

SHIFT-SCHEDULING per CLINICHE e CASE DI CURA

Formulazione di vincoli, variabili e funzione obiettivo

Michele Grieco

Indice

1. Inquadramento e impostazione progettuale

- Obiettivo
- Caratteristiche principali
- Scelte di modellazione

2. Definizione dei vincoli

- Vincoli di copertura della domanda
- Vincoli orari
- Vincoli sui turni notturni
- Vincoli sui pattern
- Vincoli di riposo
- Vincolo sul saldo ore progressivo
- Vincolo di stabilità

3. Funzione obiettivo e modellazione matematica

- **Struttura generale**
- **Componenti principali della funzione obiettivo**
 - a. Slack dei vincoli soft
 - b. Saldo ore progressive
 - c. Penalità per turni in un altro reparto
 - d. Fairness su notti, festivi e weekend
 - e. Stabilità del piano
 - f. Funzione obiettivo complessiva

4. Possibili modifiche e integrazioni (TO DO)

1. Inquadramento e impostazione progettuale

Obiettivo. Il programma genera orari di lavoro ottimali per cliniche e case di cura, rispettando vincoli legali, contrattuali e organizzativi, tenendo conto delle esigenze di copertura dei reparti. I vincoli sono classificati in **HARD** (inderogabili: se non esiste una soluzione che li rispetta il problema viene dichiarato non risolubile) e **SOFT** (derogabili con relativa penalità in funzione obiettivo).

Caratteristiche principali:

- Si può definire l'orizzonte temporale dell'orario da elaborare. I diversi vincoli fanno riferimento a finestre temporali diverse (giorni, settimane, mesi).
- Possibilità di **lock pre-assegnazioni**. Si possono definire assegnazioni dipendenti da turno da soddisfare necessariamente oppure da vietare categoricamente.
- Viene garantita la **copertura** richiesta per ogni giorno–reparto–turno.
- Si prevedono **vincoli orari** (massimi mensili/settimanali, numero di giorni consecutivi) e di **riposo** (11h tra turni, riposi settimanali).
- Gestisce i **turni notturni** (idoneità, limiti settimanali/mensili, notti consecutive) e i **pattern post-notte**.
- Considera **assenze individuali** (ferie/malattia/permessi) che vengono conteggiate come ore lavorate per quanto riguarda i vincoli contrattuali.
- Supporta una logica **multi-reparto**: Ogni dipendente è affiliato a un reparto, coperture e orari sono indicati separatamente da ciascun reparto. In caso di necessità e a parità di ruolo, si abilitano assegnazioni in reparti diversi dal proprio, se considerati idonei.
- Bilancia la distribuzione (fairness) di notti, weekend/festivi, **proporzionalmente al FTE** (full-time equivalent) per adeguare proporzionalmente i parametri dei lavoratori part-time.
- Ogni dipendente ha un **saldo ore progressivo** che indica l'accumulo di ore di lavoro in più o in meno rispetto a quelle previste dal contratto. Si cerca, se possibile, di ridurlo.
- **Modalità di pianificazione flessibile**: il modello può essere utilizzato sia per **generare l'intero piano mensile** prima dell'inizio del periodo, sia per **ricalcolare dinamicamente il calendario in corso di mese**, mantenendo il più possibile la stabilità del piano attraverso una penalità che scoraggia modifiche non necessarie rispetto alla versione precedente.

Scelte di modellazione

- **DEFINIZIONE DEI TURNI**: I turni sono considerati **contenitori temporali indivisibili**, ne viene sempre preservata l'integrità.
Ogni dipendente in una giornata può trovarsi nei seguenti stati:
 - **M**: turno del mattino
 - **P**: turno pomeridiano
 - **N**: turno notturno
 - **SN**: smonto notte. Non è un vero e proprio turno, è un indicatore per segnalare che il giorno successivo a un turno notturno non va conteggiato come giornata di riposo. Si attiva solo se il giorno successivo all'inizio del turno notturno non vengono assegnati altri turni. (Quindi se vengono assegnate due notti consecutive la sequenza sarà N-N e non N-SN)
 - **R**: giornata di riposo

- **F:** ferie/malattia/permesso/assenza
- Esistono degli orari globali predefiniti per ciascun turno ma ogni reparto può, secondo le esigenze, modificarli. Possono anche essere creati nuovi turni, che possono essere abilitati in tutti i reparti o solo nei reparti che lo richiedono.
- **compatibilità ruolo↔turno** è definita globalmente per ruolo. Utile per esempio per abilitare o disabilitare un ruolo ai turni notturni.
Anche per singolo reparto si può disabilitare un turno non richiesto.
Si può inoltre definire la possibilità o impossibilità di coprire un turno notturno anche a livello di singolo dipendente.
- **Copertura per reparto:** Si prevede che ogni reparto richieda per ciascun giorno e per ciascun turno una domanda di personale relativamente a ogni ruolo.
- **Overstaffing:** possibilità di impedire categoricamente l'overstaffing o di permetterlo fissando un tetto.
- La maggior parte dei parametri che vengono utilizzati nell'espressione dei vincoli seguono una logica di **ereditarietà**: valore specifico per dipendente → fallback per ruolo/reparto → fallback globale
- **Bordi dell'orizzonte:** quando viene elaborato l'orario si "guarda indietro" alcuni giorni per applicare correttamente i vincoli che hanno bisogno di controlli sul periodo precedente.
- **Tecnologia di soluzione.** Il modello di ottimizzazione adottato è **OR-TOOLS (CP-SAT)**, ideale per la presenza di variabili di assegnazione binarie e vincoli lineari.

2. Definizione dei Vincoli

Possono essere definiti i seguenti gruppi principali di vincoli: vincoli di copertura della domanda, vincoli orari, vincoli sul riposo, vincoli sulle notti, vincoli sui pattern, vincoli sul saldo progressivo.

I parametri che fanno riferimento ai vincoli sono stati definiti discrezionalmente e possono essere modificati dall'utente in base alle necessità.

Vincolo sulla copertura della domanda di personale per giorno/reparto/turno (**vincolo HARD**).

Per ogni giorno dell'orizzonte di pianificazione, ogni reparto indica nel month plan il suo piano di turni e la relativa domanda di personale, che viene sviluppata sia per gruppi di ruoli che per singolo ruolo.

Esempio: si può richiedere che siano presenti almeno 7 dipendenti tra infermieri e oss, di cui almeno 2 infermieri e almeno 3 oss.

La domanda di personale deve essere necessariamente soddisfatta.

Vincoli orari:

- **Ore mensili teoriche secondo contratto - vincolo SOFT**
Esiste un default per ruolo per le ore previste dal contratto nel mese di pianificazione, con possibilità di override per singolo dipendente.
Si prevede la possibilità di derogare alle ore previste da contratto se necessario, penalizzando opportunamente la deroga in funzione obiettivo.
- **Ore mensili massime inderogabili - vincolo HARD**
Pur permettendo di assegnare più ore di quelle previste da contratto si prevede un tetto che non si può superare. Se non indicato esplicitamente dall'utente, si è scelto di impostarlo di default pari al 25% in più delle ore contrattuali mensili previste.
- **Ore settimanali massime - vincolo HARD**
Si prevede un massimo anche alle ore settimanali per non concentrare tutte le eventuali ore extra mensili in una sola settimana. Si è scelto di impostare il massimo di ore settimanali uguale al 40% in più di quelle teoriche. Può essere modificato in base alle esigenze.

Vincoli notti

- **Idoneità notte per ruolo/dipendente (HARD)** → (se non idoneo: nessun turno notte assegnabile).
- **Numero massimo di notti per settimana/mese (HARD):**
Si definisce per ogni ruolo se sono previsti turni notturni e, in caso positivo, il numero massimo di notti settimanali e mensili. Possibilità di override per singolo dipendente.
- **Numero massimo notti consecutive -> vincolo HARD**
- **Penalità per ogni notte consecutiva dopo la prima -> vincolo SOFT**
Vengono permesse notti consecutive (con penalità) ma viene comunque stabilito un massimo che non si può superare.

Vincoli sui pattern:

- Dopo una **sequenza di 2 o più notti** deve esserci una **sequenza SN (smonto notte) – R (Riposo)** nei due giorni successivi (o SN-F) - **vincolo HARD**.
- Dopo una singola notte viene suggerita una **preferenza per la sequenza SN (smonto notte) – R - vincolo SOFT**. (Nel caso in cui il dipendente ha ferie o permessi, non si penalizza nemmeno la sequenza **N-SN-F**)
- Dopo una **sequenza Notte – Pomeriggio** si prevede **Riposo** obbligatorio il giorno successivo - **vincolo HARD**. (Al posto del Riposo è consentita anche un'assenza, se prevista).
- **Incompatibilità Notte→Mattina -> vincolo HARD**

- **Turni notturni incompatibili con assenze** il giorno successivo → **vincolo HARD**
Se un giorno D è prevista un'assenza per Ferie/Malattia/Permesso, si vieta l'assegnazione di un turno Notte che termini in D (niente turno N al giorno D-1).
- **NOTA:** la sequenza N-P è già penalizzata per mancato rispetto del riposo di 11 ore. Se cade l'assunzione per cui il riposo tra i 2 turni è inferiore alle 11 ore (ad esempio perchè un reparto modifica gli orari dei turni di default) ma si vuole comunque penalizzare la sequenza N-P, si prevede una penalità specifica che scatta per la sequenza N-P solo laddove il riposo di 11 ore viene rispettato.

Vincoli riposo:

- **Riposo di 11 ore** tra un turno e l'altro → **VINCOLO SOFT**, valido per tutti i ruoli.
- **Numero massimo di deroghe** alle 11 ore di riposo in un mese → **vincolo HARD**
- Numero massimo di **deroghe consecutive** alle 11 ore di riposo → **vincolo HARD**
Nota: Anche per questi parametri c'è la possibilità di sovrascrivere il parametro globale e impostarlo per singolo dipendente.
- **Riposo un giorno a settimana** → **VINCOLO SOFT** per tutti i ruoli
- **2 giorni di Riposo su 2 settimane** → **VINCOLO HARD**
Si può derogare al giorno di riposo settimanale, ma in quel caso si deve recuperare il mancato riposo la settimana successiva.
Nota: per questi ultimi due vincoli si intende la settimana come finestra mobile. Quindi vengono controllati anche i turni assegnati nei giorni precedenti all'orizzonte di pianificazione per verificare il rispetto dei vincoli.

Vincoli sul saldo ore progressivo da fine a inizio mese:

Il modello controlla il bilancio delle ore dovute ed effettivamente svolte per ciascun dipendente su base mensile e cumulata.

Si prevedono quindi:

- **vincoli soft**, che penalizzano gli scostamenti dal numero di ore teoriche del mese, in modo proporzionale al saldo iniziale di ciascun dipendente (per chi ha un saldo progressivo positivo si penalizzano ulteriori surplus di ore, e viceversa per chi ha un saldo progressivo negativo).
- una **penalità globale** sul saldo finale che riduce la dispersione complessiva tra i dipendenti
- un **vincolo hard** sulla variazione massima mensile, che impedisce correzioni troppo brusche del saldo da un mese all'altro.

Vincoli di Fairness (notti e weekend/festivi): Si penalizza la dispersione nel numero di notti e di turni festivi complessivi tra i dipendenti di ciascun reparto (storico + mese corrente), favorendo una distribuzione equa. **(VINCOLO SOFT)**

Cambi di reparto:

L'assegnazione di un dipendente a un reparto diverso da quello principale è consentita **solo se il dipendente è considerato idoneo** a operare nel reparto di destinazione.

L'idoneità viene determinata secondo le seguenti regole:

- **Parità di ruolo:** un dipendente può essere assegnato a turni di un altro reparto solo se appartiene al ruolo professionale richiesto.
- **Pool di reparti abilitati:** per ciascun ruolo viene definito un insieme (*pool*) di reparti nei quali quel ruolo è abilitato a prestare servizio. Le assegnazioni sono consentite esclusivamente all'interno del pool di appartenenza.

L'architettura scelta presuppone quindi che, per ogni ruolo, la compatibilità tra reparti sia simmetrica e transitiva. Se così non fosse, andrebbe sostituita con una matrice di compatibilità per singole coppie (ordinate) di reparti.

Stabilità del piano:

In caso di ricalcolo in corso di mese, il modello penalizza le modifiche rispetto al piano precedente, favorendo la coerenza delle assegnazioni già comunicate e riducendo l'impatto operativo delle revisioni. **(VINCOLO SOFT)**

3. FUNZIONE OBIETTIVO E MODELLAZIONE MATEMATICA

1. Struttura generale

La funzione obiettivo del modello è una **somma ponderata di penalità** associate a violazioni o comportamenti indesiderati.

L'obiettivo è **minimizzare** tale somma, in modo da trovare una pianificazione che rispetti il più possibile le regole e le preferenze organizzative.

$$\text{Min} Z = \sum_i w_i \cdot s_i$$

dove:

- s_i = numero di occorrenze di mancato soddisfacimento di una clausola o, se usata una scala temporale, minuti / ore in cui non si rispetta un vincolo o preferenza.
- w_i = peso (penalità)

I vincoli hard restano sempre soddisfatti; quelli soft possono essere violati, ma ogni violazione incrementa il valore della funzione obiettivo proporzionalmente al suo peso.

2. Componenti principali della funzione obiettivo

a. Slack dei vincoli soft

Per chiarire il significato delle **variabili di slack** è utile mostrare come esse vengono introdotte per trasformare un vincolo rigido in un vincolo “morbido”.

Nel caso di un vincolo *hard*, l’uguaglianza o la disuguaglianza devono essere sempre rispettate; quando invece il vincolo viene reso *soft*, si introduce una variabile di slack che misura l’entità della violazione consentita. Tale variabile è poi penalizzata in funzione obiettivo, in modo che il solver tenda comunque a ridurla al minimo.

A titolo di esempio, consideriamo il vincolo relativo al **monte ore settimanale per dipendente**. Nel modello *hard*, il totale delle ore assegnate a ciascun dipendente e deve coincidere esattamente con il target settimanale.

$$\sum_{s \in \mathcal{S}_e^{\text{week}}} h_s x_{e,s} = H_e$$

\mathcal{S}_e = insieme di tutti gli slot s in cui il dipendente e può potenzialmente lavorare

h_s = ore di lavoro dello slot s

$x_{e,s}$ = variabile binaria di assegnazione: vale 1 se il dipendente e viene assegnato allo slot s , 0 altrimenti

H_e = ore complessive di lavoro del dipendente e

Nella versione *soft*, invece, vengono introdotte due variabili di slack:

- u_e rappresenta le ore in difetto (sotto-copertura) del dipendente e ,
- o_e rappresenta le ore in eccesso (sovracopertura).

$$\sum_{s \in \mathcal{S}_e^{\text{week}}} h_s x_{e,s} + u_e = H_e + o_e, \quad u_e \geq 0, \quad o_e \geq 0$$

Il vincolo diventa quindi flessibile: può essere violato, ma le violazioni vengono poi **penalizzate nella funzione obiettivo**, ad esempio con un termine di questo tipo:

$$Z_{\text{ore}} = w^- \sum_e u_e + w^+ \sum_e o_e$$

dove w^- rappresenta il peso della penalità attribuita alle ore in difetto e w^+ quello alle ore in eccesso. In questo modo si incoraggia il modello a rispettare il più possibile il monte ore previsto per ogni dipendente. Per ora nel programma è stato scelto di impostare i due pesi uguali.

b. Saldo ore progressive

Per ciascun dipendente il modello gestisce un **saldo progressivo** di ore rispetto al monte ore contrattuale, positivo se ha lavorato più del dovuto, negativo altrimenti. In input viene considerato il saldo progressivo iniziale, accumulato dall'inizio dell'anno fino alla data di inizio dell'orizzonte di pianificazione.

Durante la pianificazione mensile, il solver cerca di minimizzare gli scostamenti e favorire nel tempo il riequilibrio dei saldi individuali, nel rispetto dei vincoli di copertura, riposi e limiti orari.

Penalità mensile con coefficienti adattativi

Per ogni dipendente con le variabili di slack introdotte (vedi paragrafo precedente) è possibile scrivere le seguenti equazioni di bilanciamento ore:

Bilancio mensile

$$Ore_pianificate_e + under_e = Ore_contrattuali_e + over_e$$

Aggiornamento saldo progressivo

$$Saldo_finale_e = Saldo_iniziale_e + over_e - under_e$$

Variazione massima mensile (vincolo HARD)

$$|Saldo_finale_e - Saldo_iniziale_e| \leq \Delta_{\max}$$

Questo vincolo limita i recuperi o peggioramenti eccessivi in un singolo mese, garantendo una variazione graduale.

Zona di tolleranza (deadband)

Per evitare penalità su scostamenti minimi si può introdurre una soglia di tolleranza, in modo che se la differenza tra ore dovute e ore effettivamente svolte risulta essere inferiore a un certo livello non viene penalizzata.

$$over_e^{eff} = \max(0, over_e - d), \quad under_e^{eff} = \max(0, under_e - d)$$

dove d è la soglia di tolleranza espressa in ore.

Coefficienti adattativi e normalizzazione

I pesi delle penalità mensili dipendono dal **saldo iniziale** individuale e sono normalizzati per garantire un comportamento coerente tra i dipendenti.

- **Clamping degli outlier (10°–90° percentile)**

Si calcolano sui saldi iniziali i percentili Q_{10} e Q_{90} e si definiscono i limiti:

$$L = \max(-S_{\max}, Q_{10}), \quad U = \min(S_{\max}, Q_{90})$$

con $S_{\max} = \text{cap massimo (es. 60h)}$.

Per il dipendente e quindi si ha che il suo saldo progressivo iniziale viene mappato in:

$$\tilde{S}_e = \min\{\max(S_e^{(0)}, L), U\}$$

Normalizzazione lineare (mappa affine)

Si ottiene un valore normalizzato $s_e \in [0,1]$:

$$s_e = \begin{cases} \frac{\tilde{S}_e - L}{U - L}, & \text{se } U > L, \\ 0.5, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Si tratta di una **mappa affine**, cioè una retta che riscalda l'intervallo $[L,U]$ in $[0,1]$:

saldi negativi $\rightarrow s_e \approx 0$; saldi positivi $\rightarrow s_e \approx 1$

Coefficiente adattivo

$$c_{\text{over},e} = 1.0 + s_e, \quad c_{\text{under},e} = 2.0 - s_e$$

In questo modo:

- chi ha **saldo positivo** (in surplus) \rightarrow penalità **più alta** sull'OVER e **più bassa** sull'UNDER
- chi ha **saldo negativo** (in deficit) \rightarrow penalità **più bassa** sull'OVER e **più alta** sull'UNDER

Normalizzazione per ruolo (opzionale)

Se i ruoli hanno giornate tipo differenti, i coefficienti possono essere divisi per le ore medie giornaliere del ruolo.

Termine mensile in funzione obiettivo

$$Z_{\text{saldo-prog}} = \sum_e \left(w_{\text{over}} \hat{c}_{\text{over},e} \text{over}_e^{\text{eff}} + w_{\text{under}} \hat{c}_{\text{under},e} \text{under}_e^{\text{eff}} \right)$$

dove $w_{\text{over}}, w_{\text{under}}$ sono i pesi base globali per le ore in eccesso e in difetto.

Questo termine è **locale**: penalizza le deviazioni individuali in funzione del saldo iniziale, ma non impone un riequilibrio collettivo.

2. Penalità globale sul saldo finale (termine L1)

Per incoraggiare un **riequilibrio generale dei saldi progressivi**, anche quando tutti i dipendenti potrebbero lavorare esattamente le ore dovute, si introduce un ulteriore termine di penalità basato sulla **somma dei valori assoluti dei saldi** alla fine dell'orizzonte di pianificazione.

$$Z_{\text{saldo-L1}} = w_{\text{L1}} \sum_e |\text{Saldo_finale}_e|$$

che equivale a minimizzare la **norma L1** del vettore dei saldi finali.

Si sceglie la norma L1 e non la varianza o la norma L2 in quanto così si mantiene la funzione obiettivo **lineare** e facilmente gestibile dal solver CP-SAT.

Significato operativo

- Spinge tutti i saldi verso **zero**, anche in assenza di vincoli che impongano deviazioni.
- A differenza dei coefficienti adattativi (che agiscono solo quando è necessario generare scostamenti dalle ore dovute), il termine L1 aggiunge una **spinta globale** verso l'equilibrio.

Il beneficio dell'equilibrio deve superare il costo delle ore extra create:

$$2 w_{\text{L1}} > w_{\text{over}} c_{\text{over},A} + w_{\text{under}} c_{\text{under},B}$$

affinché uno scambio di ore da B (saldo positivo) ad A (saldo negativo) sia conveniente.

Scelta del peso w_{L1}

- Se w_{L1} è **molto piccolo** (1–3% dei pesi mensili), il termine agisce come *tie-breaker*: riequilibra solo quando è indolore.
- Se w_{L1} è **più alto** (\approx metà del marginale medio per ora), spinge attivamente il sistema a ridurre i saldi anche quando tutti potrebbero lavorare le ore contrattuali.

Funzione obiettivo completa (saldo progressivo)

Quindi i termini relativi al saldo progressivo che compaiono in funzione obiettivo sono:

$$Z_{\text{saldo}} = Z_{\text{saldo-prog}} + Z_{\text{saldo-L1}}$$

Effetto complessivo

- Il termine **mensile adattivo** guida le scelte per singolo dipendente, determinando chi deve fare ore in più o in meno.
- Il termine **L1 globale** introduce una preferenza *di sistema* verso la neutralità complessiva dei saldi.

- La combinazione dei due produce un comportamento equilibrato: il solver assegna le ore coerentemente con i saldi individuali e, nel tempo, tende a far convergere l'intero organico verso saldi prossimi allo zero.

Nota: Il presente termine della funzione obiettivo è espresso in **ore**, mentre la maggior parte degli altri termini è **adimensionale**, in quanto misura semplicemente il **numero di violazioni** o di occorrenze di una certa clausola.

Per rendere omogenei i contributi e garantire confrontabilità, le ore vengono **normalizzate** dividendo per la **durata media di un turno** del ruolo di appartenenza.

In questo modo il termine non rappresenta più “ore in più o in meno”, ma il **numero equivalente di turni medi in più o in meno**, consentendo di valutare in modo coerente l'impatto delle penalità tra ruoli con diversa struttura oraria.

c. Penalità per turni in un altro reparto

Se un dipendente viene assegnato a un reparto diverso da quello di appartenenza (ma eleggibile), si applica una penalità proporzionale al numero di tali assegnazioni:

$$Z_{\text{reparto}} = w_{\text{cross}} \cdot \sum_{e,s} \text{cross}(e, s) \cdot x_{e,s}$$

dove $\text{cross}(e,s) = 1$ se lo slot s appartiene a un reparto diverso da quello principale di e .

d. Fairness su notti, festivi e weekend

Si introducono penalità per **squilibri** tra dipendenti su:

- numero di turni notturni
- numero di weekend e festività lavorate

Per ciascun criterio si calcola una misura di dispersione e la si aggiunge come penalità.

L'obiettivo è distribuire equamente i turni tipicamente meno desiderati.

Il criterio non impone un vincolo rigido, ma introduce un costo proporzionale alla misura della dispersione.

Fairness notti

Per ogni reparto, si considerano i soli dipendenti abilitati a coprire turni notturni.

Per ciascuno, si calcola il numero totale di notti cumulate fino alla fine dell'orizzonte di pianificazione:

$$C_e = H_e + N_e$$

dove:

- H_e è il numero di notti già effettuate prima dell'orizzonte (storico cumulato);

- N_e è il numero di notti pianificate nel mese corrente.

Si determina quindi la **media pesata di reparto**, utilizzando come pesi i coefficienti w_e (uguale al coefficiente FTE, in modo da scalare opportunamente per i lavoratori part-time)

$$\bar{C}_d = \frac{\sum_{e \in \mathcal{E}_d} (w_e \cdot C_e)}{\sum_{e \in \mathcal{E}_d} w_e}$$

La deviazione assoluta di ciascun dipendente rispetto alla media è linearizzata tramite variabili ausiliarie $u_e \geq 0$:

$$u_e \geq C_e - \bar{C}_d, \quad u_e \geq \bar{C}_d - C_e$$

Il termine di penalità per reparto è quindi:

$$Z_d^{\text{night}} = \alpha_{\text{night}} \sum_{e \in \mathcal{E}_d} w_e u_e$$

Dove α_{night} è il peso attribuito alla penalità relativa in funzione obiettivo.

Quindi la penalità complessiva di fairness notti è pari alla somma di quella di ogni reparto:

$$Z^{\text{night}} = \sum_d Z_d^{\text{night}}$$

Tale termine penalizza la **dispersione interna** delle notti totali (storico + pianificate) nel reparto, spingendo i totali individuali a convergere verso la media pesata.

L'effetto è una redistribuzione progressiva dei turni notturni nel tempo, che tiene conto sia della storia pregressa sia del piano in costruzione.

Nota: nel POC è utilizzato un unico coefficiente globale, α_{night} , uguale per tutti i reparti. La formulazione è tuttavia generalizzabile introducendo un coefficiente diverso per singolo reparto, utile in caso di pesi differenziati tra reparti con diverso profilo operativo.

Fairness weekend/festivi

Per la distribuzione di turni su **sabato, domenica e festivi**, si adotta una formulazione analoga a quella descritta per le notti.

In questo caso, per ogni dipendente si considerano i **turni** cumulativi, sommando quelli storici e quelli pianificati.

La penalità misura la dispersione rispetto alla media pesata dei turni totali di reparto,

secondo lo stesso schema di linearizzazione e ponderazione descritto sopra, con coefficiente globale per tutti i reparti.

Formalmente, il termine complessivo di fairness weekend/festivi introdotto in funzione obiettivo è:

$$Z^{we} = \gamma_{we} \sum_d \sum_{e \in \mathcal{E}_d} w_e u_e^{we}$$

dove le variabili u_e^{we} rappresentano le deviazioni assolute dei turni cumulativi rispetto alla media pesata del reparto.

Effetto complessivo

I termini Z^{nights} e Z^{we} vengono sommati alla funzione obiettivo complessiva:

$$Z_{\text{fairness}} = Z^{nights} + Z^{we}$$

ottenendo una penalità che promuove l'equità nella distribuzione dei turni gravosi (notte e weekend/festivi) all'interno dei singoli reparti.

Il modello rimane interamente lineare e parametrizzabile tramite i coefficienti α_{nights} e γ_{we} , che consentono di regolare il peso relativo del criterio di fairness rispetto agli altri obiettivi.

e. Stabilità del piano

Il modello supporta due modalità di utilizzo distinte:

1. **Pianificazione preventiva**, per la generazione completa del calendario di tutto il mese prima dell'inizio del periodo operativo.
2. **Ricalcolo adattivo**, per aggiornare il piano durante il mese a fronte di variazioni operative (assenze, richieste, disponibilità), mantenendo il più possibile la coerenza con la pianificazione originale.

In quest'ultima modalità, il modello introduce una **penalità di stabilità**, che scoraggia modifiche inutili o eccessive rispetto al piano precedente, privilegiando soluzioni che rispettano il più possibile le assegnazioni già comunicate.

Funzione di penalità

Sia $x_{e,s}$ la variabile binaria che indica se il dipendente e è assegnato al turno s nel nuovo piano, e $x_{e,s}^{\text{old}}$ la corrispondente assegnazione nel piano originale.

Per ogni coppia, si calcola la differenza assoluta tra i due valori:

$$u_{e,s} = |x_{e,s} - x_{e,s}^{\text{old}}|$$

Questa variabile vale:

- 0 se il turno rimane invariato;
- 1 se il turno cambia (aggiunto o rimosso rispetto al piano precedente).

La penalità di stabilità è quindi definita come:

$$Z_{\text{stab}} = w_{\text{stab}} \sum_{e,s} u_{e,s}$$

dove w_{stab} è un coefficiente di peso che controlla l'importanza del mantenimento del piano rispetto agli altri criteri di ottimizzazione.

Effetto del termine

- In **pianificazione iniziale**, non è presente un piano precedente, quindi il termine non viene applicato. Il modello genera liberamente la soluzione ottima per l'intero mese.
- In **ricalcolo in corso di mese**, il termine viene attivato: il solver viene spinto a modificare solo i turni necessari per migliorare la fattibilità o rispondere a nuovi vincoli, ma viene penalizzato per ogni cambiamento rispetto alla versione precedente.
- È possibile regolare l'entità della penalità tramite il parametro w_{stab} : valori più alti rendono il modello più "conservativo", mentre valori più bassi favoriscono l'adattamento.

Descrizione operativa

In pratica, l'utente può:

1. **Generare il piano completo del mese**, prima dell'inizio del periodo, ottimizzando copertura, carichi e vincoli di fairness.
2. **Ricalcolare dinamicamente** il piano durante il mese, ad esempio in seguito a:
 - a. nuove disponibilità o richieste dei dipendenti;
 - b. assenze o sostituzioni;
 - c. modifiche del fabbisogno giornaliero.

In questa modalità, il modello tiene conto del piano precedente e introduce la penalità di stabilità, così che i cambiamenti siano limitati e coerenti con la versione già comunicata al personale.

3. Funzione obiettivo complessiva

Sommando tutti i contributi:

$$Z_{\text{tot}} = Z_{\text{slack}} + Z_{\text{fairness}} + Z_{\text{saldo}} + Z_{\text{reparto}} + Z_{\text{stab}}$$

Il modello minimizza Z_{tot}

I pesi vanno calibrati in modo da bilanciare i diversi obiettivi. Tenzialmente l'indicazione è di assegnare pesi alti con le violazioni che hanno a che fare con l'efficienza operativa e i vincoli contrattuali, bassi per quelli che hanno a che fare con equità e preferenze.

Possibili integrazioni (TO DO)

- **Richieste di copertura per skill**
- **Preferenze dipendenti**
- **Possibilità, se il solver dichiara infeasible il problema di introdurre un rilassamento dei vincoli, ovvero trasformare vincoli hard in vincoli soft o utilizzare parametri più permissivi per i vincoli hard**
- **Se il solver ci mette troppo tempo a trovare una soluzione: decidere quali vincoli eliminare / allentare**
- **Warm start: dare al solver una soluzione (non ottima) da cui partire (può essere l'orario del mese precedente o un insieme di pattern e sequenze di turni da cui partire)**