

Esercizio 1: Proietto

Un sistema antimissile è stato progettato in modo da osservare la traiettoria di proietti d'artiglieria e calcolare in tempo reale il punto di provenienza. Per semplicità il problema viene qui formulato in una sola dimensione anziché nel piano. Si suppone che la regione interessata sia pianeggiante e che la traiettoria del proietto sia una parabola. Il sistema rileva la posizione del proietto ad intervalli regolari, con una certa approssimazione dovuta a possibili errori di misura e calcola di conseguenza l'equazione della parabola che minimizza l'errore quadratico medio delle osservazioni, ricavando poi di conseguenza il punto di origine del proietto.

Formulare il problema, classificarlo e risolverlo con i dati del file PROIETT.TXT.

Discutere ottimalità e unicità della soluzione.

La traiettoria viene osservata 4 volte ad intervalli regolari e le coordinate Cartesiane rilevate sono le seguenti.

	1	2	3	4
x	10	20	30	40
y	18	26	31	29

Il problema richiede di minimizzare una funzione degli errori di osservazione, che a loro volta sono dati dalla differenza tra i valori calcolati secondo l'equazione della parabola (incognita) e i valori effettivamente osservati (dati). Gli errori sono definiti come differenze tra le ordinate calcolate e osservate, poiché le ascisse sono invece note con precisione, essendo direttamente proporzionali agli istanti di osservazione, che sono noti con certezza. Le variabili del problema sono quindi i parametri della parabola, ossia i coefficienti a , b e c dell'equazione di una generica parabola con asse verticale

$$y = ax^2 + bx + c.$$

Per ogni punto di ascissa $x(i)$ si ha quindi un errore pari a $e(i) = y(i) - [ax(i)^2 + bx(i) + c]$. Le variabili $e(i)$ sono libere, poiché l'errore può essere sia in eccesso che in difetto. Anche i tre parametri della parabola corrispondono a tre variabili libere (in particolare la prima è sicuramente negativa, poiché la parabola è sicuramente concava verso il basso).

La funzione obiettivo da minimizzare è lo scarto quadratico medio, ossia la somma degli errori quadratici $e(i)^2$.

Il problema dà luogo quindi ad un modello di programmazione non-lineare.

La soluzione trovata è ottima anche in senso globale perché il problema è convesso.

Dall'equazione della parabola si ricavano poi anche il punto di partenza e di arrivo del proietto (cioè i punti di intersezione della parabola con l'asse delle ascisse) con la nota formula risolutiva delle equazioni di secondo grado.