

# Domande Teoriche Esame TDS

Federico Coccarelli - Iris Curioso- Michele Leigheb

Gennaio 2022

## Contents

<b>1</b>	<b>Domande di Teoria</b>	<b>3</b>
1.1	Forma di Kalman di un sistema . . . . .	3
1.2	Dato un sistema in forma esplicita, dimostra che il sistema è lineare . . . . .	3
1.3	Rappresentazione per sistemi a tempo discreto . . . . .	4
1.4	Definizione smorzamento e pulsazione naturale . . . . .	5
1.5	Problema della realizzazione . . . . .	5
1.6	Relazione tra poli di $W(s)$ e gli autovalori . . . . .	5
1.7	Scomposizione canonica rispetto alla raggiungibilità . . . . .	6
1.8	Definire eccitabilità di un modo naturale e dimostrarne la condizione. Come sono legate l'eccitabilità dei modi naturali con la raggiungibilità del sistema?	6
1.9	Legame tra raggiungibilità del sistema e eccitabilità dei modi . . . . .	6
1.10	I modi naturali dei sistemi lineari a tempo continuo: definizione e parametri caratteristici . . . . .	6
1.11	Modi naturali per sistemi a tempo discreto . . . . .	7
1.12	Osservabilità nei sistemi lineari . . . . .	8
1.13	Perché $A_{21}$ viene zero sempre nella forza canonica osservabile dopo il cambio di base . . . . .	8
1.14	L'osservabilità dei sistemi lineari a tempo discreto: definizione e condizioni .	9
1.15	Per un sistema tempo discreto dimostrare che l'insieme degli stati inosservabili è : . . . . .	9
1.16	Definizione di raggiungibilità di uno stato; caratterizzare l'insieme degli stati raggiungibili per sistemi dinamici lineari stazionari; confrontare il caso tempo continuo e tempo discreto . . . . .	9
1.17	Dimostrazione che data un'evoluzione da $\mathbf{x}(t_0)$ a $\mathbf{x}(t)$ , vale la stessa da $\mathbf{x}(t_1)$ con $t_0 < t_1 < t$ . . . . .	10
1.18	Definizione di guadagno e interpretazione fisica . . . . .	11
1.19	Definizione di raggiungibilità ed inosservabilità; caratterizzazione e proprietà degli insiemi di tali stati . . . . .	11
1.20	Può un sistema lineare essere caratterizzato da modi naturali aventi la stessa legge di moto? . . . . .	12
1.21	Dato un sistema a tempo continuo $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$ con $\mathbf{D} = \mathbf{0}$ , $\Lambda$ l'insieme degli autovalori, $\Lambda_e$ e $\Lambda_o$ gli insiemi degli autovalori associati ai modi eccitabili e osservabili. Dimostrare che $\Lambda_e \cap \Lambda_o = \emptyset \implies \mathbf{W}(t) = \mathbf{0}$ . . . . .	12

1.22	Il ruolo dell'osservabilità nella ricostruzione del comportamento interno . . .	12
1.23	$W(t)$ , $W(s)$ e $W(j\omega)$ : cosa rappresentano e qual è il loro significato fisico. . .	12
1.24	Scrivere un sistema (cioè scrivere le matrici $A, B, C$ ) in forma canonica osservabile con $n = 3, p = q = 1$ . Determinare un cambio di base per metterlo in forma canonica raggiungibile . . . . .	13
<b>2</b>	<b>Passaggi di Rappresentazione</b>	<b>13</b>
2.1	Un sistema dinamico può esser rappresentato tramite un modello implicito o esplicito. (a) Illustrare i diversi vantaggi e svantaggi delle due rappresentazioni; (b) Per sistemi a tempo discreto lineari e stazionari, indicare i passaggi matematici che permettono di passare da una rappresentazione all'altra e viceversa. . . . . .	13
2.2	Dimostrazione passaggio da forma esplicita a implicita . . . . .	14
2.3	Dimostrazione passaggio da forma implicita a esplicita . . . . .	14
2.4	Sistema a tempo discreto equivalente ad un dato sistema a tempo continuo .	15
2.5	Come si passa dalla rappresentazione implicita a quella esplicita nel tempo discreto . . . . .	16
2.6	Come si passa dalla rappresentazione esplicita a quella implicita nel tempo discreto . . . . .	16
2.7	Come si passa da rappresentazione a tempo continuo a rappresentazione con Laplace . . . . .	17
2.8	Come si passa da rappresentazione a tempo discreto a rappresentazione con la trasformata Zeta . . . . .	17
<b>3</b>	<b>Stabilità</b>	<b>18</b>
3.1	Studiare la stabilità di un sistema non lineare . . . . .	18
3.2	Enunciato e dimostrazione teorema di Nyquist . . . . .	18
3.2.1	Dimostrazione: . . . . .	19
3.3	Definizione punto di equilibrio . . . . .	21
3.4	Definizione formale di stabilità di un punto di equilibrio . . . . .	21
3.5	Definizione, condizioni e criteri di stabilità interna per sistemi lineari: . . . .	21
3.6	Relazioni tra stabilità esterna e interna . . . . .	22
3.7	Stabilità esterna nello stato zero . . . . .	22
3.8	Definizione di stabilità esterna e condizioni . . . . .	22
<b>4</b>	<b>Dimostrazioni di risposte a regime permanente</b>	<b>22</b>
4.1	La risposta a regime permanente: definizione e condizioni di esistenza . . . .	22
4.2	Risposta a regime permanente ad ingressi sinusoidali per sistemi a tempo continuo . . . . .	23
4.3	Dimostrare la formula della risposta a regime permanente all'ingresso $\mathbf{u}(k) = \sin(\theta k)$ per un sistema a tempo discreto. . . . .	23
4.4	Si dimostri che, se esiste, la risposta a regime permanente a $\mathbf{u}(t) = \delta_{-1}(t)$ (ingresso a gradino) è uguale al guadagno del sistema . . . . .	23
4.5	Dimostrare che la funzione di trasferimento $W(s)$ non dipende dalla scelta delle coordinate . . . . .	24
4.6	Risposta a regime permanente per sistemi a tempo discreto . . . . .	24

4.7	È possibile che un sistema abbia funzione di trasferimento uguale a zero? Se sì, sotto quali condizioni? . . . . .	24
<b>5</b>	<b>Esercizi</b>	<b>25</b>
5.1	Trovare il valore massimo del parametro $r$ tale per cui il sistema retroazionato sia stabile. . . . .	25

## 1 Domande di Teoria

### 1.1 Forma di Kalman di un sistema

Abbiamo il nostro sistemino

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

Prima ricaviamo il sottospazio degli inosservabili:

$$\mathfrak{I} = \ker(O) = \ker \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix}$$

Poi i raggiungibili:

$$\mathfrak{R} = \text{Im}(R) = \text{Im} \begin{pmatrix} B & AB & \dots & A^{n-1}B \end{pmatrix}$$

Trovati questi due calcolo l'intersezione, cioè il sottospazio degli stati inosservabili e raggiungibili, che chiamo  $\chi_1$

$$\chi_1 = \mathfrak{I} \cap \mathfrak{R}$$

Poi calcolo  $\chi_2 | \chi_2 \oplus \chi_1 = \mathfrak{R}$ , cioè i raggiungibili osservabili. Poi calcolo  $\chi_3 | \chi_3 \oplus \chi_1 = \mathfrak{I}$ , cioè i irraggiungibili inosservabili. E alla fine  $\chi_4 | \chi_1 \oplus \chi_2 \oplus \chi_3 \oplus \chi_4 = \mathbb{R}^n$ . Che credo siano irraggiungibili osservabili. Da qui mi ricavo la matrice di cambiamento di base:

$$T^{-1} = (\chi_1 \quad \chi_2 \quad \chi_3 \quad \chi_4)$$

Quindi alla fine mi viene

$$\tilde{A} = TAT^{-1} \quad \tilde{B} = TB \quad \tilde{C} = CT^{-1}$$

### 1.2 Dato un sistema in forma esplicita, dimostra che il sistema è lineare

Una funzione di variabili reali  $f$  è lineare se, dati due punti qualunque  $x$  e  $y$ , e due costanti  $a$  e  $b$  anch'esse arbitrarie, si ha che  $f(ax + by) = af(x) + bf(y)$ .

La rappresentazione esplicita di un sistema è

$$x(t) = \Phi(t)x_0 + \int_0^t H(t-\tau)u(\tau)d\tau$$

La funzione di stato negli appunti di non so chi è

$$\Psi \left( t_0 - t, x(t), u(t) |_{(t_0, t]} \right)$$

La linearità è rispetto allo stato e all'ingresso (non sto per scrivere una dimostrazione, è solo boh far vedere i passaggi)

$$\begin{aligned} & \Psi \left( t_0 - t, \alpha x_1(t) + \beta x_2(t), \alpha u_1(t)|_{(t_0, t]} + \beta u_2(t)|_{(t_0, t]} \right) = \\ & = \alpha \Psi \left( t_0 - t, x_1(t), u_1(t)|_{(t_0, t]} \right) + \beta \Psi \left( t_0 - t, x_2(t), u_2(t)|_{(t_0, t]} \right) \\ & \Psi \left( t_0 - t, x_1(t), u_2(t)|_{(t_0, t]} \right) = \underbrace{\Psi(t - t_0, x_1(t), 0)}_{\text{evoluzione libera}} + \underbrace{\Psi(t - t_0, 0, u_2(t)|_{(t_0, t]})}_{\text{evoluzione forzata}} \end{aligned}$$

### 1.3 Rappresentazione per sistemi a tempo discreto

Il sistema nel tempo ha la rappresentazione:

$$x(t) = \Phi(t - t_0)x(t_0) + \sum_{\tau=t_0}^{t-1} H(t - \tau)u(\tau)$$

Per semplificare i calcoli uso la trasformata Zeta:

$$F(z) = \sum_{t=0}^{\infty} f(t)z^{-1}$$

Passiamo dalla rappresentazione implicita del sistema:

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

La trasformo in  $\mathcal{Z}$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}(x(k+1)) &= \mathcal{Z}[Ax(k) + Bu(k)] \\ &= A\mathcal{Z}[x(k)] + B\mathcal{Z}[u(k)] \\ &= AX(z) + BU(z) \end{aligned}$$

e considerando che

$$\mathcal{Z}(x(t+1)) = zX(z) - zx(0)$$

allora con la trasformata Z ottengo

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}(x(k+1)) &= \mathcal{Z}[Ax(k) + Bu(k)] \\ zX(z) - zx(0) &= AX(z) + BU(z) \\ zX(z) - AX(z) &= zx(0) + BU(z) \\ (zI - A)X(z) &= zx(0) + BU(z) \\ X(z) &= (zI - A)^{-1}zx(0) + (zI - A)^{-1}BU(z) \end{aligned}$$

dove :

- $\Phi(z) = (zI - A)^{-1}z$
- $H(z) = (zI - A)^{-1}B$
- $\Psi(z) = C(zI - A)^{-1}z$

- $W(z) = C(zI - A)^{-1}B + D$

Con queste definizioni posso scrivere:

$$\begin{cases} x(z) = \Phi(z)x_0 + Bu(z) \\ y(z) = \Psi(z)x_0 + W(z)u(z) \end{cases}$$

#### 1.4 Definizione smorzamento e pulsazione naturale

Nel caso di autovalori complessi, cioè con una  $W(s)$  che abbia al denominatore dei poli del tipo  $(s - s_0)(s - s_0^*)$ , con  $s_0 = \alpha + j\omega$ , posso introdurre due parametri che caratterizzano il modo in funzione di  $\alpha$  e  $\omega$ . Si tratta della pulsazione naturale  $\omega_n = \sqrt{\alpha^2 + \omega^2}$ , e dello smorzamento  $\xi = \sin(\theta) = \frac{-\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}}$ .

$\omega_n$  rappresenta la pulsazione che avrebbe il sistema se non ci fosse la parte reale

Lo smorzamento rappresenta l'attenuazione a cui è sottoposto il processo oscillatorio del sistema. In base al suo valore è possibile capire alcune caratteristiche del sistema:

- $\xi = \pm 1 \rightarrow$  Gli autovalori sono reali e coincidenti, nessun fenomeno oscillatorio.
- $\xi = 0 \rightarrow$  Gli autovalori sono immaginari puri, si hanno quindi moti oscillatori puri.
- $0 < \xi < 1 \rightarrow$  Il modo è pseudoperiodico convergente.
- $-1 < \xi < 0 \rightarrow$  Il modo è pseudoperiodico divergente.

#### 1.5 Problema della realizzazione

Il problema della realizzazione consiste nell'associare ad una data matrice di funzioni, una rappresentazione dello stato, cioè di simulare in tempo reale il comportamento del sistema. Assegnato un legame funzionale, definito dall'integrale di convoluzione con il nucleo  $K(t)$  cioè :

$$Y(t) = \int_0^t K(t - \tau)u(\tau) d\tau$$

il problema ammette soluzione se il nucleo appena descritto coincide con la matrice delle risposte impulsive di un sistema, cioè :

$$K(t) = Ce^{At}B + D\delta(t)$$

La CNES (condizione necessaria e sufficiente) per la realizzazione è che  $K(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$  sia una matrice di funzioni razionali **proprie**.

Ciò significa che se la trasformata di Laplace di  $K(t)$  non è una matrice di funzioni razionali proprie, il legame ingresso-uscita non può essere realizzato mediante un sistema lineare. Se ho che  $K(s)$  è una matrice razionale strettamente propria posso quindi risolvere la realizzazione con delle forme canoniche raggiungibili o osservabili.

#### 1.6 Relazione tra poli di $W(s)$ e gli autovalori

Le radici del denominatore di  $W(s)$  sono dette poli della funzione, sono un sottoinsieme degli autovalori della matrice dinamica del sistema. In particolare sono gli autovalori simultaneamente osservabili ed eccitabili.

### 1.7 Scomposizione canonica rispetto alla raggiungibilità

Uno stato  $x$  è raggiungibile al tempo  $t$  a partire dallo stato  $x_0$  se esiste un istante di tempo  $t_0$  ed un ingresso  $u$ , da  $t_0$  a  $t$ , che porta lo stato  $x$  al tempo  $t$ .

Nei sistemi lineari  $\mathbf{x}$  è **RAGGIUNGIBILE** da  $x_0 = 0 \iff x \in \mathfrak{R} = \mathfrak{Im}(B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B)$

Se, con  $n$  la dimensione di  $A$ , ho  $rg(B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B) = m < n$  esiste una matrice  $T$  non singolare tale che:

$$TAT^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}, \quad TB = \begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad CT^{-1} = (C_1 \ C_2)$$

con  $A_{11}$  matrice (mxm),  $B_1$  (mxp) e  $C_1$ (qxm). Inoltre, la terna  $(A_{11}, B_1, C_1)$  è tutta raggiungibile.

L'insieme degli stati raggiungibili coincide con il sottospazio generato dalle colonne linearmente indipendenti della matrice  $\mathfrak{R} = (B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B)$ , detta matrice di raggiungibilità. Se tale matrice ha rango  $n$  tutti gli stati sono raggiungibili ed il sistema stesso è detto completamente raggiungibile.

### 1.8 Definire eccitabilità di un modo naturale e dimostrarne la condizione. Come sono legate l'eccitabilità dei modi naturali con la raggiungibilità del sistema?

Un modo naturale è eccitabile con impulsi in ingresso se la sua legge temporale compare nella matrice delle risposte impulsive dello stato  $H(t) = e^{At}B$ , quindi se contribuisce a misurare l'ingresso nell'evoluzione dello stato.

Dimostro che un modo è eccitabile se  $v_i' B \neq 0$ :

$$e^{At}B = \sum_{i=1}^n e^{\lambda_i t} u_i v_i' B$$

È evidente che se  $v_i' B = 0$  il modo non può comparire nella risposta impulsiva dello stato

### 1.9 Legame tra raggiungibilità del sistema e eccitabilità dei modi

Un sistema non interamente raggiungibile è modellabile come l'interconnessione tra un sistema completamente raggiungibile e uno completamente no. In questo caso verrebbe:

$$\tilde{A} = TAT^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}, \quad \tilde{B} = TB = \begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{C} = CT^{-1} = (C_1 \ C_2)$$

Così modellato risulta evidente che tutti i modi eccitabili sono quelli legati alle matrici  $A_{11}$  e  $B_1$ , cioè quelli nel sottosistema interamente raggiungibile.

### 1.10 I modi naturali dei sistemi lineari a tempo continuo: definizione e parametri caratteristici

I modi naturali sono le evoluzioni nello spazio di stato attraverso le quali è possibile esprimere l'evoluzione libera. In base agli autovalori che vi sono associati si hanno due casi:

- I modi naturali **aperiodici** in presenza di autovalori **reali e distinti** Il parametro caratteristico è  $\lambda$ , che determina l'andamento temporale.
  - Se  $\lambda < 0$  il modo è convergente
  - Se  $\lambda > 0$  si ha un andamento divergente
  - Se  $\lambda = 0$  si ha un andamento costante.
- I modi naturali **pseudoperiodici**, associati a coppie di autovalori **complessi coniugati** i cui parametri caratteristici sono :
  - $\alpha$  (ampiezza): se  $\alpha > 0$  il modo è una spirale divergente, se  $\alpha < 0$  il modo è una spirale convergente e se  $\alpha = 0$  il modo rimane costante sulla traiettorie di un ellisse.
  - $\xi$  (smorzamento): al suo aumento corrisponde un maggior inviluppo della fase oscillatoria.
  - $\omega_n$  (pulsazione naturale) rappresenta la pulsazione del modo quando lo smorzamento è nullo.

$$\omega_n = \sqrt{\alpha^2 + \omega^2} = \frac{\sqrt{1 + \xi^2}}{\omega} \quad , \quad \xi = \sin(\theta) = \frac{-\alpha}{\omega_n}$$

### 1.11 Modi naturali per sistemi a tempo discreto

I modi naturali per il caso discreto, così come per i sistemi tempo continuo, sono le evoluzioni nello spazio di stato attraverso le quali è possibile esprimere l'evoluzione libera. In base agli autovalori che vi sono associati si hanno tre casi:

- Modi naturali aperiodici associati ad autovalori reali positivi. Il parametro caratteristico è  $\lambda$  che determina l'andamento temporale.
  - Se  $|\lambda| = 1$  si ha un modo costante
  - Se  $|\lambda| < 1$  si ha un modo convergente a 0
  - Se  $|\lambda| > 1$  si ha un modo divergente.
- Modi naturali alternanti in presenza di autovalori reali negativi, anche qui il parametro caratteristico è  $\lambda$  e:
  - Se  $\lambda = -1$  il modo oscilla tra -1 e 1
  - Se  $\lambda > -1$  converge a 0 oscillando
  - Se  $\lambda < -1$  diverge oscillando.
- modi naturali pseudoperiodici associati a coppie di autovalori complessi coniugati: in questo caso scegliamo la rappresentazione polare  $\alpha + i\omega = \rho e^{i\theta}$  con  $\rho = \sqrt{\alpha^2 + \omega^2}$ ,  $\theta = \arctan\left(\frac{\omega}{\alpha}\right)$ , quindi i parametri caratteristici sono :
  - $\rho$  (ampiezza) , se  $\rho > 1$  il modo è una spirale divergente, se  $\rho < 1$  il modo è una spirale convergente e se  $\rho = 1$  il modo rimane costante sulla traiettoria di un' ellisse.
  - $\theta$  (fase) rappresenta la fase del modo.

### 1.12 Osservabilità nei sistemi lineari

Presi due stati iniziali  $x_{0a}, x_{0b}$  distinti, e consideratene le uscite  $y_a, y_b$ , se le due uscite sono uguali per ogni  $t$  allora i due stati sono **indistinguibili**.

Per inciso, le due uscite sono uguali per ogni  $t$  se, considerando

$$y_{0i} = \Psi(t)x_{0i} + \int_0^t W(t-\tau)u(\tau)d\tau$$

si verifica la seguente:

$$\begin{aligned} y_{0a} - y_{0b} &= \Psi(t)x_{0a} + \int_0^t W(t-\tau)u(\tau)d\tau - \Psi(t)x_{0b} - \int_0^t W(t-\tau)u(\tau)d\tau \\ 0 &= \Psi(t)x_{0a} - \Psi(t)x_{0b} \quad \forall t > 0 \end{aligned}$$

Chiamato stato inosservabile la differenza tra i due  $x_I = x_{0a} - x_{0b}$

$$\begin{aligned} y_{0a} - y_{0b} = 0 &\iff \Psi(t)(x_{0a} - x_{0b}) = 0 \\ \Psi(t)x_I = Ce^{At}x_I &\equiv 0 \end{aligned}$$

Dato che se una funzione è identicamente nulla in un intervallo, lo sono anche le sue derivate, per il criterio di Cayley-Hamilton si verifica:

$$CA^n x_I = 0 \implies CA^{n+1} x_I = 0$$

e gli stati che soddisfano questa eguaglianza sono inosservabili. Per trovare questi stati costruisco il sistema lineare omogeneo:

$$\begin{pmatrix} C \\ \dots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} x_I = 0$$

che ammette soluzioni diverse da zero se la matrice non ha rango pieno, e quindi gli stati inosservabili, se ci sono, sono un sottospazio lineare dello spazio di stato.

L'insieme degli stati inosservabili è

$$\mathfrak{I} = \{x \in \mathbb{R}^n | Ce^{At} = 0 \quad \forall t > 0\}$$

### 1.13 Perché A21 viene zero sempre nella forza canonica osservabile dopo il cambio di base

Una proprietà degli stati inosservabili è che **il sottospazio  $\mathfrak{I}$  è invariante rispetto a  $A$** , cioè  $x_I$  inosservabile  $\implies Ax_I$  inosservabile, il che vale per ogni cambiamento di coordinate.

Consideriamo lo stato  $\begin{pmatrix} z_1 \\ 0 \end{pmatrix}$ , di certo anche  $A \begin{pmatrix} z_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{z}_1 \\ 0 \end{pmatrix}$  sarà inosservabile. Con

questo a mente vediamo  $\tilde{A}z_I$ :

$$\tilde{A}z_I = \begin{pmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} \\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{z}_1 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \begin{aligned} \tilde{A}_{11}z_1 &= \tilde{z}_1 \\ \tilde{A}_{21}z_1 &= 0 \end{aligned} \rightarrow \tilde{A}_{21} = 0$$



### 1.14 L'osservabilità dei sistemi lineari a tempo discreto: definizione e condizioni

Definita la matrice di osservabilità :

$$O = \begin{pmatrix} C \\ \dots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix}$$

L' insieme degli stati inosservabili nel tempo discreto è:

$$\mathfrak{I} = \{x \in \mathbb{R}^n | CA^t = 0 \ \forall t > 0 = \ker(O)\}$$

Per Cayley-Hamilton ho che  $Cx_I = 0, CAx_I = 0, \dots, CA^{n-1}x_I = 0 \implies CA^k x_i = \forall k > n$   
Nel tempo discreto, se uno stato non è osservabile nei primi n passi certamente dopo rimarrà inosservabile.

### 1.15 Per un sistema tempo discreto dimostrare che l'insieme degli stati inosservabili è :

$$\ker \begin{pmatrix} C \\ \dots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix}$$

Se considero l'evoluzione di un sistema  $y_L(k) = CA^K x(0)$ , affinché lo stato  $x_0 = x(0)$  sia inosservabile  $y_L(k) = 0 \ \forall k$ .

Considero il caso in cui  $k=0$  : l'evoluzione è  $y_L(k) = CA^0 x_0 = CIx_0 = Cx_0$ , e per definizione ho  $Cx_0 = 0$  se  $x_0 \in \ker(C)$

Considero ora il caso  $k=1$ :  $y_L(k) = CAx_0$  e

$$CAx_0 = 0 \iff x(0) \in \ker(CA)$$

Quindi per il generico passo  $k$  gli stati inosservabili appartengono a  $\ker(CA^k)$ . Per Cayley-Hamilton ho che  $Cx_I = 0, CAx_I = 0, \dots, CA^{n-1}x_I = 0 \implies CA^k x_i = \forall k > n$  e quindi per un sistema lineare l'insieme degli stati inosservabili è dato quindi da tutti gli stati che non si osservano in nessuno dei passi, quindi:

$$I = \ker \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \dots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix}$$

### 1.16 Definizione di raggiungibilità di uno stato; caratterizzare l'insieme degli stati raggiungibili per sistemi dinamici lineari stazionari; confrontare il caso tempo continuo e tempo discreto

Uno stato  $x_r$  è detto raggiungibile all'istante  $T$  da  $x_0$  se esistono un  $t_0 < T$ , ed un ingresso sull'intervallo di tempo  $[t_0, T)$  che porta l'evoluzione dello stato da  $x_0$  a  $x_r$ .

$$\exists t_0 < T, \ u|_{[t_0, T]} : e^{A(T-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^T e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau = x_r$$

Per la rappresentazione lineare stazionaria viene considerato lo stato  $x(t_0) = 0$ . L'insieme degli stati raggiungibili all'istante  $T$  è denotato con  $\mathcal{R}(T)$  cioè :

$$\mathcal{R}(T) = \left\{ x_r : x = \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau \quad , \quad x_r \in \mathcal{R} = \text{Im}(B \ AB \dots A^{T-1} B) \right\}$$

Per i sistemi a tempo continuo la raggiungibilità è differenziale e ha equivalenza con la controllabilità, invece nei sistemi a tempo discreto la raggiungibilità implica la controllabilità ma non viceversa, e se uno stato non si riesce a raggiungere in  $n$  passi allora non si può più raggiungere.

### 1.17 Dimostrazione che data un'evoluzione da $x(t_0)$ a $x(t)$ , vale la stessa da $x(t_1)$ con $t_0 < t_1 < t$

Per farlo prendo due equazioni:

$$x(t) = \Phi(t - t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^t H(t - \tau)u(\tau)d\tau \quad (1)$$

$$x(t) = \Phi(t - t_1)x(t_1) + \int_{t_1}^t H(t - \tau)u(\tau)d\tau \quad (2)$$

(Questa roba si trova uguale su edotm ma scrivere mi aiuta a studiare) Ora voglio dimostrare che le due si equivalgono

$$x(t) = \Phi(t - t_1) \underbrace{\left[ \Phi(t_1 - t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} H(t_1 - \tau)u(\tau)d\tau \right]}_{x(t_1)} + \int_{t_1}^t H(t - \tau)u(\tau)d\tau$$

$$\begin{aligned} x(t) &= \Phi(t - t_1)\Phi(t_1 - t_0)x(t_0) + \Phi(t - t_1) \int_{t_0}^{t_1} H(t_1 - \tau)u(\tau)d\tau + \int_{t_1}^t H(t - \tau)u(\tau)d\tau \\ \Phi(t - t_0)x(t_0) &= \Phi(t - t_1)\Phi(t_1 - t_0)x(t_0) \iff \Phi(t - t_0)\Phi(t - t_1)\Phi(t - t_0) \\ \int_{t_0}^t H(t - \tau)u(\tau)d\tau &= \Phi(t - t_1) \int_{t_0}^{t_1} H(t_1 - \tau)u(\tau)d\tau + \int_{t_1}^t H(t - \tau)u(\tau)d\tau \end{aligned}$$

A sinistra applico la linearità dell'integrale:

$$\int_{t_0}^{t_1} H(t_1 - \tau)u(\tau)d\tau + \int_{t_1}^t H(t - \tau)u(\tau)d\tau = \Phi(t - t_1) \int_{t_0}^{t_1} H(t_1 - \tau)u(\tau)d\tau + \int_{t_1}^t H(t - \tau)u(\tau)d\tau$$

e quindi alla fine:

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} H(t - \tau)u(\tau)d\tau &= \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t - t_1)H(t_1 - \tau)u(\tau)d\tau \\ H(t - \tau) &= \Phi(t - t_1)H(t_1 - \tau) \end{aligned}$$

Riassunto

$$\begin{cases} \Phi(t - t_0) = \Phi(t - t_1)\Phi(t_1 - t_0) \\ H(t - \tau) = \Phi(t - t_1)H(t_1 - \tau) \end{cases}$$

Ora andiamo a derivare la prima equazione del sistema in forma esplicita (1) per vedere se otteniamo esattamente la forma implicita di partenza:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \frac{\partial \Phi(t-t_0)}{\partial t} x(t_0) + \int_{t_0}^t \frac{\partial}{\partial t} (\Phi(t-t_1) H(t_1-\tau)) u(\tau) d\tau \\ \dot{x} &= \frac{\partial \Phi(t-t_1)}{\partial t} \left( \Phi(t_1-t_0) x(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} H(t_1-\tau) u(\tau) d\tau \right) + H(0) u(t)\end{aligned}$$

Ora prendiamo il limite  $t_1 \rightarrow t$ :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \lim_{t_1 \rightarrow t} \frac{\partial \Phi(t-t_1)}{\partial t} \left( \Phi(t_1-t_0) x(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} H(t_1-\tau) u(\tau) d\tau \right) + H(0) u(t) \\ \dot{x} &= \lim_{t_1 \rightarrow t} \frac{\partial \Phi(t-t_1)}{\partial t} x(t) + H(0) u(t) \\ \dot{x} &= \frac{\partial \Phi(t \rightarrow 0)}{\partial t} x(t) + H(0) u(t)\end{aligned}$$

Da cui finalmente posso dire che

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Phi(t \rightarrow 0)}{\partial t} x(t) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\partial \Phi(t)}{\partial t} x(t) = Ax(t) \\ H(0) u(t) &= Bu(t) \Rightarrow H(0) = B\end{aligned}$$

### 1.18 Definizione di guadagno e interpretazione fisica

Il guadagno è il fattore costante che compare nella forma di Bode della funzione di trasferimento, esso è definito per ogni elemento ed è pari al valore che assume la  $W(s)$  in  $s = 0$  dopo aver eliminato l'eventuale eccesso di poli in zero. Il guadagno della funzione di trasferimento di un sistema ha, nel caso in cui esista la risposta a regime permanente, il significato fisico di valore di regime della risposta al gradino unitario, cioè  $W(s)|_{s=0}$ .

### 1.19 Definizione di raggiungibilità ed inosservabilità; caratterizzazione e proprietà degli insiemi di tali stati

L'osservabilità riguarda il comportamento stato-uscita. Uno stato è detto inosservabile quando corrisponde ad un'evoluzione libera in uscita identicamente nulla, cioè  $Ce^{At}x_I = 0$  dove  $x_I = x_a - x_b$  ovvero due stati indistinguibili. L'insieme degli stati inosservabili è

definito come:  $\mathfrak{I} = \{x \in R^n; Ce^{At}x = 0, \forall t \geq 0\}$  che equivale al  $\mathfrak{I} = \ker \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix}$ , in cui

$\begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix}$  è la matrice di osservabilità del sistema.

Il sistema viene detto completamente osservabile se il rango di questa matrice è pari alla dimensione del sistema e di conseguenza tutti i modi naturali sono osservabili. Uno stato

$x_r$  è detto raggiungibile all'istante  $T$  da  $x_0$  se  $\exists t_0 < T$ , ed un ingresso sull'intervallo si tempo  $[t_0, T)$  che porta lo stato da  $x_0$  a  $x$ . Per la rappresentazione lineare stazionaria viene considerato lo stato  $x(t_0) = 0$ . L'insieme degli stati raggiungibili è denotato con  $\mathcal{R}$ , cioè :

$$\mathcal{R}(T) = \left\{ x_r : x = \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau, u[t_0, T] \right\} \quad \mathcal{R} = \text{Im}(B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B)$$

### 1.20 Può un sistema lineare essere caratterizzato da modi naturali aventi la stessa legge di moto?

Sì, se la matrice  $A$  ha autovalori coincidenti ma è regolare ( $M_G = 1$ ), si hanno in corrispondenza di ogni autovalore con molteplicità algebrica  $> 1$ , altrettanti modi naturali con leggi temporali coincidenti.

In corrispondenza di ogni autovalore reale è possibile calcolare tanti autovettori quanto è la  $M_A$  dello stesso e in corrispondenza di autovalori complessi e coniugati è possibile calcolare tanti autospazi di dimensione 2 quanta è la  $M_A$  della coppia di autovalori.

### 1.21 Dato un sistema a tempo continuo $(A, B, C, D)$ con $D = 0$ , $\Lambda$ l'insieme degli autovalori, $\Lambda_e$ e $\Lambda_o$ gli insiemi degli autovalori associati ai modi eccitabili e osservabili. Dimostrare che $\Lambda_e \cap \Lambda_o = \emptyset \implies W(t) = 0$

La risposta impulsiva dipende dalla matrice delle risposte impulsive  $W(t) = Ce^{At}B = \sum_{i=1}^n Cu_i v_i' B$ .

In questa rappresentazione  $Cu_i$  è non nulla solo per i modi osservabili, e  $v_i' B$  è non nulla solo per i modi eccitabili, quindi se un autovalore non è osservabile ( $Cu_i = 0$ ) o non è eccitabile ( $v_i' B = 0$ ) non compare in  $W(t)$ . Se nessun autovalore compare in  $W(t)$ , quest'ultima è nulla e allora la risposta impulsiva è nulla.

### 1.22 Il ruolo dell'osservabilità nella ricostruzione del comportamento interno

La proprietà di osservabilità svolge in questo problema il ruolo della proprietà di raggiungibilità nel problema di assegnazione degli autovalori con retroazione dallo stato.

### 1.23 $W(t)$ , $W(s)$ e $W(j\omega)$ : cosa rappresentano e qual è il loro significato fisico.

- $W(t)$  è la matrice delle risposte impulsive in uscita e descrive il comportamento forzato ingresso-uscita. Permette di calcolare la risposta forzata ad un ingresso  $u(t)$  andando ad eseguire l'integrale di convoluzione  $Y_F(t) = \int_{t_0}^t W(t-\tau)u(\tau)d\tau$

- $W(s)$  è la trasformata di Laplace di  $W(t)$  ed è detta funzione di trasferimento, è un modello forzato di un sistema dinamico lineare stazionario. Conoscendo  $W(s)$  si può calcolare una qualsiasi risposta forzata ad un dato ingresso.

- $W(j\omega)$  è la risposta armonica e descrive il comportamento in frequenza di un sistema e allo stesso tempo consente di dare alla funzione di trasferimento un'interpretazione fisica. Il modulo e la fase della risposta armonica, per una data pulsazione, rendono conto del comportamento a regime permanente a quella pulsazione.

**1.24 Scrivere un sistema (cioè scrivere le matrici  $A, B, C$ ) in forma canonica osservabile con  $n = 3, p = q = 1$ . Determinare un cambio di base per metterlo in forma canonica raggiungibile**

Data un sistema con funzione di trasferimento

$$W(s) = \frac{b_{n-1}s^{n-1} + \dots + b_0}{a_n s^n + \dots + a_0} \quad \text{che in questo caso è} \quad W(s) = \frac{s^2 b_2 + s b_1 + s b_0}{s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0}$$

La forma canonica osservabile sarà:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & -a_2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}, C = (0 \quad 0 \quad 1)$$

Per passare alla forma canonica raggiungibile lo farei come studio della raggiungibilità. Ma mica sono così sicuro vabe. Nel senso che preso il sistema faccio la matrice  $R = (BABA^2B)$ ,  $\mathfrak{R} = \text{Im}(R)$ ,  $T^{-1} = (\mathfrak{R} \text{completamento})$  etc. etc.

## 2 Passaggi di Rappresentazione

**2.1 Un sistema dinamico può esser rappresentato tramite un modello implicito o esplicito.**

- (a) Illustrare i diversi vantaggi e svantaggi delle due rappresentazioni;
- (b) Per sistemi a tempo discreto lineari e stazionari, indicare i passaggi matematici che permettono di passare da una rappresentazione all'altra e viceversa.

Un sistema implicito ha una struttura del tipo:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

Nel tempo continuo permette una simulazione in tempo reale del modello del sistema, è più completo in quanto permette di condurre l'analisi modale con tutti gli autovalori e di analizzare le proprietà del sistema come eccitabilità e osservabilità, ma non fornisce le espressioni dello stato e dell'uscita.

Il modello esplicito ha una struttura del tipo:

$$\begin{cases} X(t) = \Phi(t - t_0)X(t_0) + \int_{t_0}^t H(t - \tau)u(\tau)d\tau \\ Y(t) = \Psi(t - t_0)X(t_0) + \int_{t_0}^t W(t - \tau)u(\tau)d\tau \end{cases}$$

e permette di analizzare il comportamento complessivo forzato e libero. Tuttavia nella rappresentazione esplicita compaiono solo gli autovalori eccitabili o osservabili. Avendo la forma esplicita

$$x(t) = \Phi(t - t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^t H(t - \tau)u(\tau)d\tau$$

Arrivo a quella implicita sapendo che

$$A = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial t} \Phi(t) \quad , \quad B = H(0)$$

## 2.2 Dimostrazione passaggio da forma esplicita a implicita

$$\begin{aligned}
 x(t) &= \Phi(t - t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^t H(t - \tau)u(\tau)d\tau \\
 \lim_{t_0 \rightarrow t} x(t) &= \lim_{t_0 \rightarrow t} \Phi(t - t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^t H(t - \tau)u(\tau)d\tau \\
 \lim_{t_0 \rightarrow t} \dot{x}(t) &= \lim_{t_0 \rightarrow t} \frac{d}{dt} \underbrace{\Phi(t - t_0)}_{\rightarrow 0} \underbrace{x(t_0)}_{\rightarrow t} + \int_{t_0}^t \frac{d}{dt} H(t - \tau)u(\tau)d\tau \\
 \dot{x} &= \frac{d}{dt} \Phi(t) \Big|_0 x(t) + H(0)u(t) \\
 A &= \frac{d}{dt} \Phi(t) \Big|_0, \quad B = H(t)|_0
 \end{aligned}$$

## 2.3 Dimostrazione passaggio da forma implicita a esplicita

Partiamo dal sistema solito

$$S = \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases} \quad (3)$$

$\dot{x} = Ax + Bu$  è un'equazione differenziale lineare non omogenea  $\dot{x} = Ax$  è invece omogenea, e ha come soluzione generale  $x(t) = ke^{At}$ , in  $t_0$  ha soluzione

$$x(t_0) = e^{A(t-t_0)}x(t_0) \rightarrow k = e^{-At_0}x_0$$

Per  $Bu(t)$  vedo la soluzione particolare in un istante  $t$  qualsiasi e con tutti i contributi da  $t_0$  a  $t$ , cioè

$$\int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau)d\tau$$

Unendo le due mi viene quindi

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau)d\tau \quad (4)$$

Questo è valido anche se  $A$  è una matrice, verifichiamo che  $e^{At}$  si comporta come nel caso scalare  $e^{at}$ :

$$\frac{d}{dt} e^{At} = \frac{d}{dt} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!} = A \sum_{h=0}^{\infty} \frac{A^h t^h}{h!} = Ae^{At}$$

Ora verifichiamo pure che (4) è soluzione di (3):

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= Ae^{A(t-t_0)}x(t_0) + e^{(t-t)}Bu(t)1 - 0 + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau \\
 \dot{x} &= \underbrace{Ae^{A(t-t_0)}x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau}_{x(t)} + Bu(t)
 \end{aligned}$$

e d'ora è verificato.

Ora verifichiamo l'uscita  $y(t)$ :

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \rightarrow Ce^{A(t-t_0)}x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau + Du(t)$$

Usando l'impulso  $\delta(t)$  utilizzo il teorema per cui

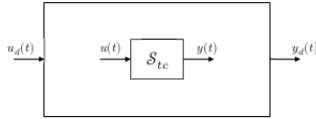
$$\int_a^b f(t)\delta(t-\tau)d\tau = f(\tau) \implies Du(t) = \int_{t_0}^t D\delta(t-\tau)u(\tau)d\tau$$

che mi fa venire alla fine

$$y(t) = Ce^{A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^t (Ce^{A(t-\tau)}B + D\delta(t-\tau))u(\tau)d\tau$$

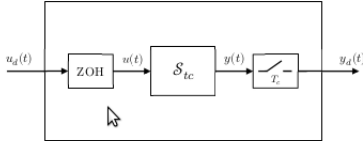
## 2.4 Sistema a tempo discreto equivalente ad un dato sistema a tempo continuo

Dato il sistema  $S_{tc}$  con ingresso  $u(t)$  e uscita  $y(t)$ , il mio obiettivo è poterlo trattare come se fosse a tempo discreto, cioè in maniera tale che possa accettare un ingresso discreto  $u_d(t)$  e che produca un'uscita  $y_d(t)$ . Lo schema sarà quindi:



In questo caso il problema è che il sistema di cui ho già il modello si aspetta un ingresso continuo, quindi dovrò usare lo Zero Order Holder per farglielo arrivare.

Inoltre anche l'uscita del sistema sarà continua, e quindi per ottenerla discreta dovrò usare un campionatore.



Siamo ora interessati a calcolare le evoluzioni negli istanti, detti di campionamento, corrispondenti alla variazione dell'ingresso. Il problema del calcolo del sistema a tempo discreto equivalente è detto anche problema della discretizzazione. Dato il sistema a tempo continuo:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

Lo stato, in forma esplicità, sarà quindi :  $x(t) = e^{A(t-t_0)}x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$  Per studiarlo in forma discreta, detto  $T_c$  il tempo di campionamento, pongo  $t_0$  come un generico istante  $kT_c$ , e  $t$  come l'istante successivo  $(k+1)T_c$ . Così mi viene:

$$\begin{aligned} x((k+1)T_c) &= e^{AT_c}x(kT_c) + \int_{kT_c}^{(k+1)T_c} e^{A((k+1)T_c-\tau)}Bu(\tau)d\tau \\ x((k+1)T_c) &= e^{AT_c}x(kT_c) + \int_{kT_c}^{(k+1)T_c} e^{A((k+1)T_c-\tau)}Bd\tau u(kT_c) \end{aligned}$$

ponendo quindi le rappresentazioni

$$A_d = e^{A_k T_c}, B_d = \int_{kT_c}^{(k+1)T_c} e^{A((k+1)T_c - \tau)} B d\tau, C_d = C, D_d = D$$

Il sistema a tempo discreto equivalente, detto  $T_c$  il tempo di campionamento è:

$$\begin{cases} x(k+1) = A_d x(k) + B_d u(k) \\ y(k) = C_d x(k) + D_d u(k) \end{cases}$$

## 2.5 Come si passa dalla rappresentazione implicita a quella esplicita nel tempo discreto

Partiamo dalla rappresentazione  $x(t+1) = Ax(t) + Bu(t)$  con  $t_0, x(t_0)$ . Noto  $u(t_0)$  devo arrivare a:

$$x(t) = \Phi(t - t_0)x(t_0) + \sum_{\tau=t_0}^{t-1} H(t - \tau)u(\tau) \quad (5)$$

Provando a calcolare  $x(t_0 + 1), x(t_0 + 2)$  etc arrivo alla forma  $x(t_0 + k) = A^k x(t_0) + \sum_{\tau=0}^{k-1} A^{k-\tau-1} B u(t_0 + \tau)$ , così ponendo  $t = k + t_0$  (ossia  $k = t - t_0$ ) verrà

$$x(t) = A^{t-t_0} x(t_0) + \sum_{\tau=0}^{t-t_0-1} A^{t-t_0-\tau-1} B u(t_0 + \tau)$$

di cui la prima parte è già simile a (5).

Ora poniamo  $T = \tau - t_0$  e poi  $\tau = T$ : così mi viene:

$$x(t) = A^{t-t_0} x(t_0) + \sum_{\tau=t_0}^{t-1} A^{t-\tau-1} B u(\tau)$$

Che è praticamente (5). A questo punto posso concludere ponendo:

$$\begin{aligned} \Phi(t - t_0) &= A^{t-t_0} & , H(t - \tau) &= A^{t-\tau-1} B \implies \\ \Phi(t) &= A^t & , H(t) &= A^{t-1} B \end{aligned}$$

## 2.6 Come si passa dalla rappresentazione esplicita a quella implicita nel tempo discreto

Partendo da

$$x(t) = \Phi(t - t_0)x(t_0) + \sum_{\tau=t_0}^{t-1} H(t - \tau)u(\tau)$$

voglio arrivare a  $x(t+1) = Ax(t) + Bu(t)$ :

faccio le sostituzioni  $t \rightarrow t_0, t+1 \rightarrow t$  (cioè prendo  $t_0$  come istante iniziale e  $t$  come quello



dopo ), così mi viene:

$$\begin{aligned}
 x(t+1) &= \Phi(t+1-t)x(t) + \sum_{\tau=t_0}^{t+1-1} H(t+1-\tau)u(\tau) \\
 x(t+1) &= \Phi(1)x(t) + \sum_{\tau=t}^t H(t+1-\tau)u(\tau) \\
 x(t+1) &= \Phi(1)x(t) + H(1)u(t)
 \end{aligned}$$

Che ha una forma uguale a

$$\Phi(1) = A \quad , \quad H(1) = B$$

## 2.7 Come si passa da rappresentazione a tempo continuo a rappresentazione con Laplace

Se ho il sistema nella solita forma

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

le matrici in Laplace sono:

$$\begin{aligned}
 \Phi(s) &= (sI - A)^{-1}, & H(s) &= \Phi(s)B, \\
 \Psi(s) &= C\Phi(s), & W(s) &= C\Phi(s)B + D
 \end{aligned}$$

## 2.8 Come si passa da rappresentazione a tempo discreto a rappresentazione con la trasformata Zeta

Dato il mio bel sistema in forma

$$x(t) = \Phi(t - t_0)x(t_0) + \sum_{\tau=t_0}^{t-1} H(t - \tau)u(\tau)$$

applico la trasformata

$$\underset{t \in \mathbb{Z}}{f(t)} \quad \rightarrow \quad \underset{\substack{t=0 \\ z \in \mathbb{C}}}{F(z)} = \sum_{t=0}^{\infty} f(t)z^{-t}$$

Per comodità di calcoli tengo a mente la trasformata di  $f(t+1)$

$$\begin{aligned}
Z[f(t+1)] &= \sum_{t=0}^{\infty} f(t+1)z^{-t} \\
&= \sum_{\tau=1}^{\infty} f(\tau)z^{-(\tau-1)} \\
&= z \sum_{\tau}^{\infty} f(\tau)z^{-\tau} \\
&= z \left( \underbrace{\sum_{\tau=1}^{\infty} f(\tau)z^{-\tau}}_{Z[f(t)]} + f(0) - f(0) \right) \\
&= zF(z) - zf(0)
\end{aligned}$$

Allora dato che  $F(x+1) = zX(z) - zx(0)$ :

$$\begin{aligned}
zX(z) - zx(0) &= Ax(z) + Bu(z) \\
zX(z) - Ax(z) &= zx(0) + Bu(z) \\
(zI - A)X(z) &= zx(0) + Bu(z) \\
X(z) &= \underbrace{(zI - A)^{-1}zx(0)}_{Z[\Phi(t)x_0]} + \underbrace{(zI - A)^{-1}Bu(z)}_{Z[\sum_{t=t_0}^{t-1} H(t-\tau)u(\tau)]}
\end{aligned}$$

### 3 Stabilità

#### 3.1 Studiare la stabilità di un sistema non lineare

Prendiamo il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x(t), u(t)) \\ y(t) = h(x(t), u(t)) \end{cases}$$

con  $x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^p, y \in \mathbb{R}^q, f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n, h : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$

Dato che la permanenza in uno stato è determinata dall'assenza di variazioni, un punto di equilibrio è un punto  $x_e$  tale che  $f(x_e, u) = 0$  per qualche  $u$ . E basta, le definizioni di stabilità sono le solite per i punti di equilibrio.

#### 3.2 Enunciato e dimostrazione teorema di Nyquist

Condizione necessaria e sufficiente per la stabilità asintotica di un sistema a retroazione unitaria è che il numero di giri che il vettore rappresentativo di  $1 + F(j\omega)$  compie attorno allo 0 (ossia i giri che fa  $F(j\omega)$  attorno a -1), sia uguale al numero di autovalori a parte reale positiva del sistema a anello aperto.

### 3.2.1 Dimostrazione:

Dato il sistema

$$S = \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$$

e introducendo una controreazione unitaria all'uscita  $u = -y + v$  viene:

$$S_{CH} = \begin{cases} \dot{x} = (A - BC)x + Bv \\ y = Cx \end{cases}$$

Il sistema  $S$  lo chiamiamo a anello aperto e  $S_{CH}$  a anello chiuso.

Ora poniamo  $d_{AP}(s) = |sI - A|$  (il denominatore di  $F(s)$ ) e  $d_{CH}(s) = |sI - A + BC|$  il denominatore (polinomio caratteristico) della funzione di trasferimento a anello chiuso.

Come sappiamo il sistema complessivo è stabile se  $d_{CH}$  non ha radici a parte reale positiva, inoltre è dimostrabile che vale la:

$$\frac{d_{CH}(s)}{d_{AP}(s)} = |I + C(sI - A)^{-1}B| = |I + F(s)| \quad (6)$$

infatti a partire da

$$\begin{aligned} |sI - A + BC| &= |sI - A| |I + (sI - A)^{-1}BC| \\ &= |sI - A| |I + C(sI - A)^{-1}B| \end{aligned}$$

mi viene

$$\frac{d_{CH}(s)}{d_{AP}(s)} = \frac{|sI - A + BC|}{|sI - A|} = \frac{|sI - A| |I + C(sI - A)^{-1}B|}{|sI - A|}$$

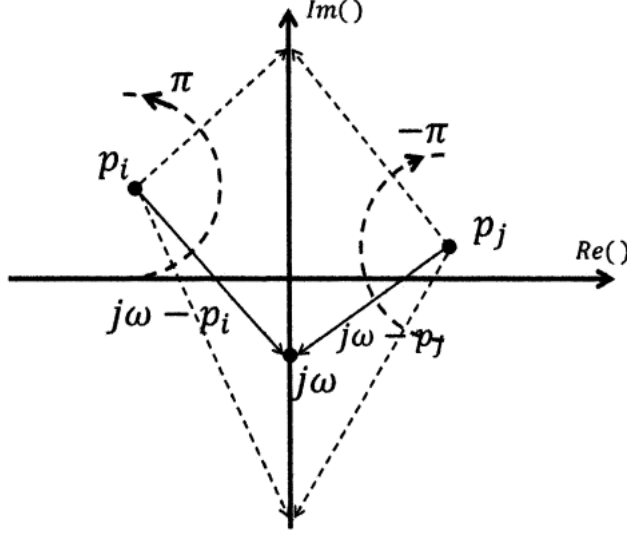
(che dimostra la (6)).

Ora consideriamo un polinomio generico  $p(s)$  di grado  $n$  con le radici  $p_1, p_2, \dots$ . Ponendo  $s = j\omega$  viene

$$p(j\omega) = k(j\omega - p_1) \dots (j\omega - p_n)$$

Inizialmente studio il caso in cui non ci siano radici nulle: Ogni fattore  $j\omega - p_i$  è rappresentabile nel piano complesso come un vettore tra  $p_i$  e  $j\omega$ .

Ora consideriamo due poli, uno con parte reale positiva  $p_i$  e uno negativa  $p_j$  con i vettori associati.



Facendo variare  $\omega$  da  $-\infty$  a  $+\infty$  gli estremi dei vettori variano posizionandosi sull'asse immaginario sempre più su. Quindi si può dire che per  $\omega = -\infty$  i vettori sono entrambi verticali verso il basso, e per  $\omega = \infty$  verso l'alto.

Da questa consapevolezza cosa posso ricavare? Che per i poli positivi passare da  $\omega = -\infty$  a  $\omega = \infty$  significa far fare al vettore un giro di  $-\pi$ , mentre per quelli negativi un giro di  $\pi$ .

Ora definiamo come  $\Delta_\varphi(p)$  la variazione di fase dell'intero polinomio quando  $\omega$  varia da  $-\infty$  a  $\infty$ : indicando con  $n_p$  il numero di radici a parte reale positiva di  $p(s)$  è verificata la:

$$\Delta_\varphi(p) = (n - n_p)\pi - n_p\pi = n\pi - 2\pi n_p \quad (7)$$

Ora riscrivendo la (6) calcolando in  $s = j\omega$  e calcolando le variazioni di fase, viene:

$$\Delta_\varphi \left( \frac{d_{CH}(j\omega)}{d_{AP}(j\omega)} \right) = \Delta_\varphi (|I + F(j\omega)|)$$

Sapendo le proprietà del prodotto tra fasi questa la riscriviamo come

$$\Delta_\varphi \left( \frac{d_{CH}(j\omega)}{d_{AP}(j\omega)} \right) = \Delta_\varphi(d_{CH}(j\omega)) - \Delta_\varphi(d_{AP}(j\omega))$$

Ora, applicando la (7) a entrambi i polinomi, indicando  $Z_p$  il numero di radici parte reale positiva di  $d_{CH}(j\omega)$  e con  $P_p$  quello di  $d_{AP}(j\omega)$  viene

$$\Delta_\varphi \left( \frac{d_{CH}(j\omega)}{d_{AP}(j\omega)} \right) = (n\pi - 2\pi Z_p) - (n\pi - 2\pi P_p) = 2\pi(Z_p - P_p)$$

Quindi a partire dal diagramma polare di  $|1 + F(s)|$  è possibile determinare quanti giri fa il vettore della funzione attorno allo zero. Indicando questo numero con  $N$ , (positivo se le rotazioni sono antiorarie e negativo altrimenti) mi viene:

$$\Delta_\varphi(1 + F(j\omega)) = 2\pi N$$

e quindi la (7) si riscrive come

$$2\pi(Z_p - P_p) = 2\pi N \implies P_p - Z_p = N$$

Ovviamente il sistema è asintoticamente stabile solo se  $Z_p = 0$  e quindi

$$N = P_p \quad \text{è quello che volevo dimostrare}$$

### 3.3 Definizione punto di equilibrio

Consideriamo il sistema definito dall'equazione di stato:  $\dot{x} = f(x(t), u(t))$ , un punto di equilibrio  $x_e$  del sistema è definito dal fatto che  $f(x_e, u_e) = 0$  per qualche  $u_e$ .

Ci limitiamo allo studio del caso in cui  $u_e = 0$ .

Quindi un sistema ammette punti di equilibrio se esistono soluzioni al sistema:  $f(x_e, 0) = 0$ .

Consideriamo lo studio di un punto  $x_o$  vicino a  $x_e$ , ci sono tre possibilità:

1. Il sistema rimane in un intorno di  $x_e$  (stabilità semplice)
2. Il sistema tende a  $x_e$  (stabilità asintotica)
3. Il sistema diverge (instabilità)

### 3.4 Definizione formale di stabilità di un punto di equilibrio

Preso un punto di equilibrio  $x_e$ , questo è stabile **semplicemente** se: comunque scegliamo un intorno di questo punto ( $\forall \varepsilon > 0$ ), esiste sempre un intorno (più piccolo) di quel punto ( $\exists \delta(\varepsilon) > 0$ ) tale che, se scegliamo un punto  $x_o$  in questo intorno ( $\|x_o - x_e\| \leq \delta(\varepsilon)$ ), si avrà che l'evoluzione del sistema nel tempo rimarrà sempre ( $\forall t \geq 0$ ) nell'intorno di raggio  $\varepsilon$  ( $\|x(t) - x_e\| \leq \varepsilon$ ).

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) : \|x_o - x_e\| < \delta(\varepsilon) \implies \|x(t) - x_e\| \leq \varepsilon \forall t \geq 0$$

È invece stabile **asintoticamente** se è stabile semplicemente e inoltre al passare del tempo la distanza dei due punti diminuisce:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \|x_o - x_e\| \leq \delta(\varepsilon) \implies \|x(t) - x_e\| \leq \varepsilon \forall t \geq 0 \lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - x_e\| = 0$$

### 3.5 Definizione, condizioni e criteri di stabilità interna per sistemi lineari:

Un sistema è stabile se reagisce in modo positivo all'effetto delle perturbazioni, nel senso di contenere l'effetto dell'evoluzione libera.

Per un sistema lineare  $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$ , gli stati di equilibrio sono quelli che soddisfano l'equazione:  $\dot{x} = Ax_e = 0$ , sicuramente verificata per  $x_e = 0$  e quindi l'origine dello spazio di stato è sempre lo stato di equilibrio.

Esso è unico se e solo se la matrice dinamica è invertibile ( $\det(A) \neq 0$ ). Le proprietà di uno stato di equilibrio sono equivalenti a quelle di ogni altro (per cui si ha la possibilità di limitare lo studio allo stato zero); come conseguenza si parla di stabilità interna come di una proprietà del sistema e non di un particolare stato di equilibrio.

Le condizioni di stabilità sono:

- Un sistema è **semplicemente stabile** se e solo se, preso un valore  $k$  finito si ha che  $|e^{At}| \leq k$ . Questa condizione richiede che tutti gli autovalori abbiano parte reale minore o uguale a zero se semplici (molteplicità unitaria), e minore di zero se a molteplicità maggiore.
- Un sistema è **asintoticamente stabile** se e solo se è stabile semplicemente, e inoltre  $\lim_{t \rightarrow \infty} |e^{At}| = 0$ , quindi gli autovalori devono essere tutti strettamente minori di 0.

Lo studio della **STABILITÀ INTERNA** si riduce allo studio della stabilità dell'origine: implica la stabilità di tutti i modi.

### 3.6 Relazioni tra stabilità esterna e interna

1. stabilità interna  $\implies$  stabilità esterna.
2. stabilità esterna  $\implies$  stabilità esterna nello stato zero.
3. stabilità esterna nello stato zero  $\implies$  stabilità esterna se tutti i modi sono eccitabili
4. stabilità esterna  $\implies$  stabilità interna asintotica se tutti i modi sono eccitabili e osservabili.
5. stabilità esterna  $\implies$  stabilità interna semplice se tutti i modi sono e osservabili.

### 3.7 Stabilità esterna nello stato zero

Se è verificata la condizione: " $y$  limitata  $\implies u$  limitato" allora si parla di stabilità esterna.

Un sistema è stabile nello stato zero se e solo se  $\int_0^t ||W(\tau)|| d\tau < k \forall t$ .

Ovvero la norma della funzione di trasferimento deve essere sommabile nell'intervallo considerato. Considerando il punto di vista degli autovalori la condizione può esprimersi come: *gli autovalori che sono simultaneamente eccitabili ed osservabili devono essere a parte reale negativa.*

### 3.8 Definizione di stabilità esterna e condizioni

La stabilità esterna è anche detta stabilità ingresso-uscita ed è una proprietà che indica come un sistema risponde a fronte di ingressi limitati.

Le condizioni necessarie e sufficienti affinché un sistema sia stabile esternamente sono:

- **Stabilità esterna nello stato zero:**  $\int_0^t |W(\tau)| d\tau < K \forall t$ , quindi gli autovalori che sono simultaneamente eccitabili e osservabili devono avere parte reale negativa.
- $|\Psi(t)| < k \forall t$ , quindi *gli autovalori osservabili in uscita devono essere a parte reale strettamente negativa se con molteplicità geometrica maggiore di 1, o parte reale non positiva se con molteplicità geometrica pari a 1.*

## 4 Dimostrazioni di risposte a regime permanente

### 4.1 La risposta a regime permanente: definizione e condizioni di esistenza

La risposta a regime permanente è la funzione intorno alla quale tende la risposta di un sistema in presenza di un ingresso persistente e indipendentemente dallo stato iniziale. Si può scrivere come:

$$\lim_{t_0 \rightarrow -\infty} \int_{t_0}^t W(t - \tau) u(\tau) d\tau$$

Affinché esista deve essere assicurata la sommabilità della funzione integranda, vale a dire che è necessaria la **limitatezza delle evoluzioni interne (Stabilità asintotica)** e quindi tutti gli autovalori del sistema devono avere parte reale negativa.

#### 4.2 Risposta a regime permanente ad ingressi sinusoidali per sistemi a tempo continuo

La risposta a regime permanente è quell'andamento nel tempo al quale tende ad assestarsi la risposta quando l'ingresso è persistente e indipendente dallo stato. La risposta a regime permanente per ingressi sinusoidali è una funzione simile all'ingresso, ma modificata in modulo e fase, assume la forma :

$$Y_r(t) = M(\omega) \sin(\omega t + \Phi(\omega))$$

Il modulo è dato da  $|W(j\omega)| = \sqrt{Re^2 + Im^2}$ , lo sfasamento invece è  $L(W(j\omega)) = \Phi(\omega) = \arctan \frac{Im}{Re}$ .

#### 4.3 Dimostrare la formula della risposta a regime permanente all'ingresso $u(k) = \sin(\theta k)$ per un sistema a tempo discreto.

Si ricorda che per i sistemi tempo discreto

$$Y_r(k) = \sum_{\tau=-\infty}^k W(k-\tau)u(\tau)$$

e che  $u(k) = \frac{e^{j\theta k} - e^{-j\theta k}}{2j}$ .

Considero inizialmente l'ingresso  $u(k) = e^{j\theta k}$  e ottengo:

$$Y_r(k) = \sum_{\tau=-\infty}^k W(k-\tau)e^{-j\theta\tau}, \quad \text{ora pongo} \quad k-\tau = \xi$$

Così viene:

$$Y_r(k) = \sum_{\xi=0}^{\infty} W(\xi)e^{j\theta(k-\xi)} = e^{j\theta k} \sum_{\xi=0}^{\infty} W(\xi)e^{-j\theta\xi} = e^{j\theta k} W(Z)|_{e^{j\theta}}$$

. Di conseguenza la risposta a regime permanente a questo ingresso è:

$Y_r(k) = e^{j\theta k} W(e^{j\theta})$ . Considero ora l'ingresso  $u(k) = \sin(\theta k)$ , seguendo calcoli molto simili al caso precedente, e grazie a questi due risultati ottengo la risposta nel caso di ingresso sinusoidale:

$$Y_r(k) = \frac{e^{j\theta k} W(e^{j\theta}) - e^{-j\theta k} W(e^{-j\theta})}{2j}$$

#### 4.4 Si dimostri che, se esiste, la risposta a regime permanente a $u(t) = \delta_{-1}(t)$ (ingresso a gradino) è uguale al guadagno del sistema

Considerando l'ingresso  $u(t) = \delta_{-1}(t)$  un ingresso costante, la risposta a regime sarà del tipo

$$Y_r(t) = \lim_{t_0 \rightarrow -\infty} \int_{t_0}^t W(t-\tau)u(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^t W(t-\tau) \cdot 1d\tau$$

Applicando il cambio di variabile  $t-\tau = \theta$  ottengo  $Y_r(t) = \int_0^{+\infty} W(\theta)d\theta$ .

Questo integrale assomiglia al calcolo della trasformata di Laplace  $W(s)$ ; manca però il termine  $e^{-s\theta}$ , che tuttavia è nullo per  $s = 0$ . Quindi posso moltiplicare l'integrale per  $e^{-s\theta}$  e

poi calcolarlo per  $s = 0$ :

$$Y_r(t) = \int_0^{+\infty} W(\theta) d\theta = \int_0^{+\infty} W(\theta) e^{-s\theta} d\theta \Big|_{s=0} = W(s) \Big|_{s=0}$$

Come sappiamo  $W(0)$  mi restituisce il guadagno della funzione perciò la risposta a regime permanente dell'ingresso costante è pari al guadagno.

#### 4.5 Dimostrare che la funzione di trasferimento $W(s)$ non dipende dalla scelta delle coordinate

Sappiamo che  $W(t) = Ce^{At}B + D$

Se effettuo il cambio di coordinate

$$z = Tx \rightarrow \tilde{A} = TAT^{-1}, \tilde{B} = TB, \tilde{C} = CT^{-1}, \tilde{D} = D$$

ottengo:  $\tilde{W} = \tilde{C}e^{At}\tilde{B} + \tilde{D} = CT^{-1}Te^{At}T^{-1}TB + D = W(t)$

#### 4.6 Risposta a regime permanente per sistemi a tempo discreto

La risposta a regime permanente, ad un assegnato ingresso, è quella funzione del tempo intorno alla quale, indipendentemente dallo stato iniziale, tende ad arrestarsi la risposta in uscita al crescere del tempo. Per sistemi tempo discreto si definisce con:

$$Y_r(k) = \sum_{\tau=-\infty}^k W(k-\tau)u(\tau)$$

Si assume anche in questo caso che il sistema sia stabile internamente (modulo minore o uguale a uno degli autovalori con ordine geometrico unitario, strettamente inferiore ad uno gli altri), per evitare che vi siano evoluzioni che crescono indefinitamente impedendone il funzionamento.

Valgono inoltre le ipotesi che i modi osservabili siano asintoticamente stabili (cioè che i corrispondenti autovalori siano a modulo inferiore ad uno), per assicurare l'indipendenza dallo stato iniziale, e che il sistema sia esternamente stabile nello stato zero (modulo inferiore ad uno dei poli della funzione di trasferimento).

#### 4.7 È possibile che un sistema abbia funzione di trasferimento uguale a zero? Se sì, sotto quali condizioni?

Sì, è possibile perché essendo

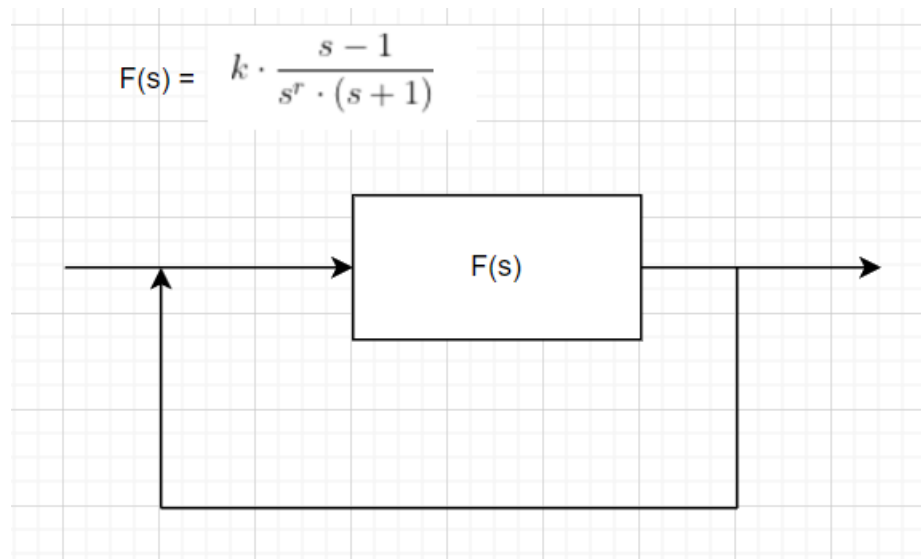
$$W(s) = \mathcal{L}[W(t)] \quad W(t) = Ce^{At}B = \sum_{i=1}^n e^{\lambda_i t} C u_i v_i B$$

affinché un modo non compaia nella  $W(t)$  deve essere non eccitabile oppure non osservabile.



## 5 Esercizi

5.1 Trovare il valore massimo del parametro  $r$  tale per cui il sistema retroazionato sia stabile.



Dato che mi sfugge una maniera migliore di farlo lo faccio provando gli indici. Ovviamente si inizia da  $r = 0$ :

$$W_{AP} = \frac{k(s-1)}{(s+1)} \rightarrow W_{CH} = \frac{k(s-1)}{(k+1)s+1-k}$$

Con Routh vediamo il caso  $k+1 > 0$ :

$$\begin{array}{lll} 1+k > 0 \rightarrow & k > -1 \rightarrow & k > 0 \\ 1-k > 0 \rightarrow & k < 1 & \end{array}$$

e  $k+1 < 0 \rightarrow k < -1$ :

$$\begin{array}{ll} k+1 < 0 \rightarrow & k < -1 \\ 1-k < 0 \rightarrow & 1 < k \end{array}$$

Che non viene. Quindi vale per  $0 < k < 1$  è stabile asintoticamente.

Ora andiamo avanti e proviamo

$$W_{AP} = \frac{k(s-1)}{s(s+1)} \rightarrow W_{CH} = \frac{k(s-1)}{s^2 + (k+1)s - k}$$

e sempre con Routh viene:  $K > 0$  sicuro no perchè  $s^2$  ha coefficiente positivo (1), con  $k < 0$  invece:

$$\begin{array}{ll} 1 > 0 & \\ k+1 > 0 \rightarrow & k > -1 \\ -k > 0 \rightarrow & k < 0 \end{array}$$

Quindi è stabile per  $-1 < k < 0$  Ora andiamo avanti e proviamo

$$W_{AP} = \frac{k(s-1)}{s^2(s+1)} \rightarrow W_{CH} = \frac{k(s-1)}{s^3 + s^2 + ks - k}$$

Che viene

$$\begin{array}{rcl}
 3 \text{ grado} & 1 & k \\
 2 \text{ grado} & 1 & -k \\
 1 \text{ grado} & 2k = \frac{\begin{vmatrix} 1 & k \\ 1 & -k \end{vmatrix}}{-1} & \\
 0 \text{ grado} & -k & 
 \end{array}$$

Che avendo sia  $2k$  che  $-k$  non può venire mai bene.