

1. Le proprietà geometriche dello spazio di stato

In questo capitolo vengono introdotte e studiate due proprietà degli stati che consentono di mettere in luce la struttura interna del sistema.

La prima proprietà riguarda il legame stato-uscita e consiste nell'esistenza di stati ai quali corrispondono uscite coincidenti. Come suggerisce l'intuizione, e avremo occasione di comprendere meglio, da un punto di vista esterno ciò costituisce un impedimento alla ricostruzione delle evoluzioni interne a partire dalle osservazioni (inosservabilità del sistema).

La seconda riguarda il comportamento ingresso stato e più in particolare la possibilità di raggiungere prefissati stati. Da un punto di vista esterno ciò esprime la possibilità di modificare il comportamento dinamico di parte del sistema.

1.1. Le proprietà della struttura interna: l'Osservabilità

La proprietà di osservabilità riguarda il comportamento stato - uscita; più precisamente questa proprietà tiene conto del fatto che tutte le informazioni in merito all'evoluzione interna nello stato siano contenute nell'uscita. Come

l'intuizione suggerisce ciò dovrebbe consentire di ricostruire il comportamento nello stato dall'osservazione dell'uscita. Come vedremo in quanto segue la caratterizzazione dell'impedimento più intuitivo alla ricostruzione del comportamento interno dalle osservazioni indica la strada e conduce naturalmente alla soluzione. Il punto di partenza è rappresentato dalla definizione di stati indistinguibili; l'osservabilità infatti si concretizza nell'assenza di stati indistinguibili. Infatti gli stati indistinguibili, stati diversi a cui corrispondono le stesse uscite per ogni ingresso, rappresentano evidenti limitazioni di informazioni per ricostruire il comportamento interno (ridondanza nella descrizione dello stato o inefficacia dei canali di osservazione)

Due stati x_a e x_b sono detti indistinguibili al tempo t_0 se per ogni funzione di ingresso da t_0 in poi le uscite corrispondenti sono coincidenti. La presenza di stati indistinguibili può essere vista come un'inefficacia dei canali di osservazione, se si pensa all'eventualità di ricostruire il comportamento interno a partire dall'osservazione dell'uscita.

La presenza di stati indistinguibili equivale, per i sistemi lineari stazionari, alla presenza di stati **inosservabili**. Sono così denominati quegli stati a cui corrisponde un'evoluzione libera in uscita identicamente nulla (stati indistinguibili dallo stato zero). Infatti, se per ogni fissata funzione di ingresso $u(\cdot)$ le due uscite

$$y_a(t) = Ce^{At}x_a + \int_0^t Ce^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

e

$$y_b(t) = Ce^{At}x_b + \int_0^t Ce^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

coincidono, necessariamente

$$Ce^{At}(x_a - x_b) = 0$$

Quindi, x_a è indistinguibile da x_b implica che $(x_a - x_b)$ dà uscita identicamente nulla in evoluzione libera, cioè è inosservabile.

E' facile dimostrare che vale anche l'inverso; infatti se esiste \bar{x} inosservabile, allora $\forall x_a, x_b$ tali che

$$x_a - x_b = \bar{x}$$

$$x_a \text{ indistinguibile } x_b$$

Perciò basta studiare l'esistenza di stati \bar{x} che danno evoluzione libera nulla in uscita, stati inosservabili, per ottenere gli stati indistinguibili.

Le questioni a cui si vuole rispondere sono:

Sotto quali condizioni un assegnato stato \bar{x} è inosservabile ?

Come caratterizzare l'insieme degli stati inosservabili ?

Sotto quali condizioni il sistema è tutto osservabile (assenza di stati inosservabili) ?

Se si indica con I = l'insieme degli stati inosservabili, un primo risultato importante è il seguente.

L'insieme degli stati inosservabili

$$I = \left\{ x \in R^n : Ce^{At}x = 0, \forall t \geq 0 \right\}$$

coincide con l'insieme

$$I \equiv \ker \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} := \left\{ x \in R^n : \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} x = 0 \right\}$$

Infatti, se

$$Ce^{At}x = 0 \Rightarrow \left(\frac{d^k}{dt^k} Ce^{At}x \right)_{t=0} = 0$$

ma

$$\frac{d^k}{dt^k} Ce^{At}x = CA^k e^{At}x$$

e, quindi:

$$\frac{d^k}{dt^k} Ce^{At}x \Big|_{t=0} = CA^k e^{At}x \Big|_{t=0} = CA^k x \quad k = 0, 1, \dots$$

Cioè se $Ce^{At}x = 0$ allora $CA^k x = 0$ per ogni k , e in particolare

$$\begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} x = 0$$

Se viceversa,

$$CA^k x = 0 \quad k = 0, \dots, n-1$$

dal teorema di Cayley Hamilton segue che:

$$CA^k x = 0 \quad \forall k \quad k \geq n$$

Infatti per il teorema di Cayley Hamilton: $A^n = -a_0 I - a_1 A - \dots - a_{n-1} A^{n-1}$ e se si premoltiplica questa espressione per C e la si postmoltiplica per x : $CA^n x = -a_0 Cx - a_1 CAx - \dots - a_{n-1} CA^{n-1} x$. Lo stesso calcolo può essere ripetuto iterando la procedura per mostrare che la generica potenza CA^k si può esprimere come combinazione lineare delle prime $(n-1)$ potenze e conduce al risultato voluto.

Ma se $CA^k x = 0 \quad \forall k \geq 0$, allora:

$$Ce^{At} x = \sum_{k \geq 0} \frac{t^k}{k!} CA^k x = 0$$

Quanto esposto dimostra il seguente risultato

Teorema 1. *L'insieme degli inosservabili coincide con*

$$\ker \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix}$$

□

L'insieme degli stati inosservabili è dunque un sottospazio di R^n .

La matrice $(nq \times n)$,

$$\begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix}$$

è detta matrice di osservabilità del sistema.

Tornando ai quesiti precedenti è ora chiaro che \bar{x} è inosservabile se

$$\begin{pmatrix} C \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} \bar{x} = 0$$

Inoltre l'insieme degli stati inosservabili è il sottospazio di R^n dato da

$$I = \ker \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix}$$

Infine il sistema è tutto osservabile se e solo se non vi sono stati inosservabili, cioè la matrice di osservabilità ha rango pieno

$$\rho \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} = n$$

L'insieme degli stati inosservabili è un sottospazio di x ed è possibile mettere in evidenza una scomposizione interna in sottosistemi che tiene conto di tale proprietà degli stati.

A tal fine si supponga che

$$\rho \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} = m < n$$

se ciò è vero si può dimostrare che:

$$\exists |T|_{n \times n} \neq 0 : z = Tx$$

e, in queste nuove coordinate, le matrici che rappresentano il sistema manifestano una partizione a blocchi del seguente tipo:

$$TAT^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \quad TB = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} \quad CT^{-1} = (C_1 \quad 0)$$

con

$$A_{11} \rightarrow (m \times m) \quad B_1 \rightarrow (m \times p) \quad C_1 \rightarrow (q \times m)$$

Inoltre la terna A_{11}, B_1, C_1 è tutta osservabile.

A tale struttura corrisponde la scomposizione interna che mette in luce la proprietà del sistema. Se si considera la partizione di z

$$z = Tx \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}_{m-n}^m$$

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = A_{11}z_1 + B_1u \\ \dot{z}_2 = A_{21}z_1 + A_{22}z_2 + B_2u \\ y = C_1z_1 \end{cases}$$

è evidente la scomposizione in due sottosistemi S_1, S_2 con variabili di stato z_1 e z_2 , ciascuno dei sottosistemi è influenzato da u , il sottosistema S_1 non è influenzato da S_2 mentre influenza S_2 e l'uscita è caratterizzata solo dal sottosistema S_1 .

Quindi in queste coordinate la struttura interna è quella di figura

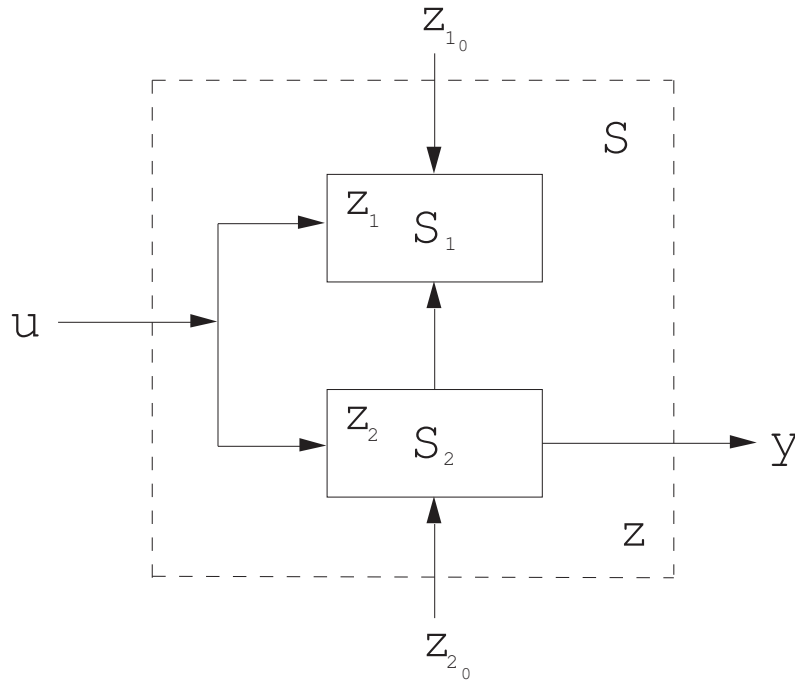


Figura 1.1

dove appare che solo il sottosistema S_1 influenza l'uscita. Inoltre poiché la terna A_{11}, B_1, C_1 è tutta osservabile, S_1 è tutto osservabile in uscita. Quindi questa scomposizione mette bene in luce la struttura interna del sistema, che è l'interconnessione dei due sottosistemi, uno tutto osservabile l'altro no, quello osservabile ha la dimensione pari al rango della matrice di osservabilità.

La trasformazione di coordinate che mette in evidenza la struttura indicata è quella che corrisponde ad assumere come ultimi $n - m$ vettori della nuova base una base dell'insieme degli inosservabili ed i primi m un suo generico completamento. Si assume cioè

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} m & n - m \\ * & \vdots & \text{base in I} \end{pmatrix}$$

Un esempio è il seguente

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad C = (0 \quad 1)$$

$$\begin{pmatrix} C \\ CA \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} x = 0 \Rightarrow I = \text{gen} \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$$

e, scegliendo

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \vdots & 1 \\ 1 & \vdots & 0 \end{pmatrix}$$

si ottengono matrici TAT^{-1} e CT^{-1} della forma voluta.

Un ulteriore aspetto che si vuole mettere in evidenza è che il legame forzato ingresso-uscita è caratterizzato dal solo sottosistema osservabile. Ciò appare evidente dalla figura, ma è direttamente ottenuto con il calcolo. Si ha infatti

$$W(t) = Ce^{At}B = \bar{C}e^{\bar{A}t}\bar{B}$$

$$(C_1 \quad 0) \sum \frac{t^k}{k!} \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}^k \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} =$$

$$= (C_1 \quad 0) \sum \frac{t^k}{k!} \begin{pmatrix} A_{11}^k & 0 \\ * & A_{22}^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} =$$

$$= C_1 e^{A_{11}t} B_1$$

Tutti e soli i modi osservabili caratterizzano il sottosistema osservabile.

Se infatti ricordiamo che i modi osservabili sono quelli le cui leggi temporali appartengono a Ce^{At} , cioè i λ_i^o

$$\bar{C}e^{\bar{A}t} = (C_1 e^{A_{11}t} \quad 0) = \psi(t)$$

e che è stata fatta solo una trasformazione di coordinate $z = Tx$, e quindi gli autovalori λ_i che caratterizzavano A sono gli stessi che caratterizzano la

matrice TAT^{-1} , in realtà ciò basta per comprendere che il sottosistema S_1 è caratterizzato da leggi temporali che sono quelle dei modi osservabili. Si potrebbe dimostrare anche in questo caso che se un sistema S è tutto osservabile allora, e solo allora, tutti i modi sono osservabili.

1.2. Le proprietà della struttura interna: la Raggiungibilità

Definizione \bar{x} è detto raggiungibile a T da x_0 se $\exists t_0 < T$, ed un ingresso sull'intervallo di tempo $[t_0, T]$ che porta lo stato x_0 a \bar{x} .

A partire da tale definizione l'indagine che sarà condotta verte sullo sviluppo di metodi che consentano di capire se un fissato stato possa essere raggiunto indipendentemente dal calcolare l'ingresso che consente di raggiungerlo; di caratterizzare l'intero insieme degli stati che si possono raggiungere; le condizioni sotto le quali il sistema è tutto raggiungibile.

Nel caso di una rappresentazione lineare stazionaria è usuale riferirsi allo stato $x(t_0) = 0$. Lo stato zero è, infatti, sempre mantenuto in assenza di ingresso (stato di equilibrio).

Se notiamo con $\mathcal{R}(T)$ l'insieme dei raggiungibili a T si ha

$$\mathcal{R}(T) = \left\{ x : x = \int_{t_0}^T e^{A(T-\tau)} Bu(\tau) d\tau, \text{ per qualche } t_0, u_{[t_0, T]} \right\}$$

che può anche essere descritto come

$$\mathcal{R}(T) = \left\{ x : x = \int_{-\infty}^T e^{A(T-\tau)} Bu(\tau) d\tau, \quad u_{(-\infty, T)} \right\}$$

Dalle precedenti espressioni risulta chiaro che combinazioni lineari di stati raggiungibili sono raggiungibili, e quindi che $\mathcal{R}(T)$ è un sottospazio di \mathbf{R}^n .

Per arrivare ad una descrizione dell'insieme degli stati raggiungibili che ne consenta il calcolo è necessario fare riferimento ad un noto risultato della teoria degli operatori lineari.

E' necessario ricordare preliminarmente la definizione di operatore aggiunto. Assegnato $\mathcal{L} : A \rightarrow B$ lineare, $\mathcal{L}^* : B \rightarrow A$ è quell'operatore che soddisfa

$$\langle \mathcal{L}(a), b \rangle_B = \langle a, \mathcal{L}^*(b) \rangle_A$$

dove $\langle \cdot, \cdot \rangle$ indica l'operazione di prodotto interno.

Lemma 1. *Se \mathcal{L} è un operatore lineare allora*

$$\mathcal{R}(\mathcal{L}) = \text{Ker}(\mathcal{L}^*)^\perp$$

cioè la sua immagine coincide con il complemento ortogonale del kernel dell'operatore aggiunto \mathcal{L}^ .* \square

Ciò premesso quanto asserito nel lemma, essendo $\mathcal{R}(\mathcal{L})$ e $\text{Ker}(\mathcal{L}^*)^\perp$ sottospazi, è equivalente a

$$\mathcal{R}(\mathcal{L})^\perp = \text{Ker}(\mathcal{L}^*)$$

che è vera in quanto comunque preso b in $\mathcal{R}(\mathcal{L})^\perp$ e per ogni a in A

$$\langle b, \mathcal{L}(a) \rangle_B = 0 \Rightarrow \langle \mathcal{L}^*(b), a \rangle_A = 0$$

cioè b è in $\text{Ker}(\mathcal{L}^*)$. Analogamente si procede per il viceversa.

Il risultato ora ricordato può essere applicato al caso allo studio osservando che la funzione

$$B^* e^{A^*(T-\tau)} x : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{C}^\omega(-\infty, T)$$

è l'operatore aggiunto di

$$\int_{-\infty}^T e^{A(T-\tau)} B u(\tau) d\tau,$$

Se inoltre si osserva che l'operatore aggiunto di una matrice è la matrice aggiunta (che nel caso reale coincide con la trasposta) e si osserva che per il teorema precedente il $\text{Ker} C e^{At}$ coincide con il kernel della matrice di osservabilità, non è difficile verificare che vale il seguente risultato.

Teorema 2.

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}(T) &= \mathcal{R} \left(\int_{-\infty}^T e^{A(T-\tau)} B u(\tau) d\tau \right) = \text{Ker} \left(B^* e^{A^*(T-\tau)} x \right)^\perp = \\
&= \text{Ker} \begin{pmatrix} B^* \\ B^* A^* \\ \vdots \\ B^* A^{*n-1} \end{pmatrix}^\perp = \mathcal{R} (B \quad AB \quad \cdots \quad A^{n-1}B)
\end{aligned}$$

□

Le precedenti considerazioni conducono ad una semplice e completa caratterizzazione dell'insieme degli stati raggiungibili. Esso coincide con il sottospazio generato dalle colonne linearmente indipendenti della matrice, $(n \times np)$, $(B \quad AB \quad \cdots \quad A^{n-1}B)$ detta matrice di raggiungibilità.

Se tale matrice ha rango n , tutti gli stati sono raggiungibili ed il sistema stesso è detto completamente *raggiungibile*. Il risultato messo in evidenza fornisce un test semplice e molto efficace. Assegnato un sistema è infatti possibile con un semplice criterio indagare le “potenzialità” di intervento attraverso i canali di ingresso. L'insieme degli stati raggiungibili è un sottospazio dello spazio di stato; esso coincide con il sottospazio generato dalle colonne linearmente indipendenti della matrice di raggiungibilità.

Un esempio numerico:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = A \quad \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = B$$

$$R = \text{Im} \begin{pmatrix} -1 & \vdots & 1 \\ -1 & \vdots & 3 \end{pmatrix}$$

In questo caso il sistema è tutto raggiungibile e quindi si può andare in qualsiasi stato.

La verifica della raggiungibilità di uno stato è diventata molto semplice, perché in realtà dato uno stato: x è raggiungibile? Bisogna vedere se $x \in R$ (se non

appartiene a R non è raggiungibile).

Altro esempio:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = A \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = B$$

$$R = \text{Im} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

in questo caso l'insieme degli stati raggiungibili è uno spazio ad una dimensione, ciò significa che per questo sistema tutti e soli gli stati del tipo:

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix} = x_R$$

sono raggiungibili e solo questi.

Quindi l'insieme degli stati raggiungibili è un sottospazio, ed è esattamente l'immagine della matrice considerata, si può dire che il sistema è tutto raggiungibile se il rango della matrice è n .

Si è quindi risposto ai tre quesiti iniziali.

Come si fa a stabilire se uno stato x_R è raggiungibile ?

x è raggiungibile se può essere espresso come combinazione lineare delle colonne di R .

Come è fatto l'insieme degli stati raggiungibili ?

É la combinazione lineare delle colonne di R .

Quando il sistema è tutto raggiungibile ?

Quando nell'insieme delle colonne np ce ne sono n indipendenti, cioè quando il rango della matrice è uguale ad n .

La raggiungibilità è differenziale per i sistemi a tempo continuo

$$R = \text{Im} \begin{pmatrix} B & \vdots & \dots & \vdots & A^{n-1}B \end{pmatrix}$$

||

$$R(n) \quad x_R \ni \bar{t} \leq n$$

Per un sistema a tempo continuo, S , tutto raggiungibile se si indica con x_R il generico stato, questo può essere raggiunto a partire dallo stato $x(0) = 0$ in un tempo arbitrario, T . Infatti si può verificare che con l'ingresso

$$u_R(t) = B'e^{-A't}C^{-1}e^{-AT}x_R$$

in cui

$$C = \int_0^T e^{-At}BB'e^{-A't}dt$$

è invertibile nell'ipotesi di completa raggiungibilità, si arriva al tempo T allo stato x_R . Infatti

$$\begin{aligned} & \int_0^T e^{A(t-\tau)}BB'e^{-A'\tau}C^{-1}e^{-AT}x_Rd\tau \\ & e^{AT}\left(\int_0^T e^{-A\tau}BB'e^{-A'\tau}d\tau\right)C^{-1}e^{-AT}x_R \end{aligned}$$

quella tra le parentesi è la matrice C e si ottiene

$$e^{AT}e^{-AT}x_R = x_R$$

quindi lo stato raggiunto al tempo T sotto l'azione dell'ingresso indicato è proprio x_R .

Essendo T arbitrario, si usa dire che la proprietà di raggiungibilità è differenziale per i sistemi a tempo continuo. Ovviamente meno tempo si impiega per andare da 0 a x_R più ampio sarà l'ingresso da applicare.

Una ulteriore osservazione riguarda il fatto che gli stati raggiungibili da zero possono anche essere forzati a zero (*controllabilità*). Uno stato, \bar{x} , è controllabile a T se esiste un ingresso che lo porta a zero al tempo T . Per le rappresentazioni lineari e stazionarie si può mostrare che sono controllabili tutti e soli gli stati raggiungibili.

Se infatti uno stato, x_T , è raggiungibile a T , essendo l'insieme degli stati raggiungibili un sottospazio dello spazio di stato invariante rispetto ad A ,

anche lo stato $-e^{AT}x_T$ è raggiungibile; quindi esiste un ingresso $u_T(\cdot)$ tale che

$$e^{AT}x_T + \int_0^T e^{A(T-\tau)}Bu_T(\tau)d(\tau) = 0$$

il che prova la controllabilità a T di x_T .

Le seguenti considerazioni hanno lo scopo di mettere in evidenza come la proprietà di raggiungibilità sia importante nel progetto.

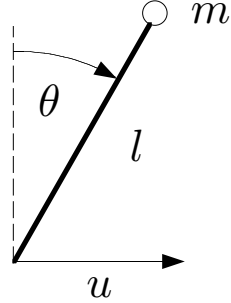


Figura 1.2

L'interesse dello studio condotto è spesso collegato all'equivalenza ora mostrata. La possibilità di portare un sistema nello stato zero, la controllabilità, è spesso l'obiettivo di un intervento su un sistema fisico. Il semplice test messo a punto può essere impiegato a questo proposito. Si potrebbe inoltre mostrare che la proprietà di controllabilità si mantiene sotto approssimazione lineare. Ciò comporta che se la proprietà non sussiste sul modello lineare approssimante il comportamento effettivo, allora non sussiste sul sistema fisico stesso. Si consideri, a titolo di esempio un pendolo invertito su una massa m controllato alla base per azione della forza u (si veda la figura). θ sia l'angolo formato dal pendolo con la verticale; se si proiettano le forze sulla tangente della traiettoria del pendolo e si impone l'equilibrio delle forze agenti, si ottiene l'equazione del moto:

$$mg \sin \theta = ml\ddot{\theta} + u \cos \theta$$

Il problema che si considera è il mantenimento del pendolo in equilibrio. Si tratta, in sostanza di un problema di controllabilità dello stato corrispondente

alla posizione verticale con velocità nulla.

$$\begin{pmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = 0$$

Lo studio può essere condotto sul modello linearizzato, per vedere in prima istanza, se il sistema linearizzato è controllabile. Infatti si può dimostrare che se ciò non fosse, se cioè non esistesse la possibilità di condurre a zero lo stato su modello linearizzato, certamente non si potrebbe risolvere il problema sul modello non lineare e quindi nella realtà sulla struttura effettiva.

A partire dalla rappresentazione con lo stato del sistema

$$\begin{cases} x_1 = \theta \\ x_2 = \dot{\theta} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \frac{g}{l} \sin x_1 - \frac{1}{ml} \cos x_1 u \end{cases}$$

si calcoli l'approssimazione lineare e l'insieme degli stati controllabili.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{l} \cos x_1 & 0 \end{pmatrix} \Big|_{x_e=0} = J(x_e) \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{ml} \cos x_1 \end{pmatrix} \Big|_{x_e=0}$$

$$\dot{\xi} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{l} & 0 \end{pmatrix} \xi + \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{ml} \end{pmatrix} u$$

$$R = \begin{pmatrix} B & | & AB \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{ml} \\ -\frac{1}{ml} & 0 \end{pmatrix}$$

Questa matrice ha rango due quindi l'insieme degli stati raggiungibili è tutto lo spazio, quindi anche lo stato zero con velocità angolare zero è controllabile. Ciò che implica la controllabilità a zero del sistema fisico per piccoli spostamenti intorno all'equilibrio (per un approfondimento si confronti quanto detto con l'analisi della stabilità mediante linearizzazione).

Gli stessi argomenti, possono essere impiegati per studiare la struttura, nota con il nome di doppio pendolo invertito, riportata nella figura seguente

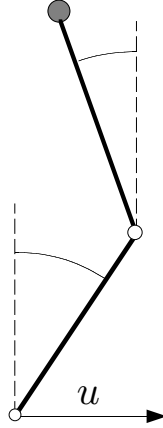


Figura 1.3

Lo studio sull'approssimazione lineare consente di verificare, in questo caso, la non completa controllabilità che, si potrebbe mostrare, comporta la non controllabilità del sistema reale.

Un ulteriore aspetto che si vuole ora mettere in evidenza riguarda la possibilità di scegliere le coordinate, e quindi rappresentare il sistema, in modo che appaia evidente la composizione del sistema stesso come l'interconnessione di una parte raggiungibile e una non raggiungibile.

A tal fine supponga che il sistema non sia tutto raggiungibile

$$\rho \begin{pmatrix} B & AB & \dots & A^{n-1}B \end{pmatrix} = m < n$$

In tali circostanze si può dimostrare che

$$\exists |T| \neq 0, (z = Tx) :$$

e, in queste nuove coordinate, le matrici che rappresentano il sistema manifestano una partizione a blocchi del seguente tipo:

$$TAT^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} \quad TB = \begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad CT^{-1} = (C_1 \quad C_2)$$

con

$$A_{11} \rightarrow (m \times m) \quad B_1 \rightarrow (m \times p) \quad C_1 \rightarrow (q \times m)$$

Inoltre la terna A_{11}, B_1, C_1 è tutta raggiungibile.

Questa struttura a blocchi mette bene in luce il fatto che il sistema in realtà è costituito da due sottosistemi, uno tutto raggiungibile l'altro non raggiungibile.

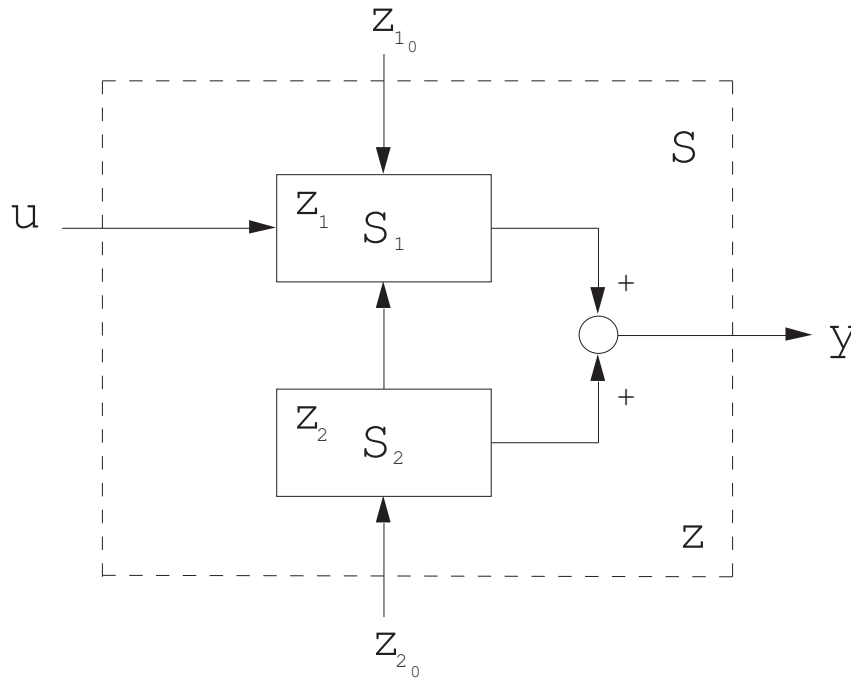


Figura 1.4

Alla struttura delle matrici nelle nuove coordinate corrisponde la struttura del sistema messa in evidenza nella figura. Infatti ad una partizione di z

$$z = Tx = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}_{n-m}^m$$

corrispondono le equazioni

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = A_{11}z_1 + A_{12}z_2 + B_1u \\ \dot{z}_2 = A_{22}z_2 \\ y = C_1z_1 + C_2z_2 \end{cases}$$

Se indichiamo con S_1 e S_2 due sistemi dinamici, uno corrispondente all'evoluzione delle variabili z_1 , l'altro a quelle z_2 , si nota che S_1 è influenzato da u mentre S_2 è autonomo, e entrambi influenzano l'uscita, quindi la struttura corrispondente è proprio quella di figura. Questa struttura mette in luce che il sottosistema S_1 è potenzialmente raggiungibile, S_2 invece no; in realtà il sottosistema S_1 è tutto quanto raggiungibile. Perché

$$\rho(B \cdots A^{n-1}B) = m$$

$$\rho(\bar{B}|\bar{A}\bar{B}|\dots\bar{A}^{n-1}\bar{B}) = \begin{pmatrix} B_1 & A_{11}B_1 & \cdots & A_{11}^{n-1}B_1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = m$$

con ciò si dimostra che la coppia (A_{11}, B_1) è tutta raggiungibile. Quindi se dal sistema complessivo (A, B, C) dato, si estrae la terna (A_{11}, B_1, C_1) la nuova rappresentazione così ottenuta,

$$\begin{cases} A, B, C(n) \\ \Downarrow T \\ \bar{A}, \bar{B}, \bar{C}(n) \\ \Downarrow \\ A_{11}B_1C_1(m < n) \end{cases}$$

è tutta raggiungibile.

Per quanto riguarda il calcolo della trasformazione T

A tal fine è sufficiente scegliere le prime m nuove coordinate una base nell'insieme dei raggiungibili, e le rimanenti $n - m$ qualsiasi, ma ovviamente tali da generare n vettori indipendenti.

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} \text{base} & \forall \\ R & \vdots \end{pmatrix}$$

m-colonne n-m

Si consideri il seguente esempio:

$$\begin{aligned}
 B &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} & A &= \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 R &= \text{Im} \begin{pmatrix} 1 & \vdots & -1 \\ 1 & \vdots & -1 \end{pmatrix} = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \\
 T^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & \vdots & 0 \\ 1 & \vdots & 1 \end{pmatrix} & T &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\
 TAT^{-1} &= \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} & TB &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 & \begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 - 3x_2 + u \\ \dot{x}_2 = -x_2 \\ y = C_1x_1 + C_2x_2 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Un'altra osservazione riguarda il fatto che il legame forzato ingresso - uscita è rappresentato dal solo sottosistema raggiungibile. Questo è anche ciò che suggerisce l'intuizione nell'osservare la figura. Il calcolo della $W(t)$ conferma tale intuizione. Infatti

$$W(t) = Ce^{At}B = (\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}) \Rightarrow \bar{C}e^{\bar{A}t}\bar{B}$$

ma

$$\begin{aligned}
 (C_1, C_2) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}^k \begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \end{pmatrix} &= \\
 (C_1, C_2) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \begin{pmatrix} A_{11}^k & * \\ 0 & A_{22}^k \end{pmatrix}^k \begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \end{pmatrix} &= \\
 = (C_1 e^{A_{11}t} B_1) = W(t) = Ce^{At}B
 \end{aligned}$$

e cioè la risposta impulsiva del sottosistema S_1 .

Un'altra osservazione è ancora suggerita dalla figura; il sottosistema raggiungibile dovrebbe essere caratterizzato dai soli modi eccitabili. Questo fatto

stabilisce un preciso legame tra la raggiungibilità degli stati e l'eccitabilità dei modi naturali.

Come già detto sono eccitabili con impulsi d'ingresso quei modi naturali le cui leggi esponenziali compaiono in:

$$H(t) = e^{AT} B$$

Se si tiene conto del fatto che le leggi esponenziali che caratterizzano i due sottosistemi S_1 e S_2 , quelle in TAT^{-1} , sono le stesse quelle della matrice A ,

$$A \rightarrow \lambda_i \quad TAT^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} \rightarrow \lambda_i$$

si comprende che gli autovalori di A sono in parte in A_{11} , in numero di m , e in parte in A_{22} , in numero di $(n - m)$; inoltre dal calcolo

$$H(t) = e^{\bar{A}t} \bar{B} = \begin{pmatrix} e^{A_{11}t} B_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

cioè in $H(t)$ ci stanno soltanto le leggi esponenziali che stanno in $e^{A_{11}t} B_1$ quelle che corrispondono agli autovalori di A_{11} , cioè quelle che corrispondono al sottosistema S_1 . Infine si potrebbe dimostrare che essendo il sottosistema S_1 tutto raggiungibile tutti i suoi modi sono eccitabili. Ciò consente di affermare che il sottosistema raggiungibile è caratterizzato da tutti e soli i modi eccitabili.

Un'ultima osservazione serve per chiarire ciò che si intenda quando si afferma che le proprietà di raggiungibilità ed osservabilità sono la duale l'una dell'altra. Questo discende dal fatto che se si considerano i due sistemi

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{z} = A'x + C'u \\ y = B'u \end{cases}$$

detti l'uno duale dell'altro, la completa raggiungibilità dell'uno è equivalente alla completa osservabilità dell'altro e viceversa. Quindi il sussistere di una

data proprietà su uno di essi implica il sussistere della proprietà duale sul sistema duale.

1.3. La scomposizione di Kalman

In questa lezione si mostrerà come sulla base delle proprietà di inosservabilità e raggiungibilità sia possibile, mediante un cambiamento di coordinate, mettere in evidenza la struttura interna del sistema che risulta dall'interconnessione di quattro sottosistemi per i quali le due proprietà sono alternativamente verificate. Ciò generalizza quanto già studiato nelle precedenti lezioni.

Infatti, con riferimento alla raggiungibilità

$$R = \text{Im} (B \mid \cdots \mid A^{n-1}B)$$

se il sistema non è tutto raggiungibile, sappiamo che esiste una trasformazione di coordinate, T , tale che

$$TAT^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} \quad TB = \begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e, a questa struttura delle matrici corrisponde una scomposizione in due sottosistemi S_1 e S_2 , che mette in evidenza come il sottosistema S_2 non sia raggiungibile.

Con riferimento all'inosservabilità

$$I = \ker \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix}$$

se il sistema non è tutto osservabile, sappiamo che esiste una trasformazione di coordinate, T , tale che

$$TAT^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \quad CT^{-1} = (C_1 \quad 0)$$

e, a questa struttura delle matrici corrisponde una scomposizione del sistema in due sottosistemi S_1 e S_2 , entrambi potenzialmente modificabili dall'ingresso, ma il sistema S_2 non osservabile in uscita.

Rispetto alle due proprietà, la raggiungibilità e l'inosservabilità possiamo classificare gli stati in:

- raggiungibili e non osservabili
- raggiungibili e osservabili
- non raggiungibili e non osservabili
- non raggiungibili e osservabili

Si mostrerà nel seguito che è possibile selezionare le coordinate in modo che le proprietà degli stati siano messe in evidenza.

La scomposizione di Kalman

Si tratta di una scomposizione in quattro sottosistemi ciascuno caratterizzato da uno spazio di stato ottenuto a partire dai sottospazi lineari degli stati raggiungibili e degli stati inosservabili. Siano χ_1 , χ_2 , χ_3 e χ_4 i sottospazi dello spazio di stato R^n , definiti come segue

$$\chi_1 = R \cap I \quad \text{stati raggiungibili e inosservabili}$$

$$\chi_2: \chi_1 \oplus \chi_2 = R \quad \text{stati raggiungibili e osservabili}$$

$$\chi_3: \chi_1 \oplus \chi_3 = I \quad \text{stati non raggiungibili e non osservabili}$$

χ_2 è un qualsiasi sottospazio, complemento a χ_1 in R che ha in comune con χ_1 solo l'origine, ciò consente di esprimere R mediante l'operazione di somma diretta. La stessa considerazione vale per χ_3 .

Con i tre sottospazi introdotti nel caso della figura sotto si genera tutto quanto lo spazio di stato, in questo caso lo spazio R^3 .

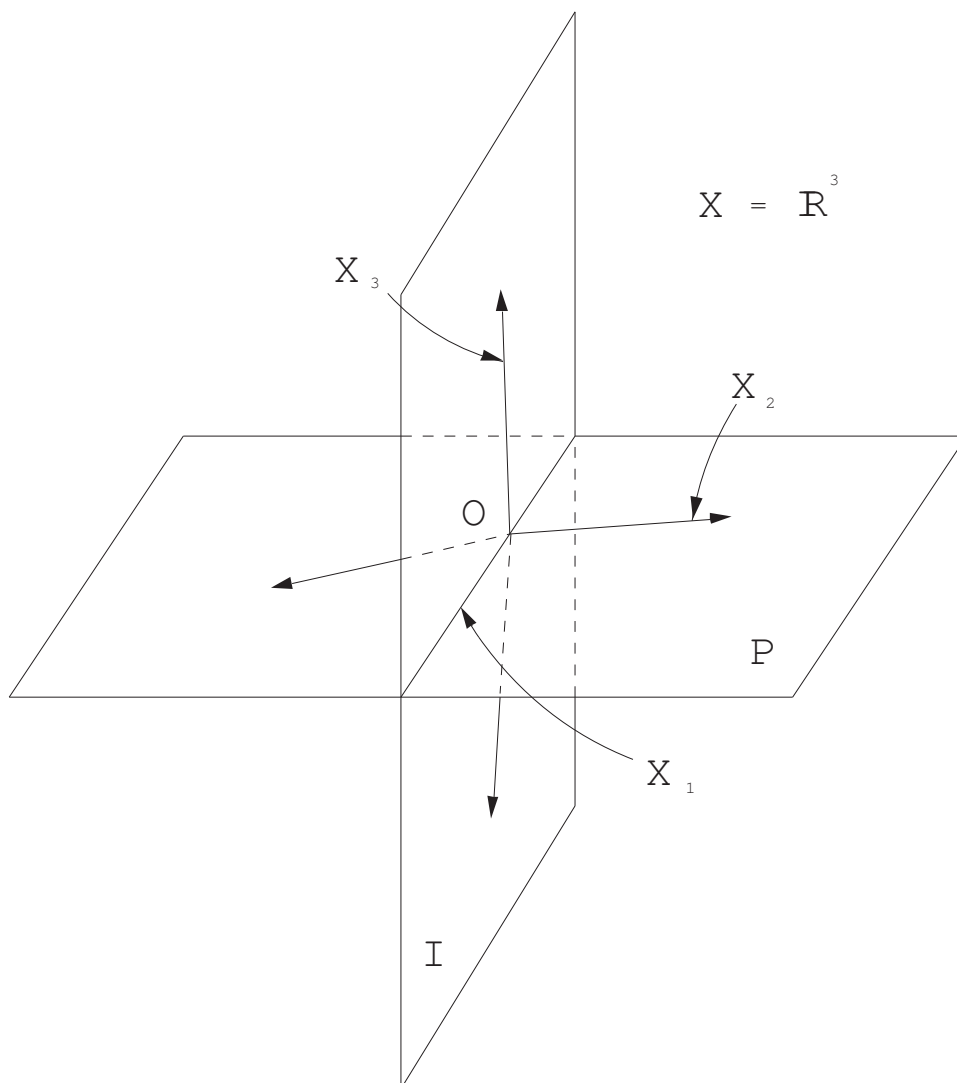


Figura 1.5

In generale non è questa la situazione, quindi è necessario introdurre un quarto sottospazio, χ_4 , complemento a R^n , cioè quanto ancora serve per ottenere tutto R^n :

$$\chi_4: \chi_1 \oplus \chi_2 \oplus \chi_3 \oplus \chi_4 = R^n \quad \text{stati non raggiungibili e osservabili}$$

Si esegua a questo punto una trasformazione di coordinate che corrisponde ad assumere come primi n_1 vettori una base in χ_1 , quindi n_2 vettori che definiscono una base in χ_2 , poi, n_3 vettori che definiscono una base in χ_3 , infine, $n_4 = n - n_1 - n_2 - n_3$ vettori che definiscono una base in χ_4 .

Ciò corrisponde a fissare una trasformazione in T : in cui la T^{-1} ha le colonne i vettori selezionati.

$$T^{-1} = (\text{base}\chi_1 | \text{base}\chi_2 | \text{base}\chi_3 | \text{base}\chi_4)$$

Come appare la rappresentazione in queste nuove coordinate ? Posto

$$z = Tx = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix}$$

ove z_i ha dimensione n_i , si ha la seguente struttura delle matrici A , B e C .

$$TAT^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ 0 & A_{22} & 0 & A_{24} \\ 0 & 0 & A_{33} & A_{34} \\ 0 & 0 & 0 & A_{44} \end{pmatrix} \quad TB = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$CT^{-1} = (0 \quad C_2 \quad 0 \quad C_4)$$

alla quale corrisponde il sistema di equazioni:

$$\dot{z}_1 = A_{11}z_1 + A_{12}z_2 + A_{13}z_3 + A_{14}z_4 + B_1u$$

$$\dot{z}_2 = A_{22}z_2 + A_{24}z_4 + B_2u$$

$$\dot{z}_3 = A_{33}z_3 + A_{34}z_4$$

$$\dot{z}_4 = A_{44}z_4$$

$$y = C_2z_2 + C_4z_4$$

Se indichiamo con S_i il sottosistema caratterizzato dalle variabili in z_i , ne risulta la scomposizione in quattro sottosistemi (S_1, S_2, S_3, S_4) messi in evidenza nella figura seguente.

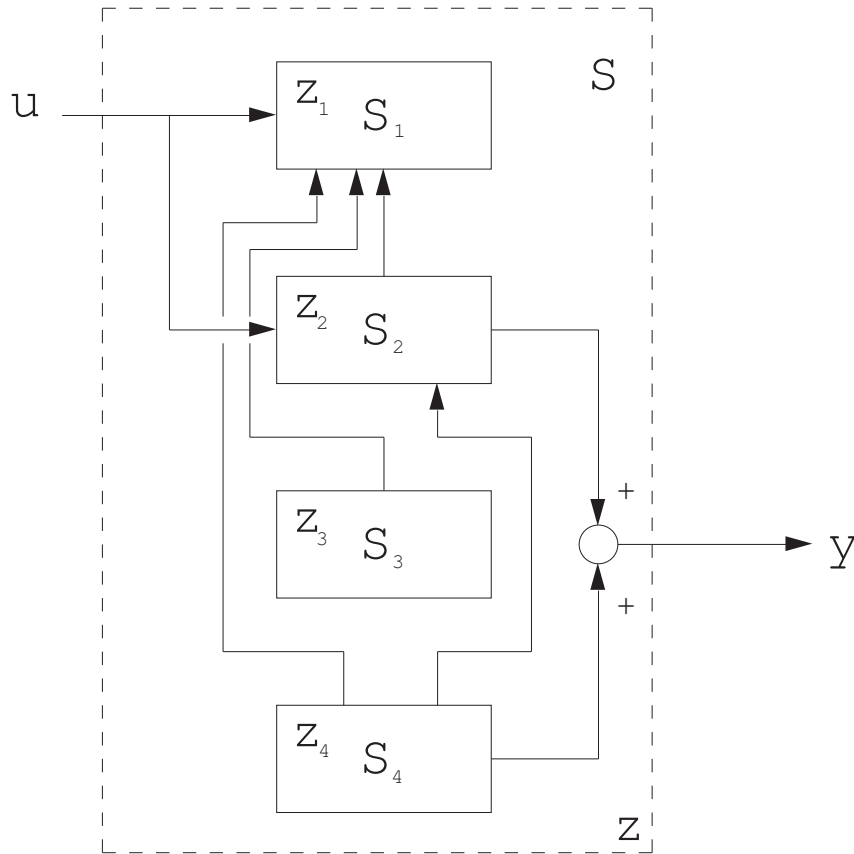


Figura 1.6

Il sottosistema S_1 è influenzato da S_2 , da S_3 e anche da S_4 e infine dall'ingresso u . Il sottosistema S_2 è influenzato da S_4 , e dall'ingresso u . Il sottosistema S_3 è influenzato da S_4 , ed S_4 è un sottosistema che evolve in modo autonomo. Infine l'uscita è condizionata da S_2 e S_4 .

In conclusione questa è la struttura che appare dall'esterno nelle coordinate z . S_1 è un sottosistema tutto raggiungibile, ma non osservabile; S_2 è un sottosistema caratterizzato da stati raggiungibili e osservabili; Il sottosistema S_3 non raggiungibile e non osservabile; infine, S_4 è un sottosistema non raggiungibile, ma osservabile.

Appare da questa scomposizione che bene manifesta la struttura interna dello

stato, che il legame forzato ingresso uscita è caratterizzato dal solo sottosistema S_2 .

Ciò può essere verificato direttamente con il calcolo. Infatti nelle coordinate z

$$W(t) = Ce^{At}B = C_2e^{A_{22}t}B_2$$

e questo per la struttura a blocchi delle matrici. Quindi la risposta impulsiva del sistema complessivo è la risposta del sottosistema S_2 che è un sistema tutto raggiungibile ed osservabile.

Si comprende con facilità, e non sarebbe difficile dimostrare, che la terna (A_{22}, B_2, C_2) , quella che caratterizza il sottosistema S_2 , ha le dimensioni più piccole tra tutte le terne di matrici che hanno risposta impulsiva, fissata e uguale a $W(t)$. Sfruttando i collegamenti che ci sono tra proprietà di raggiungibilità e osservabilità degli stati, ed eccitabilità e osservabilità dei modi, nonché le considerazioni fatte a proposito della realizzazione, il sottosistema S_2 estrae da una eventuale realizzazione una realizzazione minima.

1.3.a. Un esempio di applicazione

Si consideri il circuito a ponte alimentato da un generatore di corrente indicato in figura

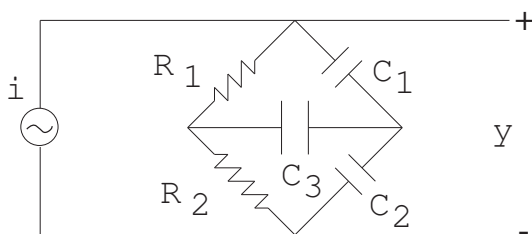


Figura 1.7

equazioni che regolano il circuito possono essere ottenute imponendo l'equilibrio alle correnti nei nodi A e B e nelle maglie 1 e 2

$$A \quad u = i_{R_1} + i_{C_1} \quad C_1 \dot{V}_{C_1} = -i_{R_1} + u$$

$$\begin{aligned}
1 \quad V_{C_1} &= V_{R_1} + V_{C_3} \Rightarrow V_{R_1} = V_{C_1} + V_{C_3} \\
i_{R_1} &= \frac{V_{R_1}}{R_1} = \frac{V_{C_1} + V_{C_3}}{R_1} \\
C_1 \dot{V}_{C_1} &= -\frac{V_{C_1}}{R_1} + \frac{V_{C_3}}{R_1} + u \\
\rightarrow \dot{V}_{C_1} &= -\frac{V_{C_1}}{C_1 R_1} + \frac{V_{C_3}}{C_1 R_1} + \frac{u}{C_1}
\end{aligned}$$

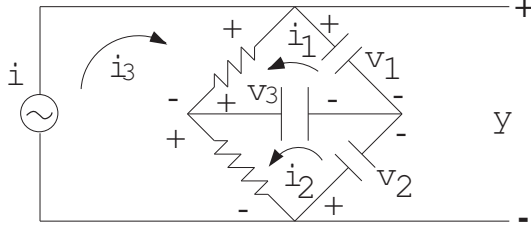


Figura 1.8

Assumendo come variabili di stato la tensione ai capi del condensatore C_1 , del condensatore C_2 e C_3 .

$$\begin{aligned}
B \quad i_{R_2} &= i_{C_2} + u \\
C_2 \dot{V}_{C_2} &= i_{R_2} - u \\
V_{C_3} &= V_{R_2} + V_{C_2} \Rightarrow \frac{V_{R_2}}{R_2} = \frac{V_{C_3} - V_{C_2}}{R_2} \\
C_2 \dot{V}_{C_2} &= -\frac{V_{C_2}}{R_2} + \frac{V_{C_3}}{R_2} - u \\
\rightarrow \dot{V}_{C_2} &= -\frac{V_{C_2}}{C_2 R_2} + \frac{V_{C_3}}{C_2 R_2} - \frac{u}{C_2}
\end{aligned}$$

Infine per x_3 si può scrivere l'equilibrio delle correnti al nodo C :

$$\begin{aligned}
C \quad i_{R_1} &= i_{C_3} + i_{R_2} \\
i_{C_3} &= -i_{R_2} + i_{R_1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-i_{R_2} + i_{R_1} &= C_3 \dot{V}_{C_3} \\
i_{R_1} &= \frac{V_{R_1}}{R_1} = \frac{V_{C_1} - V_{C_3}}{R_1} \\
i_{R_2} &= \frac{V_{C_3} - V_{C_2}}{R_2} \\
-i_{R_2} + i_{R_1} &= C_3 \dot{V}_{C_3} = \frac{V_{C_1}}{R_1} + \frac{V_{C_2}}{R_2} - \frac{V_{C_3}}{R_1} - \frac{V_{C_3}}{R_2} \\
\dot{V}_{C_3} &= \frac{V_{C_1}}{C_3 R_1} + \frac{V_{C_2}}{C_3 R_2} - \frac{V_{C_3}}{C_3 R_1} - \frac{V_{C_3}}{C_3 R_2} \\
\rightarrow \dot{V}_{C_3} &= -\frac{V_{C_1}}{C_3 R_1} + \frac{V_{C_2}}{C_3 R_2} - \frac{V_{C_3}}{C_3} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)
\end{aligned}$$

In conclusione si ottiene un sistema lineare, stazionario, a dimensione tre:

$$\begin{cases} V_{C_1} = -\frac{V_{C_1}}{C_1 R_1} + \frac{V_{C_3}}{C_1 R_1} + \frac{u}{C_1} \\ V_{C_2} = -\frac{V_{C_2}}{C_2 R_2} + \frac{V_{C_3}}{C_2 R_2} - \frac{u}{C_2} \\ V_{C_3} = \frac{V_{C_1}}{C_3 R_1} + \frac{V_{C_2}}{C_3 R_2} - \frac{V_{C_3}}{C_3} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \end{cases}$$

$$y = V_{C_1} - V_{C_2}$$

descritto, quindi dalle matrici

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{R_1 C_1} & 0 & \frac{1}{R_1 C_1} \\ 0 & -\frac{1}{R_2 C_2} & \frac{1}{R_2 C_2} \\ \frac{1}{R_1 C_3} & \frac{1}{R_2 C_3} & -\frac{1}{C_3} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} \frac{1}{C_1} \\ -\frac{1}{C_2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

La matrice di raggiungibilità risulta

$$R = Im \begin{pmatrix} \frac{1}{C_1} & -\frac{1}{R_1 C_1^2} & \cdots \\ -\frac{1}{C_2} & \frac{1}{R_2 C_2^2} & \cdots \\ 0 & \frac{1}{R_1 C_1 C_3} - \frac{1}{R_2 C_2 C_3} & \cdots \end{pmatrix}$$

e, se ed esempio, si assume

$$C_1 = C_2 \quad R_1 = R_2$$

si ottiene

$$R = Im \begin{pmatrix} \frac{1}{C_1} & -\frac{1}{R_1 C_1^2} & \vdots \\ -\frac{1}{C_2} & \frac{1}{R_2 C_2^2} & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

in cui la terza colonna, qui non riportata, è proporzionale alle precedenti.

Quindi

$$R = gen \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Allo stesso modo si può condurre lo studio rispetto all'inosservabilità

$$I = ker \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -\frac{1}{R_1 C_1} & \frac{1}{R_2 C_2} & \frac{1}{R_1 C_1} - \frac{1}{R_2 C_2} \end{pmatrix}$$

Se si assume anche che

$$R_1 C_1 = R_2 C_2$$

l'insieme degli stadi inosservabili coincide con il ker di C , quindi:

$$I = ker \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = gen \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Il calcolo dei quattro sottospazi $\chi_1, \chi_2, \chi_3, \chi_4$ dá:

$$\begin{cases} \chi_1 = \{0\} \\ \chi_2 = R \\ \chi_3 = I \\ \chi_4 = \{0\} \end{cases}$$

1.4. Le proprietà dello spazio di stato

1.4.a. Inosservabilità

Le stesse considerazioni possono essere ripetute per i sistemi a tempo discreto, con A^t al posto di e^{At} si hanno gli stessi risultati.

1.4.b. Raggiungibilità

Le stesse considerazioni possono essere ripetute, e risultano semplificate, per i sistemi a tempo discreto con A^t al posto di e^{At} . Fa eccezione quanto detto circa i legami tra controllabilità e raggiungibilità ed il tempo “necessario” a raggiungere uno stato. È molto facile comprendere per la struttura ricorsiva delle equazioni che l'insieme degli stati raggiungibili in un intervallo di tempo fissato, sia \bar{t} , è $\mathcal{R}(B \dots A^{\bar{t}-1}B)$, quindi uno stato raggiungibile può essere “ottenuto” (da $x_0 = 0$ a $t_0 = 0$) in al più n istanti di tempo.

Equivalenza tra controllabilità e raggiungibilità solo se A è invertibile. La raggiungibilità implica la controllabilità, ma non viceversa.

Studio della proprietà di raggiungibilità

Definizione: x_R è raggiungibile a partire da uno stato x_0 a t_0 se esiste un tempo \bar{t} e un ingresso $\bar{u}_{0(t_0, \bar{t})}$ tale che:

$$\varphi(\bar{t} - t_0, x_0, \bar{u}_{[t_0, \bar{t}]}) = x_R \quad \bar{t} < \infty$$

Assumeremo che

$$t_0 = 0 \quad x_0 = 0$$

quindi:

$$\varphi(\bar{t}, 0, \bar{u}_{[t_0, \bar{t}]}) = x_R$$

Per descrivere l'insieme degli stati raggiungibili si farà riferimento, per semplicità di trattazione, alla classe dei sistemi a tempo discreto. Per i sistemi a tempo continuo vale, infatti, lo stesso risultato.

Un primo risultato riguarda il calcolo dell'insieme degli stati raggiungibili. Tale insieme è un sottospazio dello spazio di stato e può essere facilmente calcolato a partire dalle matrici A e B .

Consideriamo il sistema a tempo discreto

$$\begin{aligned} x(t+1) &= Ax(t) + Bu(t) \\ x(1) &= Bu(0) \end{aligned} \quad x(0) = 0$$

In un passo, al tempo 1 si ha

$$x(1) = Bu(0) \Rightarrow R(1) = \text{Im} B$$

quindi può andare, variando $u(0)$, in tutti gli stati che stanno nell'immagine di B ; ancora

$$x(2) = ABu(0) + Bu(1)$$

e, al variare $u(0)$ e $u(1)$ in tutti i modi possibili si ottengono tutti gli stati che stanno nell'immagine di B e di AB , in sostanza:

$$\Rightarrow R(2) = \text{Im} \begin{pmatrix} \overset{n \times p}{B} & \vdots & \overset{n \times p}{AB} \end{pmatrix}$$

Se si continua con questo ragionamento ci si rende conto che

$$R(k) = \text{Im} (B \quad AB \quad \dots \quad A^{k-1}B)$$

In questa procedura non è necessario andare fino all'infinito, ad un certo punto ci si può fermare, questo in virtù di un teorema; il teorema di Cayley - Hamilton. In base a tale teorema ogni matrice A è annullante del proprio polinomio caratteristico

$$A \quad d(\lambda) = |\lambda I - A| \Rightarrow d(A) = \underline{0}$$

Cioè la matrice che si ottiene, quando nel polinomio caratteristico alla variabile λ si sostituisce una matrice A , è uguale alla matrice nulla.

La trattazione sinora condotta può essere ripetuta per i sistemi a tempo discreto con la sola avvertenza di sostituire A^t al posto di e^{At} ; i risultati non cambiano.

Le sole differenze riguardano la dipendenza dal tempo della raggiungibilità di uno stato e della corrispondente osservabilità dello stato iniziale così come il legame tra controllabilità e raggiungibilità.

Per quanto riguarda la raggiungibilità è molto facile comprendere per la struttura ricorsiva delle equazioni che l'insieme degli stati raggiungibili in un intervallo di tempo fissato, sia T , è $\mathcal{R}(B \ \cdots \ A^{T-1}B)$, quindi uno stato raggiungibile può essere “ottenuto” (da $x_0 = 0$ a $t_0 = 0$) in al più n istanti di tempo. Analoghe considerazioni possono essere fatte in merito all'osservabilità di uno stato iniziale a partire dalle osservazioni dell'uscita.

La raggiungibilità implica la controllabilità, ma non viceversa. Come esempio si consideri la coppia di matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

che caratterizzano un sistema certamente non tutto raggiungibile, ma controllabile. E' infatti evidente che l'ingresso $u(0) = x_1(0) + x_2(0)$ porta lo stato a zero in un solo istante di tempo. Anche in questo caso le due proprietà sono equivalenti se A è non singolare.

1.5. Struttura interna, intervento e osservazione

Sotto discretizzazione: possibilità di osservare in tempo finito ed assegnare a zero.

1.6. Sistemi interconnessi

per i sistemi a tempo continuo, e

$$S_i = K(i + 1)$$

per i sistemi a tempo discreto.

Come applicazione elementare si supponga di avere rilevato i campioni della risposta impulsiva di un sistema lineare a tempo discreto e siano, a partire da $t = 0$, $(0, 1, -1, -1, -1, \dots)$. A partire da tali dati possiamo scrivere la matrice di Hankel

$$H = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & & \end{pmatrix}$$

che ha, ovviamente, rango 2. Possiamo concludere, senza neanche costruire una realizzazione, che la dimensione minima di una sua realizzazione è pari a 2.

Nel caso dei sistemi a tempo continuo gli stessi risultati possono essere ottenuti partendo dalla $K(t)$ e dalle sue derivate in zero.

Questo risultato è molto utile negli studi di identificazione perché l'informazione sulla dimensione del sistema è spesso necessaria per la messa a punto di algoritmi efficaci di stima dei parametri a partire da dati ingresso - uscita.

La matrice di Hankel a partire da una realizzazione (A, B, C) di un sistema dinamico, può essere ottenuta andando a sostituire alla $K(t)$ l'espressione della risposta impulsiva, ottenendo per i coefficienti:

$$S_i \rightarrow CA^iB$$

sia nel caso a tempo continuo che discreto.

Lo stesso per i modelli.

Nyquist discreto e sotto discretizzazione