Esercizi

Michele Leigheb

Contents

1 Complessi

- $2^{(a+ib)} = 2^a(\cos(b\ln(2)) + i\sin(b\ln(2)))$
- $3^{(a+ib)} = 3^a(\cos(b\ln(3)) + i\sin(b\ln(3)))$
- $e^{(a+ib)} = e^a(\cos(b)) + i\sin(b)$
- $\alpha^{(a+ib)} = e^\alpha(\cos(b)\ln(\alpha)) + i\sin(b\ln(\alpha))$

2 Esercizi

3 Esercizio 77

Studiare il sistema

$$S : \begin{cases} \dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} u \\ y = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} u \end{cases}$$

3.1 Studio Risposta Libera

Si studi la risposta libera di un sistema che ha le seguenti caratteristiche:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Il determinante di $A - \lambda$ è $\lambda^2(-\lambda - 2)(-\lambda - 1)$.

Gli autovalori reali sono $\lambda_i = [-2, -1, 0]$.

Gli autovettori associati ai reali sono $u_i : [-2 : \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 1 : \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} 0 : (\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix})]$. La matrice A non è diagonalizzabile, quindi devo fare Jordan.

Da cui posso ricavare le matrici

$$U = T^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, V = T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -\frac{3}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Che mi trasformano la matrice in

$$D = TAT^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Da cui posso ricavare:

$$\Phi(t) = e^{At} = T^{-1}e^{Dt}T = T^{-1}\begin{pmatrix} e^{-2t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} T$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1-e^{-t} & \frac{t}{2}-\frac{3}{4}+e^{-t}-\frac{e^{-2t}}{4} & \frac{1}{2}-e^{-t}+\frac{e^{-2t}}{2} \\ 0 & e^{-t} & \frac{1}{2}-e^{-t}+\frac{e^{-2t}}{2} & e^{-t}-e^{-2t} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}-\frac{e^{-2t}}{2} & e^{-2t} \end{pmatrix}$$

3.1.1 Osservabilità

I modi naturali osservabili sono quelli tali che

$$C \cdot u_i \neq 0$$

3.1.2 Eccitabilità

I modi naturali eccitabili sono quelli tali che

$$v_i' \cdot B \neq 0$$

3.2 Studio Osservabilità

Studiamone l'osservabilità. Calcoliamo allora O e troviamo I = ker(O):

$$O = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & -6 \end{pmatrix}, |O| = 999$$

O ha rango 4 quindi il suo nucleo ha dimensione 4.
Calcolando trovo

$$I = ker(O) = []$$

2O ha rango pieno quindi finisco qui.

3.3 Studio Raggiungibilità

Ora per studiare la raggiungibilità degli stati calcolo $R = (B\ AB\ ...\ A^{n-1}B)$:

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -3 & 1 & 7 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -2 & 0 & 4 & 0 & -8 \end{pmatrix}, |R| = 999$$

Vediamo che $rango(R) = 4$ e quindi :

$$\mathfrak{R} = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$$

Tutti gli stati che hanno questa struttura sono, allora, raggiungibili. Mettiamo in evidenza questa struttura; cambiamo base, e vorremmo avere lo stato espresso come $z = Tx$ tale che, se x è uno stato raggiungibile, allora:

$$z_R = Tx_R = \begin{pmatrix} \star \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

E T^{-1} viene

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\widetilde{A} = TAT^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Con le matrici

$$\widetilde{A}_{11} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \widetilde{A}_{22} \ni ($$

e le matrici

$$\widetilde{B} = TB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ora ne calcoliamo la raggiungibilità:

$$\widetilde{H}(t) = e^{\widetilde{A}t}\widetilde{B} = \begin{pmatrix} e^{\widetilde{A}_{11}t} & \star \\ 0 & e^{\widetilde{A}_{22}t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{B}_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\widetilde{A}_{11}t}\widetilde{B}_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Quindi infine mi viene che gli autovalori ragg sono $0, -2, -1$, e gli irrag sono

3.4 Scomposizione di Kalman

I miei sottospazi di riferimento sono:

$$\mathfrak{I} = [\,], \mathfrak{R} = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$$

La matrice dei vettori di base di I e R è

$$\chi_1 \ni ($$

Ed il determinante è ininfluente.

Per quanto riguarda Chi2: $\chi_2 | \chi_2 \oplus \chi_1 = \mathfrak{R}$ è

$$\chi_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Per quanto riguarda Chi3: $\chi_3 | \chi_3 \oplus \chi_1 = \mathfrak{I}$ è

$$\chi_3 \ni ($$

Per quanto riguarda Chi4: $\chi_4 | \chi_1 \oplus \chi_2 \oplus \chi_3 \oplus \chi_4 = \mathbb{R}$ è

$$\chi_4 \ni ($$

Ora facciamo T inversa:

$$T^{-1} = (\chi_1\ \chi_2\ \chi_3\ \chi_4\ ) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e quindi

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\widetilde{A} = TAT^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} * T^{-1} = T * \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\widetilde{B} = TB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\widetilde{C} = CT^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$Phi(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2t} & 0 & 0 \\ t & \frac{1}{2} - \frac{e^{-2t}}{2} & 1 & 0 \\ t - 1 + e^{-t} & \frac{1}{2} - e^{-t} + \frac{e^{-2t}}{2} & 1 - e^{-t} & e^{-t} \end{pmatrix}$$

3.5 Studio Funzione di trasferimento

$$(sI - A) = \begin{pmatrix} s & -1 & 0 & 0 \\ 0 & s+1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & -1 & s+2 \end{pmatrix}, |sI - A| = s^2\,(s+1)\,(s+2)$$

$$\Phi(s) = (sI - A)^{-1} = \frac{\begin{pmatrix} s\,(s+1)\,(s+2) & s\,(s+2) & 1 & s \\ 0 & s^2\,(s+2) & s & s^2 \\ 0 & 0 & s\,(s+1)\,(s+2) & 0 \\ 0 & 0 & s\,(s+1) & s^2\,(s+1) \end{pmatrix}}{s^2\,(s+1)\,(s+2)}$$

Le funzioni caratteristiche sono

$$\begin{aligned} H(s) &= \Phi(s)B \\ \Psi(s) &= C\Phi(s) \\ W(s) &= C(sI - A)^{-1}B \end{aligned}$$

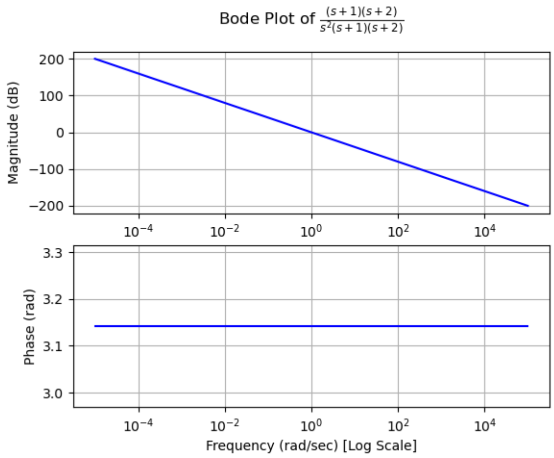
e quindi

$$H(s) = \frac{\begin{pmatrix} s+2 & s \\ s\,(s+2) & s^2 \\ 2s\,(s+1)\,(s+2) & 0 \\ s\,(s+1)\,(s+2) & s^2\,(s+1) \end{pmatrix}}{s^2\,(s+1)\,(s+2)}\ \Psi(s) = \frac{\begin{pmatrix} s\,(s+1)\,(s+2) & s\,(s+1)\,(s+2) & s+1 & s\,(s+1) \\ 2s\,(s+1)\,(s+2) & 2s\,(s+2) & 2 & 2s \end{pmatrix}}{s^2\,(s+1)\,(s+2)}$$

$$W(s) = \frac{\begin{pmatrix} s\,(s+2) + s + 2 & s\,(s+1) \\ 2s+4 & 2s \end{pmatrix}}{s^2\,(s+1)\,(s+2)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{s^2} & \frac{1}{s(s+2)} \\ \frac{2}{s^2(s+1)} & \frac{2}{s(s+1)(s+2)} \end{pmatrix}$$

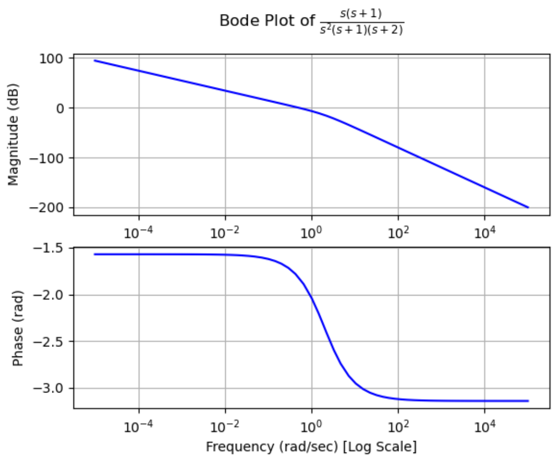
Valore $s\,(s+2) + s + 2$ della matrice delle funzioni di trasferimento:

$$W(s) = \frac{(s+1)\,(s+2)}{s^2\,(s+1)\,(s+2)}$$



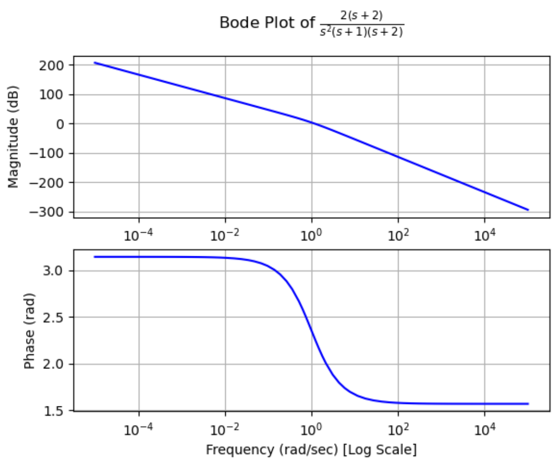
Valore $s\,(s+1)$ della matrice delle funzioni di trasferimento:

$$W(s) = \frac{s\,(s+1)}{s^2\,(s+1)\,(s+2)}$$



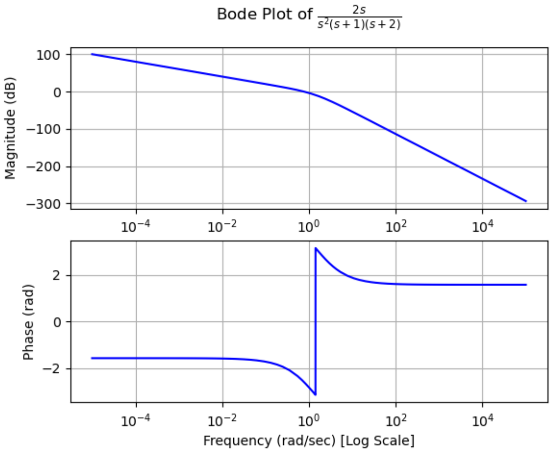
Valore $2s+4$ della matrice delle funzioni di trasferimento:

$$W(s) = \frac{2\,(s+2)}{s^2\,(s+1)\,(s+2)}$$



Valore $2s$ della matrice delle funzioni di trasferimento:

$$W(s) = \frac{2s}{s^2\,(s+1)\,(s+2)}$$



3.5.1 Vediamo le risposte:

4 Esercizio 88

Studiare il sistema

$$S: \begin{cases} \dot{x} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 2 & -4 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} u \\ y = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix} u \end{cases}$$

4.1 Studio Risposta Libera

Si studi la risposta libera di un sistema che ha le seguenti caratteristiche:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 2 & -4 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Il determinante di $A - \lambda$ è $-\lambda^3 - 3\lambda^2 - 2\lambda$.

Gli autovalori reali sono $\lambda_i = [-2, -1, 0]$.

Gli autovettori associati ai reali sono $u_i : [-2 : \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 1 : \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} 0 : \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}]$.

Da cui posso ricavare le matrici

$$U = T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, V = T = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Che mi trasformano la matrice in

$$D = TAT^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Da cui posso ricavare:

$$\Phi(t) = e^{At} = T^{-1}e^{Dt}T = T^{-1} \begin{pmatrix} e^{-2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} T$$

$$= \begin{pmatrix} 1 + e^{-t} - e^{-2t} & -1 - e^{-t} + 2e^{-2t} & -1 + e^{-2t} \\ 1 - e^{-2t} & -1 + 2e^{-2t} & -1 + e^{-2t} \\ -1 + e^{-t} & 1 - e^{-t} & 1 \end{pmatrix}$$

L'evoluzione libera a partire dallo stato 0 è

$$x_L = (\sum_{i=0}^{i=n} e^{\lambda_i t} u_i v_i) x_0 = \Phi(t) \cdot x_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La risposta libera è

$$y_L = \Psi(t)x_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

L'evoluzione libera a partire dallo stato 0 è

$$x_L = (\sum_{i=0}^{i=n} e^{\lambda_i t} u_i v_i) x_0 = \Phi(t) \cdot x_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La risposta libera è

$$y_L = \Psi(t)x_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

L'evoluzione libera a partire dallo stato 0 è

$$x_L = (\sum_{i=0}^{i=n} e^{\lambda_i t} u_i v_i) x_0 = \Phi(t) \cdot x_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La risposta libera è

$$y_L = \Psi(t)x_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4.1.1 Osservabilità

I modi naturali osservabili sono quelli tali che

$$C \cdot u_i \neq 0$$

4.1.2 Eccitabilità

I modi naturali eccitabili sono quelli tali che

$$v_i' \cdot B \neq 0$$

4.2 Studio Osservabilità

Studiamone l'osservabilità. Calcoliamo allora O e troviamo I = ker(O):

$$O = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 4 & 2 \\ 4 & -8 & -4 \end{pmatrix}, |O| = 0$$

O ha rango 1 quindi il suo nucleo ha dimensione 2.
Calcolando trovo

$$I = ker(O) = \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$$

E T^{-1} viene

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcoliamo allora le matrici del sistema, e vedremo che risultano partizionate come avevamo previsto:

$$\widetilde{A} = TAT^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 2 & -4 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\widetilde{C} = CT^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = (0 \ \widetilde{C}_2)$$

Con le matrici

$$A_{11} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, A_{22} = (-2)$$

Quindi infine mi viene che gli autovalori osservabili sono -2 e gli inosservabili sono $0 \ -1$.

4.3 Studio Raggiungibilità

Ora per studiare la raggiungibilità degli stati calcolo $R = (B\ AB\ ...\ A^{n-1}B)$:

$$R = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, |R| = 0$$

Vediamo che $rango(R) = 2$ e quindi :

$$\mathfrak{R} = \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right]$$

Tutti gli stati che hanno questa struttura sono, allora, raggiungibili. Mettiamo in evidenza questa struttura; cambiamo base, e vorremmo avere lo stato espresso come $z = Tx$ tale che, se x è uno stato raggiungibile, allora:

$$z_R = Tx_R = \begin{pmatrix} \star \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

E T^{-1} viene

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\widetilde{A} = TAT^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 2 & -4 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Con le matrici

$$\widetilde{A}_{11} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \widetilde{A}_{22} = (-2)$$

e le matrici

$$\widetilde{B} = TB = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ora ne calcoliamo la raggiungibilità:

$$\widetilde{H}(t) = e^{\widetilde{A}t}\widetilde{B} = \begin{pmatrix} e^{\widetilde{A}_{11}t} & \star \\ 0 & e^{\widetilde{A}_{22}t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{B}_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\widetilde{A}_{11}t}\widetilde{B}_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Quindi infine mi viene che gli autovalori ragg sono $0, -1$, e gli irrag sono -2,

4.4 Scomposizione di Kalman

I miei sottospazi di riferimento sono:

$$\mathfrak{I} = \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right], \mathfrak{R} = \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right]$$

La matrice dei vettori di base di I e R è

$$\chi_1 = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Ci sono più righe che colonne quindi sicuro l'intersezione c'è.

Per quanto riguarda Chi2: $\chi_2 | \chi_2 \oplus \chi_1 = \mathfrak{R}$ è

$$\chi_2 \ni ($$

Per quanto riguarda Chi3: $\chi_3 | \chi_3 \oplus \chi_1 = \mathfrak{I}$ è

$$\chi_3 \ni ($$

Per quanto riguarda Chi4: $\chi_4 | \chi_1 \oplus \chi_2 \oplus \chi_3 \oplus \chi_4 = \mathbb{R}$ è

$$\chi_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ora facciamo T inversa:

$$T^{-1} = (\chi_1 \ \chi_2 \ \chi_3 \ \chi_4 \ ) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

e quindi

$$T = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\widetilde{A} = TAT^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 1 \\ -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} & 1 \\ 2 & -4 & -2 \end{pmatrix} * T^{-1} = T * \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\widetilde{B} = TB = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\widetilde{C} = CT^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$Phi(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{e^{-t}}{2} & \frac{1}{2} - \frac{e^{-t}}{2} & \frac{1}{2} - \frac{e^{-2t}}{2} \\ \frac{1}{2} - \frac{e^{-t}}{2} & \frac{1}{2} + \frac{e^{-t}}{2} & \frac{1}{2} - \frac{e^{-2t}}{2} \\ 0 & 0 & e^{-2t} \end{pmatrix}$$

4.5 Studio Funzione di trasferimento

$$(sI - A) = \begin{pmatrix} s-1 & 3 & 2 \\ -2 & s+4 & 2 \\ 1 & -1 & s \end{pmatrix}, |sI - A| = s\,(s+1)\,(s+2)$$

$$\Phi(s) = (sI - A)^{-1} = \frac{\begin{pmatrix} s^2+4s+2 & -3s-2 & -2s-2 \\ 2s+2 & (s-2)\,(s+1) & -2s-2 \\ -s-2 & s+2 & (s+1)\,(s+2) \end{pmatrix}}{s\,(s+1)\,(s+2)}$$

Le funzioni caratteristiche sono

$$\begin{array}{rcl} H(s) & = & \Phi(s)B \\ \Psi(s) & = & C\Phi(s) \\ W(s) & = & C(sI-A)^{-1}B \end{array}$$

e quindi

$$H(s) = \frac{\begin{pmatrix} 2s^2+5s+2 \\ s^2+3s+2 \\ -s-2 \end{pmatrix}}{s\,(s+1)\,(s+2)} \quad \Psi(s) = \frac{\begin{pmatrix} s\,(s+1) & 2s\,(-s-1) & s\,(-s-1) \end{pmatrix}}{s\,(s+1)\,(s+2)}$$

$$W(s) = \frac{\begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}}{s\,(s+1)\,(s+2)} = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}$$

Il grafico di bode è: Il numeratore della funzione è zero quindi niente graficiNo Nyquist

4.5.1 Vediamo le risposte:

$$y_L = \Psi(s)x_0 = \frac{\begin{pmatrix} s\,(s+1) & 2s\,(-s-1) & s\,(-s-1) \end{pmatrix}}{s\,(s+1)\,(s+2)} 0 = \frac{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}{s\,(s+1)\,(s+2)}$$

$$y_L = \Psi(s)x_0 = \frac{\begin{pmatrix} s\,(s+1) & 2s\,(-s-1) & s\,(-s-1) \end{pmatrix}}{s\,(s+1)\,(s+2)} 0 = \frac{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}{s\,(s+1)\,(s+2)}$$

$$y_L = \Psi(s)x_0 = \frac{\begin{pmatrix} s\,(s+1) & 2s\,(-s-1) & s\,(-s-1) \end{pmatrix}}{s\,(s+1)\,(s+2)} 0 = \frac{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}{s\,(s+1)\,(s+2)}$$

5 Esercizio 99

Studiare il sistema

$$S : \begin{cases} \dot{x} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} u \\ y = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix} u \end{cases}$$

5.1 Studio Risposta Libera

Si studi la risposta libera di un sistema che ha le seguenti caratteristiche:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Il determinante di $A - \lambda$ è $-\lambda^3 + 6\lambda^2 - 12\lambda + 8$.

Gli autovalori reali sono $\lambda_i = [2]$.

Gli autovettori associati ai reali sono $u_i : [2 : (\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix})]$. La matrice A non è diagonalizzabile, quindi devo fare Jordan.

Da cui posso ricavare le matrici

$$U = T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, V = T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Che mi trasformano la matrice in

$$D = TAT^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Da cui posso ricavare:

$$\Phi(t) = e^{At} = T^{-1} e^{Dt} T = T^{-1} \begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} & \frac{t^2 e^{2t}}{2} \\ 0 & e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix} T$$

$$= \begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} & \frac{t^2 e^{2t}}{2} \\ 0 & e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix}$$

L'evoluzione libera a partire dallo stato 0 è

$$x_L = (\sum_{i=0}^{i=n} e^{\lambda_i t} u_i v_i) x_0 = \Phi(t) \cdot x_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La risposta libera è

$$y_L = \Psi(t) x_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

L'evoluzione libera a partire dallo stato 0 è

$$x_L = (\sum_{i=0}^{i=n} e^{\lambda_i t} u_i v_i) x_0 = \Phi(t) \cdot x_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La risposta libera è

$$y_L = \Psi(t) x_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

L'evoluzione libera a partire dallo stato 0 è

$$x_L = (\sum_{i=0}^{i=n} e^{\lambda_i t} u_i v_i) x_0 = \Phi(t) \cdot x_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La risposta libera è

$$y_L = \Psi(t) x_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

5.1.1 Osservabilità

I modi naturali osservabili sono quelli tali che

$$C \cdot u_i \neq 0$$

5.1.2 Eccitabilità

I modi naturali eccitabili sono quelli tali che

$$v_i' \cdot B \neq 0$$

5.2 Studio Osservabilità

Studiamone l'osservabilità. Calcoliamo allora O e troviamo I = ker(O):

$$O = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ 4 & 0 & -3 \end{pmatrix}, |O| = 1$$

Eccezione 1: O ha rango pieno quindi finisco qui.

5.3 Studio Raggiungibilità

Ora per studiare la raggiungibilità degli stati calcolo $R = (B \ AB \ ... \ A^{n-1}B)$:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 8 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, |R| = 0$$

Vediamo che $rango(R) = 2$ e quindi :

$$\mathfrak{R} = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$$

Tutti gli stati che hanno questa struttura sono, allora, raggiungibili. Mettiamo in evidenza questa struttura; cambiamo base, e vorremmo avere lo stato espresso come $z = Tx$ tale che, se x è uno stato raggiungibile, allora:

$$z_R = Tx_R = \begin{pmatrix} \star \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

E T^{-1} viene

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow T = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\widetilde{A} = TAT^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 3 \\ 1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Con le matrici

$$\widetilde{A}_{11} = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \widetilde{A}_{22} = (2)$$

e le matrici

$$\widetilde{B} = TB = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ora ne calcoliamo la raggiungibilità:

$$\widetilde{H}(t) = e^{\widetilde{A}t}\widetilde{B} = \begin{pmatrix} e^{\widetilde{A}_{11}t} & \star \\ 0 & e^{\widetilde{A}_{22}t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{B}_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\widetilde{A_{11}}t}\widetilde{B}_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Quindi infine mi viene che gli autovalori ragg sono 2, e gli irrag sono 2,

5.4 Scomposizione di Kalman

I miei sottospazi di riferimento sono:

$$\mathfrak{I} = [] \,, \mathfrak{R} = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$$

La matrice dei vettori di base di I e R è

$$\chi_1 \Rrightarrow ($$

Ed il determinante è ininfluente.

Per quanto riguarda Chi2: $\chi_2 | \chi_2 \oplus \chi_1 = \mathfrak{R}$ è

$$\chi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Per quanto riguarda Chi3: $\chi_3 | \chi_3 \oplus \chi_1 = \mathfrak{I}$ è

$$\chi_3 \Rrightarrow ($$

Per quanto riguarda Chi4: $\chi_4 | \chi_1 \oplus \chi_2 \oplus \chi_3 \oplus \chi_4 = \mathbb{R}$ è

$$\chi_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ora facciamo T inversa:

$$T^{-1} = (\chi_1 \ \chi_2 \ \chi_3 \ \chi_4 \ ) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e quindi

$$T = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\widetilde{A} = TAT^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & 4 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} * T^{-1} = T * \begin{pmatrix} 3 & 8 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 3 \\ 1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\widetilde{B} = TB = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\widetilde{C} = CT^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Phi(t) = \begin{pmatrix} -2e^{2t} + \frac{-2t^2e^{2t}+3te^{2t}}{t} & -6e^{2t} + \frac{2\left(-2t^2e^{2t}+3te^{2t}\right)}{t} & -t^2e^{2t} + 3te^{2t} \\ e^{2t} + \frac{t^2e^{2t}-te^{2t}}{t} & 3e^{2t} + \frac{2\left(t^2e^{2t}-te^{2t}\right)}{t} & \frac{t^2e^{2t}}{2} - te^{2t} \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix}$$

5.5 Studio Funzione di trasferimento

$$(sI - A) = \begin{pmatrix} s-2 & -1 & 0 \\ 0 & s-2 & -1 \\ 0 & 0 & s-2 \end{pmatrix} , |sI - A| = (s-2)^3$$

$$\Phi(s) = (sI - A)^{-1} = \frac{\begin{pmatrix} (s-2)^2 & s-2 & 1 \\ 0 & (s-2)^2 & s-2 \\ 0 & 0 & (s-2)^2 \end{pmatrix}}{(s-2)^3}$$

Le funzioni caratteristiche sono

$$\begin{aligned} H(s) &= \Phi(s)B \\ \Psi(s) &= C\Phi(s) \\ W(s) &= C(sI-A)^{-1}B \end{aligned}$$

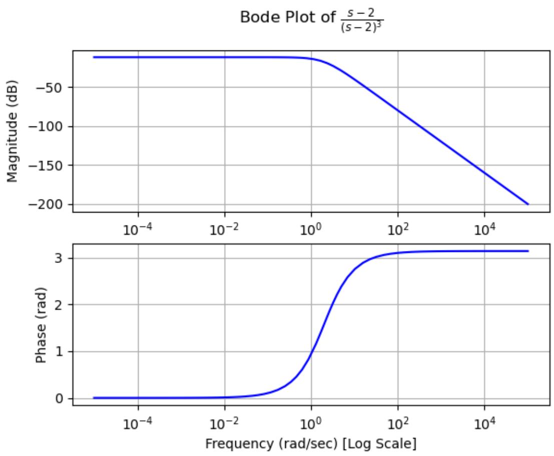
e quindi

$$H(s)=\frac{\begin{pmatrix} s+(s-2)^2-2 \\ (s-2)^2 \\ 0 \end{pmatrix}}{(s-2)^3} \quad \Psi(s)=\frac{\begin{pmatrix}(s-2)^2 & s-(s-2)^2-2 & 3-s\end{pmatrix}}{(s-2)^3}$$

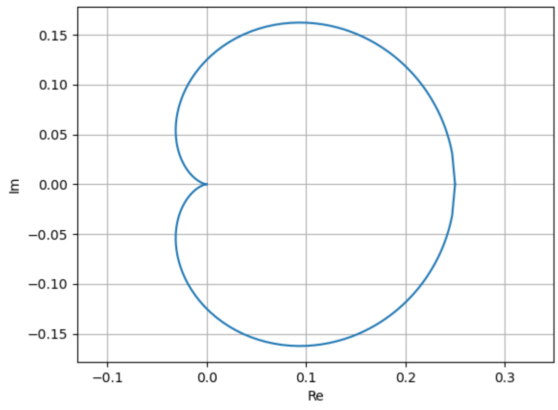
$$W(s)=\frac{(s-2)}{(s-2)^3}=\left(\frac{1}{(s-2)^2}\right)$$

Il grafico di bode è:

$$W(s)=\frac{s-2}{(s-2)^3}$$



Il grafico di Nyquist è:



nel tempo continuo è

$$te^{2t}\theta(t)$$

5.5.1 Vediamo le risposte:

$$y_L=\Psi(s)x_0=\frac{\begin{pmatrix}(s-2)^2 & s-(s-2)^2-2 & 3-s\end{pmatrix}}{(s-2)^3}0=\frac{\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\end{pmatrix}}{(s-2)^3}$$

$$y_L=\Psi(s)x_0=\frac{\begin{pmatrix}(s-2)^2 & s-(s-2)^2-2 & 3-s\end{pmatrix}}{(s-2)^3}0=\frac{\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\end{pmatrix}}{(s-2)^3}$$

$$y_L=\Psi(s)x_0=\frac{\begin{pmatrix}(s-2)^2 & s-(s-2)^2-2 & 3-s\end{pmatrix}}{(s-2)^3}0=\frac{\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\end{pmatrix}}{(s-2)^3}$$

6 Esercizio 111

Studiare il sistema

$$S : \begin{cases} \dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u \\ y = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} u \end{cases}$$

6.1 Studio Risposta Libera

Si studi la risposta libera di un sistema che ha le seguenti caratteristiche:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Il determinante di $A - \lambda$ è $\lambda^2 + \lambda$.

Gli autovalori reali sono $\lambda_i = [-1, 0]$.

Gli autovettori associati ai reali sono $u_i : [-1 : \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} 0 : \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}]$.

Da cui posso ricavare le matrici

$$U = T^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, V = T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Che mi trasformano la matrice in

$$D = TAT^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Da cui posso ricavare:

$$\Phi(t) = e^{At} = T^{-1} e^{Dt} T = T^{-1} \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} T$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 - e^{-t} \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$$

6.1.1 Osservabilità

I modi naturali osservabili sono quelli tali che

$$C \cdot u_i \neq 0$$

6.1.2 Eccitabilità

I modi naturali eccitabili sono quelli tali che

$$v_i' \cdot B \neq 0$$

6.2 Studio Osservabilità

Studiamone l'osservabilità. Calcoliamo allora O e troviamo I = ker(O):

$$O = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, |O| = 999$$

O ha rango 2 quindi il suo nucleo ha dimensione 2.
Calcolando trovo

$$I = ker(O) = []$$

2O ha rango pieno quindi finisco qui.

6.3 Studio Raggiungibilità

Ora per studiare la raggiungibilità degli stati calcolo $R = (B\ AB\ ...\ A^{n-1}B)$:

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, |R| = -1$$

Vediamo che $rango(R) = 2$ e quindi :

$$\mathfrak{R} = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right]$$

Tutti gli stati che hanno questa struttura sono, allora, raggiungibili. Mettiamo in evidenza questa struttura; cambiamo base, e vorremmo avere lo stato espresso come $z = Tx$ tale che, se x è uno stato raggiungibile, allora:

$$z_R = Tx_R = \begin{pmatrix} \star \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

E T^{-1} viene

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\widetilde{A} = TAT^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Con le matrici

$$\widetilde{A}_{11} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \widetilde{A}_{22} =)($$

e le matrici

$$\widetilde{B} = TB = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ora ne calcoliamo la raggiungibilità:

$$\widetilde{H}(t) = e^{\widetilde{A}t}\widetilde{B} = \begin{pmatrix} e^{\widetilde{A}_{11}t} & \star \\ 0 & e^{\widetilde{A}_{22}t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{B}_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\widetilde{A_{11}}t}\widetilde{B}_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Quindi infine mi viene che gli autovalori ragg sono $0, -1$, e gli irrag sono

6.4 Scomposizione di Kalman

I miei sottospazi di riferimento sono:

$$\mathfrak{I} = [], \mathfrak{R} = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right]$$

La matrice dei vettori di base di I e R è

$$\chi_1 =)($$

Ed il determinante è ininfluente.

Per quanto riguarda Chi2: $\chi_2 | \chi_2 \oplus \chi_1 = \mathfrak{R}$ è

$$\chi_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Per quanto riguarda Chi3: $\chi_3 | \chi_3 \oplus \chi_1 = \mathfrak{I}$ è

$$\chi_3 =)($$

Per quanto riguarda Chi4: $\chi_4 | \chi_1 \oplus \chi_2 \oplus \chi_3 \oplus \chi_4 = \mathbb{R}$ è

$$\chi_4 =)($$

Ora facciamo T inversa:

$$T^{-1} = (\chi_1 \ \chi_2 \ \chi_3 \ \chi_4 \ ) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

e quindi

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\widetilde{A} = TAT^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} * T^{-1} = T * \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\widetilde{B} = TB = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\widetilde{C} = CT^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$Phi(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 - e^{-t} & e^{-t} \end{pmatrix}$$

6.5 Studio Funzione di trasferimento

$$(sI - A) = \begin{pmatrix} s & -1 \\ 0 & s+1 \end{pmatrix}, |sI - A| = s\,(s+1)$$

$$\Phi(s) = (sI - A)^{-1} = \frac{\begin{pmatrix} s+1 & 1 \\ 0 & s \end{pmatrix}}{s\,(s+1)}$$

Le funzioni caratteristiche sono

$$\begin{array}{rcl} H(s) & = & \Phi(s)B \\ \Psi(s) & = & C\Phi(s) \\ W(s) & = & C(sI - A)^{-1}B \end{array}$$

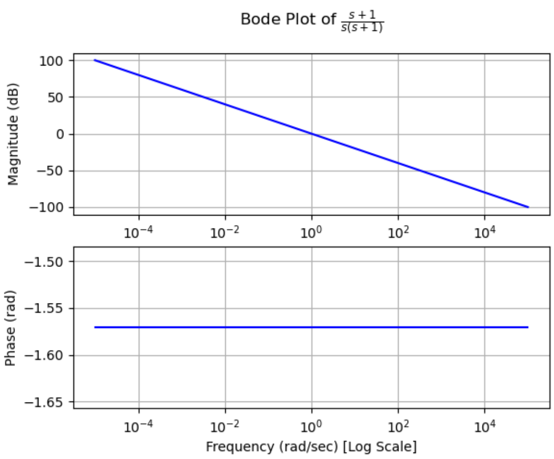
e quindi

$$H(s) = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ s \end{pmatrix}}{s\,(s+1)} \ \Psi(s) = \frac{\begin{pmatrix} s+1 & s+1 \\ 2s+2 & 2 \end{pmatrix}}{s\,(s+1)}$$

$$W(s) = \frac{\begin{pmatrix} s+1 \\ 2 \end{pmatrix}}{s\,(s+1)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{s} \\ \frac{2}{s(s+1)} \end{pmatrix}$$

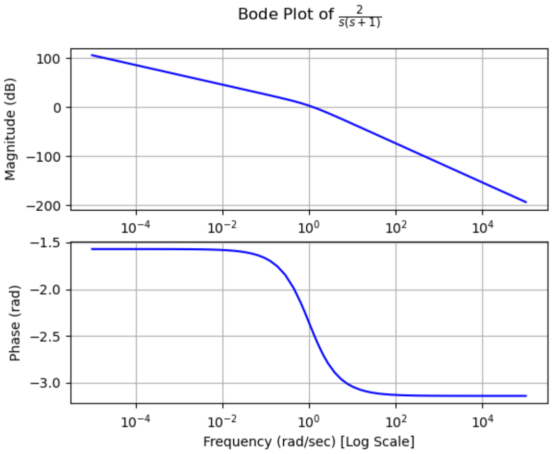
Valore $s+1$ della matrice delle funzioni di trasferimento:

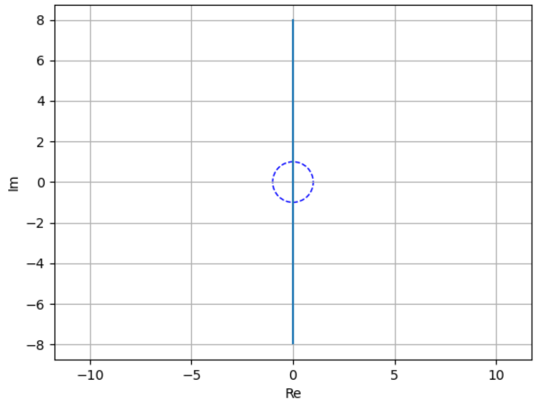
$$W(s) = \frac{s+1}{s\,(s+1)}$$



Valore 2 della matrice delle funzioni di trasferimento:

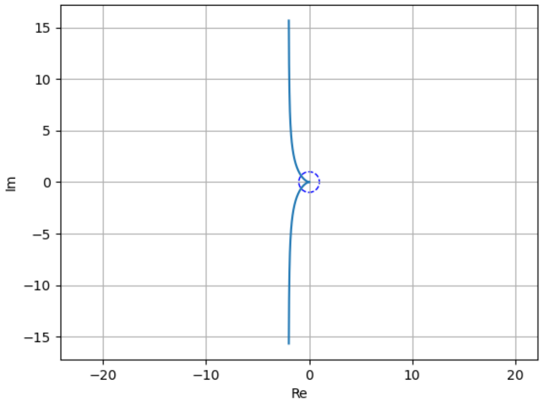
$$W(s) = \frac{2}{s\,(s+1)}$$





Valore 0 della matrice delle funzioni di trasferimento: nel tempo continuo è

$$\theta(t)$$



Valore 1 della matrice delle funzioni di trasferimento: nel tempo continuo è

$$2\left(e^{t}-1\right)e^{-t}\theta(t)$$

6.5.1 Vediamo le risposte:

7 Esercizio 122

Studiare il sistema

$$S:\begin{cases}\dot{x}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & -2\end{pmatrix}x+\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}u\\ y=\begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix}x+\begin{pmatrix}0 & 0\end{pmatrix}u\end{cases}$$

7.1 Studio Risposta Libera

Si studi la risposta libera di un sistema che ha le seguenti caratteristiche:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Il determinante di $A - \lambda$ è $\lambda^2 + 2\lambda$.

Gli autovalori reali sono $\lambda_i = [-2, 0]$.

Gli autovettori associati ai reali sono $u_i : [-2 : \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} 0 : \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}]$.

Da cui posso ricavare le matrici

$$U = T^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, V = T = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Che mi trasformano la matrice in

$$D = TAT^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Da cui posso ricavare:

$$\Phi(t) = e^{At} = T^{-1} e^{Dt} T = T^{-1} \begin{pmatrix} e^{-2t} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} T$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} - \frac{e^{-2t}}{2} & e^{-2t} \end{pmatrix}$$

7.1.1 Osservabilità

I modi naturali osservabili sono quelli tali che

$$C \cdot u_i \neq 0$$

7.1.2 Eccitabilità

I modi naturali eccitabili sono quelli tali che

$$v_i' \cdot B \neq 0$$

7.2 Studio Osservabilità

Studiamone l'osservabilità. Calcoliamo allora O e troviamo I = ker(O):

$$O = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, |O| = -1$$

Eccezione 1: O ha rango pieno quindi finisco qui.

7.3 Studio Raggiungibilità

Ora per studiare la raggiungibilità degli stati calcolo $R = (B \ AB \ ... \ A^{n-1}B)$:

$$R = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}, |R| = 999$$

Vediamo che $rango(R) = 2$ e quindi :

$$\mathfrak{R} = \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$$

Tutti gli stati che hanno questa struttura sono, allora, raggiungibili. Mettiamo in evidenza questa struttura; cambiamo base, e vorremmo avere lo stato espresso come $z = Tx$ tale che, se x è uno stato raggiungibile, allora:

$$z_R = Tx_R = \begin{pmatrix} \star \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

E T^{-1} viene

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow T = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\widetilde{A} = TAT^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Con le matrici

$$\widetilde{A}_{11} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \widetilde{A}_{22} \ni ($$

e le matrici

$$\widetilde{B} = TB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ora ne calcoliamo la raggiungibilità:

$$\widetilde{H}(t) = e^{\widetilde{A}t}\widetilde{B} = \begin{pmatrix} e^{\widetilde{A}_{11}t} & \star \\ 0 & e^{\widetilde{A}_{22}t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{B}_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\widetilde{A_{11}}t}\widetilde{B}_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Quindi infine mi viene che gli autovalori ragg sono $0, -2$, e gli irrag sono

7.4 Scomposizione di Kalman

I miei sottospazi di riferimento sono:

$$\mathfrak{I} = [\,], \mathfrak{R} = \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$$

La matrice dei vettori di base di I e R è

$$\chi_1 \ni ($$

Ed il determinante è ininfluente.

Per quanto riguarda Chi2: $\chi_2 | \chi_2 \oplus \chi_1 = \mathfrak{R}$ è

$$\chi_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Per quanto riguarda Chi3: $\chi_3 | \chi_3 \oplus \chi_1 = \mathfrak{I}$ è

$$\chi_3 \ni ($$

Per quanto riguarda Chi4: $\chi_4 | \chi_1 \oplus \chi_2 \oplus \chi_3 \oplus \chi_4 = \mathbb{R}$ è

$$\chi_4 \ni ($$

Ora facciamo T inversa:

$$T^{-1} = (\chi_1 \ \chi_2 \ \chi_3 \ \chi_4 \ ) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

e quindi

$$T = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\widetilde{A} = TAT^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} * T^{-1} = T * \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\widetilde{B} = TB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\widetilde{C} = CT^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Phi(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{pmatrix}$$

7.5 Studio Funzione di trasferimento

$$(sI - A) = \begin{pmatrix} s & 0 \\ -1 & s+2 \end{pmatrix}, |sI - A| = s\,(s+2)$$

$$\Phi(s) = (sI - A)^{-1} = \frac{\begin{pmatrix} s+2 & 0 \\ 1 & s \end{pmatrix}}{s\,(s+2)}$$

Le funzioni caratteristiche sono

$$\begin{aligned} H(s) &= \Phi(s)B \\ \Psi(s) &= C\Phi(s) \\ W(s) &= C(sI - A)^{-1}B \end{aligned}$$

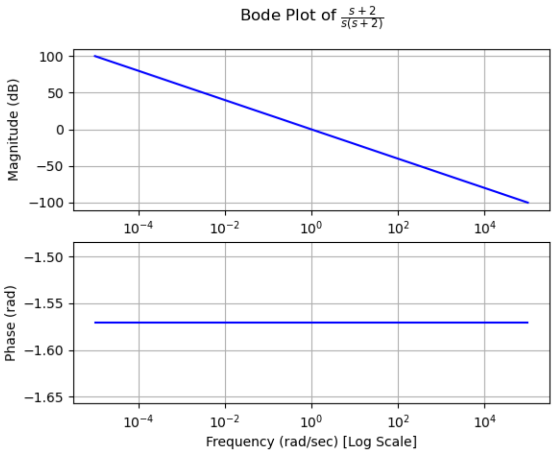
e quindi

$$H(s) = \frac{\begin{pmatrix} 2s+4 & 0 \\ s+2 & s \end{pmatrix}}{s\,(s+2)} \quad \Psi(s) = \frac{\begin{pmatrix} 1 & s \end{pmatrix}}{s\,(s+2)}$$

$$W(s) = \frac{\begin{pmatrix} s+2 & s \end{pmatrix}}{s\,(s+2)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s+2} \end{pmatrix}$$

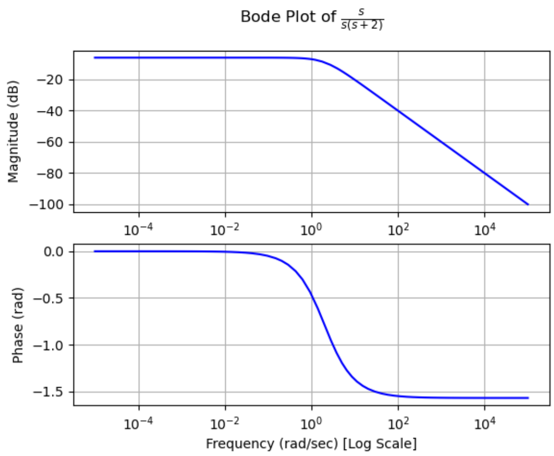
Valore $s+2$ della matrice delle funzioni di trasferimento:

$$W(s) = \frac{s+2}{s\,(s+2)}$$



Valore s della matrice delle funzioni di trasferimento:

$$W(s) = \frac{s}{s\,(s+2)}$$



7.5.1 Vediamo le risposte:

8 Esercizio 133

Studiare il sistema

$$S: \begin{cases} \dot{x} = \begin{pmatrix} -10 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix} u \\ y = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix} u \end{cases}$$

8.1 Studio Risposta Libera

Si studi la risposta libera di un sistema che ha le seguenti caratteristiche:

$$A = \begin{pmatrix} -10 \end{pmatrix}$$

Il determinante di $A - \lambda$ è $-\lambda - 10$.

Gli autovalori reali sono $\lambda_i = [-10]$.

Gli autovettori associati ai reali sono $u_i : [-10 : \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}]$.

Da cui posso ricavare le matrici

$$U = T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}, V = T = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}$$

Che mi trasformano la matrice in

$$D = TAT^{-1} = \begin{pmatrix} -10 \end{pmatrix}$$

Da cui posso ricavare:

$$\Phi(t) = e^{At} = T^{-1}e^{Dt}T = T^{-1}\begin{pmatrix} e^{-10t} \end{pmatrix} T$$

$$= \begin{pmatrix} e^{-10t} \end{pmatrix}$$

L'evoluzione libera a partire dallo stato 0 è

$$x_L = (\sum_{i=0}^{i=n} e^{\lambda_i t} u_i v_i) x_0 = \Phi(t) \cdot x_0 = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}$$

La risposta libera è

$$y_L = \Psi(t) x_0 = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}$$

8.1.1 Osservabilità

I modi naturali osservabili sono quelli tali che

$$C \cdot u_i \neq 0$$

8.1.2 Eccitabilità

I modi naturali eccitabili sono quelli tali che

$$v_i' \cdot B \neq 0$$

8.2 Studio Funzione di trasferimento

$$(sI - A) = \begin{pmatrix} s + 10 \end{pmatrix}, |sI - A| = s + 10$$

$$\Phi(s) = (sI - A)^{-1} = \frac{\begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}}{s + 10}$$

Le funzioni caratteristiche sono

$$\begin{aligned} H(s) &= \Phi(s)B \\ \Psi(s) &= C\Phi(s) \\ W(s) &= C(sI - A)^{-1}B \end{aligned}$$

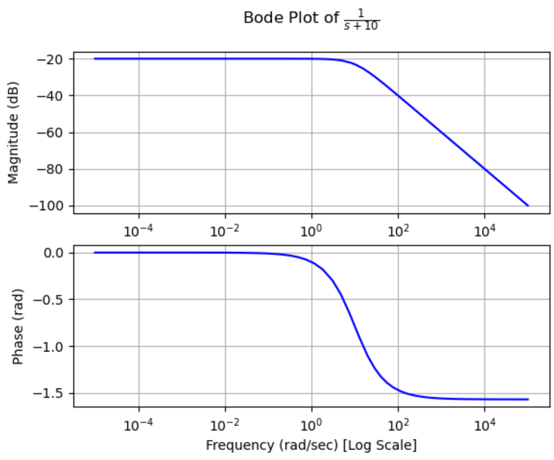
e quindi

$$H(s) = \frac{\begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}}{s + 10} \; \Psi(s) = \frac{\begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}}{s + 10}$$

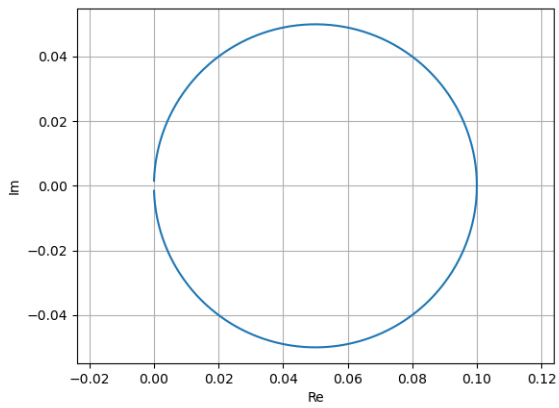
$$W(s) = \frac{\begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}}{s + 10} = \begin{pmatrix} \frac{1}{s+10} \end{pmatrix}$$

Il grafico di bode è:

$$W(s) = \frac{1}{s + 10}$$



Il grafico di Nyquist è:



nel tempo continuo è

$$e^{-10t}\theta\left(t\right)$$

8.2.1 Vediamo le risposte:

$$y_L = \Psi(s)x_0 = \frac{\left(1\right)}{s+10}0 = \frac{\left(0\right)}{s+10}$$

9 Esercizio 144

Studiare il sistema

$$S: \begin{cases} \dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u \\ y = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix} u \end{cases}$$

9.1 Studio Risposta Libera

Si studi la risposta libera di un sistema che ha le seguenti caratteristiche:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Il determinante di $A - \lambda$ è $-\lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda + 2$.

Gli autovalori reali sono $\lambda_i = [-2, -1, 1]$.

Gli autovettori associati ai reali sono $u_i : [-2 : \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 1 : \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} 1 : \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}]$.

Da cui posso ricavare le matrici

$$U = T^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, V = T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Che mi trasformano la matrice in

$$D = TAT^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Da cui posso ricavare:

$$\Phi(t) = e^{At} = T^{-1}e^{Dt}T = T^{-1}\begin{pmatrix} e^{-2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{t} \end{pmatrix} T$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{e^t}{2} + \frac{e^{-t}}{2} & \frac{e^t}{2} - \frac{e^{-t}}{2} & 0 \\ \frac{e^t}{2} - \frac{e^{-t}}{2} & \frac{e^t}{2} + \frac{e^{-t}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2t} \end{pmatrix}$$

9.1.1 Osservabilità

I modi naturali osservabili sono quelli tali che

$$C \cdot u_i \neq 0$$

9.1.2 Eccitabilità

I modi naturali eccitabili sono quelli tali che

$$v_i' \cdot B \neq 0$$

9.2 Studio Osservabilità

Studiamone l'osservabilità. Calcoliamo allora O e troviamo I = ker(O):

$$O = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, |O| = 0$$

O ha rango 1 quindi il suo nucleo ha dimensione 2.
Calcolando trovo

$$I = ker(O) = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$$

E T^{-1} viene

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calcoliamo allora le matrici del sistema, e vedremo che risultano partizionate come avevamo previsto:

$$\widetilde{A} = TAT^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\widetilde{C} = CT^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (0 \;\; \widetilde{C}_2)$$

Con le matrici

$$A_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, A_{22} = \begin{pmatrix} -1 \end{pmatrix}$$

Quindi infine mi viene che gli autovalori osservabili sono -1 e gli inosservabili sono $1 \;\; -2$.

9.3 Studio Raggiungibilità

Ora per studiare la raggiungibilità degli stati calcolo $R = (B\ AB\ ...\ A^{n-1}B)$:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}, |R| = 3$$

Vediamo che $rango(R) = 3$ e quindi :

$$\mathfrak{R} = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \right]$$

Tutti gli stati che hanno questa struttura sono, allora, raggiungibili. Mettiamo in evidenza questa struttura; cambiamo base, e vorremmo avere lo stato espresso come $z = Tx$ tale che, se x è uno stato raggiungibile, allora:

$$z_R = Tx_R = \begin{pmatrix} \star \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

E T^{-1} viene

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} \Longrightarrow T = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$\widetilde{A} = TAT^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Con le matrici

$$\widetilde{A}_{11} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \widetilde{A}_{22} =)\,($$

e le matrici

$$\widetilde{B} = TB = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ora ne calcoliamo la raggiungibilità:

$$\widetilde{H}(t) = e^{\widetilde{A}t}\widetilde{B} = \begin{pmatrix} e^{\widetilde{A}_{11}t} & \star \\ 0 & e^{\widetilde{A}_{22}t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{B}_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\widetilde{A}_{11}t}\widetilde{B}_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Quindi infine mi viene che gli autovalori ragg sono $1, -1, -2$, e gli irrag sono

9.4 Scomposizione di Kalman

I miei sottospazi di riferimento sono:

$$\mathfrak{I} = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right], \mathfrak{R} = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \right]$$

La matrice dei vettori di base di I e R è

$$\chi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ci sono più righe che colonne quindi sicuro l'intersezione c'è.

Per quanto riguarda Chi2: $\chi_2 | \chi_2 \oplus \chi_1 = \mathfrak{R}$ è

$$\chi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Per quanto riguarda Chi3: $\chi_3|\chi_3 \oplus \chi_1 = \mathfrak{I}$ è

$$\chi_3 \ni ($$

Per quanto riguarda Chi4: $\chi_4|\chi_1 \oplus \chi_2 \oplus \chi_3 \oplus \chi_4 = \mathbb{R}$ è

$$\chi_4 \ni ($$

Ora facciamo T inversa:

$$T^{-1} = (\chi_1 \ \chi_2 \ \chi_3 \ \chi_4 \ ) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

e quindi

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\widetilde{A} = TAT^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} * T^{-1} = T * \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\widetilde{B} = TB = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\widetilde{C} = CT^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Phi(t) = \begin{pmatrix} e^t & 0 & \frac{e^t}{2} - \frac{e^{-t}}{2} \\ e^t - e^{-2t} & e^{-2t} & \frac{e^t}{2} - \frac{3e^{-t}}{2} + e^{-2t} \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$$

9.5 Studio Funzione di trasferimento

$$(sI - A) = \begin{pmatrix} s & -1 & 0 \\ -1 & s & 0 \\ 0 & 0 & s+2 \end{pmatrix}, |sI - A| = (s-1)(s+1)(s+2)$$

$$\Phi(s) = (sI - A)^{-1} = \frac{\begin{pmatrix} s(s+2) & s+2 & 0 \\ s+2 & s(s+2) & 0 \\ 0 & 0 & s^2-1 \end{pmatrix}}{(s-1)(s+1)(s+2)}$$

Le funzioni caratteristiche sono

$$\begin{array}{rcl} H(s) & = & \Phi(s)B \\ \Psi(s) & = & C\Phi(s) \\ W(s) & = & C(sI-A)^{-1}B \end{array}$$

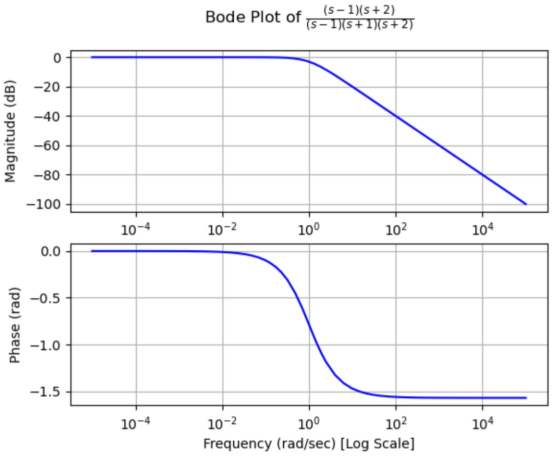
e quindi

$$H(s) = \frac{\begin{pmatrix} s(s+2) \\ s+2 \\ s^2-1 \end{pmatrix}}{(s-1)(s+1)(s+2)} \quad \Psi(s) = \frac{\begin{pmatrix} s^2+s-2 & -s^2-s+2 & 0 \end{pmatrix}}{(s-1)(s+1)(s+2)}$$

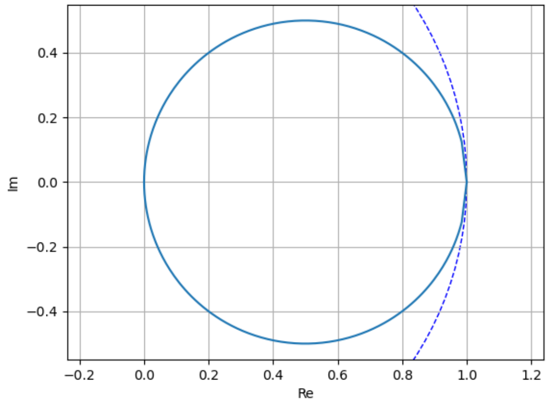
$$W(s) = \frac{\left(s^2+s-2\right)}{(s-1)(s+1)(s+2)} = \left(\frac{1}{s+1}\right)$$

Il grafico di bode è:

$$W(s) = \frac{(s-1)(s+2)}{(s-1)(s+1)(s+2)}$$



Il grafico di Nyquist è:



nel tempo continuo è

$$e^{-t}\theta(t)$$

9.5.1 Vediamo le risposte: