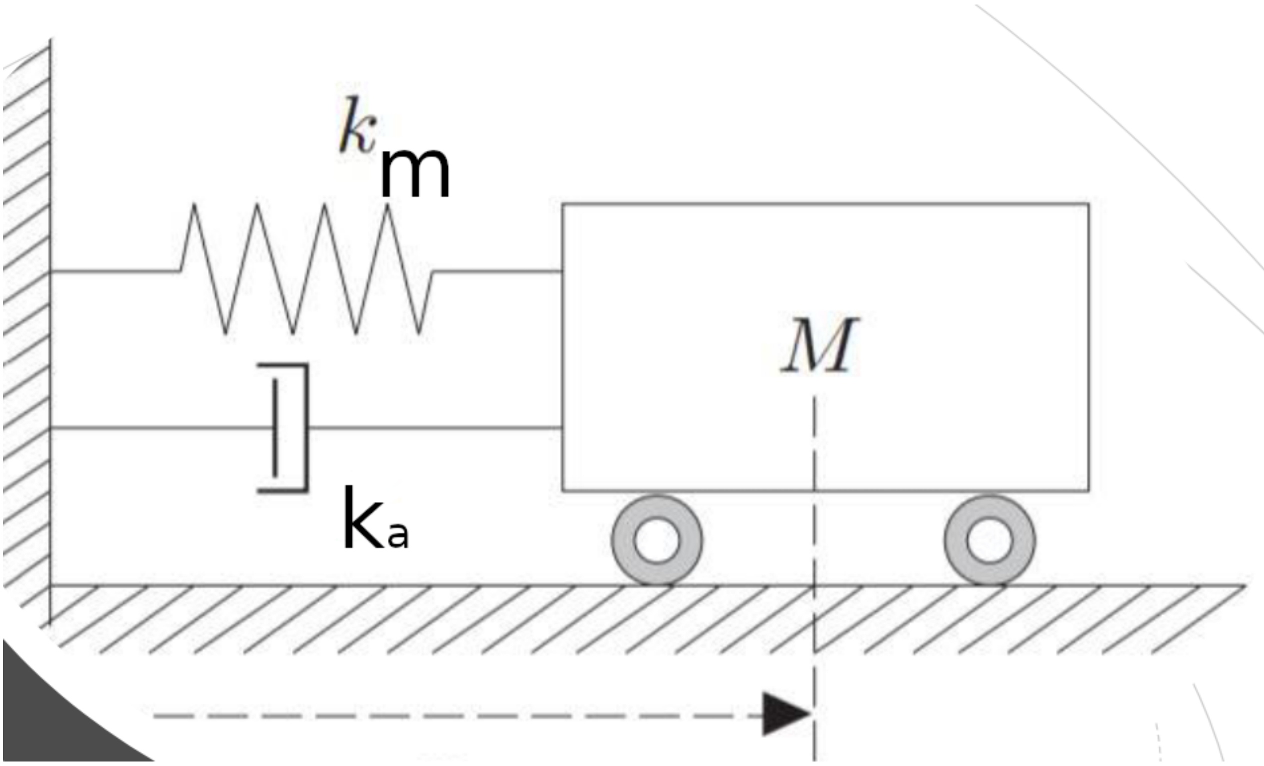
Esercizi

Miek

Contents

1 Esercizi



1.1 Esercizio 1

Questo carretto ha $K_m = 1, K_a = 2, m = 1, F = 1$.

L'equazione di stato è $m\ddot{p}(t) = F(t) - K_m p(t) - K_a \dot{p}(t)$

Decidiamo che l'input è la forza : $u(t) = F(t)$, l'uscita è la velocità : $y(t) = \dot{p}(t)$e lo stato è un vettore di altezza 2 con $x_1(t) = p(t)$ e $x_2 = \dot{p}(t)$Quindi in forma matriciale mi viene :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{Km}{m} & -\frac{Ka}{m} \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{Km}{m} & -\frac{Ka}{m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1.0 & -2.0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1.0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ora andiamo a vedere in Laplace:

$$\Phi(s) = (sI - A)^{-1}$$

$$\Phi(s) = \frac{\begin{bmatrix} 1.0s + 2.0 & 1 \\ -1 & 1.0s \end{bmatrix}}{s^2 + 2.0s + 1.0}$$

$$H(s) = \Phi(s)B = \frac{\begin{bmatrix} 1.0 \\ 1.0s \end{bmatrix}}{s^2 + 2.0s + 1.0}$$

$$\Psi(s) = C\Phi(s) = \frac{\begin{bmatrix} -1 & 1.0s \end{bmatrix}}{s^2 + 2.0s + 1.0}$$

$$W(s) = C\Phi(s)B = \frac{\begin{bmatrix} 1.0s \end{bmatrix}}{s^2 + 2.0s + 1.0}$$

Facciamo che lo stato iniziale è $x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, l'ingresso è $u(s) = \frac{1}{s}$

Le risposte: La risposta libera è

$$y_L = \Psi(s)x_0 = \frac{\begin{bmatrix} -1 & 1.0s \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}{s^2 + 2.0s + 1.0} = \frac{\begin{bmatrix} -1 \end{bmatrix}}{s^2 + 2.0s + 1.0}$$

La risposta Forzata è

$$y_F = W(s)u(s) = \frac{\begin{bmatrix} 1.0s \end{bmatrix}}{s^2 + 2.0s + 1.0} * \frac{1}{s}$$

E quindi la risposta in totale è

$$y = y_L + y_F = \begin{bmatrix} -\frac{1}{s^2+2.0s+1.0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1.0}{s^2+2.0s+1.0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

Che antitrasformando mi diventa

$$\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

1.2 Esercizio 2

Questo carretto ha $K_m = 1, K_a = 2, m = 1, F = 1$.

L'equazione di stato è $m\ddot{p}(t) = F(t) - K_m p(t) - K_a \dot{p}(t)$

Decidiamo che l'input è la forza : $u(t) = F(t)$, l'uscita è la velocità : $y(t) = \dot{p}(t)$e lo stato è un vettore di altezza 2 con $x_1(t) = p(t)$ e $x_2 = \dot{p}(t)$Quindi in forma matriciale mi viene :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{Km}{m} & -\frac{Ka}{m} \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{Km}{m} & -\frac{Ka}{m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1.0 & -2.0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1.0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ora andiamo a vedere in Laplace:

$$\Phi(s) = (sI - A)^{-1}$$

$$\Phi(s) = \frac{\begin{bmatrix} 1.0s + 2.0 & 1 \\ -1 & 1.0s \end{bmatrix}}{s^2 + 2.0s + 1.0}$$

$$H(s) = \Phi(s)B = \frac{\begin{bmatrix} 1.0 \\ 1.0s \end{bmatrix}}{s^2 + 2.0s + 1.0}$$

$$\Psi(s) = C\Phi(s) = \frac{\begin{bmatrix}-1 & 1.0s\end{bmatrix}}{s^2 + 2.0s + 1.0}$$

$$W(s) = C\Phi(s)B = \frac{\begin{bmatrix}1.0s\end{bmatrix}}{s^2 + 2.0s + 1.0}$$

Facciamo che lo stato iniziale è $x_0 = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$, l'ingresso è $u(s) = \frac{1}{s}$

Le risposte: La risposta libera è

$$y_L = \Psi(s)x_0 = \frac{\begin{bmatrix}-1 & 1.0s\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}}{s^2 + 2.0s + 1.0} = \frac{\begin{bmatrix}1.0s\end{bmatrix}}{s^2 + 2.0s + 1.0}$$

La risposta Forzata è

$$y_F = W(s)u(s) = \frac{\begin{bmatrix}1.0s\end{bmatrix}}{s^2 + 2.0s + 1.0} * \frac{1}{s}$$

E quindi la risposta in totale è

$$y = y_L + y_F = \begin{bmatrix}\frac{1.0s}{s^2+2.0s+1.0}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\frac{1.0}{s^2+2.0s+1.0}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{1.0}{s+1}\end{bmatrix}$$

Che antitrasformando mi diventa

$$\begin{bmatrix}1.0e^{-t}\theta\left(t\right)\end{bmatrix}$$

1.3 Esercizio 3

Questo carretto ha $K_m = 1, K_a = 1, m = 2, F = 2$.

L'equazione di stato è $m\ddot{p}(t) = F(t) - K_m p(t) - K_a \dot{p}(t)$

Decidiamo che l'input è la forza : $u(t) = F(t)$, l'uscita è la velocità : $y(t) = \dot{p}(t)$e lo stato è un vettore di altezza 2 con $x_1(t) = p(t)$ e $x_2 = \dot{p}(t)$Quindi in forma matriciale mi viene :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix}0 & 1\\ -\frac{Km}{m} & -\frac{Ka}{m}\end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix}0\\ \frac{1}{m}\end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix} x(t) \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix}0 & 1\\ -\frac{Km}{m} & -\frac{Ka}{m}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ -0.5 & -0.5\end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix}0\\ \frac{1}{m}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ 0.5\end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}$$

Ora andiamo a vedere in Laplace:

$$\Phi(s) = (sI - A)^{-1}$$

$$\Phi(s) = \frac{\begin{bmatrix}1.0s + 0.5 & 1\\ -0.5 & 1.0s\end{bmatrix}}{s^2 + 0.5s + 0.5}$$

$$H(s) = \Phi(s)B = \frac{\begin{bmatrix}0.5\\ 0.5s\end{bmatrix}}{s^2 + 0.5s + 0.5}$$

$$\Psi(s) = C\Phi(s) = \frac{\begin{bmatrix}-0.5 & 1.0s\end{bmatrix}}{s^2 + 0.5s + 0.5}$$

$$W(s) = C\Phi(s)B = \frac{\begin{bmatrix}0.5s\end{bmatrix}}{s^2 + 0.5s + 0.5}$$

Facciamo che lo stato iniziale è $x_0 = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$, l'ingresso è $u(s) = \frac{1}{s}$

Le risposte: La risposta libera è

$$y_L = \Psi(s)x_0 = \frac{\begin{bmatrix}-0.5 & 1.0s\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}}{s^2+0.5s+0.5} = \frac{\begin{bmatrix}1.0s-0.5\end{bmatrix}}{s^2+0.5s+0.5}$$

La risposta Forzata è

$$y_F = W(s)u(s) = \frac{\begin{bmatrix}0.5s\end{bmatrix}}{s^2+0.5s+0.5} * \frac{1}{s}$$

E quindi la risposta in totale è

$$y = y_L + y_F = \left[\frac{1.0s-0.5}{s^2+0.5s+0.5}\right] + \left[\frac{0.5}{s^2+0.5s+0.5}\right] = \left[\frac{1.0s}{s^2+0.5s+0.5}\right]$$

Che antitrasformando mi diventa

$\left[1.0\left(-0.377964473009227\sin\left(0.661437827766148t\right)+1.0\cos\left(0.661437827766148t\right)\right)e^{-0.25t}\theta\left(t\right)\right]$

1.4 Esercizio 4

Questo carretto ha $K_m = 1, K_a = 1, m = 1, F = 1$.

L'equazione di stato è $m\ddot{p}(t) = F(t) - K_m p(t) - K_a\dot{p}(t)$

Decidiamo che l'input è la forza : $u(t) = F(t)$, l'uscita è la velocità : $y(t) = \dot{p}(t)$e lo stato è un vettore di altezza 2 con $x_1(t) = p(t)$ e $x_2 = \dot{p}(t)$Quindi in forma matriciale mi viene :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix}0 & 1\\ -\frac{Km}{m} & -\frac{Ka}{m}\end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix}0\\ \frac{1}{m}\end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix} x(t) \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix}0 & 1\\ -\frac{Km}{m} & -\frac{Ka}{m}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ -1.0 & -1.0\end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix}0\\ \frac{1}{m}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ 1.0\end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}$$

Ora andiamo a vedere in Laplace:

$$\Phi(s) = (sI - A)^{-1}$$

$$\Phi(s) = \frac{\begin{bmatrix}1.0s+1.0 & 1\\ -1 & 1.0s\end{bmatrix}}{s^2+1.0s+1.0}$$

$$H(s) = \Phi(s)B = \frac{\begin{bmatrix}1.0\\ 1.0s\end{bmatrix}}{s^2+1.0s+1.0}$$

$$\Psi(s) = C\Phi(s) = \frac{\begin{bmatrix}-1 & 1.0s\end{bmatrix}}{s^2+1.0s+1.0}$$

$$W(s) = C\Phi(s)B = \frac{\begin{bmatrix}1.0s\end{bmatrix}}{s^2+1.0s+1.0}$$

Facciamo che lo stato iniziale è $x_0 = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$, l'ingresso è $u(s) = \frac{1}{s}$

Le risposte: La risposta libera è

$$y_L = \Psi(s)x_0 = \frac{\begin{bmatrix}-1 & 1.0s\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}}{s^2+1.0s+1.0} = \frac{\begin{bmatrix}1.0s-1\end{bmatrix}}{s^2+1.0s+1.0}$$

La risposta Forzata è

$$y_F = W(s)u(s) = \frac{\begin{bmatrix}1.0s\end{bmatrix}}{s^2+1.0s+1.0} * \frac{1}{s}$$

E quindi la risposta in totale è

$$y = y_L + y_F = \left[\frac{1.0s-1}{s^2+1.0s+1.0}\right] + \left[\frac{1.0}{s^2+1.0s+1.0}\right] = \left[\frac{1.0s}{s^2+s+1}\right]$$

Che antitrasformando mi diventa

$$\left[-0.333333333333333\sqrt{3}\left(\sin\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right)-\sqrt{3}\cos\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right)\right)e^{-\frac{t}{2}}\theta\left(t\right)\right]$$