1. Elementi di teoria della stabilità

Stabilità come quella proprietà delle evoluzioni di modificare di poco l'andamento a seguito di perturbazioni: tanto più piccole le perturbazioni tanto più piccoli gli scostamenti delle evoluzioni perturbate da quelle non perturbate. E' necessario precisare cosa si intende per perturbazioni. In senso lato si tratta di variazioni delle condizioni operative; se si osserva che per un dato sistema un'evoluzione è fissata una volta fissato uno stato iniziale ed una funzione d'ingresso, s'intende che una perturbazione può concretizzarsi in variazioni dello stato iniziale o dell'ingresso. In una accezione più generale si usa comprendere le perturbazioni sui parametri del sistema e si usa parlare in questo caso di stabilità strutturale, ma non tratteremo questo aspetto in questa sede.

Si immaginerà quindi assegnato un sistema e si indagherà sulla capacità del sistema di compensare l'effetto di perturbazioni che assumiamo essere presenti solo sullo stato iniziale. Scostamenti piccoli o transitori rispetto a moti prefissati, eventualmente di equilibrio, a seguito di perturbazioni di piccola entità sono caratteristici di un comportamento qualitativo, in termini di evoluzioni interne e/o in uscita, che definiremo stabile. I criteri di studio della stabilità che vengono qui trattati rientrano nel complesso dei metodi di analisi qualitativa; si tratta di quei metodi che consentono di studiare le proprietà delle *soluzioni di sistemi dinamici senza procedere al calcolo.*

La trattazione che segue è centrata sullo studio della stabilità interna degli stati di equilibrio di un assegnato sistema dinamico. Esso sarà condotto prendendo le mosse dalle definizioni principali, per arrivare alle condizioni ed ai criteri di verifica.

1.1. Stabilità: definizioni e condizioni

Fino ad oggi si è posta l'attenzione allo studio delle rappresentazioni matematiche; con questa lezione inizia un nuovo capitolo dedicato alla teoria qualitativa dei sistemi. Non sempre nelle applicazioni, infatti, interessa conoscere in modo preciso l'andamento, per esempio, della risposta corrispondente ad un determinato ingresso, può invece interessare una sua proprietà, saper valutare alcuni aspetti inerenti le caratteristiche del suo comportamento. Fra queste, la stabilità, di cui ci accingiamo a trattare, riveste un centrale interesse nello studio dei sistemi dinamici.

La *definizione* formale degli aspetti più rilevanti di tale proprietà, che in senso lato riguarda la capacità di reagire alle perturbazioni, rappresenta una fase preliminare allo sviluppo dello studio che condurrà alla individuazione di *condizioni* ed, infine, alla messa a punto di *criteri e metodi* di verifica. Innanzitutto sarà messo in luce a che cosa ci si riferisce, se ad esempio alla stabilità di uno stato o di un evoluzione nello stato o in uscita; poi, a partire da definizioni formali che precisano in termini matematici l'obiettivo dell'indagine, saranno individuate le condizioni cui il sistema deve soddisfare affinché le proprietà siano verificate; infine saranno presentati alcuni metodi che consentono di valutare il soddisfacimento o meno delle condizioni.

Lo studio sarà condotto seguendo la linea indicata; parleremo delle definizioni principali, delle condizioni e dei criteri.

Prima di tutto definiamo la classe dei sistemi a cui faremo riferimento. Sarà la classe dei sistemi a dimensione finita, stazionari e, per il momento, a tempo continuo, regolari:

$$\dot{x}(t) = f\big(x(t), u(t)\big)$$

$$y(t) = \eta\big(x(t), u(t)\big)$$

in cui i fenomeni dinamici di evoluzione del tempo sono soprattutto rappresentati dalla prima equazione.

In questo studio considereremo solo i sistemi strettamente propri, dove non c'è il legame ingresso - uscita, e supporremo che l'uscita coincida con lo stato. Naturalmente questa scelta è motivata da esigenze di semplicità di trattazione, ma resta inteso che lo studio può essere generalizzato. Per questa classe di sistemi si introduce il concetto di *stato di equilibrio*, x_e. Uno stato è di equilibrio se trovandosi il sistema in quello stato vi permane con ingresso nullo; quindi lo stato di equilibrio x_e soddisfa la condizione:

$$0 = f(x_e, 0)$$

Per esempi, nel caso dei sistemi lineari, dove:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

gli stati di equilibrio sono quelli che soddisfano la seguente equazione:

$$0 = Ax_e$$

Da ciò si constata che ($x_e = 0$), cioè l'origine dello spazio di stato, è sempre uno stato di equilibrio; in generale non è unico, lo è solo se il determinante di A è diverso da zero.

Una proprietà importante degli stati di equilibrio è la *stabilità.* Si consideri, per esigenze di rappresentazione grafica, uno spazio di stato a due dimensioni x_1, x_2 e si consideri lo stato di equilibrio x_e per esempio l'origine dello spazio di stato.

x_e si dice localmente stabile se definito un ϵ, piccolo a piacere, e disegnata una circonferenza a raggio ϵ intorno ad x_e esiste un δ che dipende dall'ϵ tale che se una perturbazione dello stato iniziale rispetto al punto di equilibrio, è all'interno del cerchio di raggio δ, la traiettoria che nasce non diverge da x_e, o meglio non esce dal cerchio di raggio ϵ.

Quindi in definitiva una volta che si è perturbato x_e nasce un moto che non si allontana troppo dallo stato di equilibrio. Ciò si scrive nel seguente modo:

$$x_e \text{ è localmente stabile se}$$

$$\forall \epsilon \quad \exists \delta(\epsilon):$$

$$\|x(t_0) - x_e\| < \delta(\epsilon) \Rightarrow \|x(t) - x_e\| < \epsilon, \quad \forall t \geq t_0$$

In sostanza la proprietà di stabilità è una condizione di limitatezza dell'effetto delle perturbazioni. Si ha un sistema in uno stato di equilibrio, viene perturbato, $\big(x(t_0)\big)$, nasce quindi un transitorio, se questa evoluzione libera si mantiene limitata localmente, allora si deve dire che quello stato di equilibrio è localmente stabile, viceversa è instabile.
Per esprimere in modo formale questi concetti è necessario ricordare che la norma di un vettore $x(t)$ può essere definita in diversi modi:

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i| \quad \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \quad \max_i |x_i|$$

e che per quanto riguarda la convergenza, negli spazi a dimensione finita tutte le norme sono equivalenti. Quindi si può fare riferimento ad una qualsiasi di queste definizioni.

Una proprietà più stringente è la *stabilità asintotica*: x_e è asintoticamente localmente stabile se non solo si verifica la condizione precedente, cioè la limitatezza degli effetti della perturbazione, ma anche la convergenza verso x_e dell'evoluzione. Cioè in definitiva:

$$\exists \delta_a(\epsilon): \quad \|x(t_0) - x_e\| < \delta_a \Rightarrow \lim_{t \to \infty} \|x(t) - x_e\| = 0$$

E quindi x_e è asintoticamente stabile se a seguito di una perturbazione, passato un certo tempo, si ritorna in quello stato.

Le proprietà definite hanno una valenza locale, se si immagina che in un sistema vi siano più punti di equilibrio, intorno a ciascuno localmente si può pensare di definire la stabilità. Una proprietà molto forte è la stabilità globale

x_e *è globalmente asintoticamente stabile* se x_e è stabile e

$$\forall k > 0 \quad \|x(t_0) - x_e\| < k \Rightarrow \lim_{t\to\infty} \|x(t) - x_e\| = 0$$

comunque grande sia la perturbazione dello stato di equilibrio, nasce un transitorio che converge a x_e.
In generale abbiamo quindi proprietà locali, più o meno forti, e proprietà globali, ma la cosa interessante è che nei sistemi lineari, le proprietà locali implicano quelle globali. Infatti, per un sistema lineare

$$\dot{x}(t) = Ax(t)$$

le proprietà locali implicano le globali.

Si consideri, a tale proposito, la trasformazione

$$z(t) = \alpha x(t)$$

con α costante arbitraria; si ottiene

$$\dot{z}(t) = \alpha\dot{x}(t) = \alpha Ax(t) = Az(t)$$

quindi la nuova variabile soddisfa la stessa equazione dinamica cui soddisfaceva la x, allora avendo le stesse proprietà dinamiche, sarà soddisfatta, ad esempio, la stessa condizione di stabilità asintotica locale cioè:

$$\|z(t_0) - z_e\| < \delta_a \Rightarrow \lim_{t\to\infty} \|z(t) - z_e\| = 0$$

in questa condizione si può sostituire di nuovo αx e quindi avere:

$$\|x(t_0) - x_e\| < \frac{\delta_a}{\alpha} \Rightarrow \lim_{t\to\infty} \alpha\|x(t) - x_e\| = 0$$

che per l'arbitrarietà di α prova l'asintoticità globale.

In realtà ci vuole una precisazione: si è scritto il punto di equilibrio x_e in termini generali, in questo caso il punto di equilibrio x_e se il sistema è lineare non può che essere lo stato zero, unico possibile stato di equilibrio isolato , perché se esistessero punti di equilibrio x_e diversi dall'origine, spostandosi con la perturbazione iniziale da x_e in uno di questi punti di equilibrio non sarebbe poi soddisfatta la condizione che una volta perturbato lo stato iniziale asintoticamente si ritorni in x_e.

Un'ulteriore aspetto riguarda la *stabilità di un moto*: si supponga, ancora per esigenze di rappresentazione grafica, lo spazio di stato a due dimensioni x_1, x_2 si parta da uno stato iniziale $x(t_0)$, e si immagini fissato un ingresso; si avrà un moto che soddisfa l'equazione:

$$\dot{x}(t) = f\big(x(t), u(t)\big)$$

se si perturba lo stato iniziale, nasce una diversa traiettoria e un moto perturbato, $x_p(t)$, che soddisfa la stessa equazione:

$$\dot{x}_p(t) = f\big(x_p(t), u(t)\big)$$

se si indica con ξ l'evoluzione dello scostamento tra i due andamenti

$$\xi(t) = x_p(t) - x(t)$$

si ottiene

$$\dot{\xi}(t) = \dot{x}_p(t) - \dot{x}(t) = f\big(x(t) + \xi(t), u(t)\big) - f\big(x(t), u(t)\big)$$

quest'ultima è l'equazione cui soddisfa la nuova variante. Si constata che se si prende $\xi = 0$, cioè l'origine dello spazio di stato della nuova variabile ξ, il secondo membro dell'equazione diventa zero. Allora quando $\xi = 0$, $\dot{\xi}(t) = 0$, cioè l'origine dello spazio di stato della variabile ξ è un punto di equilibrio.

Quindi basta studiare la stabilità dell'origine dello spazio di stato della variabile ξ per conoscere la stabilità del moto che si aveva nello spazio x.

Ciò mostra che con un cambiamento di variabile lo studio della stabilità di un moto si trasforma nello studio della stabilità di un punto di equilibrio, più precisamente dell'origine nella variabile ξ.

Naturalmente, nel caso generale ora trattato, il sistema non è stazionario, perché dipende dall'ingresso particolare $u(t)$ e dal moto $x(t)$. Ma nel caso dei sistemi lineari stazionari ciò non avviene. Infatti:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$\dot{x}_p(t) = Ax_p(t) + Bu(t) = Ax(t) + A\xi(t) + Bu(t)$$

dopo aver fatto la differenza si avrà:

$$\dot{\xi}(t) = A\xi(t)$$

Questo risultato è molto importante in quanto ci dice che nel caso dei sistemi lineari stazionari lo studio della stabilità di un qualsiasi moto si riduce allo studio della stabilità dell'origine dello spazio di stato.

Nel caso dei sistemi lineari, già si è verificato che le proprietà locali si trasformano in globali. Si è ora mostrato che anche la stabilità dei moti diventa stabilità di un punto di equilibrio. Perciò nel caso dei sistemi lineari stazionari più che parlare della stabilità del punto di equilibrio, o del moto si parla della stabilità del sistema, ma questo vuol dire che questi vari tipi di stabilità si corrispondono e ciò non succede nel caso generale.

Alla luce delle precedenti considerazioni d'ora in poi si parlerà semplicemente di stabilità dei sistemi lineari stazionari; rimane inteso che ciò significa stabilità dell'origine dello spazio di stato, che è sempre un punto di equilibrio, ma anche stabilità di tutti gli altri stati e stabilità di tutti i moti.

Si passa ora a studiare *Condizioni di stabilità per i sistemi lineari stazionari.*

$$x(t) = \phi(t - t_0)x(t_0)$$

Condizione necessaria e sufficiente di stabilità locale è che la norma della matrice di transizione sia limitata; cioè:

$$\|\phi(t - t_0)\| < k$$

Per quanto riguarda la norma di una matrice, sia A, si ricorda che come nel caso dei vettori diverse definizioni sono possibili:

$$\|A\| = \max_j \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \quad \|A\| = \max|\lambda(A^T A)| \quad \|A\| = \max_j \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

e che sono tutte equivalenti in spazi a dimensione finita.

Ciò premesso è facile mostrare che la condizione espressa è necessaria e sufficiente perché se si suppone che sia soddisfatta, si può scrivere:

$$\|x(t)\| \le \|\phi(t-t_0)\| \cdot \|x(t_0)\|$$

$$\|x(t)\| \le k\|x(t_0)\|$$
$$\|x(t_0)\| < \frac{\epsilon}{k}$$
$$\|x(t)\| \le k\frac{\epsilon}{k}$$

Quindi se la matrice ϕ è limitata allora l'evoluzione libera è limitata; inoltre, se $\|\phi(t-t_0)\|$ non fosse limitata ci sarebbe almeno un elemento della matrice non limitato al variare di t:

$$x_i(t) = \phi_i(t-t_0)x_j(t_0)$$

Con gli stessi argomenti è facile verificare che *Condizione necessaria e sufficiente di stabilità asintotica* è che

$$\lim_{t\to\infty} \|\phi(t-t_0)\| = 0$$

la dimostrazione è analoga sia per la sufficienza che per la necessità
Tale condizione si può esprimere come:

$$\dot{x}(t) = Ax(t)$$
$$\phi(t) = e^{At} \to \lambda_i < 0$$

per l'espressione che assume $\phi(t)$ in funzione degli autovalori; infatti le leggi temporali in $\phi(t)$ sono crescenti o decrescenti a seconda che la parte reale degli autovalori di A sia a destra o a sinistra dell'asse immaginario. In conclusione, la condizione $\|\phi(t)\| < k$, richiede che gli autovalori siano a sinistra dell'asse immaginario, possono essere ammessi autovalori sull'asse immaginario solo se semplici. Se si richiede anche che:

$$\lim_{t\to\infty} |\phi(t-t_0)| = 0$$

gli autovalori devono stare strettamente a sinistra.

L'asse immaginario è la frontiera che divide gli autovalori della matrice A in due categorie, quelli che danno luogo a modi naturali convergenti e quelli che danno luogo a modi naturali divergenti. In conclusione la condizione di stabilità si può esprimere dicendo che gli autovalori di A devono essere non positivi, purché semplici; per la stabilità asintotica devono essere tutti con parte reale negativa. Quindi l'asse immaginario è la frontiera di stabilità. Allora data la matrice dinamica A che caratterizza il sistema, la stabilità asintotica o no, è legata al segno della parte reale degli autovalori di A. Questa è la condizione che deve essere verificata attraverso metodi che, come si vede non richiedono il calcolo degli autovalori, ma solo il segno della loro parte reale.

I criteri di stabilità , che tratteremo nelle prossime lezioni, servono a verificare tale allocazione.

1.2. Il criterio di Routh

Come stabilito nella lezione precedente la stabilità interna di un sistema lineare, cioè di stabilità degli stati di equilibrio e dei moti, è equivalente alla stabilità dello stato zero. Le condizioni di quest'ultima vengono qui di seguito ricordate.

stabilità semplice

$$\begin{cases} Re(\lambda_i^1) \leq 0 \\ Re(\lambda_i^{>1}) < 0 \end{cases}$$

stabilità asintotica

$$Re(\lambda_i) < 0$$

ove si è indicato con l'apice 1 o > 1 la molteplicità unitaria o maggiore di uno dell'autovalore.

L'argomento di questa lezione è la messa a punto di criteri per la verifica del soddisfacimento di tali condizioni. Data la matrice dinamica A si deve saper valutare il segno della parte reale degli autovalori, nel caso tempo continuo, il modulo, nel caso tempo discreto. Si potrebbe andare a calcolare gli autovalori, ma questo fortunatamente non è necessario; infatti calcolare gli zeri di un polinomio è uno dei problemi più complessi della matematica quando il grado è superiore a 4.

I criteri di cui parleremo consentono senza risolvere l'equazione caratteristica, di avere informazioni sulla parte reale o sul modulo degli zeri.

Una considerazione preliminare per quanto riguarda lo studio della parte reale è che tra gli zeri di un polinomio ve ne sono a parte reale positiva se i coefficienti non hanno tutti lo stesso segno. Non è infatti difficile comprendere, se si pensa al polinomio nella sua forma fattorizzata, che la presenza di coefficienti di diverso segno non può che essere la conseguenza di zeri a parte reale positiva e negativa. I coefficienti tutti dello stesso segno è quindi una condizione necessaria affinché tutti gli zeri abbiano parte reale negativa.

Il criterio di Routh

Con riferimento al generico polinomio di grado n,

$$a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_0 = 0$$

il criterio di Routh consente di stabilire se tutti gli zeri hanno parte reale negativa ed eventualmente quanti sono gli zeri a parte reale positiva. Il criterio consiste nella costruzione di una tabella e poi nella verifica dei coefficienti degli elementi della prima colonna della tabella. Il criterio in esame estende la regola di Cartesio sulla corrispondenza di soluzioni a parte reale positiva e negativa a variazioni e permanenze dei segni dei coefficienti dei un polinomio di secondo grado. Come si ricorderà ad una variazione corrisponde uno zero a parte reale positiva, ad una permanenza uno a parte reale negativa.

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Costruzione della tabella di Routh

$$\begin{array}{l|lll}
n & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} \\
n-1 & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} \\
 & b_{n-2} & b_{n-3} & \dots \\
 & c_{n-3} & c_{n-4} & \dots
\end{array}$$

$$b_{n-2} = \frac{\begin{vmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix}}{-a_{n-1}}$$

$$b_{n-3} = \frac{\begin{vmatrix} a_n & a_{n-4} \\ a_{n-1} & a_{n-5} \end{vmatrix}}{-a_{n-1}}$$

La riga seguente, di ordine $n-3$, è ancora costruita con la stessa procedura ma con riferimento alle due righe precedenti; e così via
Esempio:

$$\lambda^5 + 3\lambda^4 + 2\lambda^3 - 2\lambda^2 + 2\lambda + 4$$

$$
\begin{array}{c|ccc}
5 & 1 & 2 & 2 \\
4 & 3 & -2 & 4 \\
3 & \frac{8}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\
2 & -\frac{11}{4} & 4 & \\
1 & \frac{50}{11} & & \\
0 & 16 & &
\end{array}
$$

Nella costruzione della tabella di Routh il risultato non cambia se si modificano le righe moltiplicandole per uno stesso numero positivo; ciò consente di semplificare i calcoli nella costruzione della tabella.

Conclusa la costruzione della tabella si considera la prima colonna della tabella e si contano il numero di variazioni di segno che ci sono nel passaggio da un coefficiente all'altro. Il numero di variazioni è pari al numero degli zeri a parte reale positiva del polinomio dato.

Nel caso allo studio, il polinomio di grado 5 ha due zeri a parte reale positiva, gli altri tre hanno parte reale negativa.

E' importante osservare che si può incorrere in impedimenti nella costruzione della tabella; ciò accade quando un elemento della prima colonna si annulla. Ciò può accadere per il solo primo elemento della riga o per tutti gli elementi della riga. Quando una di queste situazioni si presenta non si ha stabilità asintotica.

Si consideri la seguente situazione

$$
\begin{array}{|ccc}
1 & 2 & 3 \\
2 & 4 & \\
0 & 3 &
\end{array}
$$

l'impedimento può essere superato in tre diversi modi come spiegato nel seguito.

Sostituendo allo zero il simbolo ϵ a rappresentare un numero positivo e 'piccolo'

$$\begin{array}{|lll} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & \\ \epsilon & 3 & \\ \frac{-4\epsilon-6}{\epsilon} & & \\ 3 & & \end{array}$$

conclusa la costruzione della tabella si contano le variazioni di segno. Nel caso in esame ci sono due variazioni di segno quindi si conclude che ci sono due zeri parte reale positiva.

Moltiplicando il polinomio dato per un binomio con zero negativo;

$$d^1(\lambda) = d(\lambda)(\lambda + 1)$$

si ottiene un nuovo polinomio di grado $n+1$ con nuovi coefficienti se a questo nuovo polinomio applichiamo il criterio di Routh con probabilità uno, non ritroverò lo zero sulla prima colonna. se ad esempio si studia

$$\lambda^4 + 2\lambda^3 + 3\lambda^2 + 6\lambda + 4$$

$$\begin{array}{|lll} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & \\ 0 & 4 & \end{array}$$

da cui

$$(\lambda + 1)(\lambda^4 + 2\lambda^3 + 3\lambda^2 + 6\lambda + 4) =$$

$$\lambda^5 + 3\lambda^4 + 5\lambda^3 + 9\lambda^2 + 10\lambda + 4$$

$$\begin{array}{|lll} 1 & 5 & 10 \\ 3 & 9 & 4 \\ 6 & 26 & \\ -1 & 1 & \\ 32 & & \\ 1 & & \end{array}$$

Un terzo modo di superare l'impedimento incontrato, e si tratta in effetti di una procedura priva di ambiguità ed applicabile in presenza di più elementi nulli nella stessa riga, consiste nel sostituire la riga in questione con la stringa di numeri ottenuti sommando all'$i-mo$ elemento della riga l'elemento di posto $(i+j)$ nella riga stessa moltiplicati per $(-1)^j$, essendo j il numero dei primi elementi nulli. A titolo di esempio si consideri il polinomio

$$\lambda^5 + 5\lambda^3 + 10\lambda + 4$$

e con le modifiche indicate si perviene alla seguente tabella

1	5	10
4	0	4
4	9	
−5	4	
32		
61/5		

Una diversa situazione che può verificarsi nel costruire la tabella è l'annullarsi di un intera riga. Ciò può accadere solo in corrispondenza di una riga di ordine dispari, infatti le due righe precedenti devono essere proporzionali e quindi devono avere lo stesso numero di elementi (si noti che nel passare da una riga dispari a una pari sottostante il di elementi non cambia).

$$\lambda^6 + 2\lambda^5 + 3\lambda^4 + 4\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda + 1$$

6	1	3	1	1
5	2	4	1	
4	x	x	x	
3	x	x		
2	x	x		
1	x			
0	x			

In questa circostanza si può concludere che il polinomio considerato è il prodotto di due polinomi; il primo avrà zeri che hanno parte reale caratterizzata dalle variazioni di segno degli elementi della prima colonna della tabella sinora costruita (gli zeri di d_1 a parte reale positiva sono tanti quante le variazioni di segno che sono apparse nella prima colonna della tabella costruita fino a quel momento); il secondo polinomio è di grado pari ed uguale all'indice della riga che precede la riga che si è annullata, ha solo potenze di grado pari ed i suoi coefficienti sono nell'ordine, da quello si grado massimo a quello di grado zero, i coefficienti della riga che precede quella che si è annullata. Si consideri ad esempio

5	1	3	1
4	1	3	1
3	0	0	

Il polinomio dato è dunque pari al prodotto di due polinomi

$$d(\lambda) = d_1(\lambda)d_2(\lambda)$$

il primo di primo grado con uno zero negativo, il secondo di grado quattro caratterizzato dalla presenza di potenze di λ soltanto di ordine pari

$$d_2(\lambda) = \lambda^4 + 3\lambda^2 + 1$$

Per tale polinomio possiamo calcolare gli zeri, ma nel caso la costruzione della tabella si fosse arrestata ad un livello superiore, si potrebbero avere delle difficoltà per vedere il segno degli zeri di $d_2(\lambda)$. Allora la costruzione della tabella può riprendere in un altro modo. Si deriva il polinomio d_2

$$\frac{d}{d\lambda}(\lambda^4 + 3\lambda^2 + 1) = 4\lambda^3 + 6\lambda$$

e ai coefficienti della riga nulla (quella di ordine tre nel caso allo studio) si sostituiscano i coefficienti di questo nuovo polinomio. Si può ora continuare la costruzione della tabella.

5	1	3	1
4	1	3	1
3	2	3	
2	3	2	
1	$\frac{5}{3}$		
0	2		

Conclusa la tabella si svolge l'analisi dei coefficienti. Nel caso allo studio non ci sono variazioni di segno, ciò che garantisce nel caso in esame la stabilità semplice, come si potrebbe verificare andando a calcolare gli zeri. Si osservi che gli zeri del polinomio $d_2(\lambda)$, con potenze di grado solo pari, hanno una doppia simmetria, rispetto a ciascun asse del piano complesso. Questo assicura che se non vi sono zeri a parte reale positiva tutti si trovano sull'asse immaginario.

Qualche considerazione conclusiva riguarda la potenzialità del metodo.

Si può stabilire non soltanto quanti sono gli zeri di un certo polinomio che sono a sinistra dell'asse immaginario, ma anche quanti sono gli zeri che sono a sinistra di un asse prefissato che abbia coordinate sull'asse reale pari ad $-\alpha$. Tale indagine è di interesse per comprendere la prontezza di risposta di un sistema dinamico. Per fare questo basta effettuare una traslazione di assi e portare l'asse immaginario in $-\alpha$ ed esprimere il polinomio $d(\lambda)$ nelle nuove coordinate $d(\lambda - \alpha)$

Esempio:

$$\lambda^2 + 9\lambda + 20 = 0$$

Ha zeri a parte reale negativa come risulta dall'applicazione elementare del criterio di Routh o, ciò che è lo stesso nel caso di un polinomio di secondo grado, del criterio di Cartesio. Sono gli zeri a parte reale inferiore a -3 ? A tale quesito si può rispondere ancora applicando il criterio di Routh al polinomio ottenuto sostituendo a λ, $(\lambda - 3)$

$$(\lambda - 3)^2 + 9(\lambda - 3) + 20 = 0 \Rightarrow \lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$$

Quest'ultimo ha zeri a parte reale negativa, ciò che implica zeri a parte reale inferiore a -3 nel polinomio originario.

Con considerazioni analoghe il criterio di Routh potrebbe anche essere utilizzato per verificare se gli zeri non soltanto hanno parte reale inferiore a un certo valore, ma anche se si trovano in una prescritta regione del piano complesso, per esempio in un settore conico. In realtà verificare se gli zeri di un polinomio siano contenuti in una regione di tale tipo equivale ad verificare che lo smorzamento di un'eventuale coppia di autovalori complessi sia superiore ad un certo smorzamento fissato e pari a $\sin\theta$ se θ è l'angolo tra l'asse delle ordinate e lo spigolo del cono. La verifica dell'appartenenza degli zeri a tale regione può essere fatta impiegando le trasformazioni di variabile

$$\lambda \leftarrow \lambda e^{j\theta} \quad \lambda \leftarrow \lambda e^{-j\theta}$$

ed applicando il criterio di Routh al seguente polinomio a coefficienti reali

$$D(\lambda) = d(\lambda e^{j\theta})d(\lambda e^{-j\theta})$$

il numero di variazioni di segno diviso per due indica gli zeri che si trovano al di fuori del nostro settore.

1.3. Il metodo generale di Lyapunov*

Con riferimento al sistema

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) \qquad f(x_e) = 0$$

Il criterio di Lyapunov estende, in un contesto puramente matematico, un concetto che è collegato a considerazioni energetiche. Se si immagina di associare ad ogni stato del sistema un livello di energia la stabilità è associata alla diminuzione del livello di energia lungo le evoluzioni del sistema. Quindi se si immagina di associare allo stato x_e un livello energetico nullo ed inoltre di associare agli stati tutti intorno ad x_e un livello energetico superiore, alle evoluzioni libere che partono dagli stati intorno ad x_e dovrà corrispondere una diminuzione dell'energia.

La formalizzazione di questi aspetti è fondata sul concetto di funzione definita positiva e negativa.

Una funzione è detta *definita positiva* in un intorno di x_e, $V(x) > 0$ in I_{x_e}, se

$$V(x_e) = 0 \qquad V(x) > 0 \qquad \forall x \in Ix_e$$

è detta *definita negativa*, $V(x) < 0$, se $-V(x) > 0$.

Esempio di funzioni definite positive in un intorno di un punto:

$$x_e = \begin{pmatrix} x_{e1} \\ \vdots \\ x_{en} \end{pmatrix}$$

$$V(x) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{ei})^2$$

Nel piano, $n = 2$,

$$(x_1 - x_{e_1})^2 + (x_2 - x_{e_2})^2$$

è una funzione definita positiva in tutto lo spazio.

Se non vale la disuguaglianza stretta, ma

$$V(x) \geq 0$$

la funzione è detta *semidefinita positiva*

Enunciato del criterio: lo stato x_e di equilibrio è asintoticamente, localmente stabile se esiste una funzione $V(x)$ definita positiva in un intorno I_{x_e}, tale che la sua derivata lungo il moto

$$\dot{V}(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i} \dot{x}_i < 0$$

sia definita negativa.

$$\frac{d}{dt} V(x(t)) = \frac{\partial V}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt}$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x_1}\frac{\partial V}{\partial x_2}\cdots\frac{\partial V}{\partial x_n}\right)\cdot\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\ \vdots\\ \dot{x}_n\end{pmatrix} \qquad \dot{V}(x)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial x_i}f_i(x)<0$$

Il criterio di Lyapunov dice che in sostanza, se si è in grado di trovare una funzione $V(x)$ definita positiva in I_{x_e} tale che la sua derivata lungo il moto sia definita negativa nello stesso intorno allora si può concludere sulla stabilità asintotica locale dello stato di equilibrio.

Si è parlato di stabilità asintotica, in realtà il criterio consente anche di stabilire sotto quali condizioni lo stato di equilibrio è localmente semplicemente stabile, in questo caso è sufficiente che la $(\dot{V})$ sia semidefinita negativa.

A titolo di esempio si consideri

$$\begin{cases}\dot{x}_1=-x_1x_2^2\\ \dot{x}_2=-x_2^3\end{cases}$$

$$\downarrow$$

$$x_e=\begin{pmatrix}x\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}=x_e \quad \textit{stato} \quad \textit{di} \quad \textit{equilibrio}$$

$$V(x)=x_1^2+x_2^2$$

$$\dot{V}(x)=2x_1\dot{x}_1+2x_2\dot{x}_2$$

$$=-2x_1^2x_2^2-2x_2^4=-2x_2^2(x_1^2+x_2^2)\leq 0$$

Si ottiene una funzione semidefinita positiva, perciò lo stato di equilibrio x_e è uno stato di equilibrio semplicemente stabile. In realtà si ha la stabilità globale semplice di questo stato, perché una generalizzazione del criterio è la seguente: se la funzione $V(x)$ è definita positiva in tutto lo spazio, inoltre la funzione $V(x)$ è radialmente illimitata, cioè quando (x) tende all'infinito la funzione tende all'infinito, e la funzione $(\dot{V})$ è definita negativa o semidefinita negativa in tutto lo spazio, allora si ha anche la stabilità semplice, non locale ma globale.

Un ulteriore esempio fisico che tratteremo riguarda la dinamica dell'assetto di un corpo rigido in assenza di gravità. Questo modello è assunto a descrivere la variazione dell'orientamento di un satellite rispetto ad un riferimento inerziale. Indichiamo con ω_1 la velocità angolare attorno all'asse x, ω_2 quella attorno all'asse y, e ω_3 quella attorno all'asse z e immaginiamo che l'orientamento del satellite possa mutare a seguito di coppie, τ_1, τ_2, τ_3, che vengono generate attorno agli assi principali di inerzia che supporremo coincidenti con gli assi del sistema di riferimento. L'equazione della dinamica può essere scritta

$$J_1\dot{\omega}_1 = (J_2 - J_3)\omega_2\omega_3 + \tau_1$$

$$J_2\dot{\omega}_2 = (J_3 - J_1)\omega_3\omega_1 + \tau_2$$

$$J_3\dot{\omega}_3 = (J_1 - J_2)\omega_1\omega_2 + \tau_3$$

ove $J_1 J_2 J_3$ sono i momenti di inerzia attorno all'asse x, y, z. Questo modello generalizza l'orientamento rispetto ad un asse: si immagini di avere un quadratino metallico nel piano, libero da attriti e che possa attuato con una coppia attorno al proprio centro di massa, l'equazione della dinamica è

$$\dot{\omega} = \tau$$

Il problema che si vuole risolvere è il seguente: immaginiamo tale oggetto in rotazione, come fare per arrestarlo ? E' facile verificare che con

$$\tau = -k\omega$$

si ha

$$\begin{cases} \dot{\omega} = -k\omega \\ \omega(t) = e^{-kt}\omega(0) \end{cases} \qquad \omega(t) \to 0$$

Quindi è sufficiente applicare una coppia proporzionale alla velocità angolare, basterebbe un attrito dinamico.
Lo stesso risultato si ha nel caso generale. Se infatti si pone

$$\tau_i = -k_i\omega_i \quad i = 1, 2, 3$$

$\omega \to 0$. La verifica di quanto asserito è facile se si pone nelle equazioni della dinamica del corpo rigido

$$\tau_i = -k_i \omega_i$$

e si considera la funzione

$$V(x) = \frac{1}{2} J_1 \omega_1^2 + \frac{1}{2} J_2 \omega_2^2 + \frac{1}{2} J_3 \omega_3^2$$

Facendo la derivata si verifica facilmente che essa è una funzione definita negativa in tutto lo spazio con riferimento allo stato $\omega = 0$. In conclusione $V(x)$ è definita positiva in tutto lo spazio rispetto allo stato $\omega = 0$ ed è radialmente illimitata, e la $(\dot{V})$ che si calcola è una funzione definita negativa in tutto lo spazio, e questo basta per garantire la stabilità asintotica globale dello stato zero. Quindi il corpo tende a fermarsi.

1.3.a. Lyapunov per i sistemi lineari stazionari

Con riferimento al sistema

$$\dot{x}(t) = Ax(t) \qquad x_e = 0$$

si vogliono verificare le condizioni di stabilità asintotica, quindi con $x_e = 0$ unico stato di equilibrio.

Come è noto il criterio richiede che esista

$$V(x) > 0 \quad \textit{con} \quad \dot{V}(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i} \dot{x}_i < 0$$

Nello studio dei sistemi lineari stazionari è sufficiente fare riferimento a funzioni definite positive quadratiche:

$$V(x) = x' P x > 0$$

In tal caso la matrice P, che senza perdita alcuna di generalità può essere assunta simmetrica, è detta definita positiva e si indica $P > 0$. La verifica affinché una matrice sia definita positiva può essere fatta impiegando il criterio di Sylvester: *condizione necessaria e sufficiente affinché una matrice P simmetrica sia definita positiva, e che tutti i suoi minori principali siano positivi.* I minori principali di una matrice simmetrica sono i determinanti che si ottengono considerando tutte le sottomatrici costruite rispetto alla diagonale principale nel modo seguente:

$$P = \left(\begin{array}{ccccccc} p_{11} & \vdots & p_{12} & \vdots & p_{13} & \vdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & & & & & \\ p_{21} & & p_{22} & \vdots & p_{23} & \vdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & & \\ p_{13} & & p_{23} & & p_{33} & \vdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \end{array} \right)$$

Ci si potrebbe domandare se è necessario considerare soltanto matrici simmetriche ?
In realtà quando si considerano forme quadratiche, se non si assume la matrice simmetrica si può verificare facilmente che si ottiene lo stesso risultato che si otterrebbe se si impiegasse la matrice simmetrica ottenuta da P secondo la procedura cosiddetta di simmetrizzazione:

$$\tilde{P} = \frac{P + P^T}{2}$$

infatti

$$x' P x = x' \frac{P + P^T}{2} x$$

Come esempio si verifica immediatamente che:

$$x' \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} x = x' \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix} x$$

Ciò spiega perché ci si limiti, nelle forme quadratiche, ad assumere matrici simmetriche. La positività è poi verificata con il criterio di Silvester.

Con le precedenti premesse sulle forme quadratiche possiamo enunciare il criterio di Lyapunov per i sistemi lineari stazionari che fornisce una condizione necessaria e sufficiente per la verifica della stabilità asintotica.

La condizione richiede che l'equazione matriciale

$$A'Q + QA = -P$$

nell'incognita Q simmetrica e definita positiva abbia soluzione unica per ogni fissata P simmetrica e definita positiva.
Quindi fissato ad arbitro P, che nelle applicazioni del criterio viene assunta l'identità I, si deve risolvere l'equazione nell'incognita Q; tale soluzione deve essere unica, simmetrica e definita positiva. In caso affermativo si può asserire che il sistema è stabile altrimenti si può asserire che il sistema non è stabile. La considerazione è quindi più forte che non nel contesto non lineare in cui l'impossibilità di concludere a partire da una funzione definita positiva non consente di dichiarare l'assenza della proprietà.

La sufficienza della condizione è dimostrabile in modo costruttivo, se infatti per una fissata P, esiste la soluzione Q, si ha

$$\begin{aligned}
V(x) &= x'Qx > 0 \\
\dot{V}(x) &= \dot{x}'Qx + x'Q\dot{x} \\
\dot{V}(x) &= x'A'Qx + x'QAx \\
\dot{V}(x) &= x'(A'Q + QA)x \\
&= -x'Px < 0
\end{aligned}$$

Quindi $\dot{V}(x)$ è una funzione definita negativa, e lo è in tutto lo spazio. Inoltre V e $\dot{V}$ sono radialmente illimitate e la stato zero è stabile asintoticamente globalmente.

La dimostrazione della necessità, nell'ipotesi che gli autovalori di A abbiano parte reale negativa, $Re(\lambda_i) < 0$, consiste nel mostrare che la seguente matrice è la soluzione cercata

$$Q = \int_0^\infty e^{A't} P e^{At} dt$$

Q è soluzione dell'equazione, come si può verificare per sostituzione diretta, inoltre è simmetrica, perché coincide con la sua trasposta, infatti

$$Q' = \int_0^\infty e^{A'T} P e^{AT} dt$$

inoltre Q è anche positiva perché se si considera la forma quadratica associata:

$$x'Qx = x' \int_0^\infty (e^{A'T} P e^{AT}) dtx = \int_0^\infty x'(e^{A'T} P e^{AT}) xdt = \int_0^\infty z'Pzdt$$

ove si è posto

$$z = e^{AT} x$$

Poiché P è positiva lo è anche Q. Q infine è anche soluzione unica; ciò discende da una proprietà delle equazioni del tipo di quella che stiamo studiando che è soddisfatta nell'ipotesi che tutti gli autovalori di AA abbiano parte reale negativa. .

Il criterio fornisce una condizione necessaria e sufficiente fondata sulla risoluzione di un sistema di $\frac{n(n+1)}{2}$ equazioni. Si tratta di tante equazioni quante sono le incognite in una matrice simmetrica di dimensione n. Ad esempio, con

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -6 \end{pmatrix}$$

l'equazione matriciale

$$\begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 1 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{12} & q_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{12} & q_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

si riscrive

$$-1 = -5q_{12} - 5q_{12}$$

$$0 = -5q_{22} + q_{11} - 6q_{12}$$

$$-1 = 2q_{12} - 12q_{22}$$

Si tratta di tre equazioni, in generale $\frac{n(n+1)}{2}$, per $n = 2$.

Risultati equivalenti a quelli sinora studiati per i sistemi a tempo continuo valgono per i sistemi a tempo discreto.

1.4. Stabilità mediante linearizzazione

Il metodo è relativo all'impiego dell'approssimazione lineare intorno ad uno stato di equilibrio per studiare la stabilità dello stato di equilibrio sistema non lineare dato.

Come è noto la linearizzazione di un sistema dato intorno ad uno stato di equilibrio

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) \qquad f(x_e) = 0$$

posto

$$\xi(t) = x(t) - x_e$$

fornisce

$$\dot{\xi}(t) = A\xi(t) \qquad A = J(x_e) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ & \ddots & \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Come vedremo, la stabilità asintotica dell'approssimazione lineare implica la stabilità asintotica locale dello stato x_e. Ne consegue che è necessario verificare preliminarmente se lo stato di equilibrio x_e è isolato.
E possibile dimostrare che lo stato di equilibrio x_e per il sistema non lineare è isolato, se

$$|J(x_e)| \neq 0$$

Tale condizione non è necessaria come mostra il seguente semplice esempio:

$$\dot{x} = -x^3$$

ove, nonostante $J(x_e) = 0$, lo stato di equilibrio è unico (in realtà la soluzione è isolata, ma ha molteplicità algebrica è pari a tre).

Per mostrare che la stabilità asintotica del sistema lineare implica la stabilità asintotica locale dello stato x_e del sistema non lineare dato, sia $V(\xi) = \xi' Q \xi$, con Q soluzione di $A'Q + QA = -P$, una funzione di Lyapunov per il sistema lineare approssimante. La prova della stabilità asintotica locale del sistema non lineare si basa sull'impiego della stessa funzione

$$V(x) = (x - x_e)'Q(x - x_e)$$

funzione definita positiva rispetto ad x_e, che ha derivata definita negativa in un opportuno intorno I_{x_e}.

Ciò comporta che la stabilità asintotica del sistema lineare implica quella asintotica locale dello stato di equilibrio per il sistema non lineare. Inoltre si può mostrare che l'instabilità del sistema lineare per la presenza di almeno un autovalore a parte reale positiva, implica l'instabilitá dello stato di equilibrio nel sistema non lineare, mentre nulla può essere detto nel caso in cui il sistema lineare è in condizioni limite di stabilità oppure instabile per la sola presenza di autovalori a parte reale nulla con molteplicità geometrica maggiore di uno.

Questo risultato dá in conclusione, per quanto a noi interessa, condizioni sufficienti di stabilità. Se ad esempio l'approssimazione lineare avesse matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

in questo caso lo stato di equilibrio sarebbe localmente asintoticamente stabile; se fosse

$$J(x_e) = A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

lo stato di equilibrio sarebbe instabile; se fosse

$$J(x_e) = A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \textit{oppure} \quad J(x_e) = A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

non si potrebbe dire nulla circa la stabilità dello stato di equilibrio rispetto alla dinamica non lineare.

Seguono alcuni semplici esempi di applicazione.

Dinamica del pendolo

Si consideri un pendolo inestensibile di lunghezza l di massa m; l' equazione che descrive la dinamica è facilmente ottenuta imponendo l'equilibrio delle forze lungo la tangente alla traiettoria

$$ml\ddot{\theta} + kl\dot{\theta} + mg\sin\theta = 0$$

posto

$$\theta = x_1 \qquad \dot{\theta} = x_2$$

si ottiene la rappresentazione con lo stato seguente:

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = -\frac{k}{m}x_2 + \frac{g}{l}\sin x_1$$

Il calcolo degli stati di equilibrio dá

$$x_2^e = 0 \qquad \sin x_1^e = 0 \qquad x_1^e = h\pi$$

$$x_e = \begin{pmatrix} 0 \\ h\pi \end{pmatrix}$$

Si nota che gli stati di equilibrio $2h\pi$ corrispondono al pendolo nella posizione verticale verso il basso, mentre gli stati di equilibrio $(2h+1)\pi$ corrispondono al pendolo nella posizione verticale superiore in condizione di velocità iniziale nulla. É chiaro che i due tipi di stati di equilibrio, hanno proprietà diverse: quello verticale se perturbato tende ad essere abbandonato, l'altro viceversa se perturbato tende ad essere mantenuto. Il metodo dell'approssimazione lineare fornisce questo risultato a conforto dell'intuizione.

L'approssimazione lineare in corrispondenza di ciascuno di questi stati di equilibrio può essere calcolata a partire dalla matrice jacobiana

$$J(x) = \left.\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{-g}{l}\cos x_1 & \frac{-k}{m} \end{pmatrix}\right|_{x_e}$$

Negli stati di equilibrio corrispondenti alla posizione verticale verso l'alto si ha

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{l} & \frac{-k}{m} \end{pmatrix}$$

negli altri, invece:

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{-g}{l} & \frac{-k}{m} \end{pmatrix}$$

Con la matrice dinamica di tale forma, lo studio della stabilità è immediato in quanto gli elementi dell'ultima riga rappresentano proprio i coefficienti del polinomio caratteristico cambiati di segno. Si ha quindi nel primo caso

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{l} & \frac{-k}{m} \end{pmatrix} \rightarrow |\lambda I - A| = \lambda^2 + \frac{k}{m}\lambda - \frac{g}{l} \qquad \textit{polinomio caratteristico}$$

essendo presente una variazione nei coefficienti, vi è un autovalore a parte reale positiva, il che implica l'instabilità dello stato di equilibrio rispetto alla dinamica non lineare. Nel secondo

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{-g}{l} & \frac{-k}{m} \end{pmatrix} \rightarrow |\lambda I - \bar{A}| = \lambda^2 + \frac{k}{m}\lambda + \frac{g}{l}$$

con due autovalori a parte reale negativa, cioè stabilità asintotica dell'approssimazione lineare e quindi stabilità asintotica locale della posizione di equilibrio corrispondente al pendolo verso il basso.

Equazione logistica

La seguente equazione differenziale non lineare

$$\dot{x}(t) = ax(t) - kx^2(t)$$

viene assunta a rappresentare la crescita di una popolazione in presenza di limitazioni sulle risorse. La soluzione di un'equazione di questo tipo bene rappresenta questo fenomeno come l'intuizione suggerisce perché prevede un andamento esponenziale della crescita in una prima fase, dominata da un tasso di crescita costante e non condizionata dalla limitatezza delle risorse, limitata nella continua espansione e convergente verso un valore di regime che dipende dalle risorse. In tale equazione ci sono due valori di equilibrio, lo zero ed il valore $\frac{a}{k}$; tale valore è detto *capacità portante*.

$$x(a - kx) = 0$$

$$\begin{cases} x_{e1} = 0 \\ x_{e2} = \dfrac{a}{k} \end{cases}$$

Si può utilizzare il metodo dello studio della stabilità mediante linearizzazione per studiare la stabilità di questi due stati di equilibrio. La matrice jacobiana in questo caso è lo scalare:

$$J(x_e) = (a - 2kx)_{x_e}$$

e calcolata nei due stati di equilibrio diventa

$$per \quad x_{e1} \quad si \quad ha \quad J(x_{e1}) = a$$

e

$$per \quad x_{e2} \quad si \quad ha \quad J(x_{e2}) = -a$$

Il risultato è ora evidente: essendo a una costante positiva il primo stato di equilibrio è instabile, mentre lo stato di equilibrio $\frac{a}{k}$ è stabile asintoticamente.

Le precedenti considerazioni trovano un ulteriore riscontro nell'esempio che segue.

Modello preda-predatore

Come già visto il modello adatto a rappresentare l'interazione tra due specie è del tipo

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = ax_1(t) - bx_1(t)x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -cx_2(t) + dx_1(t)x_2(t) \end{cases}$$

dove x_1 e x_2 rappresentano la densità delle due popolazioni e si è assunto che la popolazione preda, x_1, cresca, nell'ipotesi di risorse illimitate secondo un andamento esponenziale con esponente a, mentre la popolazione predatrice, x_2, essendo la preda il suo unico nutrimento, decresca in assenza di interazione con la preda stessa secondo un andamento esponenziale caratterizzato dal coefficiente $-c$. I coefficienti a, b, ce d sono tutti positivi.

$$\begin{cases} x_1(a - bx_2) = 0 \\ x_2(-c + dx_1) = 0 \end{cases}$$

Gli stati di equilibrio sono facilmente calcolati e pari a

$$x_{e1} = \frac{a}{b} \qquad x_{e2} = \frac{c}{d}.$$

L'applicazione del metodo della linearizzazione non consente di concludere, come si può verificare facilmente in quanto gli autovalori dell'approssimazione lineare hanno parte reale nulla. Si è quindi in una condizione in cui non si può inferire nulla circa la stabilità dello stato di equilibrio del sistema non lineare.

Una situazione diversa risulta se si descrive la crescita della preda impiegando l'equazione logistica. Si ha in tal caso

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = ax_1(t) - bx_1(t)x_2(t) - kx_1^2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -cx_2(t) + dx_1(t)x_2(t) \end{cases}$$

con stati di equilibrio soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x_1(a - bx_2 - kx_1) = 0 \\ \qquad x_2(-c + dx_1) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a - bx_2 - kx_1) = 0 \\ \qquad (-c + dx_1) = 0 \rightarrow x_1 = \dfrac{c}{d} \end{cases}$$

$$\left(a - bx_2 - k\frac{c}{d}\right) = 0$$

$$x_2 = \frac{a}{b} - \frac{kc}{db}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{c}{d} \\ \frac{a}{b} & -\frac{kc}{bd} \end{pmatrix} = x_e$$

appare, quindi, un nuovo stato di equilibrio che è positivo quando $ad - kc > 0$ o, ciò che è lo stesso, $\frac{a}{k} > \frac{c}{d}$. Tale condizione si esprime dicendo che la capacità portante della specie preda deve essere sufficientemente elevata per poter reagire alla capacità di preda del predatore. Tale stato di equilibrio è positivo ed ha un significato fisico, nel contesto che si sta esaminando, sul quale il lettore è invitato a riflettere.

L'applicazione del metodo rispetto a tale stato di equilibrio consente di verificare la sua stabilità asintotica locale. I passaggi sono lasciati per esercizio. Il risultato matematicamente spiega bene un fenomeno che in presenza di condizioni di competizione a due specie, preda - predatore, si verifica nella realtà. A seguito di una perturbazione rispetto a una data condizione di equilibrio insorge un fenomeno oscillatorio che converge verso lo stato di equilibrio.

Due esempi da svolgere

- modello di Leslie
- dinamica del prezzo

Leslie, 1948, rappresenta l'interazione fra due specie e utilizza le seguenti equazioni:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = ax_1 - kx_1^2 - bx_1x_2 \\ \dot{x}_2 = -cx_2 + d' \dfrac{x_2^2}{x_1} \end{cases}$$

se

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{d'}{c}$$

il predatore è in condizioni di equilibrio.
Si verifichi che se

$$\frac{x_1}{x_2}$$

è molto grande, il predatore cresce, secondo un andamento esponenziale, mentre se è molto piccolo, decresce, secondo un andamento esponenziale.

1.5. La Stabilità ingresso - uscita

A completamento dello studio condotto, dopo aver messo a punto criteri e metodi di stabilità interna, passiamo a considerare il comportamento ingresso - uscita.

Sotto quali condizioni sul sistema ad un ingresso limitato corrisponde un'uscita limitata ? Questa proprietà è anche detta stabilità esterna

Con riferimento ad un sistema lineare

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \quad x(0) = x_0 \end{cases}$$

si chiede che ad un qualunque ingresso limitato corrisponda un'uscita limitata, cioè:

$$\forall M \exists N_{x_0,M} : |u(t)| < M \Rightarrow \|y(t)\| < N_{x_0,M}$$

si distinguono due casi: un primo di stabilità nello stato zero, relativo alla risposta forzata quando cioè $x_0 = 0$; un secondo di la stabilità esterna in qualsiasi stato, se questa proprietà è vera $\forall x_0$, detta semplicemente stabilità esterna.

Le condizioni

1. $$\|\psi(t)\| < k_1 \quad \forall t$$

2. $$\int_0^t \|W(\tau)\| d\tau < k_2 \quad \forall t$$

sono necessarie e sufficienti per la stabilità esterna.
La 2. da sola è condizione necessaria e sufficiente di stabilità esterna nello stato zero.

La limitatezza della $\psi(t)$ impone che le evoluzioni libere siano limitate, ecco perché questa proprietà entra in gioco solo per la stabilità esterna in ogni stato.

La sufficienza delle condizioni indicate si dimostra facilmente a partire dall'espressione della risposta

$$y(t) = \psi(t)x_0 + \int_0^t W(t-\tau)u(\tau)d\tau$$

se si passa alla norma

$$\|y(t)\| = \|\psi(t)x_0 + \int_0^t W(t-\tau)u(\tau)d\tau\|$$

in base a proprietà elementari delle norme,

$$\|a+b\| \leq \|a\| + \|b\|$$

si ottiene:

$$\|y(t)\| \leq \|\psi(t)x_0\| + \|\int_0^t W(t-\tau)u(\tau)d\tau\|$$

Ancora,

$$\|a \cdot b\| \leq \|a\|\|b\|$$

implica

$$\|y(t)\| \leq \|\psi(t)\|\|x_0\| + \int_0^t \|W(t-\tau)u(\tau)\|d\tau$$

E, infine, con la semplice ulteriore maggiorazione

$$\|y(t)\| \leq \|\psi(t)\|\|x_0\| + \int_0^t \|W(t-\tau)\|\|u(\tau)\|d\tau$$

ricordando che

$$\|u(\tau)\| < M$$

si conclude

$$\|y(t)\| < \|\psi(t)\|\|x_0\| + \int_0^t \|W(t-\tau)\|d\tau \cdot M$$

e, per le 1. e 2.:

$$\|y(t)\| < k_1\|x_0\| + k_2 M = N_{x_0,M}$$

ne consegue la limitatezza della risposta per ogni stato iniziale. Se lo stato iniziale è nullo la prima parte non c'è e vale lo stesso la limitatezza della y, solo per l'ipotesi 2.. Quindi la condizione 2. è sufficiente per la stabilità esterna nello stato zero.

La necessità si dimostra con argomenti analoghi, fondamentalmente la dimostrazione consiste nell'andare a verificare che, se le condizioni 1. e 2. non sono soddisfatte, si possono avere evoluzioni in uscita illimitate. Per quanto riguarda la 1. si noti che se la matrice $\psi(t)$ non ha norma limitata, alcuni tra i suoi elementi non sono limitati ciò che corrisponde all'esistenza di evoluzioni libere illimitate. Quindi la condizione 1. è anche necessaria. Analogamente se si assume che l'ipotesi 2. non è soddisfatta in si può dimostrare che esiste un ingresso limitato, ed è quell'ingresso che riesce a prendere quei termini della W che sono eventualmente non limitati, a cui corrisponde un evoluzione forzata in uscita illimitata. In sostanza le due condizioni sono necessarie e sufficienti. La formulazione data è in termine di norme di matrici. E' possibile comprendere come tale condizioni si riflettono sulle caratteristiche del sistema in particolare sugli autovalori, ciò consente di stabilire un legame tra i diversi tipi di stabilità studiati.

Condizione di stabilità esterna nello stato zero

La condizione in termini di autovalori si esprime

$$\Lambda_E^o \subset C^-$$

dove: C^- indica il semipiano negativo aperto dei numeri complessi e Λ_E^o indica l'insieme degli autovalori che sono simultaneamente eccitabili con ingressi impulsivi e osservabili in uscita. Per comprendere tale formulazione basta ricordare che in $Ce^{AT}B$ ci sono le leggi esponenziali che sono associate ai modi naturali che sono simultaneamente eccitabili con impulsi d'ingresso, cioè quelle che sono contenute in e^{AT} e osservabili in uscita, cioè quelle contenute in Ce^{AT}. Poiché $W(t) = Ce^{AT}B$ è una matrice i cui elementi sono combinazioni lineari di leggi di tipo esponenziale; l'integrale su un intervallo infinito è finito solo se tali leggi esponenziali hanno esponente a parte reale strettamente negativa. La condizione perciò dice che gli "autovalori" che sono in W devono essere a parte reale negativa, cioè devono appartenere al semipiano negativo aperto.

Un esempio elementare di sistema non stabile esternamente nello stato zero è costituito dal sistema caratterizzato dalla funzione di trasferimento $\frac{1}{s}$, un integratore, che in termini differenziali ha una equazione del tipo

$$\begin{cases} \dot{x} = u \\ y = x \end{cases}$$

Infatti:

$$W(t) = 1 \to \int_0^{\infty} dt = \infty$$

Ciò risponde al fatto che se nell'integratore si fa entrare un ingresso costante, l'integrale tende all'infinito in quanto la funzione di trasferimento ha uno zero in zero.

Condizione di stabilità esterna in ogni stato

La condizione si esprime, in termini di autovalori, come

$$\Lambda_1^o \subset C_e^- \qquad \Lambda_{>1}^o \subset C^-$$

e

$$\Lambda_E^o \subset C^-$$

ove C_e^- indica il semipiano complesso negativo chiuso e il pedice 1 e > 1 la uno e maggiore di uno rispettivamente. La seconda condizione è già stata commentata e corrisponde alla 2.. La prima corrisponde alla 1. come è facile verificare ricordando che nell'evoluzione libera in uscita compaiono gli autovalori associati a leggi esponenziali osservabili.

$$\begin{array}{rl} & \Lambda = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\} \\ Ce^{AT} & \Lambda^o = \{\lambda_1^o, \ldots, \lambda_r^o\} \\ e^{AT}B & \Lambda_E = \{\lambda_1^E, \ldots, \lambda_s^E\} \\ Ce^{AT}B & \Lambda_E^o = \Lambda_E \cap \Lambda^o \end{array}$$

Per comprendere come la prima delle condizioni date corrisponda alla 1. si osservi che la limitatezza della norma della $\psi(t)$ corrisponde alla limitatezza dei suoi elementi. Tali elementi sono combinazione lineare di funzioni esponenziali, eventualmente a coefficienti polinomiali in t in presenza di autovalori a molteplicità geometrica maggiore di uno. Essi sono limitati solo se tutti gli autovalori che vi compaiono, quelli osservabili, sono a parte reale strettamente negativa, se a molteplicità geometrica maggiore di uno, a parte reale negativa o nulla per gli altri.

Quindi la condizione 1. è equivalente alle seguenti

$$\Lambda_1^o \subset C_e^- \qquad \Lambda_{>1}^o \subset C^-$$

Queste considerazioni fatte per i sistemi a tempo continuo possono essere estese direttamente ai sistemi a tempo discreto in termini di limitatezza delle norme.

Con riferimento alla $\psi(t)$, la condizione è la stessa; la seconda ha la stessa forma ove si sostituisca all'integrale la sommatoria. Le condizioni in termini di autovalori si esprimono nello stesso modo ove si sostituisca il modulo alla parte reale con riferimento ad 1.

Relazioni tra stabilità interna e esterna

Come noto, si hanno le seguenti condizioni

$$\Lambda \subset C^-$$

per stabilità asintotica interna

$$\Lambda_E^0 \subset C^-$$

per la stabilità esterna nello stato zero

$$\Lambda_1^0 \subset C_e^- \quad \Lambda_{>1}^0 \subset C^- \quad \Lambda_E^0 \subset C^-$$

per stabilità esterna
Implicazioni evidenti sono:

- la stabilità interna asintotica implica sempre quella esterna
- la stabilità esterna implica la stabilità esterna nello stato zero

Inoltre: la stabilità esterna in $x_0 = 0$ implica stabilità interna asintotica se

$$\Lambda_E^0 \equiv \Lambda$$

cioè, tutti i modi sono eccitabili ed osservabili. Infatti in tale caso gli autovalori che compaiono in $W(t)$, che per ipotesi sono a parte reale negativa, sono tutti quelli della matrice dinamica che è, quindi, asintoticamente stabile.

La stabilità esterna in $x_0 = 0$ implica stabilità esterna se

$$\Lambda_E \equiv \Lambda$$

cioè, i modi sono tutti eccitabili. Infatti:

$$\Lambda_E \equiv \Lambda$$

$$\Lambda_E^0 = \Lambda \cap \Lambda^0$$

quindi se tutti quanti gli autovalori sono in C^- e siccome $\Lambda \cap \Lambda^0 = \Lambda^0$, allora tutte le condizioni della stabilità esterna sono soddisfatte perché gli autovalori osservabili sono tutti quanti in C^- quindi, in realtà, è soddisfatta una condizione ancora più forte.
In conclusione questa implicazione si ha nell'ipotesi che tutti i modi siano eccitabili.

La stabilità esterna implica la stabilità interna asintotica se

$$\Lambda_E^0 \equiv \Lambda$$

cioè se tutti i modi sono eccitabili ed osservabili. Se ci si limita a considerare l'implicazione tra stabilità esterna e stabilità interna, non asintotica, allora basta la condizione di osservabilità dei modi. Infatti, se tutti i modi sono osservabili, potranno eventualmente esistere nello spettro di A autovalori a parte reale nulla, e quindi delle leggi di moto costanti o periodiche. E ciò implica la stabilità interna semplice. In conclusione la stabilità esterna implica

- la stabilità interna asintotica se

$$\Lambda_E^0 \equiv \Lambda$$

- la stabilità interna semplice se

$$\Lambda^0 \equiv \Lambda$$

Si concluderà con un esempio illustrativo. Si consideri il sistema:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = -1$$

$$\lambda_2 = 0$$

$$\lambda_3 = 1$$

e si conduca l'analisi dei modi

$$(A - \lambda_1 I)u_1 \qquad \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} u_1 = 0$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \qquad u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$v_1' \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 0 \qquad v_1' \begin{pmatrix} +\frac{1}{2} - 1 & 0 \end{pmatrix}$$

per λ_2

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} u_2 = 0 \qquad \begin{aligned} -a + 2b &= 0 \\ -a + b + c &= 0 \\ a &= 2b \\ -2b + b + c &= 0 \\ c &= b \end{aligned}$$

$$v_2' \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} u_2 &= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ v_2' &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

per λ_3

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} u_3 = 0 \qquad u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$v_3' \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 0 \qquad v_3' = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Quindi:

$$\Lambda = \{-1; 0; 1\}$$

$$\Lambda_E = \{-1; 1\}$$

$$\Lambda^0 = \{-1; 0\}$$

$$\Lambda_E^0 = \{-1\}$$

Quindi il sistema dato è instabile internamente, perché c'è un autovalore a parte reale positiva, è stabile ingresso - uscita nello stato zero perché il solo autovalore eccitabile ed osservabile è pari a -1; infine è stabile esternamente essendoci in Λ^0 un autovalore nullo ma con molteplicità unitaria.

1.6. La stabilità dei sistemi interconnessi

La presente lezione è dedicata ad introdurre un criterio per lo studio della stabilità dei sistemi interconnessi.

Per comprendere la generalità del criterio si deve fare riferimento al calcolo della rappresentazione con lo stato di un sistema S a partire dalle rappresentazioni dei sottosistemi. Come si ricorderà, a partire dal grafo di flusso di S, aperti alcuni nodi per rendere il grafo di flusso aciclico, viene individuata una rappresentazione con lo stato al sistema corrispondente al grafo modificato, con s come ulteriore ingresso e p ulteriore uscita

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + B_s s \\ y = Cx \\ p = C_p x \end{cases}$$

quindi la rappresentazione con lo stato complessiva è:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + B_s C_p x \\ y = Cx \end{cases}$$

ottenendo un sistema del tipo:

$$\begin{cases} \dot{x} = (A + B_s C_p)x + Bu \\ y = Cx \end{cases}$$

A partire dalle matrici dinamiche dei sottosistemi S_i, cioè a partire dalle (A_i, B_i, C_i), viene prima individuata la matrice A e poi, a partire da questa, la matrice dinamica del sistema interconnesso che è $(A + B_s C_p)$.

Se si tiene conto del fatto che un sistema interconnesso caratterizzato da un grafo di flusso aciclico ha per autovalori l'aggregato degli autovalori dei sottosistemi che lo compongono, ciò che equivale a dire che la proprietà di stabilità è equivalente alla proprietà di stabilità dei sottosistemi, si comprende che la modifica della stabilità è collegata al passaggio da A ad $(A + B_s C_p)$.

Le precedenti considerazioni suggeriscono che dal punto di vista della stabilità il sistema interconnesso è equivalente ad un sistema del tipo:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + B_s u \\ y = -C_p x \end{cases}$$

in cui si fa una controreazione unitaria, cioè si pone:

$$u = v - y$$

Se, infatti si pone $u = v - y$ si ottiene un sistema con matrice dinamica $(A + B_s C_p x)$. Quindi lo studio della stabilità del sistema complessivo può essere ricondotto allo studio della stabilità di un sistema a controreazione unitaria. Ciò lascia comprendere la generalità dello studio.

Il criterio di cui tratteremo riguarda l'indagine della stabilità del sistema complessivo a partire dalla conoscenza delle proprietà di stabilità del sistema S. Le informazioni a priori sulla stabilità del sistema in catena diretta sono relative al numero di autovalori a parte reale positiva. L'indagine viene condotta impiegando la rappresentazione polare, o meglio il diagramma di Nyquist del sistema in catena diretta. Il metodo in questione è noto come *criterio di Nyquist*.

E' necessario premettere alcune osservazioni con riferimento al seguente sistema lineare stazionario che viene assunto strettamente causale (D= 0)

$$S : \begin{cases} \dot{x} = Ax + B_u \\ y = Cx \end{cases}$$

posto $u = -y$ si ottiene

$$S_f : \begin{cases} \dot{x} = (A - BC)x + B_V \\ y = Cx \end{cases}$$

e si pone

$$d_{AP}(s) = |sI - A| \Rightarrow \text{ polinomio caratteristico a ciclo aperto}$$

$$d_{CH}(s) = |sI - A + BC| \Rightarrow \text{ polinomio caratteristico a ciclo chiuso}$$

Il sistema complessivo sarà stabile quando il secondo polinomio non avrà zeri a parte reale positiva.

Osservazione 1.

$$\frac{d_{CH}(s)}{d_{AP}(s)} = |1 + F(s)| = |I + C(sI - A)^{-1}B|.$$

$F(s)$ funzione di trasferimento del sistema S Infatti

$$\begin{aligned} |I - A + BC| &= |sI - A||1 + (sI - A)^{-1}BC| \\ &= |sI - A||1 + C(sI - A)^{-1}B| \\ d_{CH}(s) &= |sI - A + BC| \\ d_{AP}(s) &= |sI - A| \\ \frac{d_{CH}(s)}{d_{AP}(s)} &= \left(1 + C(sI - A)^{-1}B\right) \end{aligned}$$

Osservazione 2. Dato un polinomio di variabile complessa, $p(s)$, la variazione di fase del numero complesso che esso rappresenta quando $s = j\omega$ e omega varia da $-\infty$ a $+\infty$ è pari ad $(n - n_p)\pi - n_p\pi$.

Se, infatti, si pone

$$p(j\omega) = k(j\omega - p_1)\dots(j\omega - p_n)$$

si comprende che

$$\Delta_\varphi(p) = \text{ variazione di fase complessiva}$$

è pari alla somma delle variazioni di fase dei singoli fattori. Per ciascuno di essi si devono distinguere due situazioni: il caso di uno zero a parte reale positiva e il caso di uno zero a parte reale negativa.

Il vettore $(j\omega - p_i)$ ammette infatti variazioni di fase opposte per p_i e $-\pi$ e, per gli zeri con parte reale negativa è facile comprendere che la variazione di

fase è $-\pi$ in senso orario.
Quindi, se il polinomio è di grado n ed n_p sono gli zeri a parte reale positiva, si ha:

$$\Delta_\varphi(p) = (n - n_p)\pi - n_p\pi$$

Poiché risulta

$$\frac{d_{CH}(s)}{d_{AP}(s)} = \left(1 + C(sI - A)^{-1}B\right)$$

si ha

$$\begin{aligned}\Delta_\varphi(1+F) &= \Delta_\varphi + (d_{CH}) - \Delta_\varphi(d_{AP}) = \\ &= (n - z_p)\pi - z_p\pi - (n - p_p)\pi + p_p\pi = \\ &= (-z_p + p_p)2\pi\end{aligned}$$

ove si è indicato con z_p il numero di autovalori a parte reale maggiore di zero di S_f e con con p_p il numero di autovalori a parte reale maggiore di zero di S.

Ovviamente il sistema complessivo è asintoticamente stabile se e solo se $z_p = 0$. Indicando con N il numero di giri che il vettore rappresentativo di $1 + F(j\omega)$ compie attorno allo zero del piano complesso, cioè il numero di giri che competono alla sua variazione di fase,

$$N = \Delta_\varphi(1 + F)$$

il criterio di Nyquist si scrive

$$N = p_p$$

e si enuncia dicendo *condizione necessaria e sufficiente per la stabilità asintotica di un sistema a controreazione unitaria è che il numero di giri che il vettore rappresentativo di* $1 + F(j\omega)$ *compie attorno allo zero, o ciò che è lo stesso il numero di giri che il vettore rappresentativo di* $F(j\omega)$ *compie attorno al punto* $(-1, j0)$*, quando* ω *varia da meno infinito a più infinito sia uguale al numero di autovalori a parte reale positiva del sistema in catena diretta.*

Si noti che criterio consente di valutare la stabilità del sistema complessivo, a partire dalla conoscenza delle proprietà di stabilità del sistema in catena diretta e dall'esame grafico del comportamento in frequenza.

Nel caso particolare in cui nel sistema in catena diretta si abbia $p_p = 0$, si ha il criterio nella sua forma cosiddetta ridotta

$$N = 0.$$

Ricordando le considerazioni svolte a proposito dello studio della stabilità non si troverà difficoltà nel verificare che con riferimento ad un sistema interconnesso che presenta più sottosistemi in un unico ciclo a controreazione, lo studio della stabilità si riduce a quello su un sistema a controreazione unitaria in cui in catena diretta si assume sia presente l'interconnessione in cascata dei sottosistemi presenti nel ciclo.

Alcuni semplici esempi e l'estensione del criterio al caso in cui in S vi siano autovalori a parte reale nulla

Si consideri il sistema descritto dalla seguente funzione di trasferimento con guadagno, k, e costanti di tempo, τ_i, positivi.

$$F(s) = \frac{k}{(1+\tau_1 s)(1+\tau_2 s)(1+\tau_3 s)}$$

L'esame della rappresentazione polare di $F(j\omega)$ riportata nella figura seguente lascia comprendere che il sistema a controreazione unitaria è stabile se il punto $(_1, j0)$ è esterno alla curva, in quando si avrebbe $N = 0 = p_p$, instabile altrimenti, in quanto si avrebbe $N = -2 \neq p_p = 0$. Si noti che il circondamento o meno del punto $(-1, j0)$ da parte della curva dipende, per fissati valori delle costanti di tempo, dal valore del guadagno k. In particolare al suo crescere il modulo aumenta, ciò che rende possibile l'attraversamento. E' usuale nell'impiego del metodo fare riferimento ad un diagramma tracciato e valutare la stabilità al variare del guadagno modificando di un fattore inverso la scala sugli assi, ciò che corrisponde a spostare il punto $(-1, j0)$.

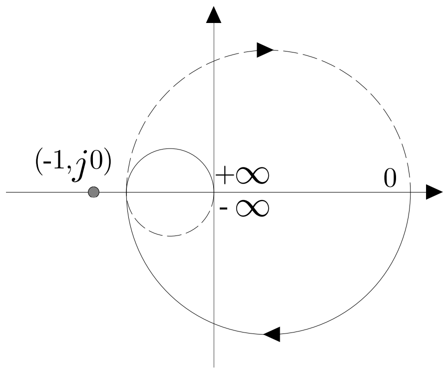

Figura 1.1

In molte situazioni reali si ha a che fare con funzioni di trasferimento che hanno delle singolarità sull'asse immaginario, in questo caso il diagramma polare non può essere chiuso, e se il diagramma non è chiuso non si possono calcolare il numero di giri attorno il punto $(-1; j0)$? Si consideri ad esempio il sistema:

$$\frac{k}{(1+\tau s)s} = F(s) \qquad \substack{k>0 \\ \tau>0}$$

Visto nel piano complesso, si avrà un polo in zero e uno in $\frac{-1}{\tau}$, se si costruisce l'immagine secondo il diagramma polare, siccome si va verso zero la curva andrà all'infinito. Ma come si fa a calcolare il numero di giri attorno al punto $(-1; j0)$ se il diagramma è aperto ?

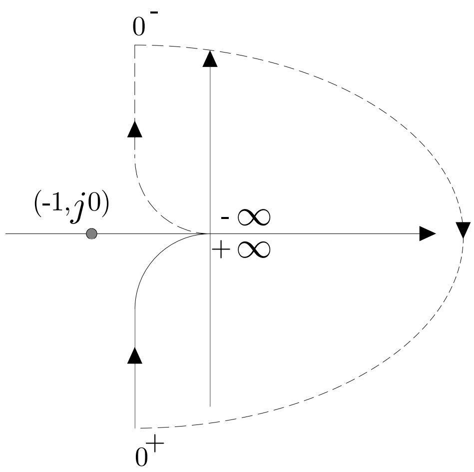

Figura 1.2

Quindi il diagramma va chiuso e il risultato è diverso secondo il verso in cui si chiude il diagramma. Per superare questa ambiguità si deve proseguire come segue:
non si considera più il diagramma polare, ma il diagramma di Nyquist, cioè il diagramma in cui si va a costruire l'immagine secondo la funzione F non più dell'asse immaginario, ma del cosiddetto percorso di Nyquist: un percorso uncinato che coincide con l'asse immaginario in quasi tutti i punti, ma che intorno ai punti singolari, i poli della F che si trovano sull'asse immaginario, lascia degli uncini cioè li evita, e per convenzione si stabilisce che questo percorso uncinato lasci i poli che hanno parte reale nulla a sinistra, cioè li "consideri" a parte reale negativa. Con questa convenzione anche gli autovalori a parte reale nulla di S saranno considerati nel semipiano complesso negativo. Si noti che, inoltre, con tale convenzione, $p_p = 0$ non corrisponde ad un sistema in catena diretta necessariamente stabile e neppure al limite di stabilità.

Ora si consideri questo percorso uncinato, a questo corrisponde un'immagine secondo la funzione F, che è una curva chiusa in quanto il punto di singolarità è stato escluso. Come è fatta la chiusura della curva?
Si deve fare riferimento allo studio delle funzioni analitiche e al fatto che la funzione $F(s)$ è un rapporto tra polinomi; quindi una funzione analitica che

induce trasformazioni conformi,cioè che mantengono gli angoli e i versi di percorrenza. Quindi se nel dominio per andare dal punto A al punto B, si percorre un uncino e ad un uncino corrisponde una variazione di fase di π, anche nell'immagine accadrà la stessa cosa e quindi si deve fare una rotazione di π, inoltre si mantengono i versi di percorrenza, che in questo caso lasciano a sinistra il punto singolare e quindi anche il punto corrispondente, cioè il punto immagine deve essere lasciato a sinistra. Il punto immagine è il punto improprio che sta all'infinito, ciò significa che la chiusura del diagramma di Nyquist si deve fare lasciando a sinistra il punto improprio che è l'immagine del punto singolare.

Torniamo all'esempio; in questo caso effettuata la chiusura si vede che il punto $(-1; j0)$ rimane esterno, indipendentemente dal valore del guadagno.

$$N = p_p = 0$$

ed il sistema è asintoticamente stabile.

Diagrammi di Nyquist e studio di casi

In sintesi ricordiamo i risultati sinora acquisiti in merito al criterio di Nyquist.

S è il sistema in catena diretta caratterizzato dalla sua rappresentazione con lo stato, A, B, C, o dalla funzione di trasferimento $F(s)$; è noto p_p, il numero di autovalori a parte reale positiva di S.

$$N = p_p$$

ove N è il numero di giri che la funzione $F(j\omega)$ compie attorno al punto $(-1; j0)$, quando ω va da $-\infty$ a $+\infty$, esprime la condizione necessaria e sufficiente di stabilità asintotica del sistema a controreazione unitaria che ha S in catena diretta.

Abbiamo anche visto: in che modo il criterio consente di valutare la stabilità al variare del guadagno del sistema in catena diretta; in che modo è possibile studiare la stabilità nei casi di controreazione non unitaria.

Esempio:
Sistema S:

$$F(s) = \frac{k(s+1)}{s(s-1)(s+10)}$$

e, ovviamente

$$p_p = 1$$

Per costruire il diagramma di Nyquist si farà riferimento ai diagrammi di Bode, ciò che semplifica lo studio. Si assuma, in base a quanto già osservato, il guadagno unitario, e si consideri la funzione di trasferimento assegnata nella forma di Bode:

$$F(s) = -\frac{(s+1)}{10s(1-s)(1+\frac{s}{10})}$$

Si tratta di tre termini binomi con pulsazioni di rottura pari a 1 e 10. L'andamento del modulo è sempre decrescente come si verifica facilmente. Per quanto riguarda la fase sono presenti due contributi tra zero e $\frac{\pi}{2}$ con pulsazione di rottura $\omega = 1$; uno tra zero e $\frac{-\pi}{2}$ con pulsazione di rottura $\omega = 10$ ed un contributo di fase costante e pari a $\frac{-3\pi}{2}$. Questo basta per comprendere che la fase varia tra $\frac{-3\pi}{2}$ e $-\pi$ e che, per la collocazione del polo in $+1$ e dello zero in -1, una decade prima del secondo polo, la fase raggiunge valori maggiori di $-\pi$. Dall'andamento riportato in figura

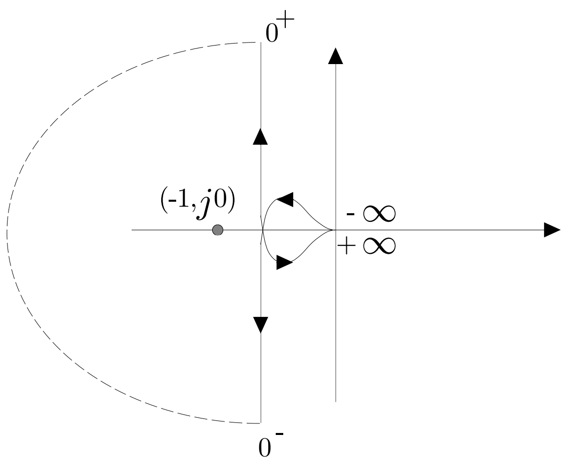

Figura 1.3

ricordando le considerazioni svolte la scorsa lezione a proposito dello studio al variare del guadagno, si comprende che per quanto riguarda la stabilità il sistema a controreazione unitaria sarà instabile per valori del guadagno inferiori ad un valore critico, k^*, stabile per valori superiori.

Come valutare k^* ?
A tale proposito si potrà utilizzare il criterio di Routh al polinomio caratteristico a ciclo chiuso:

$$F(s) = \frac{k(s+1)}{s(s-1)(s+10)}$$

$$W(s) = \frac{F(s)}{1+F(s)}$$

$$W(s) = \frac{k(s+1)}{s^3+9s^2+(k-10)s+k}$$

Si nota preliminarmente che $k > 10$ è necessario. Il valore critico potrà essere 10 o altro eventuale valore maggiore corrispondente alla variazione di segno di qualche coefficiente della prima colonna della tabella. Si ha:

$$\left|\begin{array}{ll} 1 & k-10 \\ 9 & k \\ \frac{8k-90}{9} & \\ k & \end{array}\right.$$

e, quindi le seguenti condizioni:

$$k > 0 \qquad k > \frac{90}{8}$$

ciò che implica

$$k^* = \frac{90}{8}$$

Il sistema a controreazione unitaria per tale valore di k è al limite di stabilità.

Ulteriori esempi di applicazione possono essere svolti per esercizio.

$$F(s) = \frac{s+1}{s^2} \qquad \text{sistema instabile in catena diretta} \qquad p_p = 0$$

$$F(s) = \frac{s+1}{s^2+1}$$

Applicato il criterio di Nyquist, si verificherà che per ogni valore di k positivo, entrambi i sistemi a controreazione unitaria sono asintoticamente stabili.

Le seguenti considerazioni sono utili per decidere della stabilità nel caso in cui vi siano autovalori a parte reale nulla in d_{AP} e/o in d_{CH}. Sia $j\omega_0$ un punto dell'assse immaginario e si indichi con m_{AP} ed m_{CH} la molteplicità con cui tale punto è eventuale zero dei suddetti pilinomi. Si supponga, inoltre, noto m_{AP}. Se $1 + F(j\omega_0) = c \neq 0$, $m_{CH} = m_{AP}$ e si avrà stabilità semplice se $m_{AP} = 1$, instabilità se $m_{AP} > 1$. Se $F(j\omega_0) = -1$, $m_{CH} > m_{AP}$ e si ha instabilità se $m_{AP} \geq 0$. Se, infine, $F(j\omega) = \infty$, $m_{AP} > m_{CH}$ e si ha stabilità se la chiusura comporta una rotazione di $m_{AP}\pi$.

Fino ad ora si è visto come decidere della stabilità partendo dal diagramma di Nyquist, però questo diagramma è stato dedotto da quello di Bode, quindi alcune informazioni sulla stabilità del sistema a controreazione sono già contenute nel diagramma di Bode del sistema in catena diretta. Infatti è possibile valutare le condizioni di stabilità sui diagrammi di Bode. Questo lo faremo con riferimento ad un sistema in catena diretta privo di poli a parte reale positiva.

Con riferimento al caso in cui il sistema a controreazione sia stabile, e quindi che il punto $(-1; j0)$ sia a sinistra dell'attraversamento; si possono introdurre due parametri che rendono conto della stabilità del sistema.

Uno di essi è il modulo della F quando la fase è $-\pi$; se è minore di uno, negativo in dB, il sistema sarà stabile. Tanto è minore di uno tanto maggiore sarà la stabilità. Si usa dare a tale parametro, il valore del guadagno quando la fase è $-\pi$, il nome di *margine di guadagno* in quanto ci dice di quanto si può modificare il guadagno del sistema per arrivare ad una situazione che sia limite di stabilità.

L'altro parametro a cui è forse più comune fare riferimento è il cosiddetto *margine di fase* e corrisponde alla variazione di fase necessaria a condurre al limite di stabilità.

$$m_{\varphi} = \pi - \ \text{fase} F_{|F|=1}$$

Con l'introduzione di questi ultimi aspetti lo studio della stabilità di un sistema a controreazione viene ricondotto, siapure in un caso particolare, ad un'indagine sui diagrammi di Bode della funzione di trasferimento in catena diretta, quindi dei diagrammi che caratterizzano il comportamento in frequenza dei sistemi in catena diretta. Inoltre i due parametri introdotti misurano, se si è in presenza di stabilità, un margine che rappresenta una specifica di robustezza al variare dei parametri rispetto alla proprietà di stabilità. di quanto il sistema è stabile, più precisamente viene

Il margine di guadagno m_g esprime quantitativamente il mantenimento della stabilità al variare del guadagno k.

Il margine di fase m_φ esprime quantitativamente il mantenimento della stabilità al variare della fase del ciclo aperto. Questo collegamento con il comportamento in frequenza è molto importante dal punto di vista ingegneristico.

1.7. Stabilità

1.7.a. Condizioni e criteri per i sistemi lineari

Premesso che le definizioni rimangono invariate, lo studio sinora condotto consente di comprendere che la condizione di stabilità asintotica dei sistemi lineari a tempo discreto è che gli autovalori abbiano modulo minore di uno. La verifica può essere condotta impiegando diversi criteri; tra questi quelli qui di seguito esposti.

Condizioni di stabilità per i sistemi a tempo discreto.

$$x(t+1) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$x_e = Ax_e$$

$$(A - I)x_e = 0$$

Per quanto riguarda la condizione di stabilità e di stabilità asintotica, la sua formulazione è la stessa sulla matrice di transizione

$$\|\phi(t)\| < k$$

e

$$\lim_{t\to\infty} \|\phi(t)\| = 0$$

Poiché la matrice di transizione è:

$$\phi(t) = A^t$$

in questo caso la limitatezza e la convergenza a zero della norma impongono che gli autovalori appartengano al cerchio di raggio unitario.

Allora per gli autovalori che sono all'esterno si hanno dei moti divergenti per quelli all'interno si hanno moti convergenti, sulla frontiera ci sono modi che possono essere di ampiezza costante se la molteplicità è uno, se invece è maggiore di uno si hanno di nuovo moti divergenti. La condizione di stabilità allora sarà che gli autovalori siano tutti all'interno della circonferenza, al più sono consentiti sulla frontiera autovalori semplici. Per la stabilità asintotica devono essere strettamente all'interno. In conclusione anche in questo caso la condizione di stabilità corrisponde all'allocazione degli autovalori in una fissata regione del piano complesso. *stabilità semplice*

$$\begin{cases} |\lambda_i^1| \leq 1 \\ |\lambda_i^{>1}| < 1 \end{cases}$$

stabilità asintotica

$$|\lambda_i| < 1$$

ove si è indicato con l'apice 1 o > 1 la molteplicità unitaria o maggiore di uno dell'autovalore.

Una primo criterio è rappresentato dal criterio di Routh stesso.

Con riferimento al polinomio

$$d(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_0$$

la sostituzione di variabile

$$z \leftarrow \frac{s+1}{s-1}$$

corrisponde ad effettuare una trasformazione del cerchio unitario al semipiano negativo del piano complesso. Sul polinomio in s è ora possibile applicare il criterio di Routh ed ottenere le informazioni sulla stabilità; infatti gli zeri in z con modulo > 1 corrispondono a zeri in s a parte reale maggiore di zero.

Un secondo criterio è il cosiddetto criterio di Jury che consiste, al pari di quello di Routh, nel verificare che tra i coefficienti di una tabella costruita ad hoc siano verificate precise condizioni.

Per quanto riguarda la costruzione della tabella

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \dots & \dots & a_n \\ a_n & a_{n-1} & \dots & \dots & a_0 \\ b_0 & b_1 & \dots & \dots & b_{n-1} \\ b_{n-1} & \dots & \dots & b_0 & \\ c_0 & \dots & \dots & c_{n-2} & \\ c_{n-2} & \dots & \dots & c_0 & \end{pmatrix}$$

$$\vdots$$

$$t_0 \quad t_1 \quad t_2$$

dove i coefficienti sono calcolati come indicato nel seguito:

$$b_0 \leftarrow \begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ a_n & a_{n-1} \end{vmatrix}$$

$$b_{n-1} \leftarrow \begin{vmatrix} a_0 & a_n \\ a_n & a_0 \end{vmatrix}$$

in generale

$$b_k \leftarrow \begin{vmatrix} a_0 & a_{k+1} \\ a_n & a_{n-k-1} \end{vmatrix}$$

L'enunciato del criterio di Jury è il seguente: condizioni necessarie e sufficienti per la stabilità asintotica sono

$$
\begin{gathered}
d(1) > 0 \\
(-1)^n d(-1) > 0 \\
|a_n| > |a_0| \\
|b_0| > |b_{n-1}| \\
\vdots \\
|t_0| > |t_2|
\end{gathered}
$$

Esempio:

$$z^2 + z + 0,5$$

Si verificano preliminarmente le prime tre condizioni che non dipendono dai coefficienti della tabella; si costruisce, quindi, la tabella caratterizzata dalla sola riga

$$1 \quad 1 \quad 0,5$$

e si verifica immediatamente il soddisfacimento delle condizioni di stabilità.

Come per i sistemi a tempo continuo un ulteriore criterio di indagine sulla stabilità è rappresentato dal criterio di Lyapunov. Si tratta di un criterio di grande generalità e potenzialità di impiego non limitato al contesto lineare.

1.7.b. Il criterio di Lyapunov

Con riferimento al sistema a tempo discreto

$$x(t+1) = f(x(t)) \qquad f(x_e) = x_e$$

lo stato di equilibrio x_e è localmente stabile, asintoticamente stabile, se esiste una funzione $V(x)$ definita positiva in un certo intorno dello stato di equilibrio, I_{x_e}, e la sua differenza prima:

$$\Delta V(x) = V(x(t+1)) - V(x(t))$$

è definita negativa in I_{x_e}.

Il criterio quindi si enuncia allo stesso modo e questa volta si deve trovare una funzione la cui differenza prima sia definita (semidefinita) negativa. Ancora una volta il criterio dà vita a condizioni che sono soltanto sufficienti, nel senso che se in corrispondenza di $V(x)$ definita positiva la $\Delta V(x)$ non risulta definita (semidefinita) negativa non si può decidere della stabilità dello stato di equilibrio.

Esempio:

$$\begin{cases} x_1(t+1) = \dfrac{x_2(t)}{1+x_2(t)^2} \\ x_2(t+1) = \dfrac{x_1(t)}{1+x_2(t)^2} \end{cases}$$

lo stato di equilibrio è $x_e = 0$ e posto:

$$V(x) = x_1^2 + x_2^2$$

$$\begin{aligned} \Delta V(x) &= V\big(f(x(t))\big) - V(x(t)) \\ V\big(f(x(t))\big) &= \frac{x_2^2}{(1+x_2^2)^2} + \frac{x_1^2}{(1+x_2^2)^2} = \\ &= \frac{x_1^2+x_2^2}{(1+x_2^2)^2} = \frac{V(x)}{(1+x_2^2)^2} \\ \Delta V(x) &= \frac{V(x)}{(1+x_2^2)^2} - V(x) \\ \Delta V(x) &= \left(\frac{1}{(1+x_2^2)^2} - 1\right) V(x) \le 0 \end{aligned}$$

Questa ultima quantità è semidefinita negativa e quindi lo stato di equilibrio è uno stato stabile, in realtà è uno stato di equilibrio globalmente stabile per le note condizioni di illimitatezza della V e di validità delle condizioni su tutto lo spazio.

Anche con riferimento ai sistemi a tempo discreto nel caso lineare il criterio si particolarizza dando vita a condizioni necessarie e sufficienti di facile verifica.

1.7.c. Il criterio di Lyapunov per i sistemi lineari stazionari a tempo discreto

$$x(t+1) = Ax(t) \qquad x_e = Ax_e \Rightarrow (A-I)x_e = 0$$

Condizione necessaria e sufficiente per la stabilità asintotica del sistema dato, è che la seguente equazione

$$A'QA - Q = -P$$

ammetta soluzione unica in Q simmetrica e definita positiva, per ogni P fissata, anche essa simmetrica e definita positiva.

Quindi la formulazione è identica al caso precedente, ciò che cambia è la struttura dell'equazione. Anche in questo caso in genere si fissa $P = I$; se questa equazione non ammette una soluzione, se la soluzione non è unica, se non è definita positiva, si può concludere che il sistema non è asintoticamente stabile.

Per la dimostrazione si procede come nel caso dei sistemi a tempo continuo. Per la sufficienza, si fissi

$$V(x) = x'Qx$$

$$\begin{aligned}\Delta V(x) &= V(x(t+1)) - V(x(t))\\ &= x'(t+1)Qx(t+1) - x'(t)Qx(t)\\ &= x'A'QAx - x'Qx\\ &= x'(A'QA - Q)x\\ &= -x'Px\end{aligned}$$

ma P è definita positiva e quindi $-x'Px$ è globalmente definita negativa. Ciò dimostra la stabilità asintotica globale del sistema.

Per la necessità si procede in modo formalmente analogo a quanto visto nel caso a tempo continuo mostrando che

$$Q = \sum_{0}^{\infty} A'^k P A^k$$

è soluzione dell'equazione unica simmetrica e definita positiva. Anche in questo caso il criterio si riconduce alla risoluzione di $\frac{n(n+1)}{2}$ equazioni lineari.

Interessante è il confronto tra il criterio di Routh e quello di Lyapunov in merito alla complessità dei calcoli in termini di numeri di operazioni. Ovviamente tutto dipende dalla struttura della matrice dinamica; in presenza di un numero elevato di elementi nulli nella matrice A può risultare conveniente applicare il criterio di Routh in quanto non si deve dimenticare che per applicare il criterio di Routh è necessario preliminarmente calcolare il polinomio caratteristico.

Si è visto in questo paragrafo come il criterio di Lyapunov si particolarizzi nel contesto lineare, tempo continuo e tempo discreto, dando vita a condizioni necessarie e sufficienti. Ciò non accade nel contesto non lineare ove la possibilità di pervenire ad una verifica positiva della stabilità è collegata al calcolo di una funzione che soddisfi alle condizioni note. Questo aspetto rende di difficile applicazione il metodo nei casi in cui la verifica non abbia avuto esito positivo impiegando le funzioni definite positive quadratiche elementari.

Che cosa fare quando non si riesce direttamente a studiare la stabilità di un sistema non lineare applicando il criterio di Lyapunov ? Ci sono altri metodi ?

In realtà un altro metodo, peraltro con ruolo complementare a quello svolto dal criterio di Lyapunov, è quello fondato sullo studio della stabilità del sistema non lineare sulla base dell'approssimazione lineare. Questo sarà l'oggetto della prossima lezione.

1.7.d. Studio della stabilità mediante linearizzazione

Il metodo è relativo all'impiego dell'approssimazione lineare intorno ad uno stato di equilibrio per studiare la stabilità di uno stato di equilibrio di un sistema non lineare.

Come è noto la linearizzazione di un sistema dato intorno ad uno stato di equilibrio

Algoritmo per il calcolo della radice quadrata

La seguente equazione

$$x^2 - a = 0$$

può essere risolta per un fissato a impiegando il seguente algoritmo iterativo

$$x(t+1) = x(t) + a - x^2(t)$$

Per tale algoritmo lo stato

$$x_e = \sqrt{a}$$

è di equilibrio, come è immediato verificare. La verifica della stabilità di tale stato di equilibrio equivale alla verifica della convergenza dell'algoritmo per il calcolo della radice quadrata. Se si ha stabilità intorno a $\sqrt{a}$, ciò assicura che l'implementazione dell'algoritmo, consente di convergere verso la soluzione: $\sqrt{a}$.

Questioni di tale genere sono indicate come problemi di stabilità di un algoritmo.

Se si procede all'impiego del metodo di studio mediante linearizzazione, si ottiene

$$J(x_e) = (1 - 2\sqrt{a})$$

$$\Downarrow$$

$$0 < a < 1 \Leftrightarrow |1 - 2\sqrt{a}| < 1$$

Da questa analisi si ricava che per $0 < a < 1$ la soluzione $x_e = \sqrt{a}$ può essere senz'altro calcolata con l'algoritmo dato.

Il risultato ottenuto ha una validità locale e rimane non definito il massimo scostamento ammesso dalla condizione iniziale rispetto al valore vero (quello di equilibrio). Un'informazione più precisa circa l'eventuale scostamento, la regione di stabilità, può essere ottenuto utilizzando il criterio di Lyapunov con

$$V(x) = |a - x^2|$$

Il calcolo della $V(x(t+1))$ e $\Delta(V(x))$ consentono di verificare senza difficoltà se si assume $0 < a < 1$ che

$$0 \leq x \leq 1$$

definisce la regione di stabilità.

Due esempi da svolgere
- modello di Leslie
- dinamica del prezzo

Il secondo esempio generalizza l'esempio della dinamica del prezzo in condizioni di equilibrio in presenza di un solo bene. Si consideri un mercato caratterizzato dalla presenza di due beni

$$\begin{cases} d(t+1) = Ap(t+1) + d_0 \\ o(t+1) = Ep(t) + o_0 \end{cases}$$

dove A, E, d_0 e o_0 sono matrici e vettori di dimensione due i cui coefficienti ammettono semplici interpretazioni in termini di produzione e domanda. in condizioni di equilibrio è possibile stabilire un'equazione della dinamica del prezzo secondo una relazione tipo.

$$p(t+1) = A^{-1}Ep(t) + A^{-1}(o_0 - d_0)$$
$$d = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} -\alpha & \beta \\ \gamma & -\delta \end{pmatrix}$$
$$\alpha, \beta, \gamma, \delta > 0$$

Supponendo $E = I$ si studi la precedente equazione e si individuino quali sono le condizioni affinchè l'equilibrio sia stabile asintoticamente. Si tratta di un'analisi di stabilità di un sistema lineare a tempo discreto, e ammette un'interpretazione in termini dei coefficienti $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ che hanno un interessante significato in termini economici.