta secante é $y - y_1 = m_{sec} \cdot (x - x_1)$.

Sabendo que $y_0 = f(x_0)$, $y_1 = f(x_1)$ e que $m_{sec} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$, temos

$$y - f(x_1) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \cdot (x - x_1)$$

Porém, o ponto onde a reta cruza o eixo x tem $y = 0$ e $x = x_2$, assim

$$-f(x_1) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \cdot (x_2 - x_1)$$

Isolando x_2 fica

$$x_2 = x_1 - \frac{x_1 - x_0}{f(x_1) - f(x_0)} f(x_1)$$

Método da Secante

Com isto, é NÃO necessário calcular a derivada de $f(x)$ para ser utilizada no método.

Para estimar os pontos x_0 e x_1 próximos da raiz, em geral funciona tomá-lo como os valores extremos de um intervalo $[a; b]$ *pequeno* que contém a raiz, da forma $x_0 = a$ e $x_1 = b$.

Os valores de ε_1 e ε_2 são utilizados como parâmetros de parada das iterações, com as condições são alteradas para

$$|x_2 - x_1| < \varepsilon_1 \quad \text{ou} \quad |f(x_2)| < \varepsilon_2$$

Algoritmo SECANTE

1) Dados $f(x), x_0, x_1, \varepsilon_1, \varepsilon_2$

2) Para k de 1 até 100 com passo 1

$$\begin{cases} x_2 = x_1 - \dfrac{x_1 - x_0}{f(x_1) - f(x_0)} f(x_1) \\ \text{se } |x_2 - x_1| < \varepsilon_1 \ \underline{\text{ou}} \ |f(x_2)| < \varepsilon_2 \text{ então PARAR} \\ x_0 = x_1 \\ x_1 = x_2 \end{cases}$$

3) Raiz $\cong x_2$

Método da Secante

Exemplo 1 – estime a raiz de $f_2(x) = x^3 - 9 \cdot x + 3$ contida no intervalo $[0; 1]$ com $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 10^{-5}$, utilizando o programa Excel com macro para definição da função e linguagem C.

Fazer "a mão" o início deste exemplo, explicitando as colunas

k	x_2	$\|x_2 - x_1\|$	$\|f(x_2)\|$	x_0	x_1	Continuar?

Planilha Excel para o Método da Secante

Planilha **MetNum06.xlsm** (localização e algoritmo):

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	k	x2	|x2-x1|	|f(x2)|	x0	x1	Continuar?	ε_1
2	início				0	1		1,00E-05
3	1	0,375	0,625	0,322266	1	0,375	Continuar	ε_2
4	2	0,331941545	0,043058	0,049101	0,375	0,331942	Continuar	1,00E-05
5	3	0,337634621	0,005693	0,000222	0,331942	0,337635	Continuar	Passos
6	4	0,337608973	2,56E-05	1,46E-07	0,337635	0,337609	Parar	4
7								Raiz
8								0,337608973

Rotina C/C++ para o Método da Secante

```
#include<iostream>
#include<math.h>

double f(double x) { // Esta é a função f
    return(pow(x,3)-9*x+3);}

int main()
{
    double x0=0,x1=1,eps1=1e-5,eps2=1e-5,x2;
    int k;

    for(k=1;k<=100;k++) {
        x2=x1-f(x1)*(x1-x0)/(f(x1)-f(x0));

        if( fabs(x2-x1)<eps1 || fabs(f(x2))<eps2 ) break;

        printf("Passo k = %2d, raiz x = %14.10lf\n",k,x1);

        x0=x1;
        x1=x2;
    }

    printf("A raiz vale %14.10lf com %d passos.\n\n",x2,k);

    system("PAUSE");
    return 0;
}
```

Método da Secante

Exercícios 1, 2 e 3 – Estime as três raízes reais de $f_{13}(x) = 3{,}453x^7 - 2{,}0975x^6 - 120{,}5323x^5 - 1989{,}34x^3 + 12003$ com $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 10^{-6}$, utilizando o programa Excel com macro para definição da função e linguagem C (**MetNum06b**, **MetNum06c** e **MetNum06d**).

-6,646648464

1,727314316

7,102722017

Pontos de Máximo, Mínimo e de Inflexão com Fórmulas de Derivadas geradas por Diferenças Centrais

Para determinação dos pontos de **máximos e mínimos locais** de uma função real $f(x)$ é necessário resolver os pontos em que $f'(x) = 0$. Isto será feito numericamente aproximando as derivadas por interpolações polinomiais em torno de x, chamadas de Diferenças Centrais. Assim, para um valor *pequeno* de h:

$$f'(x) \cong \frac{f(x-2h) - 8f(x-h) + 8f(x+h) - f(x+2h)}{12h}$$

Para determinação dos pontos de **inflexão** de uma função real $f(x)$ é necessário resolver os pontos em que $f''(x) = 0$. Com a expansão da segunda derivada é possível fazer isto numericamente.

$$f''(x) \cong \frac{-f(x-2h) + 16f(x-h) - 30f(x) + 16f(x+h) - f(x+2h)}{12h^2}$$

Pontos de Máximo, Mínimo e de Inflexão com Expansões da Derivada

Exemplo 2 – (**MetNum06e-maxmininflex**) estime as três raízes reais, os pontos de máximo e mínimo locais e o ponto de inflexão da função $f_{14}(x) = x^3 - 8x^2 - 54x + 95$ com $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 10^{-6}$, utilizando o programa Excel com macro para definição da função e o valor de $h = 10^{-3}$ para as expressões das derivadas. Para as todas as determinações de valores, utilizar o Método da Secante.

OBS.: Observar (e alterar se for o caso) o valor de h para a expansão de $f''(x)$.

$r_1 = -5{,}365187808$
$r_2 = 1{,}491224278$
$r_3 = 11{,}87396353$
$x_{max} = -2{,}344432126; f(x_{max}) = 164{,}7425912$
$x_{min} = 7{,}677765459; f(x_{min}) = -338{,}5944431$
$x_{inflex} = 2{,}666666666;\ f(x_{inflex}) = -86{,}92592585$

Rotina C/C++ para o Método da Secante – Pontos de Máximo, Mínimo e Inflexão

```
#include<iostream>
#include<math.h>
double f(double x) { // Esta é a função f
    return(pow(x,3)-8*pow(x,2)-54*x+95);}

double fl(double x) { // Esta é a primeira de derivada de f
    double h=1e-3;
    return((f(x-2*h)-8*f(x-h)+8*f(x+h)-f(x+2*h))/(12*h));}

double fll(double x) { // Esta é a primeira de derivada de f
    double h=1e-3;
    return((-f(x-2*h)+16*f(x-h)-30*f(x)+16*f(x+h)-f(x+2*h))/(12*pow(h,2)));}

int main()
{
    double x0=-6,x1=-5,eps1=1e-6,eps2=1e-6,x2;
    int k;

    for(k=1;k<=100;k++) {
        x2=x1-f(x1)*(x1-x0)/(f(x1)-f(x0)); // Para estimar raízes
//      x2=x1-fl(x1)*(x1-x0)/(fl(x1)-fl(x0)); // Para estimar pontos de máximo e mínimos locais
//      x2=x1-fll(x1)*(x1-x0)/(fll(x1)-fll(x0)); // Para estimar pontos de inflexão

        if( fabs(x2-x1)<eps1 || fabs(f(x2))<eps2 ) break; // Para estimar raízes
//      if( fabs(x2-x1)<eps1 || fabs(fl(x2))<eps2 ) break; // Para estimar pontos de máximo e mínimos locais
//      if( fabs(x2-x1)<eps1 || fabs(fll(x2))<eps2 ) break; // Para estimar pontos inflexão

        printf("Passo k = %2d, raiz x = %14.10lf\n",k,x1);

        x0=x1;
        x1=x2;
    }

    printf("A raiz vale %14.10lf com %d passos.\n\n",x2,k); // Para estimar raízes
//  printf("O ponto de %s local vale x = %14.10lf e f(x) = %14.10lf com %d passos.\n\n",fll(x2)<0?"MAX":"MIN",x2,f(x2),k); // Para estimar pontos de máximo e mínimos locais
//  printf("O ponto de INFLEX vale x = %14.10lf e f(x) = %14.10lf com %d passos.\n\n",x2,f(x2),k); // Para estimar pontos de inflexão

    system("PAUSE");
    return 0;
}
```