1. Analisi delle rappresentazioni lineari stazionarie nel dominio del tempo

Vengono presentati in questo capitolo gli aspetti salienti dell'analisi dei sistemi lineari stazionari nel dominio del tempo. Il calcolo delle evoluzioni nello stato e in uscita mettono in luce il ruolo svolto dall'esponenziale di matrice richiamto in appendice. Su tale base si procede all'analisi della struttura delle evoluzioni. Ciò si concretizza nella cosiddetta analisi dei modi naturali.

1.1. Rappresentazioni implicite ed esplicite

Si assumerà come punto di partenza la rappresentazione con lo stato

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad x(t_0) = x_0 \in R^n \quad (3.1.a)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \qquad (3.1.b)$$

Il **modello implicito** ora introdotto suggerisce immediatamente uno schema fisico mediante il quale realizzare il sistema impiegando dispositivi che fanno la somma di funzioni del tempo, la moltiplicazione per costanti e l'integrale. Lo schema, riportato in Figura 3.1 comprende blocchi, A, B, C, D, costituiti da moltiplicatori per costanti, n operatori di integrazione e sommatori, mette in luce la struttura possibile del legame ingresso uscita; vi è una parte dinamica, di tipo integrativo, che è propria della parte puramente dinamica ed una parte istantanea.

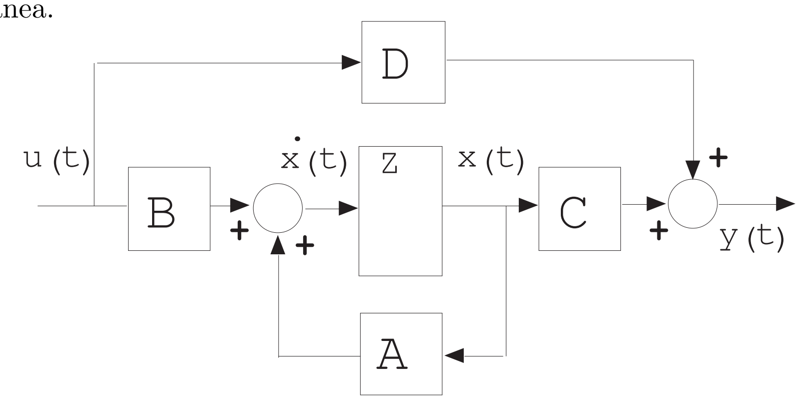

Figura 1.1

Verificheremo ora che le evoluzioni nel tempo di $x(t)$ e $y(t)$, associate ad un fissato stato iniziale x_0 al tempo t_0 ed un ingresso $u(\cdot)$ definito da t_0 in poi, sono descritte da un modello, detto **modello esplicito**, che ha la struttura seguente

$$x(t) = \Phi(t-t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^{t} H(t-\tau)u(\tau)d\tau \quad (3.2.a)$$

$$y(t) = \Psi(t-t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^{t} W(t-\tau)u(\tau)d\tau \quad (3.2.b)$$

dove le matrici (Φ, H, Ψ e W) assumono le espressioni calcolate di seguito. Definiamo, a tale proposito, la seguente funzione di matrice,

$$I + At + A^2\frac{t}{2} + ... = \sum_{0}^{\inf} \frac{A^k t^k}{k!} := e^{At} \quad (3.3)$$

Derivando la serie termine a termine, è facile verificare che si ottiene

$$\frac{d}{dt}e^{At} = A(I + At + A^2\frac{t^2}{2} + \cdots) = Ae^{At}$$

E da ciò segue immediatamente che

$$x(t) = e^{At}x_0$$

è soluzione di

$$\dot{x(t)} = Ax(t) \qquad x(0) = x_0$$

Tale soluzione è, come noto, unica e globalmente definita nel caso lineare allo studio. Risulta, dunque provato che Φ nella (3.2.a) assume l'espressione

$$\Phi(t) = e^{At}$$

Posto, inoltre,

$$H(t) = \Phi(t)B = e^{At}B$$

$$\Psi(t) = C\Phi(t) = Ce^{At}$$

$$W(t) = C\Phi(t)B + D\delta(t) = Ce^{At}B + D\delta(t)$$

è immediato verificare che le (3.2) rappresentano le soluzioni delle (3.1). Infatti, derivando le (3.2), per il teorema di derivazione sotto il segno di integrale, si ottiene

$$\dot{x(t)} = A\Phi(t - t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^{t} AH(t - \tau)u(\tau)d\tau + H(0)u(t)$$

Ponendo A in evidenza a sinistra tra i primi due addendi e ricordando che, in base alla definizione di $H(t)$, $B := H(0)$, si ottiene

$$\dot{x(t)} = Ax(t) + Bu(t)$$

Gli stessi calcoli possono essere ripetuti per la (3.2.b). Si ottiene

$$y(t) = Ce^{A(t-t_0)}x(t_0) + \int_{t_0}^{t} (Ce^{At}B + D\delta(t-\tau))u(\tau)d\tau$$

$$= C(e^{A(t-t_0)}x(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{At}Bu(\tau)d\tau) + \int_{t_0}^{t} D\delta(t-\tau)u(\tau)d\tau = Cx(t) + Du(t)$$

dove si è tenuto conto della proprietà dell'impulso unitario δ: l'integrale di una funzione moltiplicata per δ, interno all'intervallo di integrazione, è pari al valore della funzione nell'istante in cui è centrato l'impulso (valore nullo dell'argomento).

Le precedenti espressioni mettono in evidenza alcuni fatti importanti:

- le risposte nello stato e in uscita sono separate in *evoluzione libera*, dipendente solo dallo stato iniziale x_0 ma non dall'ingresso ($u = 0$), ed *evoluzione forzata*, dipendente solo dall'ingresso con stato iniziale nullo;

- H e W, matrici delle risposte impulsive nello stato e in uscita, rispettivamente, hanno colonne che possono essere interpretate come risposte forzate ad ingressi impulsivi;

- per le risposte forzate vale il *principio di sovrapposizione degli effetti*: la risposta forzata ad una fissata combinazione lineare di ingressi è pari alla stessa combinazione lineare delle risposte ai singoli ingressi;

- il comportamento forzato ingresso uscita è descritto dalla W, *risposta impulsiva* (matrice delle risposte impulsive); per tale motivo si usa dire che la W è un modello del comportamento forzato ingresso uscita;

- nella terminologia della Teoria dei Sistemi il modello (3.1) è detto implicito o differenziale, il corrispondente modello (3.2) è detto esplicito;

- nel calcolo del modello esplicito un ruolo centrale è svolto dall'esponenziale della matrice dinamica.

Il passaggio dal modello implicito al modello esplicito, affrontato in questo capitolo, corrisponde al calcolo delle evoluzioni nello stato e in uscita. E' opportuno osservare sin da ora che il passaggio inverso, che nella pratica si presenta come la ricostruzione di una rappresentazione con lo stato (A, B, C, D)

a partire da un modello del comportamento forzato, è, anch'esso, un problema di rilievo per le applicazioni. Infatti, come già osservato, ad una rappresentazione con lo stato corrisponde l'esistenza di uno schema di realizzazione (o simulazione). La ricostruzione di una rappresentazione implicita a partire da un modello del comportamento forzato, è detto **problema della realizzazione** in quanto, una volta ottenuta la rappresentazione differenziale, lo schema citato consente sia una realizzazione fisica mediante i componenti indicati sia l'implementazione mediante un sistema di calcolo per la simulazione del sistema.

1.2. La matrice di transizione nello stato

Nel calcolo della funzione esponenziale di matrice giova fare riferimento a trasformazioni di coordinate lineari nello spazio di stato. Come è noto nelle nuove coordinate $z = Tx$ il sistema è rappresentato dalla terna di matrici(TAT^{-1}, TB, e CT^{-1}).

Le trasformazioni di coordinate rispetto alle quali la matrice dinamica A assume forme "semplici" svolgono un ruolo importante nel caratterizzare la funzione di matrice allo studio. Se infatti abbiamo calcolato $D = TAT^{-1}$, la rappresentazione di A nelle coordinate z, e sappiamo calcolare l'esponenziale rispetto a D, allora sappiamo anche calcolare l'esponenziale rispetto ad A. Da

$$A = T^{-1}DT$$

segue, infatti,

$$e^At = e^{T^{-1}DTt} = T^{-1}T + tT^{-1}DT + \frac{t^2}{2}(T^{-1}DT)^2 + \ldots + \frac{t^k}{k!}(T^{-1}DT)^k + \ldots =$$

$$= T^{-1}T + tT^{-1}DT + \ldots + \frac{t^k}{k!}T^{-k}D^kT^k = \ldots = T^{-1}e^{Dt}T$$

In conclusione, il calcolo dell'esponenziale di A è ottenuto premoltiplicando per T^{-1} e postmoltiplicando per T l'esponenziale di D.

E' dunque importante individuare le "forme semplici" che un operatore assume al variare delle coordinate. Rinviando all'appendice per il dettaglio del calcolo, è sufficiente ricordare che le forme interessanti a questo fine, a partire dalle quali è cioè facile calcolare l'esponenziale, sono quella diagonale, il caso di matrice A regolare, fino al caso più generale della forma di Jordan.

Esamineremo innanzitutto il caso di A regolare, ciò che corrisponde alla proprietà che tutti gli autovalori abbiano molteplicità geometrica unitaria (rientra in questa casistica il caso di A con autovalori distinti), per arrivare al caso generale in cui la forma più semplice è quella di Jordan (si consulti l'appendice).

Nel seguito vengono trattate separatamente le due situazioni citate alle quali corrispondono diversi livelli di complessità.

La matrice di transizione con A regolare

Se si assume la matrice dinamica, A, regolare e si ricorda che dal punto di vista del calcolo si possono immaginare distinti eventuali autovalori coincidenti, l'esponenziale di A può essere calcolato a partire dall'espressione (A.3.1) in appendice. Poiché l'esponenziale di una matrice diagonale a blocchi è pari alla matrice diagonale a blocchi degli esponenzial; per il calcolo è sufficiente osservare che

$$e^{\begin{pmatrix} \alpha & \omega \\ -\alpha & \omega \end{pmatrix} t} = e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \cos \omega t & sen\omega t \\ -sen\omega t & \cos \omega t \end{pmatrix}$$

In presenza di autovalori reali e a coppie di complessi coniugati, si ha quindi per e^{Dt} l'espressione

$$\begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & e^{\lambda_{m_1} t} & & & & & \\ & & & e^{\alpha_1 t}\cos \omega_1 t & e^{\alpha_1 t}\sin \omega_1 t & & & \\ & & & -e^{\alpha_1 t}\sin \omega_1 t & e^{\alpha_1 t}\cos \omega_1 t & & & \\ & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & e^{\alpha_{m_2} t}\cos \omega_{m_2} t & e^{\alpha_{m_2} t}\sin \omega_{m_2} t \\ & & & & & & -e^{\alpha_{m_2} t}\sin \omega_{m_2} t & e^{\alpha_{m_2} t}\cos \omega_{m_2} t \end{pmatrix}$$

e sviluppando i calcoli

$$e^{At} = \sum_{i=1}^{m_1} e^{\lambda_i t} u_i v_i' + \sum_{j=1}^{m_2} e^{\alpha_j t} \Big(\cos \omega_j t (u_{a_j} v_{a_j}' + u_{b_j} v_{b_j}') + \sin \omega_j t (u_{a_j} v_{b_j}' - u_{b_j} v_{a_j}') \Big)$$

Un esempio

Si consideri il semplice sistema meccanico composto da massa-molla e smorzatore trattato nel paragrafo (2.2). A partire dalla matrice dinamica

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{M} & -\frac{b}{M} \end{pmatrix}$$

il calcolo degli autovalori fornisce

$$\lambda_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4kM}}{2M}$$

e per i corrispondenti autovettori, si ottiene

$$\lambda_1 = \frac{-b}{2M} + \frac{\sqrt{b^2 - 4kM}}{2M} \to u_1 = \begin{pmatrix} -b - \sqrt{b^2 - 4kM} \\ 2k \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = \frac{-b}{2M} - \frac{\sqrt{b^2 - 4kM}}{2M} \to u_2 = \begin{pmatrix} -b + \sqrt{b^2 - 4kM} \\ 2k \end{pmatrix}$$

Posto

$$\Delta = b^2 - 4kM$$

si considerano nel seguito i tre diversi casi corrispondenti a valori dei parametri per i quali il valore di di Δ è negativo, positivo e nullo.

Se $\Delta < 0$, si ha

$$u_a = \begin{pmatrix} -b \\ 2k \end{pmatrix} \qquad u_b = \begin{pmatrix} -\sqrt{\Delta} \\ 0 \end{pmatrix}$$

e con

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} -b & -\sqrt{\Delta} \\ 2k & 0 \end{pmatrix}$$

si ottiene

$$TAT^{-1} = \frac{1}{2M}\begin{pmatrix} -b & \sqrt{\Delta} \\ -\sqrt{\Delta} & -b \end{pmatrix}$$

e quindi

$$e^{At} = e^{-\frac{b}{2M}t}T^{-1}\begin{pmatrix} \cos\omega t & sen\omega t \\ -sen\omega t & \cos\omega t \end{pmatrix}T$$

$$= e^{\frac{-bt}{2M}}(\cos\frac{\sqrt{\Delta}}{2M}t(u_a v_a' + u_b v_b') + sen\frac{\sqrt{\Delta}}{2M}t(u_a v_b' - u_b v_a'))$$

Se $\Delta > 0$, il calcolo degli autovettori immediatamente conduce a:

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} -b-\sqrt{\Delta} & -b+\sqrt{\Delta} \\ 2k & 2k \end{pmatrix}$$

$$TAT^{-1} = \frac{1}{2M}\begin{pmatrix} -b+\sqrt{\Delta} & 0 \\ 0 & -b-\sqrt{\Delta} \end{pmatrix}$$

e non si troverà alcuna difficoltà a concludere il calcolo dell'esponenziale.

Il caso di $\Delta = 0$ viene trattato nel seguito poiché corrisponde ad una matrice non regolare.

La matrice di transizione il caso generale *

Con riferimento alla forma di Jordan di una matrice ricordata in (A.3) (formule (A.3.2), (A.3.3), (A.3.4)), l'esponenziale assume una struttura diagonale a blocchi in cui il generico blocco, di dimensione k, ha la forma

$$e^{B_i t} = \begin{pmatrix} e^{\Lambda_i t} & te^{\Lambda_i t} & \cdots & \cdots & \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}e^{\Lambda_i t} \\ 0 & \ddots & \ddots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \cdots & \ddots & te^{\Lambda_i t} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & e^{\Lambda_i t} \end{pmatrix}$$

ove $\Lambda_i = \lambda_i$ nel caso di autovalore reale e

$$\Lambda_i = \begin{pmatrix} \alpha_i & \omega_i \\ -\omega_i & \alpha_i \end{pmatrix}$$

per una coppia di complessi coniugati.

Si consideri a titolo di esempio una matrice di dimensione quattro con due coppie di autovalori complessi coincidenti con molteplicità geometrica pari a due.

$$\lambda_{1/2} = \alpha \pm j\omega$$

$$T^{-1} = (u_a^1 u_b^1 u_a^2 u_b^2)$$

$$u^1 = u_a^1 + ju_b^1 : (A - \alpha - j\omega)u^1 = 0$$

$$u^2 = u_a^2 + ju_b^2 : (A - \alpha - j\omega)u^2 = u^1$$

$$\Downarrow$$

$$TAT^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha & \omega & 1 & 0 \\ -\omega & \alpha & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \alpha & \omega \\ 0 & 0 & -\omega & \alpha \end{pmatrix} = \Lambda_j^C$$

$$e^{\Lambda_j^C t} = e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \cos\omega t & sen\omega t & t\cos\omega t & tsen\omega t \\ -sen\omega t & \cos\omega t & -tsen\omega t & t\cos\omega t \\ 0 & 0 & \cos\omega t & sen\omega t \\ 0 & 0 & -sen\omega t & \cos\omega t \end{pmatrix}$$

Per concludere si consideri ancora l'esempio precedente nel caso in cui $\Delta = 0$, siamo nel caso in cui l'autovalore è $\frac{-b}{2M}$ ed ha molteplicità due. Si può verificare in questo caso semplice l'esistenza della seguente forma di Jordan

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\sqrt{\frac{k}{M}} & 1 \end{pmatrix}$$

$$TAT^{-1} = \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{k}{M}} & 1 \\ 0 & -\sqrt{\frac{k}{M}} \end{pmatrix}$$

Il calcolo dell'esponenziale può essere completato senza difficoltà.

1.3. La risposta libera nello stato

Come è noto l'*evoluzione libera* di un sistema lineare stazionario assume l'espressione:

$$x_l(t) = e^{At}x(0)$$

E' elementare il caso in cui la matrice A si riduce a uno scalare. Si ha

$$A = \lambda$$

l'evoluzione libera dello stato avviene secondo l'espressione

$$x(t) = e^{\lambda t}x(0)$$

Si tratta di una legge esponenziale che assume i tre andamenti qualitativamente riportati nella figura

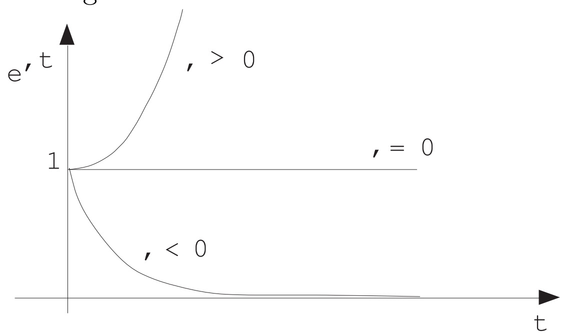

Figura 1.2

Da un punto di vista qualitativo l'evoluzione nel tempo, di tipo esponenzial è divergente per $\lambda > 0$, convergenei per $\lambda < 0$, costane e pari a uno per $\lambda = 0$.

Per caratterizzare la rapidità con cui il sistema evolve, sia crescendo che decrescendo, si usa introdurre un parametro, τ, *la costante di tempo*

$$\tau = -\frac{1}{\lambda}$$

Rispetto a questo parametro

$$x(t) = e^{-\frac{t}{\tau}}x(0)$$

e risulta chiaro che τ rappresenta, nel caso in cui lo stato decresce, il tempo necessario perchè lo stato diventi $\frac{1}{e}$ del valore iniziale.

1.4. i modi naturali

Le precedenti semplici considerazioni svolte nel caso $n = 1$ si possono generalizzare impiegando gli strumenti di calcolo messi a punto.

Nel seguito della presente sezione tratteremo due casi: quello in cui gli autovalori di A siano distinti e quello in cui A sia regolare, cioè ammette la forma diagonale. Il caso generale, che contempla la presenza di autovalori a molteplicità geometrica maggiore di uno viene trattato separatamente nel seguito.

Modi naturali in presenza di autovalori distinti

Nel caso più semplice, in cui la dimensione del sistema è n e la matrice A ha autovalori reali e distinti, per quanto visto nel paragrafo precedente si ha

$$e^{At} = T^{-1}e^{\Lambda t}T = (\, u_1 \;\; \ldots \;\; u_n \,) \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{e^{\lambda_n t}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1' \\ \vdots \\ v_n' \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} e^{\lambda_i t} u_i v_i'$$

dove con v_i' e u_i' si sono indicate le righe della matrice T e le colonne di T^{-1}, rispettivamente, e dove gli n termini della somma sono esponenziali, cioè leggi temporali del tipo che abbiamo incontrato nel caso $n = 1$. Questa espressione consente il calcolo dell'evoluzione libera; si ha infatti

$$x_l(t) = e^{At}x(0) = \sum_{i=1}^{n} e^{\lambda_i t} u_i v_i' x(0)$$

Si noti che per $t = 0$ si ottiene

$$x(0) = \sum_{i=1}^{n} c_i u_i$$

dove si è posto $c_i = v_i' x(0)$. $x(0)$ risulta, quindi, pari alla somma di n componenti nello spazio costituito dagli autovettori $u_1, u_2, \ldots u_n$; i coefficienti $c_1, c_2, \ldots, c_n$ rappresentando le ampiezze di tali componenti.

Si ottiene in definitiva per l'evoluzione libera nello stato l'espressione

$$x_l(t) = e^{At}x(0) = \sum_{i=1}^{n} c_i e^{\lambda_i t} u_i$$

che è pari alla somma di n termini distinti, corrispondenti a evoluzioni lungo gli autovettori $u_1, u_2, \ldots, u_n$. La traiettoria nello spazio di stato ammette proiezioni, nelle direzioni $u_1, u_2, \ldots, u_n$, del tipo

$$c_i e^{\lambda_i t}$$

La legge di moto di ciascun termine è ancora una legge di moto esponenziale; la sua ampiezza, $c_i e^{\lambda_i t}$, dipende dalla componente dello stato iniziale nella direzione corrispondente, u_i.

Si noti che ciascuno di questi singoli termini potrebbe essere, come si suol dire, eccitato singolarmente, è sufficiente prendere una condizione iniziale che ha una proiezione solo sull'autovettore u_i per avere un'espressione con il solo termine $e^{\lambda_1 t}$. Le stesse considerazioni svolte nel caso di $n = 1$ possono essere ripetute nel caso generale se si assume uno stato iniziale nella direzione del generico autovettore u_i. Se l'autovalore corrispondente è 0, si rimane nello stato iniziale, se l'autovalore è positivo l'evoluzione è divergente pur restando nella direzione dell'autovettore; se invece λ_i è negativo , si ha un moto decrescente verso l'origine. Quindi la traiettoria relativa al moto naturale si mantiene lungo l'autovettore ed ha questi tre tipi di comportamento. In figura sono indicati possibili andamenti.

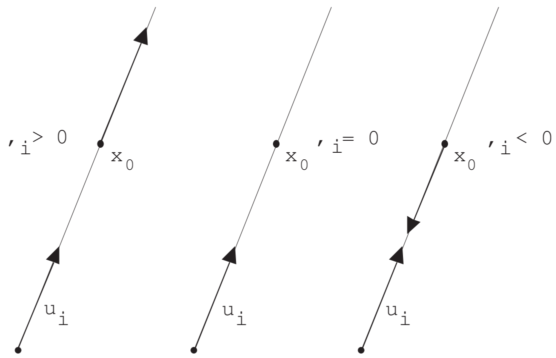

Figura 1.3

Le considerazioni precedenti si esprimono in sintesi affermando che

l'evoluzione libera nello stato nel caso di autovalori reali e distinti è la combinazione lineare, secondo coefficienti che dipendono dallo stato iniziale, di n evoluzioni indipendenti che hanno luogo nei sottospazi ad una dimensione generati dagli autovettori. Queste evoluzioni nella direzione degli autovettori sono dette **modi naturali aperiodici**. Le leggi temporali di evoluzione dei modi dipendono solo dagli autovalori $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ e le diremo distinte. Si hanno, quindi, nel caso di autovalori reali e distinti n modi distinti essendo diverse sia la legge di moto che la direzione dello spazio in cui avviene l'evoluzione.

Procedendo in modo analogo a quanto fatto nel caso scalare, si può definire una costante di tempo per ciascun autovalore. Posto

$$\tau_i = -\frac{1}{\lambda_i}$$

si ottiene l'espressione

$$x(t) = \sum c_i e^{-\frac{t}{\tau_i}} u_i$$

in cui le costanti di tempo svolgono il ruolo sottolineato in precedenza.

Quanto visto vale nel caso di autovalori reali. Si supponga ora che vi siano anche autovalori complessi, μ reali e 2ν complessi e coniugati, con $n = \mu + 2\nu$,

$$\lambda_1, \ldots, \lambda_\mu, (\alpha_1 + j\omega_1), \ldots, (\alpha_\nu + j\omega_\nu)$$

indicando con u_{ka} e u_{kb} la parte reale e immaginaria dell'autovettore u_k si ottiene

$$e^{At} = \sum_{i=1}^{\mu} e^{\lambda_i t} u_i v_i' + \sum_{k=1}^{\nu} e^{\alpha_k t} (u_{ka} u_{kb}) \begin{pmatrix} \cos\omega_k t \sin\omega_k t \\ \\ -\sin\omega_k t \cos\omega_k t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{ka}' \\ \\ v_{kb}' \end{pmatrix}$$

in cui con v_{ka} e v_{kb} si sono indicate le righe, nell'inversa della matrice degli autovettori, corrispondenti alle colonne u_{ka} e u_{kb}.

L'espressione dell'evoluzione libera è ora ottenuta moltiplicando per x_0; si ottiene

$$x_l(t) = \sum_{i=1}^{\mu} c_i e^{\lambda_i t} u_i + \sum_{k=1}^{\nu} m_k e^{\alpha_k t} \Big(\sin(\omega_k t + \varphi_k) u_{ka} + \cos\,(\omega_{kt} + \varphi_k) u_{kb} \Big)$$

avendo posto

$$m_k = \sqrt{c_{ka}^2 + c_{kb}^2} \qquad \begin{array}{c} c_{ka} = v'_{ka} x_0 \\ c_{kb} = v'_{kb} x_0 \end{array} \qquad \begin{array}{c} \sin \varphi_k = \dfrac{c_{ka}}{m_k} \\ \cos \varphi_k = \dfrac{c_{kb}}{m_k} \end{array}$$

Si è mostrato, quindi, che nel caso di autovalori distinti, reali e a coppie di complessi coniugati,

l'evoluzione libera risulta la combinazione lineare di μ **modi naturali aperiodici** e ν evoluzioni che avvengono nei piani generati da u_a e u_b e prendono il nome di **modi naturali pseudoperiodici**. L' evoluzione temporale ammette un inviluppo esponenziale, e^{α_t}, ma con componenti periodiche seno e coseno, lungo due direzioni del piano del moto.

In figura sono rappresentate le possibili traiettorie del moto pseudoperiodico

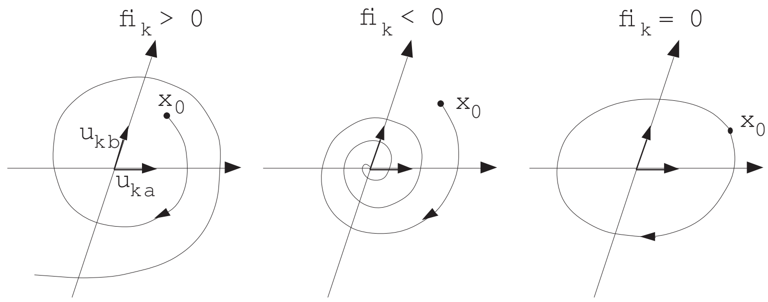

Figura 1.4

Per $\alpha_k > 0$ si ha una traiettoria a spirale divergente, per $\alpha_k = 0$ un ellisse e per $\alpha_k < 0$ una spirale convergente come illustrato nella figura.

Le leggi temporali del modo pseudoperiodico sono riportate in figura nelle diverse situazioni.

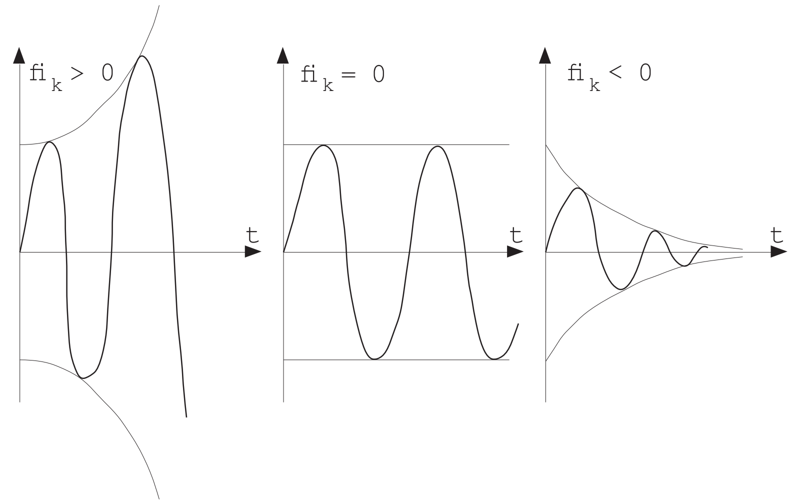

Figura 1.5

La pulsazione della legge temporale è ω_k, il coefficiente immaginario dell'autovalore complesso.

In conclusione nel caso generale di autovalori distinti l'evoluzione libera nello stato risulta essere combinazione lineare di μ modi naturali **aperiodici**, associati agli autovalori reali, e ν modi naturali **pseudoperiodici**, associati alle coppie di autovalori complessi. Diremo in tal caso che si hanno **modi naturali semplici con leggi di moto distinte**.
La conoscenza della collocazione degli autovalori nel piano complesso consente di comprendere l'andamento qualitativo delle evoluzioni del sistema.

E' importante osservare che la collocazione degli autovalori rispetto all'asse immaginario, caratterizza la convergenza o la divergenza dei modi. L'asse immaginario è in un certo senso la frontiera per quanto riguarda tale comportamento: se gli autovalori sono a sinistra, allora il moto è convergente a zero, o in modo periodico o in modo aperiodico; se sono a destra il moto diverge; se sono sull'asse immaginario il moto è costante o oscillatorio.

Anche nel caso di autovalori complessi è usuale introdurre due parametri che caratterizzano il modo in luogo di α e ω. Si tratta della *pulsazione naturale*, ω_n,

$$\omega_n = \sqrt{\alpha^2 + \omega^2}$$

e dello *smorzamento*, ξ,

$$\xi = sin\theta = \frac{-\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}}$$

Nella figura sono messi in luce tali parametri.

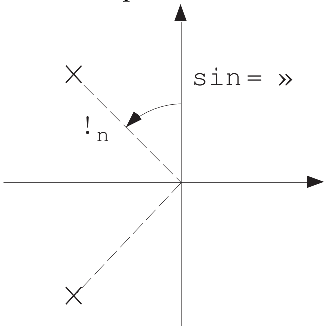

Figura 1.6

Il significato fisico di pulsazione naturale e smorzamento può essere compreso a partire dall'espressione di α e ω in funzione di ω_n e ξ

$$\alpha = -\xi\omega_n \qquad e \qquad \omega = \omega_n\sqrt{1-\xi^2}$$

Se $\alpha = 0$, cioè se i valori complessi coniugati sono immaginari, $\xi = 0$ e $\omega_n = \omega$; cioè ω_n è la pulsazione che avrebbe il sistema se non ci fosse la parte reale (*pulsazione naturale*). All'apparire di α diverso da zero la pulsazione si allontana da questa pulsazione 'ideale', corrispondente a smorzamento nullo. ξ si chiama fattore di smorzamento, perché ad un suo aumento corrisponde una maggiore attenuazione dell'inviluppo della funzione oscillatoria.

Modi naturali in presenza di autovalori non distinti ed A regolare

Nel caso in cui la matrice dinamica è regolare, cioè gli autovalori, eventualmente non distinti, hanno molteplicità geometrica, m_i, unitaria, è possibile calcolare in corrispondenza ad ogni autovalore reale (coppia di autovalori complessi coniugati) tanti autovettori (autospazi di dimensione due) quanta è la molteplicità algebrica dell'autovalore stesso (della coppia di autovalori). In questa situazione la matrice A è ancora una volta diagonalizzabile, come si verifica facilmente impiegando gli stessi argomenti del caso precedente. Per i modi naturali valgono espressioni analoghe alle precedenti potendo essere coincidenti le leggi di moto di modi naturali diversi. Il modo naturale è, in questo caso, caratterizzato dall'autospazio ad esso associato.

In conclusione, se la matrice dinamica A ha autovalori coincidenti, ma è regolare si hanno in corrispondenza ad ogni autovalore con molteplicità algebrica maggiore di uno altrettanti **modi naturali semplici con leggi temporali coincidenti**.

1.4.a. I modi naturali: il caso generale *

Si esaminerà ora il caso in cui vi siano autovalori a molteplicità geometrica maggiore di uno. A tal fine viene ricordata, nel seguito, la procedura di selezione di una base rispetto alla quale un assegnato operatore lineare assume la forma di Jordan.

Come è noto tale base corrisponde ad una decomposizione di R^n in m sottospazi (autospazi) disgiunti ciascuno associato ad un autovalore e di dimensione pari alla sua molteplicità algebrica (di dimensione pari al doppio della molteplicità algebrica per una coppia di autovalori complessi). Se indichiamo con U_i il generico autospazio associato all'autovalore λ_i, risulta

$$U_0 \oplus \ldots \oplus U_m = R^n$$

Se $\underline{c}_i$ sono le componenti di x_0 rispetto a tali sottospazi:

$$x_0 = \sum_1^{\mu} \underline{c}_i$$

$\underline{c}_i$ risulta essere un autovvettore generalizzato di un certo ordine, sia k, minore o uguale alla molteplicità geometrica dell' autovalore λ_i.

$k :=$ ordine con cui $\underline{c}_i$ è autovettore generalizzato, i.e.

$$(A - \lambda_i I)^i c_i \neq 0 \qquad i = 0, \ldots, k-1$$
$$(A - \lambda_i I)^k \underline{c}_i = 0$$

Giova ricordare che ciascun sottospazio U_i è somma diretta di autospazi ciascuno associato ad una catena di autovettori generalizzati. Inoltre ciascuno di questi ultimi, generato da un autovettore di ordine uno, contiene autospazi di dimensione uno, due,.., fino all'ordine massimo dell'autovettore generalizzato che apartiene a quella catena.

Le due situazioni limite che si presentano in presenza di un autovalore a molteplicità algebrica maggiore di uno sono quella in cui la molteplicità geometrica è unitaria, ciò che corrisponde all'esistenza di tanti autospazi di dimensione uno in numero pari alla molteplicità algebrica, e si tratta del caso già trattato in precedenza (A regolare), oppure la molteplicità geometrica è pari a quella algebrica; ciò che corrisponde all'esistenza di una sola catena di autovettori generalizzati ed all'esistenza di una sequenza di autospazi generalizzati di dimensione crescente fino alla molteplicità algebrica. Nei casi intermedi si hanno più catene di autovettori generalizzati, ciascuna definisce una sequenza di autospazi di dimensione crescente. Il numero delle catene, che come è noto viene definito come l'**indice**, I, associato al fissato autovalore, definisce il numero dei blocchi di Jordan che compongono la forma più semplice dell'operatore.

L'evoluzione libera è la somma di evoluzioni associate ai $\underline{c}_i$. Ciascuna di esse definisce un **modo naturale multiplo** di ordine k, se k è l'ordine con il quale $\underline{c}_i$ è autovettore generalizzato. Il modo naturale multiplo assume l'espressione

$$e^{At}\underline{c}_i = e^{At-\lambda_i t}e^{\lambda_i t}\underline{c}_i = \left(e^{\lambda_i t}+t(A-\lambda_i I)e^{\lambda_i t}+\ldots+\frac{t^{k-1}}{(k-1)}(A-\lambda_i I)^{k-1}e^{\lambda_i t}\right)\underline{c}_i$$

Si noti che in questo caso la legge temporale del modo è di tipo esponenziale a coefficiente polinomiale nella variabile temporale.

A ciascun autovalore risultano associati più modi naturali, uno per ciascun autospazio. Si ha quindi un numero di modi naturali pari all'indice. L'ordine del modo naturale è assunto pari alla dimensione dell'autospazio e corrisponde all'ordine del polinomio in t che caratterizza la legge temporale.

Si avrà quindi un insieme di modi naturali di ordine crescente fino alla molteplicità algebrica. Il numero di modi come si è detto è pari all'indice (al numero di Blocchi di Jordan) e la dimensione è quella del corrispondente blocco di Jordan. Diremo in questo caso di essere in presenza di **modi naturali multipli distinti**.

Nei due casi limite di molteplicità geometrica uguale a quella algebrica o uguale a uno diremo che vi è un solo **mod natural multiplo** o più (in numero pari alla molteplicità algebrica) **modi naturali multipli con leggi temporali coincidenti**.

1.4.b. Sistemi a tempo-discreto: passaggio al modello esplicito

Verificheremo ora che le evoluzioni nel tempo di $x(t)$ e $y(t)$ associate ad un fissato stato iniziale x_0 al tempo t_0 ed un ingresso $u(\cdot)$ definito da t_0 in poi, sono descritte dal seguente **modello esplicito**

$$x(t) = \Phi(t - t_0)x(t_0) + \Sigma_{t_0}^{(t-1} H(t - \tau)u(\tau) \quad (9.2.a)$$

$$y(t) = \Psi(t - t_0)x(t_0) + \Sigma_{t_0}^{t} W(t - \tau)u(\tau) \quad (9.2.b)$$

Se indichiamo con A^t la potenza della matrice A è facile verificare, per sostituzioni successive, che la forma che assume la soluzione è del tipo indicato con

$$\Phi(t) = A^t$$

$$H(t) = \Phi(t - 1)B = A^{(t-1)}B$$

$$\Psi(t) = C\Phi(t) = CA^t$$

$$W(t) = C\Phi(t - 1)B = CA^{(t-1)}B \quad t > 0 \quad W(0) = D$$

Anche per i sistemi a tempo discreto valgono le considerazioni già svolte per i sistemi a tempo continuo:

- le risposte nello stato e in uscita sono separate in *evoluzione libera* ed *evoluzione forzata*; l'evoluzione forzata è descritta da una sommatoria di convoluzione;

- H e W, matrici delle risposte impulsive nello stato e in uscita, rispettivamente, hanno colonne che possono essere interpretate come risposte forzate ad ingressi impulsivi;

- per le risposte forzate vale il *principio di sovrapposizione degli effetti*;

- il comportamento forzato ingresso uscita è descritto dalla W, *risposta impulsiva* (matrice delle risposte impulsive), modello del comportamento forzato;

- nella terminologia della Teoria dei Sistemi il modello $(1.a)$ - $(1.b)$ è detto implicito o differenziale, il corrispondente modello $(2.a)$ - $(2.b)$ è detto esplicito;

- nel calcolo del modello esplicito un ruolo centrale è svolto dalla potenza della matrice dinamica.

La costruzione di una rappresentazione con lo stato (A, B, C, D) a partire da un modello del comportamento forzato, è un problema interessante da un punto dal punto di vista del progettista: tale problema, detto **problema della realizzazione** consente di individuare l'algoritmo ricorsivo che corrisponde al calcolo della somma di convoluzione. Corrisponde quindi ad una implementazione in tempo reale del legame ingresso uscita forzato.

1.5. Analisi nel dominio del tempo

La struttura della matrice di transizione, A^t svolge un ruolo centrale nel caratterizzare il comportamento di un sistema a tempo discreto. Infatti, a partire da una rappresentazione, lineare, stazionaria, a dimensione finita, il calcolo delle evoluzioni consiste nel calcolare

$$x(t) = A^{(t-t_0)}x_0 + \sum_{\tau=t_0}^{t-1} A^{(t-\tau-1)}Bu(\tau)$$
$$y(t) = CA^{(t-t_0)}x_0 + \sum_{\tau=t_0}^{t-1} CA^{(t-\tau-1)}Bu(\tau) + Du(t)$$

Anche per calcolare la potenza di una matrice giova fare riferimento alle trasformazioni di coordinate lineari e ricordare che le matrici che descrivono il sistema si trasformano in TAT^{-1}, TB, e CT^{-1}. Se infatti TAT^{-1} ha una struttura rispetto alla quale il calcolo risulta più semplice, è questo ad esempio il caso della forma canonica in appendice 3, D, si ottiene

$$A = T^{-1}DT \ \Rightarrow A^t = (T^{-1}DT)^t = \ldots = T^{-1}D^tT.$$

Essendo D diagonale a blocchi, la potenza è pari alla diagonale delle potenze dei singoli blocchi. Per la potenza della parte diagonale non si hanno problemi risultando pari alla diagonale delle potenze degli elementi sulla diagonale. E' solo necessario comprendere come calcolare la potenza del blocco (2×2) associato ad una coppia di autovalori complessi coniugati, posto

$$\lambda = \alpha + j\omega = \sigma e^{j\theta} = \sigma(\cos\theta + jsen\theta)$$

$$\Rightarrow \alpha = \sigma\cos\theta \qquad \omega = \sigma sen\theta$$

risulta

$$\begin{pmatrix} \alpha & \omega \\ -\omega & \alpha \end{pmatrix} = \sigma \begin{pmatrix} \cos\theta & sen\theta \\ -sen\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

e, non è difficile calcolare

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & sen\theta \\ -sen\theta & \cos\theta \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} \cos\theta t & sen\theta t \\ -sen\theta t & \cos\theta t \end{pmatrix}$$

Quindi per il generico blocco (2×2) associato ad una coppia complessa coniugata si ha:

$$\Lambda^t = \sigma^t \begin{pmatrix} \cos\theta t & sen\theta t \\ -sen\theta t & \cos\theta t \end{pmatrix}$$

Risulta quindi

$$D^t=\begin{pmatrix} \lambda_1^t &&&&&&& \\ & \ddots &&&&&& \\ && \lambda_{m_1}^t &&&&& \\ &&& \sigma_1^t\cos\theta_1 t & \sigma_1^t\sin\theta_1 t &&& \\ &&& -\sigma_1^t\sin\theta_1 t & \sigma_1^t\cos\theta_1 t &&& \\ &&&&& \ddots && \\ &&&&&& \sigma_{m_2}^t\cos\theta_{m_2} t & \sigma_{m_2}^t\sin\theta_{m_2} t \\ &&&&&& -\sigma_{m_2}^t\sin\theta_{m_2} t & \sigma_{m_2}^t\cos\theta_{m_2} t \end{pmatrix}$$

e sviluppando i calcoli

$$A^t = \sum_{i=1}^{m_1} \lambda_i^t u_i v_i' + \sum_{j=1}^{m_2} \sigma_j^t \left(\cos\theta_j t(u_{a_j} v_{a_j}' + u_{b_j} v_{b_j}') + \sin\theta_j t(u_{a_j} v_{b_j}' - u_{b_j} v_{a_j}')\right)$$

Lo studente non avrà difficoltà a rivisitare, con riferimento al calcolo della potenza di una matrice, le considerazioni svolte in precedenza nel caso di autovalori con molteplicità geometrica maggiore di uno.

Per il caso generale valgono le stesse considerazioni già fatte per il calcolo dell'esponenziale che nel caso specifico danno per il generico blocco, di dimensione k,

$$B_i{}^t=\begin{pmatrix} \Lambda_i{}^t & t^{[1]}\Lambda_i{}^{t-1} & \cdots & \cdots & \frac{t^{[k-1]}}{(k-1)!}\Lambda_i{}^{t-k+1} \\ 0 & \ddots & \ddots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \cdots & \ddots & t^{[1]}\Lambda_i{}^{t-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \Lambda_i{}^t \end{pmatrix}$$

ove $\Lambda_i = \lambda_i$ nel caso di autovalore reale e

$$\Lambda_i = \sigma_i \begin{pmatrix} \cos\theta_i & sen\theta_i \\ -sen\theta_i & \cos\theta_i \end{pmatrix}$$

per una coppia di complessi coniugati ed, inoltre, $t^{[k]}$ denota il polinomio fattoriale di ordine k definito come

$$t^{[k]} = t(t-1)\dots(t-k+1)$$

1.5.a. I modi naturali per i sistemi a tempo discreto

Considerazioni analoghe a quelle sinora svolte possono essere ripetute per i sistemi a tempo discreto. Gli stessi argomenti usati per i sistemi a tempo discreto conducono a

$$x_\ell(t) = A^t x_0 = \sum_{i=1}^{m_1} \lambda_i^t \underline{u}_i c_i + \sum_{j=1}^{m_2} |\lambda_j|^t m_j \left(\sin(\theta_j t + \varphi_j)\underline{u}_{j_a} + \cos(\theta_j t + \varphi_j)\underline{u}_{j_b}\right)$$

ove

$$\lambda_\ell = |\lambda_\ell| e^{j\theta_\ell}, \qquad 0 < \theta_\ell < \pi$$

ed i parametri presenti sono definiti come per i sistemi a tempo continuo.

Anche in questo caso l'evoluzione libera nello stato è data dalla combinazione lineare di modi naturali che avvengono lungo particolari direzioni, quelli associati ad autovalori reali, e in piani, quelli associati a coppie di autovalori complessi. Una particolarità dei sistemi a tempo discreto è una suddivisione dei modi associati ad autovalori reali; in tal caso infatti si hanno modi cosiddetti *aperiodici* se corrispondenti ad autovalori positivi e modi cosiddetti *alternanti* se corrispondenti ad autovalori negativi. Il moto in tal caso avviene, si pensi al caso semplice di molteplicità unitaria, lungo una retta restando dalla stessa parte dello zero, per il modo aperiodico, alternandosi da una parte e dall'altra dello zero, per il modo alternante. Si hanno quindi modi aperiodici (λ_i reale > 0), alternanti (λ_i reale < 0), pseudoperiodici (coppie complesse coniugate).

In figura sono riportati gli andamenti nel tempo delle leggi di moto corrispondenti alle diversa collocazione degli autovalori.

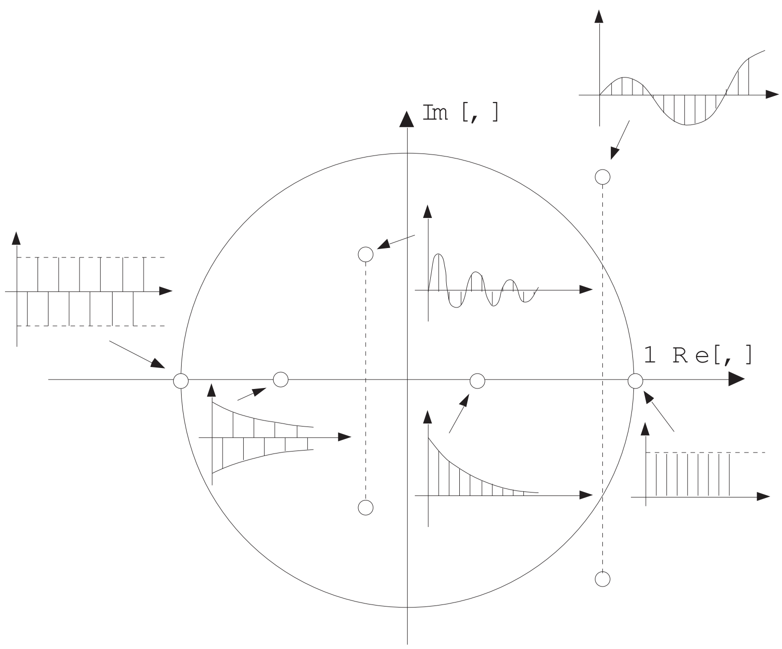

Figura 1.7

Nel caso di autovalori a molteplicità geometrica maggiore di uno, con considerazioni analoghe a quelle svolte nel caso tempo continuo, si calcola:

$$A^t \underline{c}_i = (A - \lambda_i I + \lambda_i I)^t \underline{c}_i =$$

$$\sum_{h=0}^{t} \begin{pmatrix} t \\ h \end{pmatrix} (A - \lambda_i I)^h \underline{c}_i \lambda_i^{t-h}$$

$$(\begin{pmatrix} t \\ h \end{pmatrix}) = \frac{t(t-1)\dots(t-h+1)}{h!} := \frac{t^{(h)}}{h!}$$

Quindi le leggi di moto sono del tipo potenza con coefficienti che sono *polinomi fattoriali*.

Infine, le stesse considerazioni possono essere ripetute circa l'eccitabilità e l'osservabilità dei modi e il significato del modello forzato. L'interpretazione fisica è ancora più evidente in questo caso.

1.5.b. I modi naturali sotto discretizzazione

Un'osservazione elementare riguarda la collocazione degli autovalori del sistema a tempo discreto in relazione a quelli del sistema continuo. Si ha

$$\lambda_i^D = e^{\lambda_i^C T}$$

$$A_D = e^{AT} = \sum_{i=1}^{n} e^{\lambda_i^C T} u_i v_i'$$

infatti

$$e^{\lambda_i^C T} \to \lambda_i^D$$

Ne segue che gli autovalori di un sistema a tempo discreto che proviene dalla discretizzazione di un sistema a tempo continuo non possono assumere valori arbitrari, non possono ad esempio essere uguali a zero. Inoltre possono essere negativi solo in corrispondenza ad una coppia di autovalori complessi. Ciò comporta, nei sistemi che provengono dalla discretizzazione di un sistema a tempo continuo, l'entuale presenza di modi alternanti necessariamente a coppie.

1.5.c. Sulla costruzione di rappresentazioni con lo stato

Come per i sistemi a tempo continuo le rappresentazioni con lo stato costituiscono nella gran parte dei casi il risultato del processo di modellistica di un dato sistema a tempo discreto, in alcune situazioni, però, il dato di partenza consiste nella risposta impulsiva (il nucleo dato) o un sistema di equazioni alle differenze: la costruzione di una rappresentazione con lo stato viene qui discussa.

Con riferimento alla prima situazione il problema consiste nell'associare al funzionale

$$y(t) = \Sigma_{t_0}^{t} K(t-\tau)u(\tau)$$

tre matrici (A, B, C) tali che

$$K(t) = CA^{t-1}B \quad \forall t > 0$$

Un problema analogo al precedente che trova importanti riscontri nella attuale letteratura nel contesto lineare è quello della associazione di una rappresentazione con lo stato in forma implicita ad un sistema di equazioni alle differenze. Nel contesto lineare stazionario il problema può essere formulato nei seguenti termini: assegnato un sistema di equazioni alle differenze lineari a coefficienti costanti che descrive i legami tra le p variabili di ingresso e le q variabili di uscita, sotto quali condizioni è possibile associare a queste una rappresentazione alle differenze implicita caratterizzata da una terna di matrici (A, B, C) ?

Posto

$$P(d)y = Q(d)u$$

ove $P(d)$ e $Q(d)$ sono matrici, $(q \times q)$ e $(q \times p)$ rispettivamente, i cui elementi sono polinomi a coefficienti costanti nella indeterminata formale d, che rappresenta l'operazione di anticipo, trovare un intero n e una terna (A, B, C) di matrici $(n \times n)$, $(n \times p)$ e $(q \times n)$ in modo che al variare di x_0 la rappresentazione individuata descriva tutti i possibili legami u - y.

Il problema ammette soluzioni analoghe a quelle già studiate per i sistemi a tempo continuo nel dominio della variabile complessa.

1.5.d. Ulteriori osservazioni *

Le seguenti considerazioni hanno lo scopo di fornire qualche chiarimento sulla la situazione complessa che corrisponde al caso in cui la matrice dinamica non sia regolare.

Come è stato osservato più volte i modi naturali sono le evoluzioni nello spazio di stato attraverso le quali è possibile esprimere l'evoluzione libera; più precisamente sono evoluzioni che avvengono in sottospazi dello spazio di stato (autospazi), sono caratterizzate da una evoluzione temporale associata all'autovalore e all'ordine del modo, ogni evoluzione libera è combinazione lineare di tali evoluzioni in relazione alla componente dello stato iniziale nel relativo autospazio.

In presenza di autovalori multipli, molteplicità algebrica maggiore di uno, si definiscono un numero pari all'indice, I_i, di sequenze di autospazi di dimensioni crescenti fino a generare un sottospazio di dimensione pari alla molteplicità geometrica dell'autovalore. Si avranno, dunque per uno stesso autovalore più autospazi. In queste condizioni diremo che all'autovalore λ_i sono asssociati I_i modi naturali, ciascuno contraddistinto da un suo proprio autospazio e da una legge temporale periodica o pseudoperiodica con un coefficiente polinomiale in t di grado pari alla dimensione dell'autospazio meno uno. Si definisce ordine di un modo la dimensione dell'autospazio. Si comprende, dunque, come possano esistere modi naturali contraddistinti dalla stessa legge temporale. In realtà il caso in cui la molteplicità algebrica, μ_i, è maggiore di uno e quella geometrica, m_i, sono uguali ad uno è un caso particolare di questa situazione in cui tutte le geggi temporali dei μ_i modi associati allo stesso autovalore, sono le stesse.

1.6. I modi naturali nello stato e in uscita

Il concetto di modo naturale ora introdotto si presta a svolgere una prima indagine su quanto prima accennato a proposito della rappresentatività del modello costituito dalla sola risposta forzata (matrice delle risposte impulsive).

A tal fine, facendo riferimento alla presenza della legge temporale del modo nelle colonne della matrice delle risposte impulsive nello stato e nella matrice di transizione in uscita, è usuale introdurre nella teoria dei sistemi la definizione di modo naturale *eccitabile* e quella di modo naturale *osservabile*.

1.6.a. il caso di A regolare

Si pensi in prima istanza al caso in cui i modi naturali siano distinti; ciò che corrisponde alla coincidenza tra la molteplicità algebrica e geometrica di un autovalore. In tal caso, infatti, le leggi temporali associate ai modi sono distinte.

Risulta evidente che mentre al variare di x_0 nell'evoluzione libera del sistema potranno comparire tutte le leggi temporali dei modi naturali, come si suol dire l'evoluzione libera è caratterizzata da tutti i modi naturali, per quanto riguarda l'evoluzione forzata nello stato ciò non è più vero. Infatti la risposta forzata è caratterizzata da tutte e sole le leggi "temporali" che compaiono in $e^{At}B$.

Tali modi sono detti *eccitabili* (e si sottintende "con impulsi in ingresso") in quanto se si applica un ingresso di tipo impulsivo, risulta

$$x(t) = \int_0^t e^{A(t-\tau)} B\delta(\tau) d\tau = e^{At}B$$

cioè la risposta coincide con l'evoluzione libera che muove dallo stato iniziale $x_0 = B$, nel caso di sistemi ad un solo ingresso, da uno stato iniziale pari ad una fissata combinazione lineare delle colonne di B, nel caso di sistemi a più ingressi. Il modo $i - mo$ associato all'autovalore λ_i, è quindi eccitabile se influenza l'evoluzione nello stato. Più precisamente lo diremo eccitabile se la sua legge temporale compare nella $H(t)$.

La condizione di eccitabilità del generico i-mo modo naturale nel caso di autovalori distinti è che

$$v_i' B \neq 0$$

Infatti dall'espressione

$$e^{At}B = \sum_{i=1}^{n} e^{\lambda_i t} u_i v_i' B$$

si comprende che la legge temporale $e^{\lambda_i t}$ compare a secondo membro se e solo se la condizione citata è verificata.

Analoghe considerazioni possono essere ripetute per la risposta in evoluzione libera in uscita. Ciò conduce naturalmente ad introdurre la definizione di modo naturale osservabile come quel modo la cui legge temporale compaia in Ce^{At} (che quindi può essere sollecitata variando x_0). Anche in questo caso può essere formulata una condizione di osservabilità che ammette una condizione equivalente alla precedente. Se infatti si suppone che gli autovalori siano distinti, il generico i-mo modo naturale è osservabile se e solo se

$$Cu_i \neq 0$$

ciò che risulta evidente dall'espressione

$$Ce^{At} = \sum_{i=1}^{n} e^{\lambda_i t} C u_i v_i'$$

Non resta che domandarsi quali sono le leggi temporali che caratterizzano $W(t)$; e quindi la risposta forzata in uscita. E' chiaro che solo i modi naturali, e quindi le relative leggi temporali, che sono simultaneamente eccitabili ed osservabili potranno comparire nella risposta forzata.

Si tratta ovviamente di tutti e soli i modi naturali per i quali risulta

$$v_i' B \neq 0 \qquad C u_i \neq 0$$

Le considerazioni precedenti valgono in realtà nel caso in cui la matrice dinamica sia regolare con l'accortezza di distinguere tra modi naturali che hanno la stessa legge temporale. Non sarà in questo caso la presenza (in Φ, H, Ψ, o W) della legge di moto corrispondente al modo naturale a certificarne la proprietà

1.6.b. il caso generale *

Le condizioni geometriche di eccitabilità ed osservabilità presentate con riferimento al caso di autovalori distinti e A regolare ammettono una semplice generalizzazione.

Se si pensa, ad esempio alla condizione di eccitabilità (con impulsi in ingreso) e si vedono le colonne della matrice B come vettori dello spazio di stato ci si rende conto che la condizione geometrica di eccitabilità si può formulare in termini di componente diversa da zero di almeno una colonna ella matrice B rispetto al generico autospazio associato al modo naturale in esame.

Ad esemplo, il generico modo naturale associato all'autovalore λ_i, tra gli I_i ad esso associati, è eccitabile se almeno una colonna della matrice B ammette componente diversa da zero nel sottospazio ad esso associato.

Tale condizione si può esprimere dal punto di vista geometrico mediante

$$V^{k'}_{i}B \neq 0$$

dove $V^{k'}_{i}$ è la matrice (kxn) che caratterizza nella trasformazione di coordinate, T, le k righe "asociate" all'autospazio del modo $U^{k'}_{i}$. nella base degli autospazi dei modi naturali. Nel caso particolare dell' i -mo modo naturale corrispondente ad un autovalore a molteplicità geometrica unitaria, in cui $k = 1$, si esprime come indicato nel caso precedente $v_i'B \neq 0$.

Analogamente per quanto riguarda l'oseervabilità dei modi naturali, il generico i-mo modo naturale di ordine k è osservabile, la sua legge temporale compare nella risposta in evoluzione libera, se per l'autovettore di ordine $\mu_i - k + 1$ vale la condizione

$$Cu_i \neq 0$$

Generalizzando i concetti suesposti si può comprendere che in presenza di modi di ordine superiore ad uno l'eccitabilità e l'osservabilità può non riguardare modi di ordine massimo. Una condizione geometrica corrispondente consiste nel verificare che ImB abbia intersezione non nulla con V_i, l'autospazio associato all'autivalore λ_i, o che V_i non sia contenuto in $KerC$.

Per quanto riguarda i modi naturali che caratterizzano $W(t)$; possiamo affermare che il generico modo di ordine k compare in W se e solo se almeno una colonna della matrice B, pensata come vettore dello spazio di stato, nella sua espressione come somma di autovettori generalizzati comprenda per l'i-mo autospazio un autovettore di ordine k, per l'autovettore di ordine $\mu_i - k + 1$ valga la condizione $Cu_i \neq 0$.

A titolo di esempio si consideri il sistema descritto da

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Si hanno due modi naturali uno di ordine uno ed uno di ordine due; quello di ordine uno e legge temporale $e^{-}t$ è eccitabile, ma non osservabile, mentre quello di ordine due è non eccitabile, ma osservabile. Non si hanno dunque modi simultaneamente eccitabili ed osservabili ciò che si riflette nel fatto che la risposta implusiva è identicamente nulla.

$$(0 \quad 1) \begin{pmatrix} e^{-t} & te{-}t \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

La precedente condizione, con riferimento al generico i -mo modo naturale, nel caso particolare di un autvalore a molteplicità algebrica unitaria, si esprime come:

$$v_i' B \neq 0 \qquad e \qquad Cu_i \neq 0$$

Il modello del comportamento forzato, cioè $W(t)$, è quindi un modello parziale.

Il problema in esame presenta un'ambiguità di fondo nel caso in cui i modi non siano distinti, ciò che corrisponde alla presenza di autovalori a molteplicità algebrica maggiore di uno e diversa da quella geometrica. In questa situazione la condizione di eccitabilità, osservabilità, non può essere formulata come presenza della legge temporale in $H(t)$, in $\Psi(t)$, per una impossibilità intrinseca di distinguere tra i diversi modi che sono, infatti, caratterizzati da leggi di moto non distinte. Si pensi ad un sistema di dimensione due con matrice A diagonale.

L'eccitabilità, l'osservabilità, in questo caso particolare non può che essere formulata e verificata attraverso il formalismo geometrico. Infatti nel caso generale di modi naturali con leggi di evoluzione temporale coincidenti il modo naturale è caratterizzato dall'autospazio ad esso associato. Sono quindi le condizioni di eccitabilità ed osservabilità precedentemente enunciate, che saranno dette **condizioni geometriche**, le condizioni alle quali ci si può riferire. Con riferimento all'esempio precedente una matrice di uscita $C = (1 \quad 0)$ assicura l'osservabilità di un solo modo; $C = (1 \quad 1)$ l'osservabilità di entrambi i modi naturali.

1.7. Appendice 3

1.7.a. Forma spettrale di una matrice

Come è noto nel caratterizzare le forme *semplici* di un operatore lineare un ruolo centrale è svolto dagli autovalori e dagli autovettori.

Ricordiamo che assegnata una matrice A un numero λ ed un vettore u sono detti **autovalore** e corrispondente **autovettore** se

$$(A - \lambda I)v = 0$$

La precedente equazione ha soluzione se λ è zero del *polinomio caratteristico*, $d(\lambda)$, associato alla matrice A

$$d(\lambda) = det(\lambda I - A) = (s - \lambda_1)^{\mu_1} \dots (s - \lambda_r)^{\mu_r}$$

la molteplicità di λ_i come zero di $d(\lambda)$ è detta **molteplicità algebrica**. La molteplicità algebrica del generico autovalore (λ_i sarà andicata con μ_i).

Un altro polinomio che svolge un ruolo importante nella descrizione delle forme di un operatore al variare delle coordinate è il *polinomio minimo.* Dal punto di vista algebrico esso coincide con il minimo comune multiplo dei polinomi a denominatore dell'inversa di $(\lambda I - A)$ e viene indicato con $m(\lambda)$. Si tratta di un polinomio fattore del polinomio caratteristico in quanto esso ha le stesse radici di quest'ultimo, ma ciascuna con una molteplicità m_i, detta **molteplicità geometrica**, che è inferiore o uguale a quella algebrica (μ_i).

$$m(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1} \dots (\lambda - \lambda_r)^{m_r}$$

Utilizzando trasformazioni di coordinate la struttura più semplice è quella diagonale a coefficienti eventualmente complessi e, corrispondentemente, quella quasi diagonale a coefficienti reali

Forma quasi diagonale a coefficienti reali, D, (diagonale per gli autovalori reali e diagonale a blocchi di dimensione due per le coppie di complessi coniugati). Una trasformazione per mettere A in questa forma canonica esiste se la matrice è **regolare** o detto in modo equivalente se tutti gli autovalori hanno molteplicità *geometrica* unitaria. Come si potrebbe mostrare la condizione di molteplicità geometrica unitaria comporta che in corrispondenza di ogni autovalore λ_i di molteplicità algebrica μ_i, è possibile calcolare proprio μ_i autovettorivettori del primo ordine, cioè vettori indipendenti soluzioni di

$$(A - \lambda_i I)u_i = 0$$

Un caso particolare di matrice regolare è quello in cui gli autovalori della matrice hanno molteplicità algebrica unitaria.

La trasformazione che stiamo cercando è quella che corrisponde ad assumere come nuova base dello spazio quella associata agli autovettori del primo ordine. Vettori che, come si può dimostrare, sono tra loro indipendenti.

Si assuma, dunque, A regolare e si immagini, senza perdita di generalità di indicare in modo distinto gli autovalori, detti $\lambda_1, \ldots, \lambda_{m_1}$, $\alpha_1 \pm \jmath\omega_1$, ..., $\alpha_{m_2} \pm \jmath\omega_{m_2}$, con $m_1 + 2m_2 = n$, si ha

$$D = TAT^{-1} = \begin{pmatrix} v_1' \\ \vdots \\ v_{m_1}' \\ v_{1a}' \\ v_{1b}' \\ \vdots v_{m_2a}' \\ v_{m_2b}' \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} u_1 & \ldots & u_{m_1} & u_{1a} & u_{1b} & \ldots & u_{m_2a} & u_{m_2b} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & \lambda_{m_1} & & & & & \\ & & & \alpha_1 & \omega_1 & & & \\ & & & -\omega_1 & \alpha_1 & & & \\ & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & \alpha_{m_2} & \omega_{m_2} \\ & & & & & & -\omega_{m_2} & \alpha_{m_2} \end{pmatrix}$$

dove con v_i' e u_i' si sono indicate le righe della matrice T e le colonne di T^{-1}, rispettivamente.

La precedente rappresentazione costituisce la forma quasi diagonale a coefficienti reali di una matrice. La verifica è presto fatta a partire dalla seguente uguaglianza ottenuta dalla precedente premoltiplicando ambo i membri per T^{-1}

$$A\,(\,u_1 \;\; \dots \;\; u_{m_1} \;\; u_{1a} \;\; u_{1b} \;\; \dots \;\; u_{m_2a} \;\; u_{m_2b}\,) =$$
$$= (\,u_1 \;\; \dots \;\; u_{m_1} \;\; u_{1a} \;\; u_{1b} \;\; \dots \;\; u_{m_2a} \;\; u_{m_2b}\,)\cdot$$
$$\cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & \lambda_{m_1} & & & & & \\ & & & \alpha_1 & \omega_1 & & & \\ & & & -\omega_1 & \alpha_1 & & & \\ & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & \alpha_{m_2} & \omega_{m_2} \\ & & & & & & -\omega_{m_2} & \alpha_{m_2} \end{pmatrix}$$

L'uguaglianza tra le prime m_1 colonne dei prodotti a primo e secondo membro è assicurata dal fatto che λ_i e u_i sono autovalore ed autovettore corrispondente e, quindi, $(A-\lambda_i I)u_i = 0$ ciò che equivale a scrivere $Au_i = \lambda_i u_i$ (essendo Au_i la i-ma colonna del prodotto a primo membro e $\lambda_i u_i$ la $i$ma colonna del prodotto a secondo membro). L'uguaglianza tra le rimanenti colonne è assicurata dalle proprietà sulla parte reale e immaginaria alla quale soddisfano gli autovettori complessi. Se, infatti $\lambda = (\alpha + j\omega)$ è autovalore associato all'autovettore $u = u_a + ju_b$, si ha

$$(A - (\alpha + j\omega)I)(u_a + ju_b) = 0$$

che è equivalente alle due uguaglianze tra parte reale e immaginaria

$$(A - \alpha I)u_a = -\omega u_b \qquad (A - \alpha I)u_b = \omega u_a$$

(ciò che esprime anche che $(A - \lambda^* I)u^* = (A - (\alpha - j\omega)I)(u_a - ju_b) = 0$). Le precedenti uguaglianze sono poi, equivalenti alla seguente uguaglianza matriciale

$$A(u_a u_b) = (u_a u_b)\begin{pmatrix} \alpha & \omega \\ -\omega & \alpha \end{pmatrix}$$

Questa espressione consente di concludere la verifica in esame.

1.8. La forma di Jordan *

Nel caso generale di matrice non regolare, presenza di autovalori a molteplicità geometrica maggiore di uno, la forma canonica più semplice che assume un operatore è quella cosiddetta *a blocchi di Jordan*, J.

In tal caso, scegliendo opportunamente le nuove coordinate negli autospazi associati agli autovalori, autospazi scomponibili a loro volta in sottospazi associati a "catene di autovettori generalizzati", si ottiene una forma del tipo:

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_m \end{pmatrix}$$

se m sono gli autovalori.

La dimensione di J_i è pari alla molteplicità algebrica di λ_i, per un autovalore reale, al doppio della molteplicità algebrica per una coppia di autovalori complessi coniugati.

$$J_\ell = \begin{pmatrix} B_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & B_{\ell_i} \end{pmatrix}$$

è il blocco di Jordan associato all'autovalore i - mo.

$$B_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & \ddots & \lambda_i \end{pmatrix}$$

per un autovalore reale,

$$B_i = \begin{pmatrix} \Lambda_i & I & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & I \\ & & \ddots & \Lambda_i \end{pmatrix}, \quad \Lambda_i = \begin{pmatrix} \alpha_i & \omega_i \\ -\omega_i & \alpha_i \end{pmatrix}$$

per una coppia di autovalori complessi e coniugati. La dimensione massima dei blocchi B_i coincide con l'ordine massimo degli autovettori generalizzati associati all'autovalore λ_i.

Si ricorda che un autovettore generalizzato di ordine k soddisfa le equazioni

$$(A - \lambda_i I)^i u_i \neq 0 \qquad i = 0, \ldots, (k-1) \qquad (A - \lambda_i I)^k u_i = 0$$

Inoltre gli autovettori di ordine superiore u_i^j possono essere calcolati a partire da quelli di ordine inferiore $u_i^{(j-1)}$ risolvendo equazioni del tipo

$$(A - \lambda_i I)^i u_i^j = u_i^{(j-1)}$$

e costruendo quelle che in termini tecnici si chiamano *catene di autovettori*.

Infine si ricorda che una procedura di calcolo fondata sul calcolo di tutti gli autovettori di ordine uno, poi quelli di ordine due a partire da quelli di ordine uno, e così via, fino ad averne calcolati un numero pari alla molteplicità algebrica, consente di trovare la base per la forma di Jordan. Questa risulta composta dall'aggregato delle basi degli autospazi associati a ciascun autovalore, a sua volta costituite dall'aggregato delle catene di autovettori associate a ciascun autovettore di ordine uno.

La verifica che nelle nuove coordinate, definite come l'aggregato delle catene di autovettori, la rappresentazione assunta dall'operatore è quella indicata può essere fatta come indicato nel caso regolare.