Raggiungibilità, Osservabilita, Scomposizione di Kalman

Controlli Automatici LS (Prof. C. Melchiorri)

È assegnato il sistema lineare tempo continuo, stazionario descritto dalle seguenti equazioni:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned}$$

ove

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a) Si determini il sottospazio di raggiungibilità:

b) Si determini il sottospazio di inosservabilità:

c) Si effettui la scomposizione canonica di Kalman:

d) Si valuti la stabilità del sistema:

e) Si valuti la stabilità ingresso limitato-stato limitato (i.l.s.l.) del sistema:

f) Si valuti la stabilità ingresso limitato-uscita limitata (i.l.u.l.) del sistema.

Soluzione

a) Calcoliamo la matrice di raggiugibilità $P = [B\ AB\ A^2B \dots A^{n-1}B]$:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Si noti che le prime due colonne di P coincidono con quelle di B e, dopo aver inserito le colonne di AB, procedendo all'inserimento delle colonne di A^2B non si ha più un aumento di dimensione dello spazio P. Il procedimento può quindi essere fermato ricavando dalla matrice $[B\ AB]$ una base ortonormale di P.

b) Per la determinazione dello spazio di inosservabilità calcoliamo il complemento ortogonale della trasposta della matrice di osservabilità $Q^T = [C^T \ A^T C^T \dots A^{T(n-1)} C^T]$:

$$Q^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow Q^{T\perp} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Si noti che le prime due colonne di Q^T coincidono con quelle di C^T e, dopo aver inserito le colonne di $A^T C^T$, procedendo all'inserimento delle colonne di $A^{T2} C^T$ non si ha più un aumento di dimensione dello spazio generato da Q^T. Il procedimento può quindi essere fermato ricavando dalla matrice $[C^T \ A^T C^T]$ una base ortonormale di $Q^{T\perp}$.

c) Per procedere con la scomposizione canonica di Kalman, è necessario determinare l'intersezione dello spazio di raggiungibilità e di inosservabilità. Questa intersezione si potrebbe normalmente calcolare come complemento ortogonale della somma dei rispettivi complementi ortogonali, ma osservando la struttura di P e di $Q^{T\perp}$ è facile notare come la loro intersezione sia data da $P \cap Q^{T\perp} = [1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0]^T$. La matrice di trasformazione T risulta quindi essere:

$$T = [T_1 \ T_2 \ T_3 \ T_4] = \left[\begin{array}{c|cc|c|cc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Essendo la T ortonormale, la sua inversa coincide con la sua trasposta. È quindi facile ricavare la terna di matrici che descrive il sistema nella buova base. La terna avrà una struttura del tipo:

$$A' = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ 0 & A_{22} & 0 & A_{24} \\ 0 & 0 & A_{33} & A_{34} \\ 0 & 0 & 0 & A_{44} \end{bmatrix} \qquad B' = T^{-1}B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C' = CT = \begin{bmatrix} 0 & C_2 & 0 & C_4 \end{bmatrix}$$

dove le dimensioni delle varie sottomatrici dipendono dal numero di colonne delle T_1, T_2, T_3, T_4. Nel caso in esame si ottiene:

$$A' = \left[\begin{array}{c|cc|c|cc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right] \qquad B' = \left[\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$C' = \left[\begin{array}{c|cc|c|cc} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

d) Siccome matrici simili hanno gli stessi autovalori, dalla matrice A' è semplice ricavare gli autovalori della matrice A. Essendo la A'^T in forma di Jordan, si ricava direttamente che gli autovalori di A sono:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 0 \\ \lambda_2 &= -1 \\ \lambda_3 &= -1 \\ \lambda_4 &= 1 \\ \lambda_5 &= -2 \\ \lambda_6 &= -2 \end{aligned}$$

Essendo $\lambda_4 > 0$ si può affermare che il sistema è instabile.

e) Un sistema dinamico lineare stazionario tempo continuo risulta stabile i.l.s.l. quando gli autovalori associati alla parte raggiungibile del sistema sono a parte reale negativa. La parte raggiungibile del sistema è rappresentata, nella scomposizione di Kalman, dalle parti 1 e 2. Nel caso in esame gli autovalori di A_{11} e A_{22} sono:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 0 \\ \lambda_2 &= -1 \\ \lambda_3 &= -1 \end{aligned}$$

A causa dell'autovalore $\lambda_1 = 0$ della matrice A_{11} il sistema non risulta stabile i.l.s.l.

f) Un sistema dinamico lineare stazionario tempo continuo risulta stabile i.l.u.l. quando gli autovalori associati alla parte raggiungibile ed osservabile del sistema sono a parte reale negativa. La parte raggiungibile ed osservabile del sistema è rappresentata, nella scomposizione di Kalman, dalla parte 2. Nel caso in esame gli autovalori di A_{22} sono:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -1 \\ \lambda_2 &= -1 \end{aligned}$$

Il sistema in esame, che non risulta stabile né semplicemente né asintoticamente e neppure i.l.s.l., risulta stabile i.l.u.l.