Esercizi

Michele Leigheb

Contents

1 Complessi

- $2^{(a+ib)} = 2^a(\cos(b\ln(2)) + i\sin(b\ln(2)))$
- $3^{(a+ib)} = 3^a(\cos(b\ln(3)) + i\sin(b\ln(3)))$
- $e^{(a+ib)} = e^a(\cos(b)) + i\sin(b)$
- $\alpha^{(a+ib)} = e^\alpha(\cos(b)\ln(\alpha)) + i\sin(b\ln(\alpha))$

2 Esercizi

3 Esercizio 144

Studiare il sistema

$$S : \begin{cases} \dot{x} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u \\ y = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix} u \end{cases}$$

3.1 Studio Risposta Libera

Si studi la risposta libera di un sistema che ha le seguenti caratteristiche:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Il determinante di $A - \lambda$ è $-\lambda^3 - 5\lambda^2 - 6\lambda$.

Gli autovalori reali sono $\lambda_i = [-3, -2, 0]$.

Gli autovettori associati ai reali sono $u_i : [-3 : \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} - 2 : \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} 0 : \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}]$.

Da cui posso ricavare le matrici

$$U = T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, V = T = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

Che mi trasformano la matrice in

$$D = TAT^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Da cui posso ricavare:

$$\Phi(t) = e^{At} = T^{-1}e^{Dt}T = T^{-1} \begin{pmatrix} e^{-3t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2t} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} T$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{e^{-2t}}{2} & \frac{1}{3} - \frac{e^{-3t}}{3} & \frac{1}{6} - \frac{e^{-2t}}{2} + \frac{e^{-3t}}{3} \\ \frac{1}{2} - \frac{e^{-2t}}{2} & \frac{1}{3} + \frac{2e^{-3t}}{3} & \frac{1}{6} + \frac{e^{-2t}}{2} - \frac{2e^{-3t}}{3} \\ \frac{1}{2} - \frac{e^{-2t}}{2} & \frac{1}{3} - \frac{e^{-3t}}{3} & \frac{1}{6} + \frac{e^{-2t}}{2} + \frac{e^{-3t}}{3} \end{pmatrix}$$

3.1.1 Osservabilità

I modi naturali osservabili sono quelli tali che

$$C \cdot u_i \neq 0$$

3.1.2 Eccitabilità

I modi naturali eccitabili sono quelli tali che

$$v_i' \cdot B \neq 0$$

3.2 Studio Osservabilità

Studiamone l'osservabilità. Calcoliamo allora O e troviamo I = ker(O):

$$O = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \\ 4 & -9 & 5 \end{pmatrix}, |O| = 0$$

O ha rango 2 quindi il suo nucleo ha dimensione 1.
Calcolando trovo

$$I = ker(O) = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$$

E T^{-1} viene

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcoliamo allora le matrici del sistema, e vedremo che risultano partizionate come avevamo previsto:

$$\widetilde{A} = TAT^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\widetilde{C} = CT^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = (0 \;\; \widetilde{C}_2)$$

Con le matrici

$$A_{11} = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}, A_{22} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Quindi infine mi viene che gli autovalori osservabili sono $-2 \;\; -3$ e gli inosservabili sono 0 .

3.3 Studio Raggiungibilità

Ora per studiare la raggiungibilità degli stati calcolo $R = (B \; AB \; ... \; A^{n-1}B)$:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -6 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}, |R| = 0$$

Vediamo che $rango(R) = 2$ e quindi :

$$\mathfrak{R} = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right]$$

Tutti gli stati che hanno questa struttura sono, allora, raggiungibili. Mettiamo in evidenza questa struttura; cambiamo base, e vorremmo avere lo stato espresso come $z = Tx$ tale che, se x è uno stato raggiungibile, allora:

$$z_R = Tx_R = \begin{pmatrix} \star \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

E T^{-1} viene

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow T = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\widetilde{A} = TAT^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & -3 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Con le matrici

$$\widetilde{A}_{11} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}, \widetilde{A}_{22} = (-2)$$

e le matrici

$$\widetilde{B} = TB = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ora ne calcoliamo la raggiungibilità:

$$\widetilde{H}(t) = e^{\widetilde{A}t}\widetilde{B} = \begin{pmatrix} e^{\widetilde{A}_{11}t} & \star \\ 0 & e^{\widetilde{A}_{22}t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{B}_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\widetilde{A_{11}}t}\widetilde{B}_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Quindi infine mi viene che gli autovalori ragg sono $0, -3$, e gli irrag sono -2,

3.4 Scomposizione di Kalman

I miei sottospazi di riferimento sono:

$$\mathfrak{I} = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right], \mathfrak{R} = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right]$$

La matrice dei vettori di base di I e R è

$$\chi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ci sono più righe che colonne quindi sicuro l'intersezione c'è.

Per quanto riguarda Chi2: $\chi_2 | \chi_2 \oplus \chi_1 = \mathfrak{R}$ è

$$\chi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Per quanto riguarda Chi3: $\chi_3 | \chi_3 \oplus \chi_1 = \mathfrak{I}$ è

$$\chi_3 =)($$

Per quanto riguarda Chi4: $\chi_4 | \chi_1 \oplus \chi_2 \oplus \chi_3 \oplus \chi_4 = \mathbb{R}$ è

$$\chi_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ora facciamo T inversa:

$$T^{-1} = (\chi_1 \ \chi_2 \ \chi_3 \ \chi_4 \ ) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

e quindi

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\widetilde{A} = TAT^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} * T^{-1} = T * \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\widetilde{B} = TB = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\widetilde{C} = CT^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Phi(t) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} - \frac{2e^{-3t}}{3} & \frac{1}{6} + \frac{e^{-2t}}{2} - \frac{2e^{-3t}}{3} \\ 0 & e^{-3t} & -e^{-2t} + e^{-3t} \\ 0 & 0 & e^{-2t} \end{pmatrix}$$

3.5 Studio Funzione di trasferimento

$$(sI - A) = \begin{pmatrix} s+1 & -1 & 0 \\ -1 & s+2 & -1 \\ -1 & -1 & s+2 \end{pmatrix}, |sI - A| = s\,(s+2)\,(s+3)$$

$$\Phi(s) = (sI - A)^{-1} = \frac{\begin{pmatrix} (s+1)\,(s+3) & s+2 & 1 \\ s+3 & (s+1)\,(s+2) & s+1 \\ s+3 & s+2 & s^2+3s+1 \end{pmatrix}}{s\,(s+2)\,(s+3)}$$

Le funzioni caratteristiche sono

$$\begin{aligned} H(s) &= \Phi(s)B \\ \Psi(s) &= C\Phi(s) \\ W(s) &= C(sI - A)^{-1}B \end{aligned}$$

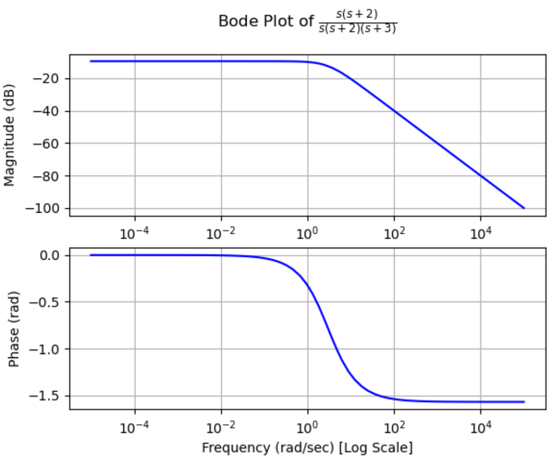
e quindi

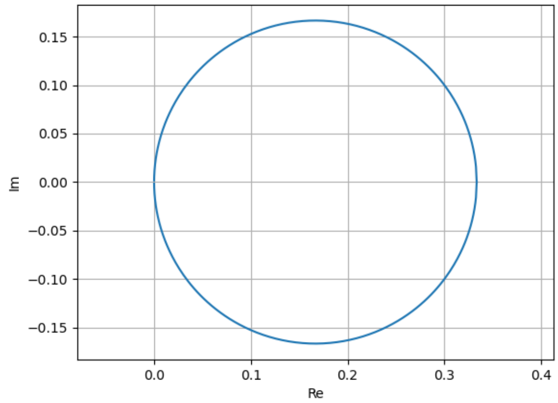
$$H(s) = \frac{\begin{pmatrix} (s+1)\,(s+3)+1 \\ 2s+4 \\ s^2+4s+4 \end{pmatrix}}{s\,(s+2)\,(s+3)} \quad \Psi(s) = \frac{\begin{pmatrix} s\,(s+3) & s\,(-s-2) & -s \end{pmatrix}}{s\,(s+2)\,(s+3)}$$

$$W(s) = \frac{\left(s\,(s+2)\right)}{s\,(s+2)\,(s+3)} = \left(\frac{1}{s+3}\right)$$

Il grafico di bode è:

$$W(s) = \frac{s\,(s+2)}{s\,(s+2)\,(s+3)}$$



Il grafico di Nyquist è:  nel tempo continuo è

$$e^{-3t}\theta\left(t\right)$$

3.5.1 Vediamo le risposte:

3.6 Realizzazione

$$W(s) = \frac{[1,2,0]}{[1,5,6,0]}$$

3.6.1 Forma Canonica Raggiungibile

Con la realizzazione cano ragg viene

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -6 & -5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$W(s) = \left(\tfrac{s}{s^2+5s+6} - \tfrac{12}{-6s^2-30s-36}\right)$$

3.6.2 Forma Canonica Osservabile

Con la realizzazione cano oss viene

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & -5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$W(s) = \left(\tfrac{s}{s^2+5s+6} + \tfrac{2}{s^2+5s+6}\right)$$