Esercizi

Michele Leigheb

Contents

1 Esercizi

2 Esercizio 151

Studiare il sistema

$$S: \begin{cases} \dot{x} = \begin{pmatrix} 3 & -4 & -4 \\ 2 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} u \\ y = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix} u \end{cases}$$

2.1 Studio Risposta Libera

Si studi la risposta libera di un sistema che ha le seguenti caratteristiche:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & -4 \\ 2 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Il determinante di $A - \lambda$ è $-\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda + 1$.

Gli autovalori reali sono $\lambda_i = [-1, 1]$.

Gli autovettori associati ai reali sono $u_i : [-1 : (\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}) 1 : \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}]$.

Da cui posso ricavare le matrici

$$U = T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, V = T = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Che mi trasformano la matrice in

$$D = TAT^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Da cui posso ricavare:

$$\Phi(t) = e^{At} = T^{-1} e^{Dt} T = T^{-1} \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{t} \end{pmatrix} T$$

$$= \begin{pmatrix} 2e^t - e^{-t} & -2e^t + 2e^{-t} & -2e^t + 2e^{-t} \\ e^t - e^{-t} & -e^t + 2e^{-t} & -e^t + e^{-t} \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$$

$$\Psi(t) = \begin{pmatrix} -e^{-t} & 2e^{-t} & e^{-t} \end{pmatrix}, H(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ e^{-t} \\ 0 \end{pmatrix}, W(t) = \begin{pmatrix} 1 + e^{-t} \end{pmatrix}$$

2.1.1 Osservabilità

I modi naturali osservabili sono quelli tali che

$$C \cdot u_i \neq 0$$

2.1.2 Eccitabilità

I modi naturali eccitabili sono quelli tali che

$$v_i' \cdot B \neq 0$$

2.2 Studio Osservabilità

Studiamone l'osservabilità. Calcoliamo allora O e troviamo $\mathfrak{I} = \ker(O)$:

$$O = \begin{pmatrix} C \\ ... \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, |O| = 0$$

O ha rango 1 quindi il suo nucleo ha dimensione 2.
Calcolando trovo

$$I = ker(O) = \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$$

E T^{-1} viene

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcoliamo allora le matrici del sistema, e vedremo che risultano partizionate come avevamo previsto:

$$\widetilde{A} = TAT^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -4 & -4 \\ 2 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\widetilde{C} = CT^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (0 \ \ \widetilde{C}_2)$$

Con le matrici

$$A_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, A_{22} = \begin{pmatrix} -1 \end{pmatrix}$$

Quindi infine mi viene che gli autovalori osservabili sono -1 e gli inosservabili sono $1 \ \ -1$.

2.3 Studio Raggiungibilità

Ora per studiare la raggiungibilità degli stati calcolo $R = (B \ AB \ ... \ A^{n-1}B)$:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, |R| = 0$$

Vediamo che $rango(R) = 1$ e quindi :

$$\mathfrak{R} = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$$

Tutti gli stati che hanno questa struttura sono, allora, raggiungibili. Mettiamo in evidenza questa struttura; cambiamo base, e vorremmo avere lo stato espresso come $z = Tx$ tale che, se x è uno stato raggiungibile, allora:

$$z_R = Tx_R = \begin{pmatrix} \star \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

E T^{-1} viene

$$T^{-1} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\1 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix} \Longrightarrow T = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\-1 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\widetilde{A} = TAT^{-1} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\-1 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & -4 & -4\\2 & -3 & -2\\0 & 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\1 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 & -4 & -4\\0 & 1 & 2\\0 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

Con le matrici

$$\widetilde{A}_{11} = (-1)\,, \widetilde{A}_{22} = \begin{pmatrix}1 & 2\\0 & -1\end{pmatrix}$$

e le matrici

$$\widetilde{B} = TB = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

Ora ne calcoliamo la raggiungibilità:

$$\widetilde{H}(t) = e^{\widetilde{A}t}\widetilde{B} = \begin{pmatrix}e^{\widetilde{A}_{11}t} & \star\\0 & e^{\widetilde{A}_{22}t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\widetilde{B}_1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}e^{\widetilde{A_{11}}t}\widetilde{B}_1\\0\end{pmatrix}$$

Quindi infine mi viene che gli autovalori ragg sono -1, e gli irrag sono $-1, 1$,

2.4 Scomposizione di Kalman

I miei sottospazi di riferimento sono:

$$\mathfrak{I} = \left[\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right], \mathfrak{R} = \left[\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right]$$

La matrice dei vettori di base di I e R è

$$\chi_1 \ni ($$

Ed il determinante è ininfluente.

Per quanto riguarda Chi2: $\chi_2 | \chi_2 \oplus \chi_1 = \mathfrak{R}$ è

$$\chi_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$$

Per quanto riguarda Chi3: $\chi_3 | \chi_3 \oplus \chi_1 = \mathfrak{I}$ è

$$\chi_3 = \begin{pmatrix}2 & 1\\1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$$

Per quanto riguarda Chi4: $\chi_4 | \chi_1 \oplus \chi_2 \oplus \chi_3 \oplus \chi_4 = \mathbb{R}$ è

$$\chi_4 \ni ($$

Ora facciamo T inversa:

$$T^{-1} = (\chi_1\ \chi_2\ \chi_3\ \chi_4\ ) = \begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\1 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

e quindi

$$T = \begin{pmatrix}-1 & 2 & 1\\1 & -1 & -1\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\widetilde{A} = TAT^{-1} = \begin{pmatrix}1 & -2 & -1\\1 & -1 & -1\\0 & 0 & -1\end{pmatrix} * T^{-1} = T * \begin{pmatrix}-1 & 2 & -1\\-1 & 1 & 0\\0 & 0 & -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

$$\widetilde{B} = TB = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\widetilde{C} = CT^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Phi(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$$

2.5 Studio Funzione di trasferimento

$$(sI - A) = \begin{pmatrix} s-3 & 4 & 4 \\ -2 & s+3 & 2 \\ 0 & 0 & s+1 \end{pmatrix}, |sI - A| = (s-1)(s+1)^2$$

$$\Phi(s) = (sI - A)^{-1} = \frac{\begin{pmatrix} s^2+4s+3 & -4s-4 & -4s-4 \\ 2s+2 & s^2-2s-3 & -2s-2 \\ 0 & 0 & s^2-1 \end{pmatrix}}{(s-1)(s+1)^2}$$

Le funzioni caratteristiche sono

$$\begin{aligned} H(s) &= \Phi(s)B \\ \Psi(s) &= C\Phi(s) \\ W(s) &= C(sI-A)^{-1}B \end{aligned}$$

$$H(s) = \begin{pmatrix} s^2+4s+3 & -4s-4 & -4s-4 \\ 2s+2 & s^2-2s-3 & -2s-2 \\ 0 & 0 & s^2-1 \end{pmatrix} \cdot \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}{(s-1)(s+1)^2} = \frac{\begin{pmatrix} s^2-1 \\ s^2-1 \\ 0 \end{pmatrix}}{(s-1)(s+1)^2}$$

$$\Psi(s) = \frac{\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}}{(s-1)(s+1)^2} \cdot \begin{pmatrix} s^2+4s+3 & -4s-4 & -4s-4 \\ 2s+2 & s^2-2s-3 & -2s-2 \\ 0 & 0 & s^2-1 \end{pmatrix} = \frac{\begin{pmatrix} 1-s^2 & 2s^2-2 & s^2-1 \end{pmatrix}}{(s-1)(s+1)^2}$$

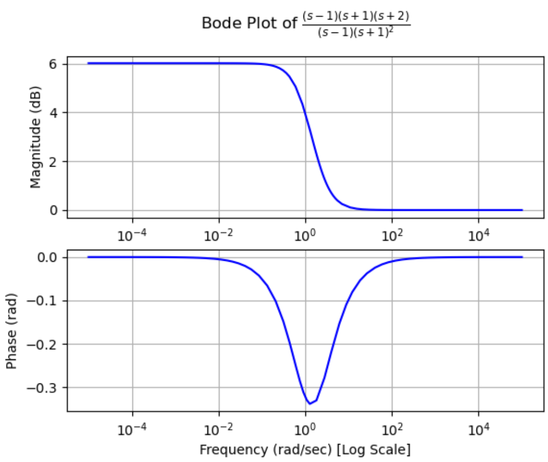
e quindi

$$H(s) = \frac{\begin{pmatrix} s^2-1 \\ s^2-1 \\ 0 \end{pmatrix}}{(s-1)(s+1)^2} \quad \Psi(s) = \frac{\begin{pmatrix} 1-s^2 & 2s^2-2 & s^2-1 \end{pmatrix}}{(s-1)(s+1)^2}$$

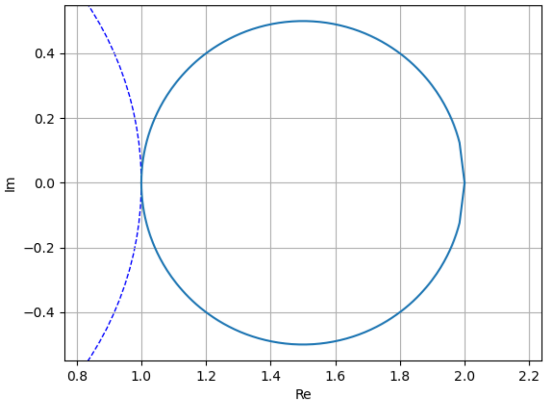
$$W(s) = \frac{\left(s^2 + (s-1)(s+1)^2 - 1\right)}{(s-1)(s+1)^2} = \left(\frac{s+2}{s+1}\right)$$

Il grafico di bode è:

$$W(s) = \frac{(s-1)(s+1)(s+2)}{(s-1)(s+1)^2}$$



Il grafico di Nyquist è:



nel tempo continuo è

$$\delta\left(t\right)+e^{-t}\theta\left(t\right)$$

2.5.1 Vediamo le risposte:

$$u(t)=-t\theta\left(t-1\right)+\left(t-1\right)\theta\left(t\right)\rightarrow U(s)=\mathcal{L}[u(t)]=\frac{\left(-s+\left(1-s\right)e^{s}-1\right)e^{-s}}{s^{2}}$$

$$y_F(s)=W(s)U(s)=\left(\frac{\left(-s^{2}e^{s}-s^{2}-se^{s}-3s+2e^{s}-2\right)e^{-s}}{s^{2}\left(s+1\right)}\right)$$

$$y_F(t)=\mathcal{L}^{-1}[y_F(s)]=\left(\left(-\left(2t-1\right)e^{t}\theta\left(t-1\right)+\left(\left(2t-3\right)e^{t}+2\right)\theta\left(t\right)\right)e^{-t}\right)$$