Sigmoide.

Sono stati osservati alcuni valori di una variabile dipendente y che si suppone dipendano da una variabile indipendente x attraverso una funzione sigmoide $\frac{e^x}{1+e^x}$, eventualmente scalata e traslata (in orizzontale o in verticale).

Si vuole trovare la sigmoide che meglio interpola i punti dati, secondo i tre criteri seguenti:

1. minimizzare il massimo errore in valore assoluto;
2. minimizzare la somma degli errori in valore assoluto;
3. minimizzare l'errore quadratico medio.

Per errore si intende differenza tra il valore di y calcolato ed il valore di y osservato, per ogni dato valore di x.

Formulare il problema e classificarlo in ciascuno dei tre casi.

Risolvere l'esempio descritto dai dati riportati nel file SIGMOIDE.TXT. Discutere ottimalità e unicità delle soluzioni ottenute nei tre casi.

Dati.

Punto	x	y
1	2	28
2	1	20
3	8	40
4	5	36
5	-6	16
6	-2	16
7	0	16
8	-3	16
9	7	40
10	6	40
11	-4	16
12	3	32

Tabella 1: Coordinate dei punti osservati.

Soluzione commentata.

Dati. I dati sono l'insieme indicizzato N delle osservazioni e la coppia di valori (x_i, y_i) per ciascuna osservazione $i \in N$.

Variabili. La variabili sono i parametri che descrivono la sigmoide. Poiché essa può essere scalata e traslata in orizzontale ed in verticale, servono quattro parametri per definirla:

$$y = \frac{e^{(x-A)/D}}{1 + e^{(x-A)/D}} B + C$$

sicché A rappresenta la traslazione in orizzontale, B il fattore di scala delle ordinate, C la traslazione in verticale e D il fattore di scala delle ascisse. Tutti e quattro sono liberi in segno.

Utilizziamo per comodità anche le variabili ausiliarie e_i $\forall i \in N$, che rappresentano l'errore corrispondente ad ogni osservazione. Anch'esse sono libere in segno.

Vincoli. L'errore è definito come

$$e_i = \frac{e^{(x_i-A)/D}}{1 + e^{(x_i-A)/D}} B + C - y_i \ \ \forall i \in N.$$

Obiettivo. Il primo obiettivo è min-max e va linearizzato così:

$$\text{minimize } z_1 = \Delta$$

$$\Delta \geq e_i \ \ \forall i \in N$$

$$\Delta \geq -e_i \ \ \forall i \in N$$

Il secondo obiettivo è min-sum ma contiene i valori assoluti e va linearizzato così:

$$\text{minimize } z_2 = \sum_{i \in N} \delta_i$$

$$\delta_i \geq e_i \ \ \forall i \in N$$

$$\delta_i \geq -e_i \ \ \forall i \in N$$

Il terzo obiettivo è quadratico:

$$\text{minimize } z_3 = \sum_{i \in N} e_i^2$$

In tutti i casi il problema è comunque non-lineare a causa della dipendenza dal parametro A.

Le funzioni obiettivo sono funzioni convesse delle variabili e_i, ma le e_i sono funzioni non-convesse di A, mentre sono funzioni convesse di B, C e D.

Se si potessero assumere valori fissi per A e D, il problema diventerebbe un problema di regressione lineare nelle sole variabili B e C. Sarebbe un problema di PL nei primi due casi e un problema quadratico convesso nel terzo caso.

I valori utilizzati per costruire i dati di input sono $A = 2$, $B = 24$, $C = 15$ e $D = 1$. I valori sulla sigmoide sono stati poi arrotondati al più vicino multiplo di 4, per introdurre un'approssimazione. Ottimizzando ciascuno dei tre obiettivi suggeriti, si dovrebbero ritrovare valori dei quattro parametri prossimi a quelli originali.