

Esercizi

Michele Leigheb

Contents

1 Complessi

- $2^{(a+ib)} = 2^a(\cos(b \ln(2)) + i \sin(b \ln(2)))$
- $3^{(a+ib)} = 3^a(\cos(b \ln(3)) + i \sin(b \ln(3)))$
- $e^{(a+ib)} = e^a(\cos(b)) + i \sin(b)$
- $\alpha^{(a+ib)} = e^{\alpha}(\cos(b \ln(\alpha)) + i \sin(b \ln(\alpha)))$

2 Esercizi

3 Esercizio 158

Studiare il sistema

$$S: \begin{cases} \dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} u \\ y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix} u \end{cases}$$

3.1 Studio Risposta Libera

Si studi la risposta libera di un sistema che ha le seguenti caratteristiche:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Il determinante di $A - \lambda$ è $-\lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda$.

Gli autovalori reali sono $\lambda_i = [-1, 0]$.

Gli autovettori associati ai reali sono $u_i : [-1 : (\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}) 0 : \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}]$.

Da cui posso ricavare le matrici

$$U = T^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, V = T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Che mi trasformano la matrice in

$$D = TAT^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Da cui posso ricavare:

$$\begin{aligned} \Phi(t) &= e^{At} = T^{-1}e^{Dt}T = T^{-1} \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} T \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 - e^{-t} & 1 - e^{-t} \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\Psi(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 - e^{-t} & 1 \end{pmatrix}, H(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, W(t) = (1)$$

3.1.1 Osservabilità

I modi naturali osservabili sono quelli tali che

$$C \cdot u_i \neq 0$$

3.1.2 Eccitabilità

I modi naturali eccitabili sono quelli tali che

$$v'_i \cdot B \neq 0$$

3.2 Studio Osservabilità

Studiamone l'osservabilità. Calcoliamo allora O e troviamo $\mathfrak{J} = \ker(O)$:

$$O = \begin{pmatrix} C \\ \dots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, |O| = 0$$

O ha rango 2 quindi il suo nucleo ha dimensione 1.

Calcolando trovo

$$I = \ker(O) = \left[\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$$

E T^{-1} viene

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcoliamo allora le matrici del sistema, e vedremo che risultano partizionate come avevamo previsto:

$$\tilde{A} = TAT^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{C} = CT^{-1} = (1 \ 0 \ 1) \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (0 \ 0 \ 1) = (0 \ \tilde{C}_2)$$

Con le matrici

$$A_{11} = (-1), A_{22} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Quindi infine mi viene che gli autovalori osservabili sono $-1 \ 0$ e gli inosservabili sono -1 .

3.3 Studio Raggiungibilità

Ora per studiare la raggiungibilità degli stati calcolo $R = (B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B)$:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, |R| = 0$$

Vediamo che $\text{rango}(R) = 1$ e quindi :

$$\mathfrak{R} = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$$

Tutti gli stati che hanno questa struttura sono, allora, raggiungibili. Mettiamo in evidenza questa struttura; cambiamo base, e vorremmo avere lo stato espresso come $z = Tx$ tale che, se x è uno stato raggiungibile, allora:

$$z_R = Tx_R = \begin{pmatrix} \star \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

E T^{-1} viene

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \implies T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{A} = TAT^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Con le matrici

$$\tilde{A}_{11} = (0), \tilde{A}_{22} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

e le matrici

$$\tilde{B} = TB = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ora ne calcoliamo la raggiungibilità:

$$\tilde{H}(t) = e^{\tilde{A}t}\tilde{B} = \begin{pmatrix} e^{\tilde{A}_{11}t} & \star \\ 0 & e^{\tilde{A}_{22}t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{B}_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\tilde{A}_{11}t}\tilde{B}_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Quindi infine mi viene che gli autovalori ragg sono 0, e gli irrag sono -1 ,

3.4 Scomposizione di Kalman

I miei sottospazi di riferimento sono:

$$\mathfrak{J} = \left[\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right], \mathfrak{R} = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$$

La matrice dei vettori di base di I e R è

$$\chi_1 \Rightarrow ($$

Ed il determinante è influente.

Per quanto riguarda Chi2: $\chi_2 | \chi_2 \oplus \chi_1 = \mathfrak{R}$ è

$$\chi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Per quanto riguarda Chi3: $\chi_3 | \chi_3 \oplus \chi_1 = \mathfrak{J}$ è

$$\chi_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Per quanto riguarda Chi4: $\chi_4 | \chi_1 \oplus \chi_2 \oplus \chi_3 \oplus \chi_4 = \mathbb{R}$ è

$$\chi_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ora facciamo **T** inversa:

$$T^{-1} = (\chi_1 \ \chi_2 \ \chi_3 \ \chi_4) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

e quindi

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{A} = TAT^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} * T^{-1} = T * \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{B} = TB = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{C} = CT^{-1} = (1 \ 0 \ 0)$$

$$Phi(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 - e^{-t} \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$$

3.5 Studio Funzione di trasferimento

$$(sI - A) = \begin{pmatrix} s & -1 & -1 \\ 0 & s+1 & 0 \\ 0 & 0 & s+1 \end{pmatrix}, |sI - A| = s(s+1)^2$$

$$\Phi(s) = (sI - A)^{-1} = \frac{\begin{pmatrix} (s+1)^2 & s+1 & s+1 \\ 0 & s(s+1) & 0 \\ 0 & 0 & s(s+1) \end{pmatrix}}{s(s+1)^2}$$

Le funzioni caratteristiche sono

$$\begin{aligned} H(s) &= \Phi(s)B \\ \Psi(s) &= C\Phi(s) \\ W(s) &= C(sI - A)^{-1}B \end{aligned}$$

$$H(s) = \begin{pmatrix} (s+1)^2 & s+1 & s+1 \\ 0 & s(s+1) & 0 \\ 0 & 0 & s(s+1) \end{pmatrix} \cdot \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}{s(s+1)^2} = \frac{\begin{pmatrix} (s+1)^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}{s(s+1)^2}$$

$$\Psi(s) = \frac{(1 \ 0 \ 1)}{s(s+1)^2} \cdot \begin{pmatrix} (s+1)^2 & s+1 & s+1 \\ 0 & s(s+1) & 0 \\ 0 & 0 & s(s+1) \end{pmatrix} = \frac{((s+1)^2 \ s+1 \ s(s+1) + s+1)}{s(s+1)^2}$$

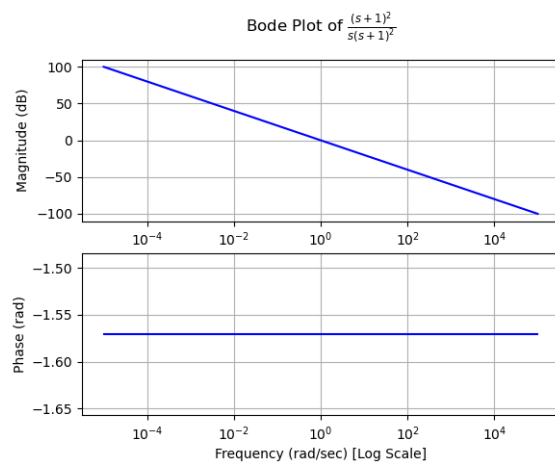
e quindi

$$H(s) = \frac{\begin{pmatrix} (s+1)^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}{s(s+1)^2} \Psi(s) = \frac{((s+1)^2 \ s+1 \ s(s+1) + s+1)}{s(s+1)^2}$$

$$W(s) = \frac{((s+1)^2)}{s(s+1)^2} = \left(\frac{1}{s}\right)$$

Il grafico di bode è:

$$W(s) = \frac{(s+1)^2}{s(s+1)^2}$$



3.5.1 Vediamo le risposte: