Esercizi

Michele Leigheb

Contents

1 Complessi

- $2^{(a+ib)} = 2^a(\cos(b\ln(2)) + i\sin(b\ln(2)))$
- $3^{(a+ib)} = 3^a(\cos(b\ln(3)) + i\sin(b\ln(3)))$
- $e^{(a+ib)} = e^a(\cos(b)) + i\sin(b)$
- $\alpha^{(a+ib)} = e^\alpha(\cos(b)\ln(\alpha)) + i\sin(b\ln(\alpha))$

2 Esercizi

3 Esercizio 145

Studiare il sistema

$$S : \begin{cases} \dot{x} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u \\ y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix} u \end{cases}$$

3.1 Studio Risposta Libera

Si studi la risposta libera di un sistema che ha le seguenti caratteristiche:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & -1 \end{pmatrix}$$

Il determinante di $A - \lambda$ è $\lambda^2 + 4$.

Gli autovalori reali sono $\lambda_i = []$, i complessi sono $\lambda_i = [2i,\ -2i]$.

Gli autovettori associati ai reali sono $u_i : []$

Gli autovettori associati ai complessi sono $u_a = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} \\ 1 \end{pmatrix}, u_b = \begin{pmatrix} -\frac{2}{5} \\ 0 \end{pmatrix}$ Da cui posso ricavare le matrici

$$U = T^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, V = T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Che mi trasformano la matrice in

$$D = TAT^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Con $\alpha = 0, \omega = 2$

Da cui posso ricavare:

$$\Phi(t) = e^{At} = T^{-1}e^{Dt}T = T^{-1}\begin{pmatrix} \cos(2t) & \sin(2t) \\ -\sin(2t) & \cos(2t) \end{pmatrix} T$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\sin(2t)}{2} + \cos(2t) & \frac{\sin(2t)}{2} \\ -\frac{5\sin(2t)}{2} & -\frac{\sin(2t)}{2} + \cos(2t) \end{pmatrix}$$

3.1.1 Osservabilità

I modi naturali osservabili sono quelli tali che

$$C \cdot u_i \neq 0$$

3.1.2 Eccitabilità

I modi naturali eccitabili sono quelli tali che

$$v_i' \cdot B \neq 0$$

3.2 Studio Osservabilità

Studiamone l'osservabilità. Calcoliamo allora O e troviamo I = ker(O):

$$O = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -1 \end{pmatrix}, |O| = 5$$

Eccezione 1: O ha rango pieno quindi finisco qui.

3.3 Studio Raggiungibilità

Ora per studiare la raggiungibilità degli stati calcolo $R = (B\ AB\ ...\ A^{n-1}B)$:

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, |R| = -1$$

Vediamo che $rango(R) = 2$ e quindi :

$$\mathfrak{R} = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right]$$

Tutti gli stati che hanno questa struttura sono, allora, raggiungibili. Mettiamo in evidenza questa struttura; cambiamo base, e vorremmo avere lo stato espresso come $z = Tx$ tale che, se x è uno stato raggiungibile, allora:

$$z_R = Tx_R = \begin{pmatrix} \star \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

E T^{-1} viene

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\widetilde{A} = TAT^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Con le matrici

$$\widetilde{A}_{11} = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \widetilde{A}_{22} \Rrightarrow ($$

e le matrici

$$\widetilde{B} = TB = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ora ne calcoliamo la raggiungibilità:

$$\widetilde{H}(t) = e^{\widetilde{A}t}\widetilde{B} = \begin{pmatrix} e^{\widetilde{A}_{11}t} & \star \\ 0 & e^{\widetilde{A}_{22}t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{B}_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\widetilde{A}_{11}t}\widetilde{B}_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Quindi infine mi viene che gli autovalori ragg sono $-2i, 2i$, e gli irrag sono

3.4 Scomposizione di Kalman

I miei sottospazi di riferimento sono:

$$\mathfrak{I} = [], \mathfrak{R} = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right]$$

La matrice dei vettori di base di I e R è

$$\chi_1 \Rrightarrow ($$

Ed il determinante è ininfluente.

Per quanto riguarda Chi2: $\chi_2|\chi_2 \oplus \chi_1 = \Re$ è

$$\chi_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Per quanto riguarda Chi3: $\chi_3|\chi_3 \oplus \chi_1 = \Im$ è

$$\chi_3 = \big($$

Per quanto riguarda Chi4: $\chi_4|\chi_1 \oplus \chi_2 \oplus \chi_3 \oplus \chi_4 = \mathbb{R}$ è

$$\chi_4 = \big($$

Ora facciamo T inversa:

$$T^{-1} = (\chi_1\ \chi_2\ \chi_3\ \chi_4\ ) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

e quindi

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\widetilde{A} = TAT^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} * T^{-1} = T * \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\widetilde{B} = TB = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\widetilde{C} = CT^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$Phi(t) = \begin{pmatrix} \frac{e^{2it}}{2} + \frac{e^{-2it}}{2} & ie^{2it} - ie^{-2it} \\ -\frac{ie^{2it}}{4} + \frac{ie^{-2it}}{4} & \frac{e^{2it}}{2} + \frac{e^{-2it}}{2} \end{pmatrix}$$

3.5 Studio Funzione di trasferimento

$$(sI - A) = \begin{pmatrix} s-1 & -1 \\ 5 & s+1 \end{pmatrix}, |sI - A| = s^2 + 4$$

$$\Phi(s) = (sI - A)^{-1} = \frac{\begin{pmatrix} s+1 & 1 \\ -5 & s-1 \end{pmatrix}}{s^2 + 4}$$

Le funzioni caratteristiche sono

$$\begin{aligned} H(s) &= \Phi(s)B \\ \Psi(s) &= C\Phi(s) \\ W(s) &= C(sI - A)^{-1}B \end{aligned}$$

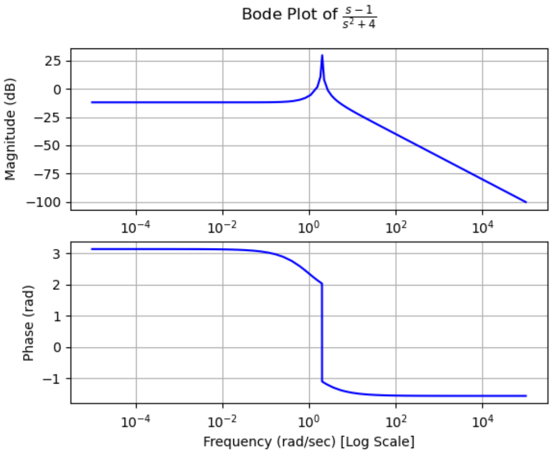
e quindi

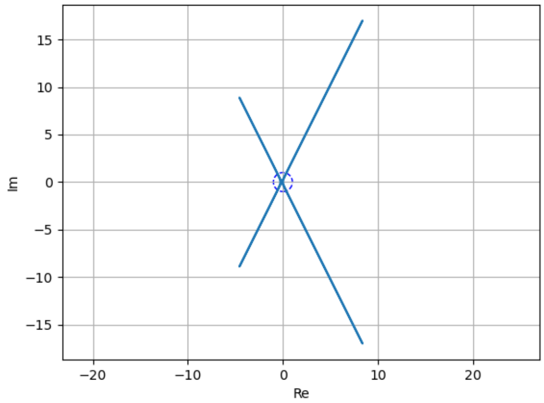
$$H(s) = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ s-1 \end{pmatrix}}{s^2+4}\ \Psi(s) = \frac{\begin{pmatrix} -5 & s-1 \end{pmatrix}}{s^2+4}$$

$$W(s) = \frac{\begin{pmatrix} s-1 \end{pmatrix}}{s^2+4} = \left(\frac{s-1}{s^2+4}\right)$$

Il grafico di bode è:

$$W(s) = \frac{s-1}{s^2+4}$$



Il grafico di Nyquist è: 

nel tempo continuo è

$$-\frac{(\sin(2t) - 2\cos(2t))\,\theta(t)}{2}$$

3.5.1 Vediamo le risposte: