Concetti chiave:

- Possono esserci diverse Rappresentazioni con lo stato che descrivono lo stesso fenomeno dinamico, questo è dato dal fatto che non vi è unicità nella scelta dello stato.
  - Esempio:
  - $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$
  - $y(t) = Cx(t) + Du(t)$
    - $\exists T: |T| \neq 0: z = Tx$
    - A partire dalla vecchia scelta di coordinate possiamo utilizzare le combinazioni lineari per definire nuove variabili di stato, **cioè effettuare una trasformazione lineare di variabile di stato del tipo $z = Tx$ vuol dire scegliere una nuova base dello spazio di stato che è rappresentata da $\tilde{e}_1, .., \tilde{e}_n$ nelle coordinate di x**
      Cioè $T^{-1} = (\tilde{e}_1, .., \tilde{e}_n)$
      - $\dot{z}(t) = T\dot{x}(t) = TAx(t) + TBu(t) = TAT^{-1}z(t) + TBu(t)$
      - $y(t) = CT^{-1}z(t) + Du(t)$
      - È ancora un sistema dello stesso tipo con matrice dinamica TAT^{-1}, matrice di ingressi TB e matrice delle uscite CT^{-1}

- **Passaggio dal modello implicito e quello esplicito** consiste in un passaggio matematico e corrisponde al calcolo dell'evoluzione nello stato e in uscita
  - $x(t) = e^{A(t-to)}\, x_o + \int_{to}^{t} e^{A(t-\tau)}\, Bu(\tau)d\tau$
  - cioè $x(t) = \phi(t - to)\, x_o + H(t - \tau)u(\tau)d\tau$
  - $\dot{x}(t) = e^{A(t-to)}\, x_o + \int_{to}^{t} Ae^{A(t-\tau)}B\, u(\tau)d\tau + Bu(t)$
  - $sapendo\ che$ H(0)=B
  - $\dot{x}(t) = e^{A(t-to)}\, x_o + A\int_{to}^{t} H(t-\tau)\, u(\tau)d\tau + H(0)u(t)$
  - $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$
  - Stessa cosa con y(t)
  - $y(t) = Ce^{A(t-to)}\, x_o + \int_{to}^{t} Ce^{A(t-\tau)}\, B + D\delta(t-\tau))u(\tau)d\tau = Ce^{A(t-to)}\, x_o + \int_{to}^{t} Ce^{A(t-\tau)}\, Bu(\tau)d\tau + \int_{to}^{t} D\delta(t-\tau))u(\tau)d\tau = Cx(t) + Du(t)$

- La scomposizione in modi naturali:
  A deve essere una matrice diagonale affinché il calcolo di e^{At} risulti immediato
  A è diagonalizzabile se è simile ad una matrice diagonale, ovvero se esiste un T tale che $T^{-1}AT$ dia come risultato una matrice diagonale.

<u>Esiste una matrice T tale che TAT^{-1} risulti diagonale?</u>

$\Lambda = \boldsymbol{TAT^{-1}}$

$A = T^{-1}\, \Lambda\, T$

Per la definizione di esponenziale di matrice

$$e^{(T^{-1}\Lambda\, T)} = \sum_{k\geq 0} \frac{t^k}{k!}\, (T^{-1}\, \Lambda\, T)^{k}$$

dove $(T^{-1}\, \Lambda\, T)^{k} = T^{-1}\, \Lambda^{k} T$

quindi $e^{\mathrm{At}} = T^{-1} \left(\sum_{k\geq 0} \frac{t^k}{k} \Lambda^k \right) T = T^{-1} (e^{\Lambda t})\, T$

Ora devo considerare due casi:

1) A regolare

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \lambda_n & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 & \begin{pmatrix} \alpha_1 & \omega_1 \\ -\omega_1 & \alpha_1 \end{pmatrix} & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & \begin{pmatrix} \alpha_v & \omega_v \\ -\omega_v & \alpha_v \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$$e^{\begin{pmatrix} \alpha & \omega \\ -\omega & \alpha \end{pmatrix}} = e^{\alpha t} \begin{pmatrix} cos\omega t & sen\omega t \\ -sen\omega t & cos\omega t \end{pmatrix}$$

$$e^{\mathrm{At}} = \sum_{i=1}^{\mu} e^{\lambda_i t} u_i v_i + \sum_{k=1}^{v} e^{\alpha_k t} \left[cos\omega_k t(u_k a * v_k a + u_k b * v_k b) + sin\omega_k t(u_k a * v_k a - u_k b * v_k b) \right]$$

2) A non regolare

Si ha la forma di Jordan

N.B.

Se A è diagonalizzabile vuol dire che le seguenti condizioni sono sempre soddisfatte:

1. $Au = u\lambda$
2. $vA = \lambda v$

Spiegare perché la rappresentazione implicita di un sistema esprime una procedura di simulazione:

La rappresentazione implicita permette di realizzare simulazioni in tempo reale, quindi costruendo anche dei controllori che con un meccanismo di feedback sono in grado di intervenire sul sistema nel caso ci siano perturbazioni esterne perché la rappresentazione implicita soprattutto nel caso di un sistema a tempo discreto avendo $x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$ si vede come lo stato nell' instante k+1-esimo dipende dall'istante k-esimo e proprio perché vi è questa dipendenza dallo stato precedente tu hai modo di monitorare quello che avverrà in base a quello che è accaduto. A seconda dell'uscita che tu hai nell'istante k-esimo, quindi y(k), puoi controllare uscita nell'istante k+1

Questo non è possibile vederlo in una rappresentazione esplicita proprio perché non si vede la dipendenza tra lo stato successivo e il precedente, per questo è utile ricondursi ad una rappresentazione implicita da una esplicita attraverso il problema della realizzazione

Sistema a tempo discreto:

modello utilizzato per rappresentare algoritmi o sistemi a tempi continui a particolari condizioni.

In particolare un sistema a tempo continuo ad un dato sistema a tempo discreto è una sua rappresentazione quando viene applicato una segnale d' ingresso costante a tratti su intervalli di ampiezza fissa, e si è interessati a calcolare le evoluzioni dello stato e dell'uscita su istanti, detti istanti di campionamento, corrispondenti alla variazione dell'ingresso. Questo è chiamato problema della discretizzazione