Appunti sui modi naturali:

dal caso di autovalori reali a quello di autovalori complessi

per matrici A regolari

P. Di Giamberardino

Ottobre 2002

Versione preliminare

Caso di autovalori reali e distinti

Data una matrice quadrata A di dimensione nxn e definiti gli n autovalori λ_1, λ_2, ..., λ_n, si supponga che essi siano reali e distinti. Allora, è possibile determinare univocamente n autovettori u_1, u_2, ..., u_n, a componenti reali, linearmente indipendenti; essi costituiscono una possibile nuova base per lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$. Infatti, definendo la matrice di trasformazione T sulla base della posizione

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_n \end{pmatrix}$$

si ottiene

$$TAT^{-1} = \Lambda$$

dove

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

il che ci consente di scrivere

$$A = T^{-1}\Lambda T = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^T \\ v_2^T \\ \vdots \\ v_n^T \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i v_i^T \tag{1}$$

per la quale è facile calcolare

$$e^{At} = T^{-1}e^{\Lambda t}T = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^T \\ v_2^T \\ \vdots \\ v_n^T \end{pmatrix} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} e^{\lambda_i t} u_i v_i^T$$

Passando al calcolo dell'evoluzione libera a partire da uno stato iniziale x_0 in $t = 0$,

$$x_L(t) = \Phi(t)x_0 = e^{At}x_0$$

se si pone

$$x_0 = \sum_{k=1}^{n} c_k u_k$$

con

$$c_h = v_h^T x_0 \qquad h = 1, \ldots, n$$

come è facile verificare calcolando

$$v_h^T x_0 = v_h^T \sum_{k=1}^{n} c_k u_k$$

ricordando la relazione

$$v_h^T u_k = \delta_{h,k} = \begin{cases} 1 & \text{se } h = k \\ 0 & \text{se } h \neq k \end{cases}$$

si ottiene

$$x_L(t) = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \ldots & u_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^T \\ v_2^T \\ \vdots \\ v_n^T \end{pmatrix} x_0 =$$

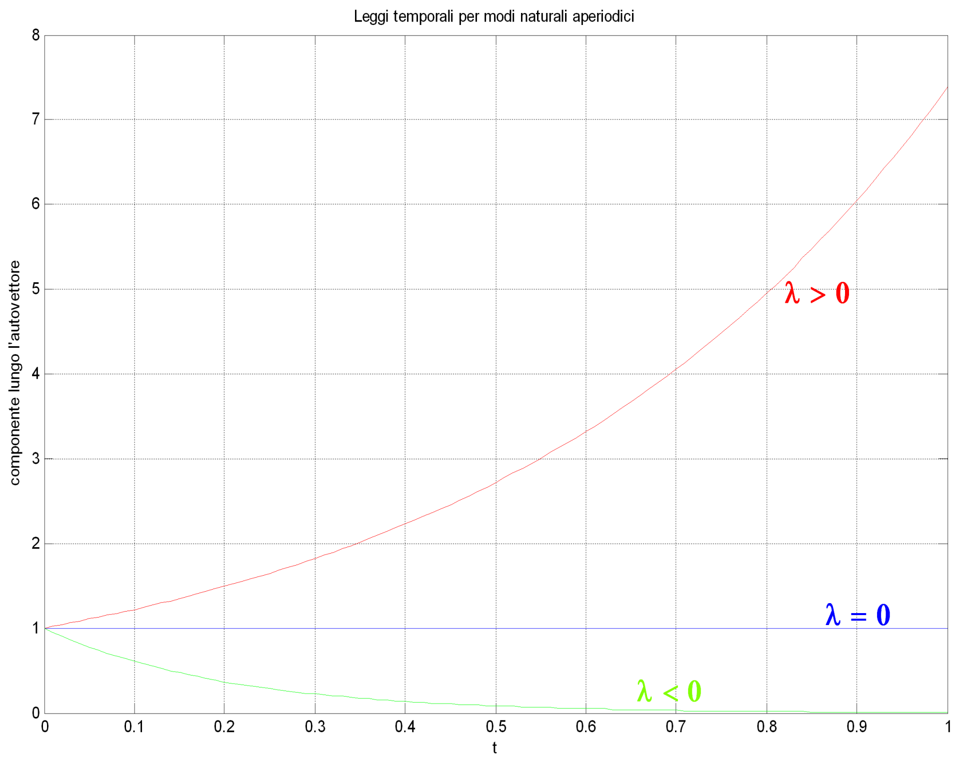
$$= \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \ldots & u_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \ldots & u_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 e^{\lambda_1 t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c_2 e^{\lambda_2 t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & c_n e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} c_i e^{\lambda_i t} u_i$$

L'evoluzione libera risulta quindi data dalla somma di termini del tipo

$$c e^{\lambda t} u$$

Tali termini prendono il nome di **modi naturali aperiodici**. Essi risultano costituiti da una informazione geometrica che definisce il sottospazio vettoriale unidimensionale di R^n, l'autovettore u, ed una legge di moto esponenziale $ce^{\lambda t}$, in cui c rappresenta il valore iniziale lungo l'autovettore associato e quindi dipende da x_0; tale legge risulta di tipo esponenziale, crescente se $\lambda > 0$, costante se $\lambda = 0$ e decrescente se $\lambda < 0$, come riportato nella seguente figura nel caso $c = 1$.



Leggi temporali per modi naturali aperiodici
componente lungo l'autovettore
t
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
2
3
4
5
6
7
8
λ > 0
λ = 0
λ < 0

Caso di autovalori distinti non tutti reali

Si supponga che tra gli n autovalori λ_1, λ_2, ..., λ_n associati ad una matrice quadrata A nxn ve ne siano almeno due complessi e coniugati[1]. In questo caso, mettendo in evidenza nella (1) il contributo di una di tali coppie in una posizione generica j e $j+1$, indicando con λ_j e λ_j^* gli autovalori, con u_j e u_j^* gli autovetori destri e con v_j^T e $(v_j^T)^*$ quelli sinistri, si ottiene

$$A = T^{-1}\Lambda T = \begin{pmatrix} \cdots & u_j & u_j^* & \cdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \lambda_j & 0\cdots & \\ \cdots & 0 & \lambda_j^*\cdots & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vdots \\ v_j^T \\ (v_j^T)^* \\ \vdots \end{pmatrix} = \tag{2a}$$

$$= \sum_{i=1}^{j-1} \lambda_i u_i v_i^T + \sum_{i=j+2}^{n} \lambda_i u_i v_i^T + \lambda_j u_j v_j^T + \lambda_j^* u_j^* (v_j^T)^* \tag{2b}$$

Sia dalla forma matriciale che dalla forma spettrale è facile convincersi che qualunque trasformazione si operi sui termini complessi evidenziati non modifica il contributo, ossia i termini, derivanti dagli altri $n-2$ contributi. L'obbiettivo che ci si propone è quello di trasformare i termini complessi in modo da ottenere solo termini reali, sapendo già che tale operazione farà perdere la struttura strettamente diagonale di Λ.

Il passo iniziale consiste nell'individuare una coppia di vettori, a coefficienti reali, che possano sostituire u_j e u_j^* e che descrivano il loro stesso sottospazio. Questo è assicurato se si opera attraverso combinazioni lineari di u_j e u_j^*. Come per i numeri complessi e coniugati, è noto che la loro somma è reale e corrisponde al doppio della parte reale e la loro differenza è immaginaria pura, pari al doppio della parte immaginaria. Quindi, posto $u_j = u_{j,a} + j u_{j,b}$, si ha

$$u_{j,a} = \frac{u_j + u_j^*}{2} \qquad u_{j,b} = \frac{u_j - u_j^*}{2j}$$

In forma matriciale questo si scrive

$$\begin{pmatrix} u_{j,a} & u_{j,b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_j & u_j^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2j} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2j} \end{pmatrix}$$

ovvero, invertendo la relazione

$$\begin{pmatrix} u_j & u_j^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{j,a} & u_{j,b} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2j} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2j} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} u_{j,a} & u_{j,b} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ j & -j \end{pmatrix}$$

[1] Si ricorda che per un noto teorema di analisi una equazione polinomiale a coefficienti reali, quale quella ottenuta da $det(A-\lambda I)=0$, ammette sempre n soluzioni, reali o complesse e coniugate

Quindi considerando in (2) $u_{j,a}$ e $u_{j,b}$ in luogo di u_j e u_j^*, la trasformazione operata comporta la seguente riscrittura per A

$$A = \begin{pmatrix} \cdots & u_{j,a} & u_{j,b} & \cdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & 1 & & \\ & & j & -j & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \lambda_j & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & \lambda_j^* & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vdots \\ v_j^T \\ (v_j^T)^* \\ \vdots \end{pmatrix} \tag{3}$$

Chiaramente passando all'espressione (3), la matrice di trasformazione T^{-1} risulta modificata, risultando ora

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} \cdots & u_{j,a} & u_{j,b} & \cdots \end{pmatrix}$$

Consequentenente deve essere modificata anche l'espressione per T, che deve ancora essere pari all'inversa di T^{-1}. Per ottenere la nuova espressione per T, la quale evidentemente risulterà modificata solo per la parte riguardante la coppia v_j^T e $(v_j^T)^*$, si può procedere come segue. Il punto di partenza è dato dalle relazioni

$$\begin{aligned} v_j^T\, u_j =& 1 \\ v_j^T\, u_j^* =& 0 \\ (v_j^T)^*\, u_j =& 0 \\ (v_j^T)^*\, u_j^* =& 1 \end{aligned} \tag{4}$$

verificate in virtù della T e T^{-1} in (2). Scomponendo u_j e v_j^T nelle parti reali ed immaginarie, ossia

$$u_j = u_{j,a} + j u_{j,b}$$
$$v_j^T = \tilde{v}_{j,a}^T + j \tilde{v}_{j,b}^T$$

e sostituendo nella prima di (4) si ottiene

$$\left(\tilde{v}_{j,a}^T + j\tilde{v}_{j,b}^T\right)(u_{j,a} + j u_{j,b}) = 1$$

che si scompone in

$$\begin{aligned} \tilde{v}_{j,a}^T u_{j,a} - \tilde{v}_{j,b}^T u_{j,b} =& 1 \\ \tilde{v}_{j,a}^T u_{j,b} + \tilde{v}_{j,b}^T u_{j,a} =& 0 \end{aligned} \tag{5}$$

mentre dalla seconda di (4) si ottiene

$$\left(\tilde{v}_{j,a}^T + j\tilde{v}_{j,b}^T\right)(u_{j,a} - j u_{j,b}) = 0$$

che si scompone in

$$\begin{aligned} \tilde{v}_{j,a}^T u_{j,a} + \tilde{v}_{j,b}^T u_{j,b} =& 0 \\ \tilde{v}_{j,a}^T u_{j,b} - \tilde{v}_{j,b}^T u_{j,a} =& 0 \end{aligned} \tag{6}$$

Dalla prima uguaglianza in (5) si ha

$$\tilde{v}_{j,a}^T u_{j,a} = \tilde{v}_{j,b}^T u_{j,b} + 1$$

che, sostituita nella prima in (6), fornisce

$$-2\tilde{v}_{j,b}^T u_{j,b} = 1$$

Ricavando invece, dalla prima di (5),

$$\tilde{v}_{j,b}^T u_{j,b} = \tilde{v}_{j,a}^T u_{j,a} - 1$$

e sostituendo nella prima di (6), si ottiene

$$2\tilde{v}_{j,a}^T u_{j,a} = 1$$

Successivamente, dalla seconda in (5) si può ricavare

$$\tilde{v}_{j,a}^T u_{j,b} = -\tilde{v}_{j,b}^T u_{j,a}$$

che, sostituita nella seconda di (6) fornisce

$$\tilde{v}_{j,b}^T u_{j,a} = 0$$

oppure

$$\tilde{v}_{j,a}^T u_{j,b} = 0$$

Risulta quindi verificata la relazione

$$\begin{pmatrix} \vdots \\ 2\tilde{v}_{j,a}^T \\ -2\tilde{v}_{j,b}^T \\ \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cdots & u_{j,a} & u_{j,b} & \cdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \cdots & 0 \\ \cdots & 1 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & 1 & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Allora, indicando

$$\begin{aligned} v_{j,a}^T &= 2\tilde{v}_{j,a}^T \\ v_{j,b}^T &= -2\tilde{v}_{j,b}^T \end{aligned}$$

si può scrivere

$$T = \begin{pmatrix} \cdots & u_{j,a} & u_{j,b} & \cdots \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \vdots \\ v_{j,a}^T \\ v_{j,b}^T \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Rimane ora da determinare la relazione che sussiste tra

$$\begin{pmatrix} \vdots \\ v_j^T \\ (v_j^T)^* \\ \vdots \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad \begin{pmatrix} \vdots \\ v_{j,a}^T \\ v_{j,b}^T \\ \vdots \end{pmatrix}$$

affinché possa essere utilizzata per riscrivere nella forma desiderata la (2.a). Si ha quindi

$$\begin{pmatrix} \vdots \\ v_{j,a}^T \\ v_{j,b}^T \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vdots \\ 2\tilde{v}_{j,a}^T \\ -2\tilde{v}_{j,b}^T \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & 1 & & \\ & & j & -j & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vdots \\ v_j^T \\ (v_j^T)^* \\ \vdots \end{pmatrix}$$

dalla quale

$$\begin{pmatrix} \vdots \\ v_j^T \\ (v_j^T)^* \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \frac{1}{2} & \frac{1}{2j} & & \\ & & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2j} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vdots \\ v_{j,a}^T \\ v_{j,b}^T \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Sostituendo quest'ultima relazione in (3) si ottiene

$$\begin{pmatrix} \cdots & u_{j,a} & u_{j,b} & \cdots \end{pmatrix} \Lambda \begin{pmatrix} \vdots \\ v_{j,a}^T \\ v_{j,b}^T \\ \vdots \end{pmatrix}$$

dove

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & 1 & & \\ & & j & -j & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_j & 0 & & \\ & & 0 & \lambda_j^* & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \frac{1}{2} & \frac{1}{2j} & & \\ & & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2j} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \alpha_j & \omega_j & & \\ & & -\omega_j & \alpha_j & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

avendo indicato

$$\lambda_j = \alpha_j + j\omega_j$$

Per il calcolo dell'esponenziale, necessario per determinare l'evoluzione libera, vista la diagonalità della matrice Λ è sufficiente mostrare la forma che si ottiene per

$$e^{\begin{pmatrix} \alpha & \omega \\ -\omega & \alpha \end{pmatrix} t}$$

Possiamo scrivere allora

$$e^{\begin{pmatrix} \alpha & \omega \\ -\omega & \alpha \end{pmatrix} t} = e^{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ j & -j \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha + j\omega & 0 \\ 0 & \alpha - j\omega \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2j} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2j} \end{pmatrix} t} =$$

$$= e^{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ j & -j \end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} + j\begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & -\omega \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2j} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2j} \end{pmatrix} t} =$$

$$= e^{\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ j & -j \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2j} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2j} \end{pmatrix} + j\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ j & -j \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & -\omega \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2j} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2j} \end{pmatrix}\right) t} =$$

$$= e^{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ j & -j \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2j} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2j} \end{pmatrix} t} \, e^{j\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ j & -j \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & -\omega \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2j} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2j} \end{pmatrix} t} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ j & -j \end{pmatrix} e^{\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} t} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2j} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2j} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ j & -j \end{pmatrix} e^{\begin{pmatrix} j\omega & 0 \\ 0 & -j\omega \end{pmatrix} t} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2j} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2j} \end{pmatrix} =$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ j & -j \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{\alpha t} & 0 \\ 0 & e^{\alpha t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2j} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2j} \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} e^{\alpha t} & 0 \\ 0 & e^{\alpha t} \end{pmatrix}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ j & -j \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{j\omega t} & 0 \\ 0 & e^{-j\omega t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2j} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2j} \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} \frac{e^{j\omega t}+e^{-j\omega t}}{2} & \frac{e^{j\omega t}-e^{-j\omega t}}{2j} \\ -\frac{e^{j\omega t}-e^{-j\omega t}}{2j} & \frac{e^{j\omega t}+e^{-j\omega t}}{2} \end{pmatrix}} =$$

che, per le ben note formule di Eulero

$$\cos\phi = \frac{e^{j\phi} + e^{-j\phi}}{2} \qquad \sin\phi = \frac{e^{j\phi} - e^{-j\phi}}{2j}$$

diviene

$$\begin{pmatrix} e^{\alpha t} & 0 \\ 0 & e^{\alpha t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\omega t & \sin\omega t \\ -\sin\omega t & \cos\omega t \end{pmatrix} = e^{\alpha t}\begin{pmatrix} \cos\omega t & \sin\omega t \\ -\sin\omega t & \cos\omega t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\alpha t}\cos\omega t & e^{\alpha t}\sin\omega t \\ -e^{\alpha t}\sin\omega t & e^{\alpha t}\cos\omega t \end{pmatrix}$$

In definitiva otteniamo

$$e^{At} = \begin{pmatrix} u_1 & \cdots & u_{j,a} & u_{j,b} & \cdots & u_n \end{pmatrix} e^{\Lambda t} \begin{pmatrix} v_1^T \\ \vdots \\ v_{j,a}^T \\ v_{j,b}^T \\ \vdots \\ v_n^T \end{pmatrix}$$

con

$$e^{\Lambda t} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & e^{\alpha_j t}\cos\omega_j t & e^{\alpha_j t}\sin\omega_j t & & \\ & & -e^{\alpha_j t}\sin\omega_j t & e^{\alpha_j t}\cos\omega_j t & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}$$

Se si pone ora, analogamente a quanto fatto nel caso di autovalori reali,

$$c_{j,a} = v_{j,a}^T x_0 \qquad c_{j,b} = v_{j,b}^T x_0$$

si ottiene

$$x_L(t) = e^{At} x_0 =$$

$$= \begin{pmatrix} u_1 & \cdots & u_{j,a} & u_{j,b} & \cdots & u_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & e^{\alpha_j t}\cos\omega_j t & e^{\alpha_j t}\sin\omega_j t & & \\ & & -e^{\alpha_j t}\sin\omega_j t & e^{\alpha_j t}\cos\omega_j t & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_{j,a} \\ c_{j,b} \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

Isolando il contributo della coppia complessa e coniugata si ha il termine

$$\begin{pmatrix} u_{j,a} & u_{j,b} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{\alpha_j t}\cos\omega_j t & e^{\alpha_j t}\sin\omega_j t \\ -e^{\alpha_j t}\sin\omega_j t & e^{\alpha_j t}\cos\omega_j t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{j,a} \\ c_{j,b} \end{pmatrix} =$$

$$= e^{\alpha_j t} \begin{pmatrix} u_{j,a} & u_{j,b} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\omega_j t & sin\omega_j t \\ -\sin\omega_j t & \cos\omega_j t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{j,a} \\ c_{j,b} \end{pmatrix}$$

dal quale, sviluppando i calcoli, si ottiene

$$e^{\alpha_j t} \begin{pmatrix} u_{j,a} & u_{j,b} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{j,a}\cos\omega_j t + c_{j,b}\sin\omega_j t \\ -c_{j,a}\sin\omega_j t + c_{j,b}\cos\omega_j t \end{pmatrix}$$

Ponendo

$$m_j = \sqrt{c_{j,a}^2 + c_{j,b}^2}$$

e

$$\sin\varphi_j = \frac{c_{j,a}}{\sqrt{c_{j,a}^2 + c_{j,b}^2}} = \frac{c_{j,a}}{m_j} \qquad \cos\varphi_j = \frac{c_{j,b}}{\sqrt{c_{j,a}^2 + c_{j,b}^2}} = \frac{c_{j,a}}{m_j}$$

si può scrivere

$$m_j e^{\alpha_j t} \begin{pmatrix} u_{j,a} & u_{j,b} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{c_{j,a}}{m_j}\cos\omega_j t + \frac{c_{j,b}}{m_j}\sin\omega_j t \\ -\frac{c_{j,a}}{m_j}\sin\omega_j t + \frac{c_{j,b}}{m_j}\cos\omega_j t \end{pmatrix} =$$

$$= m_j e^{\alpha_j t} \begin{pmatrix} u_{j,a} & u_{j,b} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin\varphi_j \cos\omega_j t + \cos\varphi_j \sin\omega_j t \\ -\sin\varphi_j \sin\omega_j t + \cos\varphi_j \cos\omega_j t \end{pmatrix} = m_j e^{\alpha_j t} \begin{pmatrix} u_{j,a} & u_{j,b} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin(\omega_j t + \varphi_j) \\ \cos(\omega_j t + \varphi_j) \end{pmatrix}$$

ed eseguendo il prodotto si ottiene

$$m_j e^{\alpha_j t} \left(\sin(\omega_j t + \varphi_j)\, u_{j,a} + \cos(\omega_j t + \varphi_j)\, u_{j,b}\right)$$

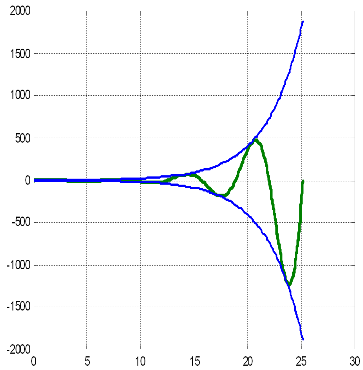
Dalla espressione ottenuta si evince che associato ad una coppia di autovalori complessi e coniugati vi è un modo naturale che evolve nel sottospazio bidimensionale generato dalla coppia di vettori $u_{j,a}$ e $u_{j,b}$ con legge di moto

$$m_j e^{\alpha_j t} \sin(\omega_j t + \varphi_j)$$

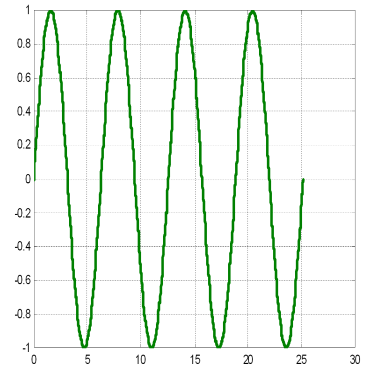
lungo il primo e

$$m_j e^{\alpha_j t} \cos(\omega_j t + \varphi_j)$$

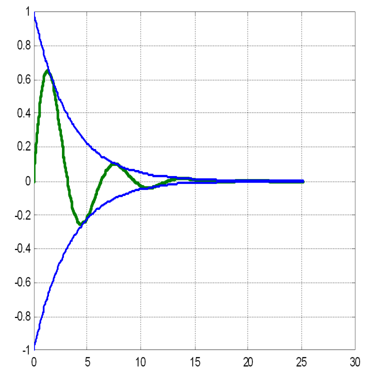
lungo il secondo. Il coefficiente m_j e la fase φ_j dipendono dallo stato iniziale, essendo $m_j \sin\varphi_j$ $(= c_{j,a})$ la componente di x_0 lungo $u_{j,a}$ e $m_j \cos\varphi_j$ $(= c_{j,b})$ quella lungo $u_{j,b}$. Le leggi temporali associate, del tipo $e^{\alpha_j t}\sin\omega_j t$ e $e^{\alpha_j t}\cos\omega_j t$, risultano essere, singolarmente, delle sinusiodi/cosinusoidi di pulsazione ω_j, con ampiezza crescente esponenzialmente se $\alpha_j > 0$, ampiezza costante se $\alpha_j = 0$ ed ampiezza decrescente esponenzialmente se $\alpha_j < 0$.



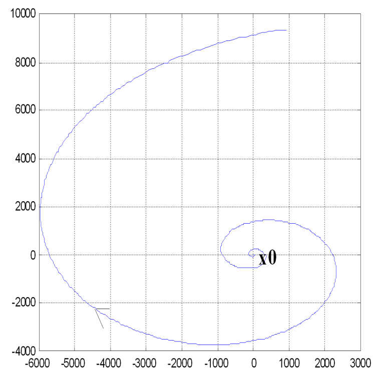
Legge temporale sinusiodale/cosinusoidale per $\alpha > 0$



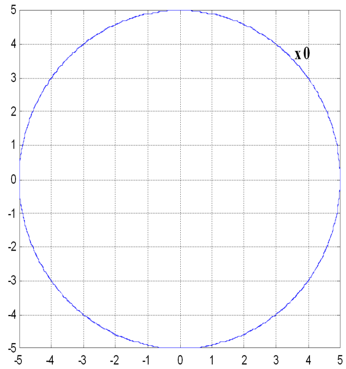
Legge temporale sinusiodale/cosinusoidale per $\alpha = 0$



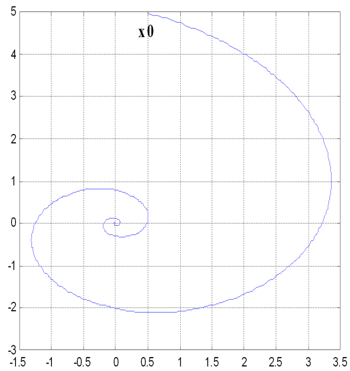
Legge temporale sinusiodale/cosinusoidale per $\alpha < 0$



Legge di moto (complessiva) per $\alpha > 0$



Legge di moto (complessiva) per $\alpha = 0$



Legge di moto (complessiva) per $\alpha < 0$

Per evidenti ragioni dovute alla forma della evoluzione temporale, il modo naturale associato ad una coppia di autovalori complessi e coniugati prende il nome di **modo naturale pseudoperiodico**.