1 Birra

Un'azienda produttrice di birra ha un dato insieme di siti produttivi, ognuno caratterizzato da una massima capacità produttiva e da un costo unitario di produzione, ed un insieme di punti-vendita, caratterizzati da una data domanda da soddisfare. Sono note le distanze tra i siti produttivi e i punti-vendita (in alcuni casi essi coincidono) e si sa che i costi di trasporto sono proporzionali alle quantità trasportate e alle distanze, secondo un coefficiente dato. Si vuole organizzare la produzione e la distribuzione della birra in modo da minimizzare i costi complessivi di produzione e di trasporto.

Formulare il problema, classificarlo e risolverlo con i dati del file `BIRRA.TXT`. Discutere ottimalità e unicità della soluzione ottenuta.

Potendo investire del capitale nell'ampliamento della capacità dei siti produttivi, su quale dei siti produttivi fareste l'investimento? E quanto investireste su quel sito?

Variante 2. Riformulare il problema nel caso in cui il trasporto possa essere fatto con due tipi di veicoli di capacità e costi diversi, come specificato nel file `BIRRA.TXT`.

Variante 3. Riformulare il problema assumendo come obiettivo prioritario la minimizzazione del numero di siti produttivi utilizzati e come obiettivo secondario la minimizzazione dei costi complessivi, come definita sopra.

Soluzione.

Nella versione iniziale il problema è un tipico problema di trasporto a costo minimo tra un insieme di origini ed un insieme di destinazioni. Il fatto che alcune coincidano non ha alcuna importanza ai fini del modello matematico.

Dati. Sono dati:

- un insieme indicizzato O di origini
- un insieme indicizzato D di destinazioni
- una massima capacità o_i per ogni origine $i \in O$ [unità di merce/giorno]
- una domanda d_j per ogni destinazione $j \in D$ [unità di merce/giorno]
- un costo unitario di produzione p_i per ogni origine $i \in O$ [euro/unità di merce]
- una distanza t_{ij} per ogni coppia $(i, j) \in O \times D$ [km]
- un costo unitario di trasporto c [euro per km e unità di merce].

Variabili. Le variabili x_{ij} continue e non-negative indicano le quantità da trasportare da ogni origine $i \in O$ ad ogni destinazione $j \in D$. Sono misurate in unità di merce al giorno.

Vincoli. Ci sono vincoli sulla massima quantità in uscita da ogni origine e sulla minima quantità in ingresso in ogni destinazione.

$$\sum_{j \in D} x_{ij} \leq o_i \quad \forall i \in O$$

$$\sum_{i \in O} x_{ij} \geq d_j \quad \forall j \in D.$$

Entrambi i vincoli sono misurati in unità di merce al giorno.

Obiettivo. Si vuole minimizzare il costo totale, includendo sia il costo di trasporto che quello di produzione:

$$\text{minimize } z_1 = \sum_{i \in O, j \in D} (c\, t_{ij} + p_i) x_{ij}.$$

La funzione obiettivo è misurata in euro al giorno.

Il problema ha vincoli e obiettivo lineari e variabili continue ed è quindi un modello di Programmazione Lineare. Pertanto la soluzione fornita dal solutore (di costo $z_1^* = 14063$) è garantita essere ottima. Tutte le variabili fuori base all'ottimo hanno costi ridotti strettamente positivi; quindi la soluzione ottima è unica.

Analisi di sensitività.

Nessuna delle capacità produttive degli impianti è sfruttata completamente. Quindi nessun investimento per ampliare le capacità sarebbe conveniente.

Variante 2.

Dati.

Sono dati:

- un insieme indicizzato T di tipi di veicoli;
- una capacità q_k per ogni tipo $k \in T$ [unità di merce]
- un costo di trasporto u_k per ogni tipo $k \in T$ [€/km]

Variabili.

In questa variante è necessario determinare quanti chilometri sono percorsi con ogni tipo di veicolo e quindi quanti viaggi vengono effettuati con ogni tipo di veicolo. I viaggi sono indicati da variabili intere non-negative y_{ijk}, che corrispondono al numero di viaggi di vecioli di tipo $k \in T$ da $i \in O$ a $j \in D$.

Vincoli.

Oltre ai vincoli precedenti, servono ora anche i vincoli di capacità, che mettono in relazione le variabili continue x con le variabili discrete y.

$$x_{ijk} \leq \sum_{kinT} q_k y_{ijk} \quad \forall i, \in O, j \in D.$$

I vincoli sono espressi in unità di merce.

Obiettivo.

In questa variante i costi di trasporto lungo ogni tratta $(i,j) \in \ \times D$ con veicoli di tipo $k \in T$ sono dati da $u_k y_{ijk}$. Pertanto l'obiettivo da minimizzare è

$$\text{minimize } z_2 = \sum_{i \in O, j \in D} p_i x_{ij} + \sum_{i \in O, j \in D, k \in T} u_k y_{ijk}.$$

La funzione obiettivo è ancora misurata in euro al giorno.

In questa variante il modello è ancora lineare ma con variabili intere; perciò è un modello di PLI. La soluzione calcolata dal solutore (di costo $z_2^* = 8428.4$) è garantita essere ottima. Non è garantita l'unicità.

Variante 3.
Variabili.

Per minimizzare il numero di siti utilizzati, si può definire una variabile binaria w_i per ciascuno di essi, che indica se il sito è utilizzato (1) o no (0).

Vincoli.

Si aggiungono quindi i vincoli che mettono in relazione le quantità x con le nuove variabili w.

$$\sum_{j \in D} x_{ij} \leq o_i w_i \quad \forall i \in O.$$

Obiettivo.

L'obiettivo principale diventa

$$\text{minimize } z_3 = \sum_{i \in O} w_i$$

mentre l'obiettivo secondario è ancora z_1 o z_2 (il testo non specifica quale delle due funzioni costo considerare).

Il modello è sempre di PLI, sia usando z_1 che z_2 come obiettivo secondario, poiché comunque sono presenti le variabili binarie w. Quindi la soluzione calcolata dal solutore è garantita essere ottima, senza garanzia di unicità. Per soddisfare la domanda bastano $z_3^* = 3$ siti produttivi, opportunamente scelti. Ottimizzando l'obiettivo secondario (assumiamo chew sia z_2, per esempio) con il vincolo

$$\sum_{i \in O} w_i \leq z_3^*,$$

si ottiene una soluzione ottima dal costo $z_2^* = 8428.4$ usando i siti A, F e M.

Non è detto che questa soluzione ottima sia anche unica. Provando a proibire la terna di siti (A, F, M) si scopre che la soluzione ottima peggiora. Quindi la scelta dei tre siti A, F, M è una soluzione ottima unica. Potrebbero ancora esistere soluzioni ottime equivalenti, che usano gli stessi tre siti ma hanno valori diversi delle variabili x e y.