Esercizi

Michele Leigheb

Contents

1 Complessi

- $2^{(a+ib)} = 2^a(\cos(b\ln(2)) + i\sin(b\ln(2)))$
- $3^{(a+ib)} = 3^a(\cos(b\ln(3)) + i\sin(b\ln(3)))$
- $e^{(a+ib)} = e^a(\cos(b)) + i\sin(b)$
- $\alpha^{(a+ib)} = e^\alpha(\cos(b)\ln(\alpha)) + i\sin(b\ln(\alpha))$

2 Esercizi

3 Esercizio 157

Studiare il sistema

$$S : \begin{cases} \dot{x} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} u \\ y = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} u \end{cases}$$

3.1 Studio Risposta Libera

Si studi la risposta libera di un sistema che ha le seguenti caratteristiche:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Il determinante di $A - \lambda$ è $-\lambda^3(-\lambda - 1)$.

Gli autovalori reali sono $\lambda_i = [-1, 0]$.

Gli autovettori associati ai reali sono $u_i : [-1 : \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} 0 : (\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix})]$. La matrice A non è diagonalizzabile, quindi devo fare Jordan.

Da cui posso ricavare le matrici

$$U = T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, V = T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Che mi trasformano la matrice in

$$D = TAT^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Da cui posso ricavare:

$$\Phi(t) = e^{At} = T^{-1}e^{Dt}T = T^{-1}\begin{pmatrix} e^{-t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & t & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} T$$

$$= \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Psi(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 & t \end{pmatrix}, H(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, W(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 1 & t \end{pmatrix}$$

3.1.1 Osservabilità

I modi naturali osservabili sono quelli tali che

$$C \cdot u_i \neq 0$$

3.1.2 Eccitabilità

I modi naturali eccitabili sono quelli tali che

$$v_i' \cdot B \neq 0$$

3.2 Studio Osservabilità

Studiamone l'osservabilità. Calcoliamo allora O e troviamo $\mathfrak{I} = \ker(O)$:

$$O = \begin{pmatrix} C \\ ... \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, |O| = 999$$

O ha rango 3 quindi il suo nucleo ha dimensione 5.
Calcolando trovo

$$I = ker(O) = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$$

E T^{-1} viene

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcoliamo allora le matrici del sistema, e vedremo che risultano partizionate come avevamo previsto:

$$\widetilde{A} = TAT^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\widetilde{C} = CT^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = (0 \ \ \widetilde{C}_2)$$

Con le matrici

$$A_{11} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, A_{22} \Rrightarrow ($$

Quindi infine mi viene che gli autovalori osservabili sono e gli inosservabili sono -1 0 .

3.3 Studio Raggiungibilità

Ora per studiare la raggiungibilità degli stati calcolo $R = (B \ AB \ ... \ A^{n-1}B)$:

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, |R| = 999$$

Vediamo che $rango(R) = 3$ e quindi :

$$\mathfrak{R} = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$$

Tutti gli stati che hanno questa struttura sono, allora, raggiungibili. Mettiamo in evidenza questa struttura; cambiamo base, e vorremmo avere lo stato espresso come $z = Tx$ tale che, se x è uno stato raggiungibile, allora:

$$z_R = Tx_R = \begin{pmatrix} \star \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

E T^{-1} viene

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\widetilde{A} = TAT^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Con le matrici

$$\widetilde{A}_{11} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \widetilde{A}_{22} = \begin{pmatrix} -1 \end{pmatrix}$$

e le matrici

$$\widetilde{B} = TB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ora ne calcoliamo la raggiungibilità:

$$\widetilde{H}(t) = e^{\widetilde{A}t}\widetilde{B} = \begin{pmatrix} e^{\widetilde{A}_{11}t} & \star \\ 0 & e^{\widetilde{A}_{22}t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{B}_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\widetilde{A_{11}}t}\widetilde{B}_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Quindi infine mi viene che gli autovalori ragg sono 0, e gli irrag sono -1,

3.4 Scomposizione di Kalman

I miei sottospazi di riferimento sono:

$$\mathfrak{I} = \left[\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\right], \mathfrak{R} = \left[\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right]$$

La matrice dei vettori di base di I e R è

$$\chi_1 \ni ($$

Ed il determinante è ininfluente.

Per quanto riguarda Chi2: $\chi_2 | \chi_2 \oplus \chi_1 = \mathfrak{R}$ è

$$\chi_2 = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1\\0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

Per quanto riguarda Chi3: $\chi_3 | \chi_3 \oplus \chi_1 = \mathfrak{I}$ è

$$\chi_3 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

Per quanto riguarda Chi4: $\chi_4 | \chi_1 \oplus \chi_2 \oplus \chi_3 \oplus \chi_4 = \mathbb{R}$ è

$$\chi_4 \ni ($$

Ora facciamo T inversa:

$$T^{-1} = (\chi_1 \ \chi_2 \ \chi_3 \ \chi_4 \ ) = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 1\\1 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & 0\\0 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

e quindi

$$T = \begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 1\\0 & 0 & 1 & 0\\1 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\widetilde{A} = TAT^{-1} = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 1\\-1 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} * T^{-1} = T * \begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & -1\\0 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

$$\widetilde{B} = TB = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\\0 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\widetilde{C} = CT^{-1} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

$$Phi(t) = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0 & 0\\0 & t & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & e^{-t}\end{pmatrix}$$

3.5 Studio Funzione di trasferimento

$$(sI-A)=\begin{pmatrix} s+1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s & -1 \\ 0 & 0 & 0 & s \end{pmatrix}, |sI-A|=s^3\left(s+1\right)$$

$$\Phi(s)=(sI-A)^{-1}=\frac{\begin{pmatrix} s^3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s^2\left(s+1\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s^2\left(s+1\right) & s\left(s+1\right) \\ 0 & 0 & 0 & s^2\left(s+1\right) \end{pmatrix}}{s^3\left(s+1\right)}$$

Le funzioni caratteristiche sono

$$\begin{aligned} H(s) &= \Phi(s)B \\ \Psi(s) &= C\Phi(s) \\ W(s) &= C(sI-A)^{-1}B \end{aligned}$$

$$H(s)=\begin{pmatrix} s^3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s^2\left(s+1\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s^2\left(s+1\right) & s\left(s+1\right) \\ 0 & 0 & 0 & s^2\left(s+1\right) \end{pmatrix}\cdot\frac{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}{s^3\left(s+1\right)}=\frac{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ s^2\left(s+1\right) & 0 \\ 0 & s\left(s+1\right) \\ 0 & s^2\left(s+1\right) \end{pmatrix}}{s^3\left(s+1\right)}$$

$$\Psi(s)=\frac{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}{s^3\left(s+1\right)}\cdot\begin{pmatrix} s^3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s^2\left(s+1\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s^2\left(s+1\right) & s\left(s+1\right) \\ 0 & 0 & 0 & s^2\left(s+1\right) \end{pmatrix}=\frac{\begin{pmatrix} 0 & s^2\left(s+1\right) & s^2\left(s+1\right) & s\left(s+1\right) \\ 0 & 0 & s^2\left(s+1\right) & s\left(s+1\right) \end{pmatrix}}{s^3\left(s+1\right)}$$

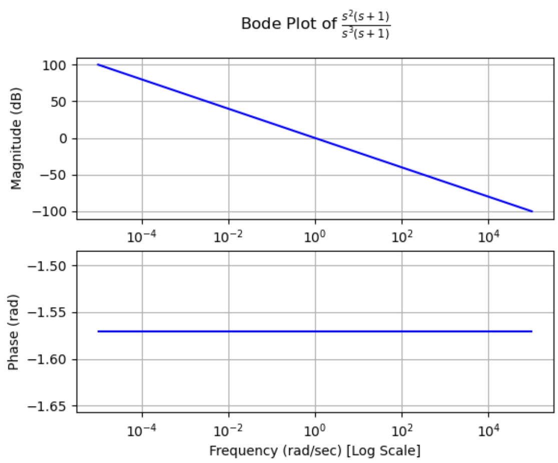
e quindi

$$H(s)=\frac{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ s^2\left(s+1\right) & 0 \\ 0 & s\left(s+1\right) \\ 0 & s^2\left(s+1\right) \end{pmatrix}}{s^3\left(s+1\right)}\quad \Psi(s)=\frac{\begin{pmatrix} 0 & s^2\left(s+1\right) & s^2\left(s+1\right) & s\left(s+1\right) \\ 0 & 0 & s^2\left(s+1\right) & s\left(s+1\right) \end{pmatrix}}{s^3\left(s+1\right)}$$

$$W(s)=\frac{\begin{pmatrix} s^2\left(s+1\right) & s\left(s+1\right) \\ s^3\left(s+1\right) & s\left(s+1\right) \end{pmatrix}}{s^3\left(s+1\right)}=\begin{pmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s^2} \\ 1 & \frac{1}{s^2} \end{pmatrix}$$

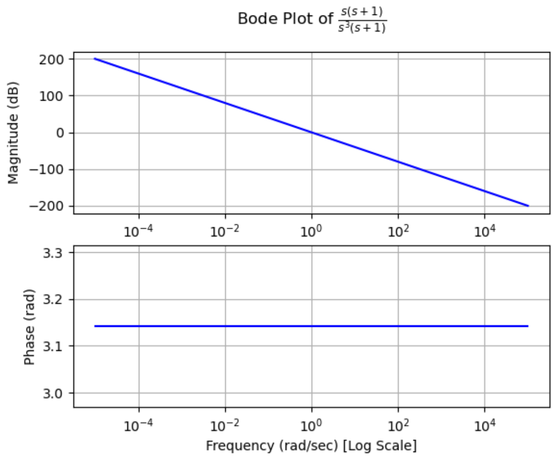
Valore $s^2\left(s+1\right)$ della matrice delle funzioni di trasferimento:

$$W(s)=\frac{s^2\left(s+1\right)}{s^3\left(s+1\right)}$$



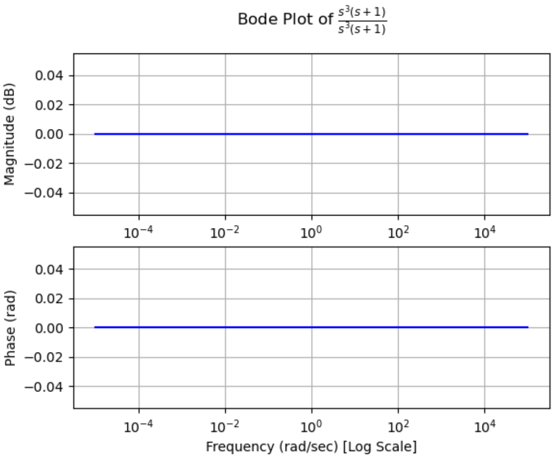
Valore $s\left(s+1\right)$ della matrice delle funzioni di trasferimento:

$$W(s)=\frac{s\left(s+1\right)}{s^3\left(s+1\right)}$$



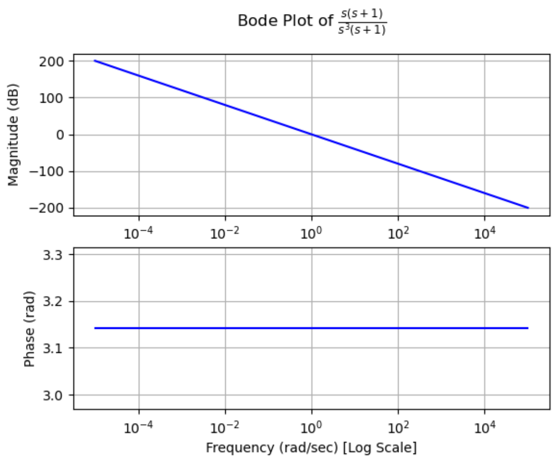
Valore $s^3\,(s+1)$ della matrice delle funzioni di trasferimento:

$$W(s) = \frac{s^3\,(s+1)}{s^3\,(s+1)}$$



Valore $s\,(s+1)$ della matrice delle funzioni di trasferimento:

$$W(s) = \frac{s\,(s+1)}{s^3\,(s+1)}$$



3.5.1 Vediamo le risposte: