Telecamera

In un museo si vuole installare un sistema di sorveglianza a raggi infrarossi. Sul soffitto di ogni sala deve essere appeso un particolare sensore. Dalla sua posizione il sensore “vede” ciascuno dei quadri appesi ai muri della sala sotto un diverso angolo. Secondo un progettista Tizio è opportuno massimizzare la somma complessiva delle ampiezze di tali angoli; secondo un progettista Caio, invece è opportuno massimizzare il minimo di tali angoli.

Formulare il problema in entrambi i casi, classificarlo e risolverlo con i dati del file TELECAM.TXT.

Discutere unicità e ottimalità delle soluzioni ottenute.

[Suggerimento: dato un triangolo di lati a, b e c dove α è il coseno dell'angolo opposto al lato c, vale la formula c^2 = a^2 + b^2 – 2 a b cos α]

```
Il soffitto della stanza è quadrato, di lato 16.
Ogni quadro, visto in pianta, corrisponde ad un segmento i cui estremi
hanno le seguenti coordinate:

Quadro 1   (0,0)  (0,4)
Quadro 2   (0,10) (6,16)
Quadro 3   (10,0) (15,0)

Il sensore può essere posto a distanza non inferiore a 1 rispetto alle
pareti.
```

Soluzione

Il problema è non-lineare con variabili continue, x e y, che rappresentano la posizione in cui collocare il sensore. Per ogni quadro, rappresentato da un segmento, l'angolo sotto il quale il quadro è visto dal sensore è dato dalla formula suggerita nel testo:

$$\alpha = \arccos\left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}\right)$$

dove a, b e c si calcolano con la solita formula della distanza tra due punti in uno spazio Euclideo in due dimensioni. Bisogna imporre che il valore dell'angolo sia compreso tra 0 e π.

Con la funzione obiettivo di Tizio si hanno massimi locali: infatti, collocando la telecamera sulla verticale di un quadro, cioè collocando il punto *(x,y)* proprio su uno dei segmenti, uno degli angoli risulta pari a 180 gradi, mentre vicino al centro della stanza la somma dei tre angoli non arriva a tale valore, dato che nessuno dei tre angoli arriva a 60 gradi.

Con la funzione obiettivo di Caio, invece, non si hanno massimi locali, poiché la funzione obiettivo "maxmin" è massimizzata dove due angoli risultano uguali ed il terzo (o tutti gli altri, in generale) sono più grandi. Esiste un solo punto che soddisfa tale condizione: è il punto in cui sono tangenti due circonferenze che hanno due segmenti come corde e hanno raggi proporzionali tra loro quanto il rapporto tra le lunghezze dei due segmenti.

In particolare, la soluzione ottima si ha in (7.55092, 3.10648) con angoli (espressi in radianti) pari a 0.508083, 0.711167 e 0.508083.