Esercizi

Michele Leigheb

Contents

1 Complessi

- $2^{(a+ib)} = 2^a(\cos(b\ln(2)) + i\sin(b\ln(2)))$
- $3^{(a+ib)} = 3^a(\cos(b\ln(3)) + i\sin(b\ln(3)))$
- $e^{(a+ib)} = e^a(\cos(b)) + i\sin(b)$
- $\alpha^{(a+ib)} = e^\alpha(\cos(b)\ln(\alpha)) + i\sin(b\ln(\alpha))$

2 Esercizi

3 Esercizio 144

Studiare il sistema

$$S: \begin{cases} \dot{x} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} u \\ y = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix} u \end{cases}$$

3.1 Studio Osservabilità

Studiamone l'osservabilità. Calcoliamo allora O e troviamo I = ker(O):

$$O = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}, |O| = 0$$

O ha rango 1 quindi il suo nucleo ha dimensione 2.
Calcolando trovo

$$I = ker(O) = \left[\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right]$$

E T^{-1} viene

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcoliamo allora le matrici del sistema, e vedremo che risultano partizionate come avevamo previsto:

$$\widetilde{A} = TAT^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\widetilde{C} = CT^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (0 \;\; \widetilde{C}_2)$$

Con le matrici

$$A_{11} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}, A_{22} = (-1)$$

Quindi infine mi viene che gli autovalori osservabili sono -1 e gli inosservabili sono 2 1 .

3.2 Studio Raggiungibilità

Ora per studiare la raggiungibilità degli stati calcolo $R = (B\ AB\ ...\ A^{n-1}B)$:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -2 & -1 & -5 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}, |R| = 0$$

Vediamo che $rango(R) = 2$ e quindi :

$$\mathfrak{R} = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$$

Tutti gli stati che hanno questa struttura sono, allora, raggiungibili. Mettiamo in evidenza questa struttura; cambiamo base, e vorremmo avere lo stato espresso come $z = Tx$ tale che, se x è uno stato raggiungibile, allora:

$$z_R = Tx_R = \begin{pmatrix} \star \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

E T^{-1} viene

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow T = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\widetilde{A} = TAT^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -\frac{2}{3} \\ 1 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Con le matrici

$$\widetilde{A}_{11} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \widetilde{A}_{22} = (1)$$

e le matrici

$$\widetilde{B} = TB = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ora ne calcoliamo la raggiungibilità:

$$\widetilde{H}(t) = e^{\widetilde{A}t}\widetilde{B} = \begin{pmatrix} e^{\widetilde{A}_{11}t} & \star \\ 0 & e^{\widetilde{A}_{22}t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{B}_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\widetilde{A_{11}}t}\widetilde{B}_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Quindi infine mi viene che gli autovalori ragg sono $2, -1$, e gli irrag sono 1,

3.3 Scomposizione di Kalman

I miei sottospazi di riferimento sono:

$$\mathfrak{I} = \left[\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right], \mathfrak{R} = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$$

La matrice dei vettori di base di I e R è

$$\chi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ci sono più righe che colonne quindi sicuro l'intersezione c'è.

Per quanto riguarda Chi2: $\chi_2 | \chi_2 \oplus \chi_1 = \Re$ è

$$\chi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Per quanto riguarda Chi3: $\chi_3 | \chi_3 \oplus \chi_1 = \Im$ è

$$\chi_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Per quanto riguarda Chi4: $\chi_4 | \chi_1 \oplus \chi_2 \oplus \chi_3 \oplus \chi_4 = \mathbb{R}$ è

$$\chi_4 \ni ($$

Ora facciamo T inversa:

$$T^{-1} = (\chi_1 \ \chi_2 \ \chi_3 \ \chi_4 \ ) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

e quindi

$$T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\widetilde{A} = TAT^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} * T^{-1} = T * \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -2 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\widetilde{B} = TB = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\widetilde{C} = CT^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Phi(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} & e^{2t} - e^{-t} & -e^{2t} + e^{t} \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{t} \end{pmatrix}$$

3.4 Studio Funzione di trasferimento

$$(sI - A) = \begin{pmatrix} s-2 & 0 & 0 \\ 3 & s & -1 \\ -3 & -1 & s \end{pmatrix}, |sI - A| = (s-2)(s-1)(s+1)$$

$$\Phi(s) = (sI - A)^{-1} = \frac{\begin{pmatrix} s^2 - 1 & 0 & 0 \\ 3 - 3s & s(s-2) & s-2 \\ 3s - 3 & s-2 & s(s-2) \end{pmatrix}}{(s-2)(s-1)(s+1)}$$

Le funzioni caratteristiche sono

$$\begin{aligned} H(s) &= \Phi(s)B \\ \Psi(s) &= C\Phi(s) \\ W(s) &= C(sI - A)^{-1}B \end{aligned}$$

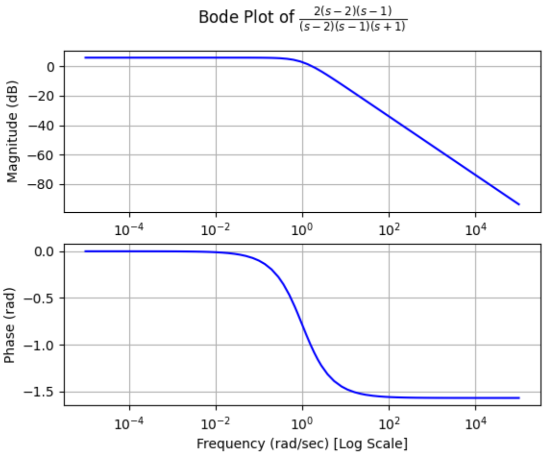
e quindi

$$H(s) = \frac{\begin{pmatrix} s^2 - 1 \\ -2s^2 + 3s - 1 \\ 2s(s-2) + s + 1 \end{pmatrix}}{(s-2)(s-1)(s+1)} \ \Psi(s) = \frac{\begin{pmatrix} -2s^2 + 6s - 4 & -s(s-2) + s - 2 & s(s-2) - s + 2 \end{pmatrix}}{(s-2)(s-1)(s+1)}$$

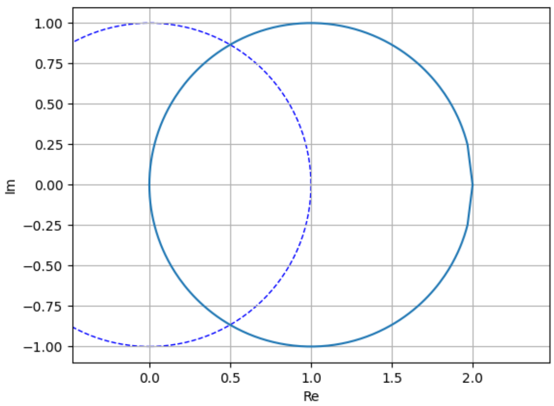
$$W(s) = \frac{\left(2s(s-2) - 2s + 4\right)}{(s-2)(s-1)(s+1)}$$

Il grafico di bode è:

$$W(s) = \frac{2\,(s-2)\,(s-1)}{(s-2)\,(s-1)\,(s+1)}$$



Il grafico di Nyquist è:



nel tempo continuo è

$$2e^{-t}\theta\,(t)$$

3.4.1 Vediamo le risposte:

$$u(t) = 2t\theta\,(t) \rightarrow U(s) = \mathcal{L}[u(t)] = \frac{2}{s^2}$$

$$y_F(s) = W(s)U(s) = \left(\frac{4}{s^2(s+1)}\right)$$

$$y_F(t) = \mathcal{L}^{-1}[y_F(s)] = \left(4\left((t-1)\,e^t+1\right)e^{-t}\theta\,(t)\right)$$

$$u(t) = 2t\theta\,(t-1) \rightarrow U(s) = \mathcal{L}[u(t)] = \frac{2\,(s+1)\,e^{-s}}{s^2}$$

$$y_F(s) = W(s)U(s) = \left(\frac{4e^{-s}}{s^2}\right)$$

$$y_F(t) = \mathcal{L}^{-1}[y_F(s)] = \left(-4\left(\log\left(e^{-t}\right)+1\right)\theta\,(t-1)\right)$$

$$u(t) = -\theta\,(t) \rightarrow U(s) = \mathcal{L}[u(t)] = -\frac{1}{s}$$

$$y_F(s) = W(s)U(s) = \left(-\frac{2}{s(s+1)}\right)$$

$$y_F(t) = \mathcal{L}^{-1}[y_F(s)] = \left(2\cdot\left(1-e^t\right)e^{-t}\theta\,(t)\right)$$

$$u(t) = -\theta\,(t-1) \rightarrow U(s) = \mathcal{L}[u(t)] = -\frac{e^{-s}}{s}$$

$$y_F(s) = W(s)U(s) = \left(-\frac{2e^{-s}}{s(s+1)}\right)$$

$$y_F(t) = \mathcal{L}^{-1}[y_F(s)] = \left(2\left(e-e^t\right)e^{-t}\theta\,(t-1)\right)$$

$$u(t) = \cos(t)\theta(t) \to U(s) = \mathcal{L}[u(t)] = \frac{s}{s^2+1}$$

$$y_F(s) = W(s)U(s) = \left(\tfrac{2s}{s^3+s^2+s+1}\right)$$

$$y_F(t) = \mathcal{L}^{-1}[y_F(s)] = \left(\left(\sqrt{2}e^t \sin\left(t+\tfrac{\pi}{4}\right) - 1\right) e^{-t}\theta(t)\right)$$

$$u(t) = \cos(t)\theta(t-1) \to U(s) = \mathcal{L}[u(t)] = \frac{\left((s-i)\,e^{s-i} + (s+i)\,e^{s+i}\right) e^{-2s}}{2\,(s-i)\,(s+i)}$$

$$y_F(s) = W(s)U(s) = \left(\tfrac{\left(s+se^{2i}-i+ie^{2i}\right)e^{-s-i}}{s^3+s^2+s+1}\right)$$

$$y_F(t) = \mathcal{L}^{-1}[y_F(s)] = \left(\tfrac{(1-i)(1+i)\left(e^{t-1}\sin(t)+e^{t-1}\cos(t)-\sin(1)-\cos(1)\right)e^{1-t}\theta(t-1)}{2}\right)$$