MPiS - Zadanie 1

Michał Łukomski

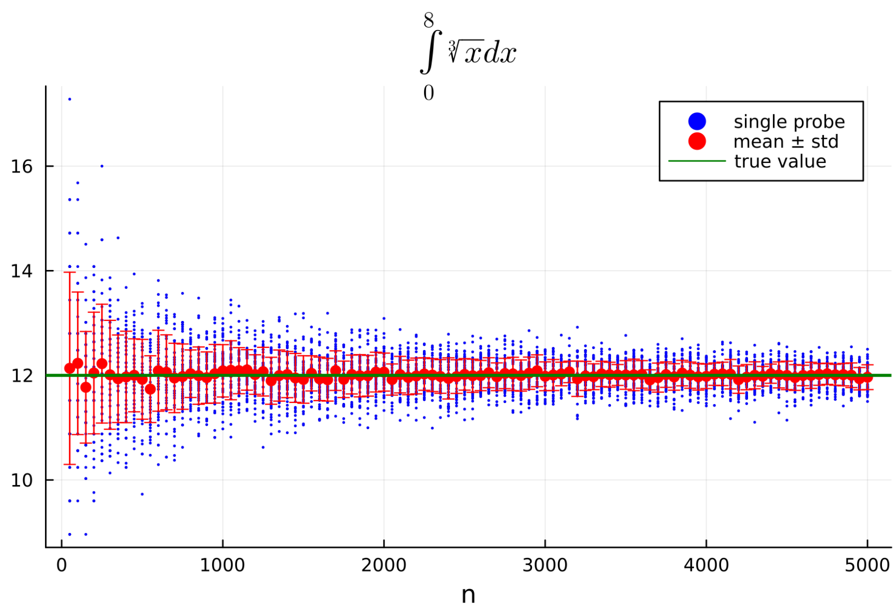
6 listopada 2022

1 Szacowanie wartości całek

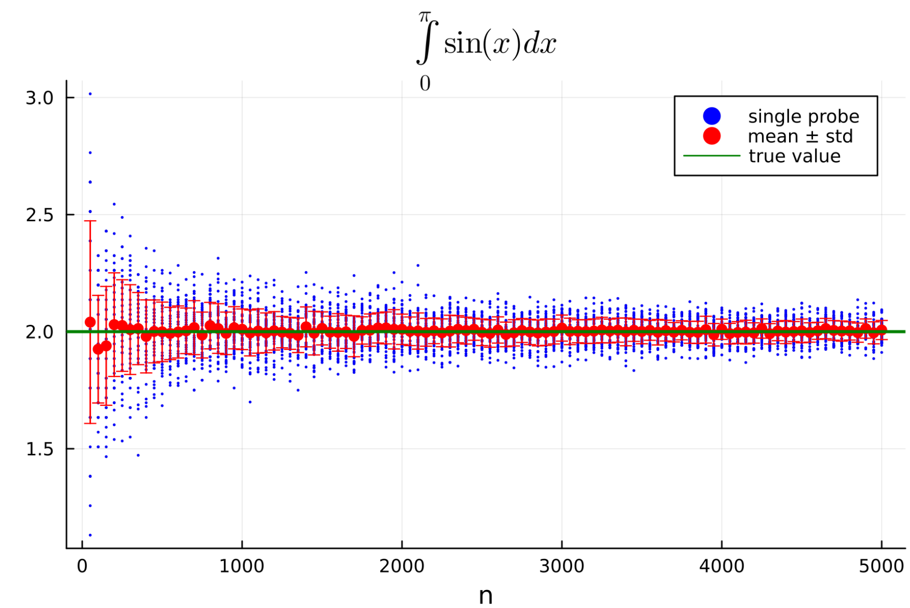
Całki szacowano za pomocą metody Monte Carlo za pomocą wzoru:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{C}{n}(b-a)M \tag{1}$$

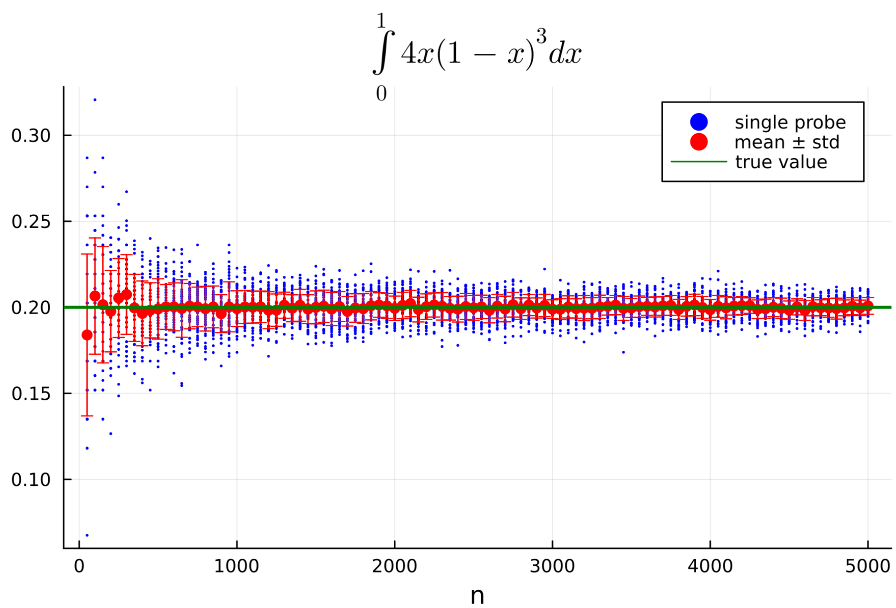
gdzie C to liczba punktów, które zalazły się w obszarze pod krzywą, n to liczba losowanych punktów, M to wartośc większa niż maksimum funkcji $f(x)$ w przedziale $[a, b]$.



Rysunek 1: Wyniki eksperymentów dla całki $\int_0^8 \sqrt[3]{x}dx$. Dla $n \in 50, 100, \ldots, 5000$, dla każdego n wykonano $k = 50$ niezależnych powtórzeń algorytmu. Niebieski - wynik pojedynczej aproksymacji, czerwony - średnia z k powtórzeń wraz z odchyleniem standardowym jako słupkiem błędu, zielony - wartość dokładna całki.

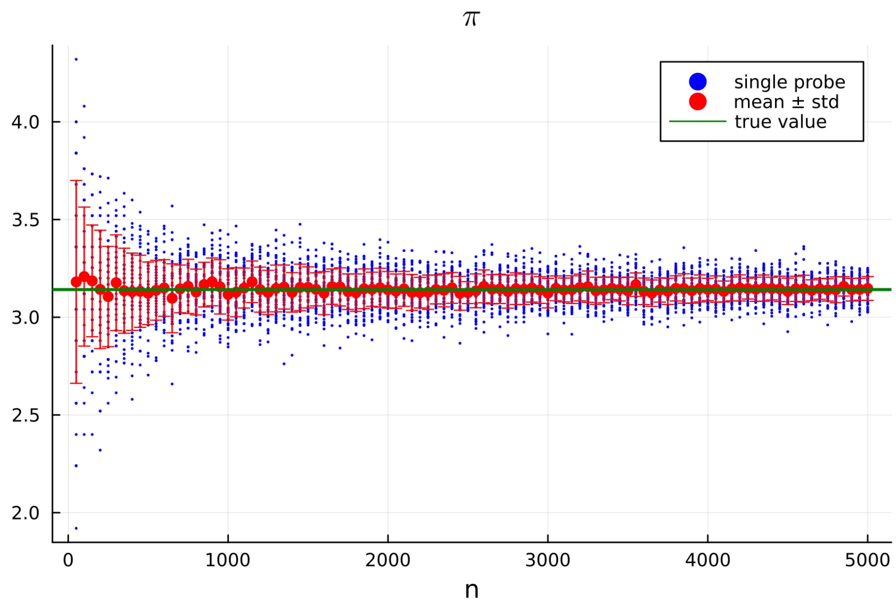


Rysunek 2: Wyniki eksperymentów dla całki $\int_0^\pi \sin(x)dx$. Dla $n \in 50, 100, \dots, 5000$, dla każdego n wykonano $k = 50$ niezależnych powtórzeń algorytmu.



Rysunek 3: Wyniki eksperymentów dla całki $\int_0^1 4x(1-x)^3 dx$. Dla $n \in 50, 100, \ldots, 5000$, dla każdego n wykonano $k = 50$ niezależnych powtórzeń algorytmu.

2 Aproksymacja liczby π



Rysunek 4: Wyniki eksperymentów dla wyznaczania aproksymacji liczby π. Liczono w tym celu całkę $\int_{-1}^{1} 2\sqrt{1-x^2}dx$, której wartość dokładna wynosi π. Dla $n \in 50, 100, \ldots, 5000$, dla każdego n wykonano $k = 50$ niezależnych powtórzeń algorytmu.

3 Wnioski

Jak widać na powyższych wykresach im więcej n punktów wylosowano, tym dokładniejsze wyniki uzyskano. Czyli gdy $n \to \infty$, to wartość całki aproksymowanej dąży do wartości dokładnej, a odchylenie standardowe niezależnych powtórzeń algorytmu dąży do 0.

Warto też zwrócić uwagę, że średnie po niezależnych powtórzeniach algorytmu są generalnie bardziej zbliżone do wartości dokładnej całki, niż pojedyncze wyniki, a wynika to z tego, że w przypadku pojedynczego wyniku losowanych jest tylko n punktów, a średnia z k powtórzeń algorytmu to wynik z kn (czyli

$50n$ punktów w tym przypadku). Wynika to bezpośrednio ze wzoru:

$$\begin{aligned} I_{mean} &= \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} I_i \\ &= \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} \frac{C_i}{n}(b-a)M \\ &= \frac{1}{kn}(b-a)M\sum_{i=1}^{k} C_i \\ &= \frac{C_{mean}}{kn}(b-a)M \end{aligned} \tag{2}$$

Jeśli chodzi więc o wynik końcowy to nie ma znaczenia czy wykonamy średnią z k powtórzeń po n punktów, czy po prostu wylosujemy kn punktów i policzymy wartość całki, to dostaniemy wynik z taką samą dokładnością. Jednak w pierwszym przypadku możemy dostać informację o rozrzucie wyników, a w drugim nie.

Eksperyment wykonano w języku Julia 1.7.2, jako generator liczb losowych wykorzystano Xoshiro256++ - domyślnego generatora języka Julia. Wartości dokładne całek zostały obliczone za pomocą programu WolframAlpha.