Esercizi

Michele Leigheb

Contents

1 Complessi

- $2^{(a+ib)} = 2^a(\cos(b\ln(2)) + i\sin(b\ln(2)))$
- $3^{(a+ib)} = 3^a(\cos(b\ln(3)) + i\sin(b\ln(3)))$
- $e^{(a+ib)} = e^a(\cos(b)) + i\sin(b)$
- $\alpha^{(a+ib)} = e^{\alpha}(\cos(b)\ln(\alpha)) + i\sin(b\ln(\alpha))$

2 Esercizi

3 Esercizio 157

Studiare il sistema

$$S : \begin{cases} \dot{x} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} u \\ y = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} u \end{cases}$$

3.1 Studio Risposta Libera

Si studi la risposta libera di un sistema che ha le seguenti caratteristiche:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Il determinante di $A - \lambda$ è $-\lambda^3(-\lambda - 1)$.

Gli autovalori reali sono $\lambda_i = [-1, 0]$.

Gli autovettori associati ai reali sono $u_i : [-1 : \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} 0 : (\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix})]$. La matrice A non è diagonalizzabile, quindi devo fare Jordan.

Da cui posso ricavare le matrici

$$U = T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, V = T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Che mi trasformano la matrice in

$$D = TAT^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Da cui posso ricavare:

$$\Phi(t) = e^{At} = T^{-1}e^{Dt}T = T^{-1}\begin{pmatrix} e^{-t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & t & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} T$$

$$= \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Psi(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 & t \end{pmatrix}, H(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, W(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 1 & t \end{pmatrix}$$

3.1.1 Osservabilità

I modi naturali osservabili sono quelli tali che

$$C \cdot u_i \neq 0$$

3.1.2 Eccitabilità

I modi naturali eccitabili sono quelli tali che

$$v_i' \cdot B \neq 0$$

3.2 Studio Funzione di trasferimento

$$(sI - A) = \begin{pmatrix} s+1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s & -1 \\ 0 & 0 & 0 & s \end{pmatrix}, |sI - A| = s^3\,(s+1)$$

$$\Phi(s) = (sI - A)^{-1} = \frac{\begin{pmatrix} s^3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s^2\,(s+1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s^2\,(s+1) & s\,(s+1) \\ 0 & 0 & 0 & s^2\,(s+1) \end{pmatrix}}{s^3\,(s+1)}$$

Le funzioni caratteristiche sono

$$\begin{aligned} H(s) &= \Phi(s)B \\ \Psi(s) &= C\Phi(s) \\ W(s) &= C(sI - A)^{-1}B \end{aligned}$$

$$H(s) = \begin{pmatrix} s^3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s^2\,(s+1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s^2\,(s+1) & s\,(s+1) \\ 0 & 0 & 0 & s^2\,(s+1) \end{pmatrix} \cdot \frac{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}{s^3\,(s+1)} = \frac{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ s^2\,(s+1) & 0 \\ 0 & s\,(s+1) \\ 0 & s^2\,(s+1) \end{pmatrix}}{s^3\,(s+1)}$$

$$\Psi(s) = \frac{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}{s^3\,(s+1)} \cdot \begin{pmatrix} s^3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s^2\,(s+1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s^2\,(s+1) & s\,(s+1) \\ 0 & 0 & 0 & s^2\,(s+1) \end{pmatrix} = \frac{\begin{pmatrix} 0 & s^2\,(s+1) & s^2\,(s+1) & s\,(s+1) \\ 0 & 0 & s^2\,(s+1) & s\,(s+1) \end{pmatrix}}{s^3\,(s+1)}$$

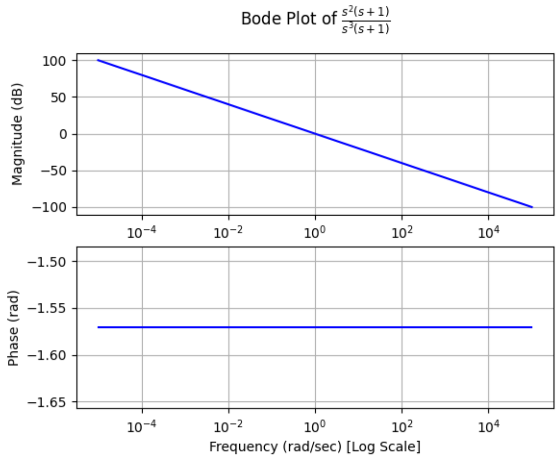
e quindi

$$H(s) = \frac{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ s^2\,(s+1) & 0 \\ 0 & s\,(s+1) \\ 0 & s^2\,(s+1) \end{pmatrix}}{s^3\,(s+1)} \quad \Psi(s) = \frac{\begin{pmatrix} 0 & s^2\,(s+1) & s^2\,(s+1) & s\,(s+1) \\ 0 & 0 & s^2\,(s+1) & s\,(s+1) \end{pmatrix}}{s^3\,(s+1)}$$

$$W(s) = \frac{\begin{pmatrix} s^2(s+1) & s(s+1) \\ s^3(s+1) & s(s+1) \end{pmatrix}}{s^3(s+1)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s^2} \\ 1 & \frac{1}{s^2} \end{pmatrix}$$

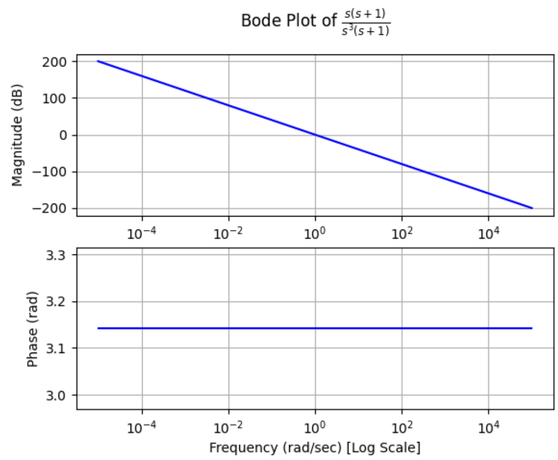
Valore $s^2(s+1)$ della matrice delle funzioni di trasferimento:

$$W(s) = \frac{s^2(s+1)}{s^3(s+1)}$$



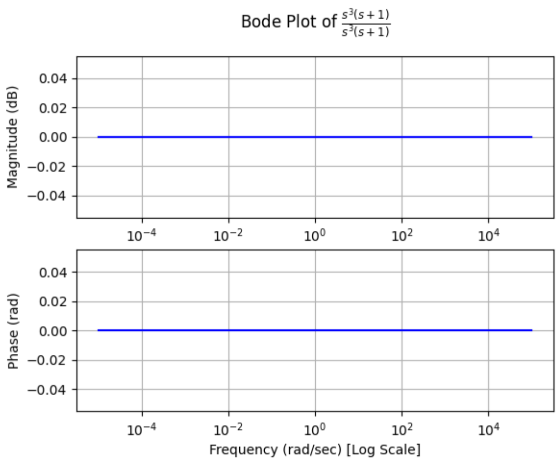
Valore $s(s+1)$ della matrice delle funzioni di trasferimento:

$$W(s) = \frac{s(s+1)}{s^3(s+1)}$$



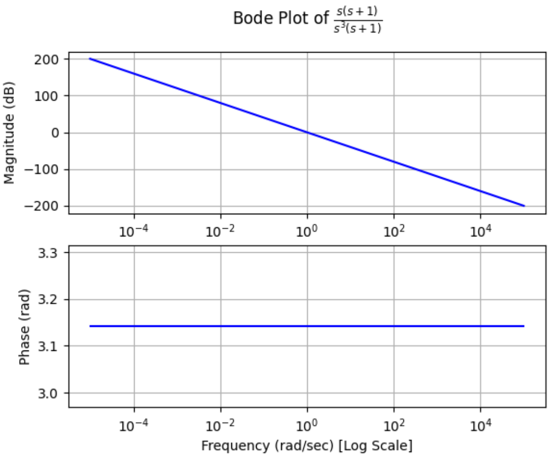
Valore $s^3(s+1)$ della matrice delle funzioni di trasferimento:

$$W(s) = \frac{s^3(s+1)}{s^3(s+1)}$$



Valore $s(s+1)$ della matrice delle funzioni di trasferimento:

$$W(s) = \frac{s(s+1)}{s^3(s+1)}$$



3.2.1 Vediamo le risposte: