Colonnine di ricarica.

In una piccola città un assessore comunale che ha studiato ricerca operativa vuole collocare colonnine di ricarica notturna di veicoli elettrici. Ha diviso la città in una griglia di quadrati di 250 metri di lato e ha contato quante auto elettriche vi sono attualmente tra i residenti in ciascuna cella della griglia. Ha valutato che una stazione di ricarica potrebbe servire la domanda della sua cella e delle celle adiacenti ("a mossa di Re"). Le stazioni di ricarica possono essere di tipo diverso. A seconda del tipo hanno un diverso costo di installazione e possono ricaricare simultaneamente un diverso numero di veicoli. L'assessore ha a disposizione un budget limitato ed il suo obiettivo è riuscire a servire la massima domanda.

Formulare il problema e classificarlo. Risolvere l'esempio descritto nel file COLONNINE.TXT.

Un consigliere di opposizione, che ha studiato anche lui ricerca operativa, contesta il fatto che la soluzione proposta è di massima efficacia ma non di massima efficienza: infatti, egli sostiene, il rapporto tra domanda soddisfatta e budget utilizzato non è ottimale. Qual è la soluzione che massimizza l'efficienza anzitutto, e secondariamente l'efficacia?

Dati.

La città è rappresentata da una griglia di 16 righe e 9 colonne. La domanda per ogni zona della città (cella della griglia) è la seguente.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0	0	2	0	0	0	1	0	1
2	1	0	0	0	0	1	0	0	0
3	0	1	0	2	0	0	0	0	0
4	1	0	0	0	0	1	0	0	0
5	0	0	1	0	0	0	0	0	2
6	1	0	0	0	0	1	0	0	0
7	0	0	0	1	0	0	0	0	0
8	0	1	0	0	0	0	0	0	1
9	0	0	0	1	0	2	0	0	0
10	0	0	0	0	0	0	0	0	1
11	1	1	0	0	0	0	0	0	0
12	0	0	0	1	0	2	0	0	1
13	1	0	0	0	0	0	0	0	0
14	0	0	0	1	0	1	0	1	0
15	1	0	0	0	0	0	0	0	1
16	1	0	2	0	0	0	2	0	0

Tabella 1: Domanda per ogni cella della griglia

I tipi di colonnina di ricarica sono 2 con le seguenti capacità e costi.

Tipo	Capacità	Costo
1	1	50
2	3	100

Tabella 2: Capacità (n. di ricariche) e costo di installazione (Keuro) per ogni tipo di colonnina.

Il budget disponibile è pari a 1200 K€.

Soluzione commentata.

Dati. Siano R e C gli insiemi indicizzati delle righe e delle colonne della griglia. Sia d_{rc} la domanda associata ad ogni cella $(r, c) \in R \times C$. Sia T l'insieme indicizzato dei tipi di colonnine. Siano q_t e c_t la capacità ed il costo (in euro) delle colonnine di tipo $t \in T$. Sia b il budget disponibile, espresso in euro. Il dato sulla dimensione di ogni cella è del tutto superfluo.

Variabili. Il problema richiede di decidere dove localizzare le colonnine e di che tipo. Se ogni cella può ricevere una sola colonnina, si tratta di una scelta binaria per ogni cella ed ogni tipo. Essa viene quindi rappresentata da variabili binarie: ogni variabile y_{rct} vale 1 se e solo se viene localizzata nella cella (r, c) una colonnina di ricarica di tipo t. Se invece si facesse l'ipotesi che ogni cella può ricevere un numero illimitato di colonnine di ogni tipo, basterebbe definire y_{rct} come variabile intera anziché binaria. Nel seguito si fa l'ipotesi di avere una sola colonnina per cella.

Data la localizzazione delle colonnine, la soluzione richiede poi di assegnare ad esse la massima parte possibile della domanda. L'assegnamento della domanda alle colonnine si può rappresentare con altre variabili $x_{r'c'r''c''} \geq 0$, che indicano quanta domanda della cella (r', c') è assegnata alla colonnina posta nella cella (r'', c''). Il testo non esprime nessuna restrizione sul fatto che la domanda di una stessa cella possa essere soddisfatta da colonnine localizzate in luoghi diversi.

L'unità di misura delle variabili x è il numero di veicoli; quindi dovrebbero essere variabili intere. Tuttavia, è possibile evitare di imporre su di esse il vincolo di integralità, poiché all'ottimo esse hanno necessariamente valore intero.

Obiettivo. L'obiettivo dell'assessore è massimizzare la domanda coperta.

$$\text{maximize } z = \sum_{r' \in R, c' \in C, r'' \in R, c'' \in C} x_{r'c'r''c''}.$$

Vincoli. La domanda totale assegnata ad una cella non può eccedere la sua capacità:

$$\sum_{r' \in R, c' \in C} x_{r'c'r''c''} \leq \sum_{t \in T} q_t y_{r''c''t} \quad \forall (r'', c'') \in R \times C. \tag{1}$$

La domanda coperta in una cella non può superare la domanda della cella stessa:

$$\sum_{r'' \in R, c'' \in C} x_{r'c'r''c''} \leq d_{r'c'} \quad \forall (r', c') \in R \times C.$$

Solo le celle adiacenti alla colonnina possono essere servite da essa:

$$x_{r'c'r''c''} = 0 \quad \forall (r', c'), (r'', c'') \in R \times C : |r' - r''| > 1 \vee |c' - c''| > 1.$$

Vincolo di budget:

$$\sum_{t \in T} \sum_{r'' \in R, c'' \in C} c_t y_{r''c''t} \leq b.$$

Nel caso si supponga che sia possibile installare solo una colonnina per cella, bisogna inserire anche il corrispondente vincolo:

$$\sum_{t \in T} y_{r''c''t} \leq 1 \quad \forall (r'', c'') \in R \times C.$$

Il modello matematico risultante è un modelli di PLI con variabili binarie.

La soluzione calcolata dai solutori è quindi garantita essere ottima, non necessariamente unica.

Parte 2.

La massima efficienza si ottiene quando vengono usate sempre colonnnine di ricarica che hanno il massimo rapporto tra capacità e costo:

$$\rho = \max_{t \in T} \{q_t / c_t\}.$$

Nell'esempio dato, si tratta delle colonnine di tipo 2 per le quali il rapporto è pari a $\rho = 0.03$ ricariche per Keuro. In effetti nella soluzione ottima vengono ottenute 33 ricariche a fronte di un budget impiegato di 1200 Keuro, con un rapporto di 0.0275 ricariche per Keuro.

Per trovare la soluzione di massima efficienza si può formulare un obiettivo non-lineare (rapporto tra ricariche e spesa, entrambi variabili), ma si può anche procedere diversamente, dato che si conosce già quale sia il rapporto desiderato tra ricariche e budget, cioè ρ. Basta quindi vincolare il solutore ad usare solo colonnine di efficienza ρ (quelle di tipo 2) e ad usare completamente la loro capacità, cioè formulare il vincolo di capacità (1) come vincolo di uguaglianza e trasformare il dato b in una variabile. Poiché questo nuovo problema è più vincolato del precedente, il numero massimo di ricariche non può risultare maggiore e anche il budget impiegato non può essere maggiore.

In questo modo si ottiene una soluzione di massima efficacia tra quelle di massima efficienza, nella quale la domanda soddisfatta è pari a 27 ricariche (anziché 33) ed il budget speso è pari a 900 Keuro (anziché 1200), con un rapporto di $\rho = 0.03$, che è - come osservato - il migliore possibile.