

# 1. Rappresentazioni di sistemi lineari, stazionari a dimensione finita: esempi e introduzione allo studio

In questo capitolo si vuole mostrare, con l'ausilio di semplici esempi, che il comportamento di numerosi sistemi fisici, fenomeni e processi, da diversi settori disciplinari, può essere descritto da sistemi di equazioni differenziali, sistemi a tempo continuo, o alle differenze prime, sistemi a tempo discreto, del tipo

$$\Delta x(t) = f(x(t), u(t)) \quad y(t) = h(x(t), u(t)) \quad (1)$$

L'interazione con l'ambiente, che si realizza attraverso gli ingressi,  $u(t)$ , e le uscite,  $y(t)$ , dà vita ad una relazione causa-effetto che si esprime compiutamente impiegando un insieme di variabili ausiliarie, le variabili di stato.

Nell'ipotesi di linearità delle funzioni  $f$  ed  $h$  sui relativi domini la rappresentazione con lo stato (1) assume la forma

$$\Delta x(t) = f(x(t), u(t)) = Ax(t) + Bu(t) \quad x(t_0) = x_0 \in R^n \quad (2.a)$$

$$y(t) = h(x(t), u(t)) = Cx(t) + Du(t) \quad (2.b)$$

dove con il punto viene indicata la derivazione rispetto al tempo,  $A$ ,  $(n \times n)$ , prende il nome di matrice dinamica,  $B$ ,  $(n \times p)$ , matrice degli ingressi,  $C$ ,  $(q \times n)$ , matrice della trasformazione (dello stato) in uscita e  $D$ ,  $(q \times p)$ , matrice del legame diretto ingresso uscita. Si tratta di una rappresentazione con lo stato a dimensione finita pari ad  $n$ , la dimensione del vettore di stato  $x$ , che descrive il comportamento di un dato processo con  $p$  ingressi, la dimensione del vettore  $u$ , e  $q$  uscite, la dimensione di  $y$ .

Una rappresentazione matematica di questo tipo è talvolta intrinseca, è cioè conseguente a specifiche proprietà del sistema fisico, ma, come vedremo, può anche essere impiegata per descrivere in modo approssimato il comportamento del sistema. In altre parole può essere il risultato di un'operazione di approssimazione a partire da un modello più complesso.

### 1.1. Alcuni semplici modelli di sistemi a tempo

#### continuo

Le rappresentazioni lineari stazionarie sono adatte a descrivere, eventualmente in modo approssimato, una vasta gamma di fenomeni di interesse nel settore dell'Ingegneria.

La costruzione di rappresentazioni con lo stato di processi e fenomeni rientra in un contesto più ampio, quello della modellistica, che coinvolge le competenze degli esperti dei diversi settori applicativi. Esso rappresenta di per sé un problema di notevole interesse, ma si pone comunque come un passo preliminare per l'applicazione delle tecniche della Teoria dei Sistemi che sviluppa metodi generali di analisi per classi fissate di rappresentazioni.

Nel seguito viene mostrato, con riferimento a semplici fenomeni, come la conoscenza delle leggi fisiche che sono alla base del comparto applicativo conduca naturalmente alla formulazione del modello "rappresentazione con lo spazio di stato".

### 1.1.a. Un semplice sistema meccanico

La descrizione matematica del moto di un carrello vincolato a muoversi in una prefissata direzione per effetto di forze agenti (esterne o interne) e collegato ad una parete fissa mediante una molla ed uno smorzatore, costituisce un esempio significativo per la varietà di situazioni che, seppure in modo approssimato, può rappresentare.

Se si assume che le forze esterne siano la causa del moto, il modello matematico in esame esprime il legame causa-effetto che sussiste tra forze esterne e andamento nel tempo dello spostamento. Esso cioè fornisce una rappresentazione matematica orientata (ingresso-uscita) del semplice sistema meccanico allo studio.

Si consideri dunque il sistema meccanico in figura in cui la molla e lo smorzatore rappresentano due dispositivi in grado di generare forze interne in presenza di movimento del carrello: una forza che per piccoli spostamenti rispetto ad una posizione di equilibrio può essere assunta proporzionale allo spostamento stesso, la molla, una forza proporzionale alla velocità dello spostamento, lo smorzatore.

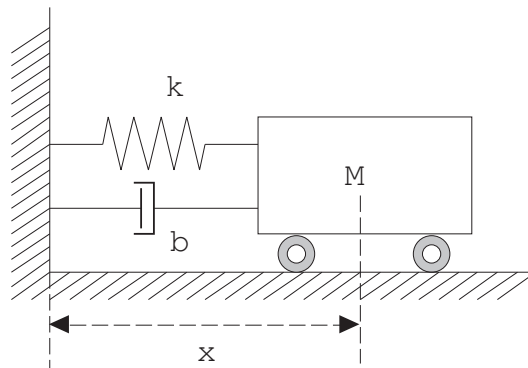


Figura 1.1

Il moto del carrello per effetto di sollecitazioni esterne che agiscono lungo la direzione del moto e per piccoli spostamenti rispetto alla posizione di equilibrio, può essere descritto imponendo l'equilibrio delle forze agenti esterne,  $u(t)$ , ed interne (generate dal moto, dalla molla e dallo smorzatore). Per piccoli spostamenti infatti la molla esercita una forza opposta allo spostamento,

$y(t)$ , e proporzionale al suo modulo secondo una costante elastica  $k$ , mentre lo smorzatore esercita una forza nella stessa direzione e proporzionale alla velocità  $\dot{y}(t)$  secondo un coefficiente di smorzamento  $b$ . Se si indica con  $u(t)$  la forza imposta per sollecitare il movimento, per la seconda legge di Newton che esprime l'equilibrio delle forze agenti sul centro di massa dell'intero dispositivo che è supposto rigido, si ha

$$M\ddot{y}(t) + ky(t) + b\dot{y}(t) = u(t)$$

Una rappresentazione con lo stato può essere facilmente associata alla precedente equazione differenziale che descrive la dinamica del sistema meccanico. A tale proposito è sufficiente fissare come variabili di stato la posizione e la velocità della massa. Questa assunzione può essere compresa anche da un punto di vista intuitivo se si osserva che lo stato è quella variabile che ha in sé al tempo  $t$  tutte le informazioni necessarie a descrivere il comportamento del sistema da  $t$  in poi: in un sistema meccanico rigido, composto dunque da parti assimilabili a punti materiali, rispetto ad ingressi che esprimono forze esterne agenti, la posizione e la velocità dei singoli punti materiali al tempo  $t$  completamente caratterizzano l'evoluzione seguente del sistema per effetto di ogni fissato ingresso. Con questa precisazione si può porre

$$x_1(t) = y(t), x_2(t) = \dot{y}(t),$$

derivando e tenendo conto dell'equilibrio delle forze

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = \frac{-k}{M}x_1(t) + \frac{-b}{M}x_2(t) + \frac{u(t)}{M}$$

$$y(t) = x_1(t)$$

si ottiene una rappresentazione con lo stato in cui

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{-k}{M} & \frac{-b}{M} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \end{pmatrix} \quad C = (1 \quad 0)$$

Si tratta di una rappresentazione lineare stazionaria, a tempo continuo di dimensione due, ad un ingresso, la forza applicata  $u(t)$ , e un'uscita, lo spostamento  $y(t)$ . Questo semplice sistema meccanico è adatto a rappresentare in prima approssimazione diversi fenomeni, anche complessi, di interesse in applicazioni di diversa natura; tra queste: la dinamica di dispositivi di assorbimento delle vibrazioni, sospensioni di veicoli, dinamica semplificata di strutture, ecc.

Con riferimento a questo tipo di modello lo studio del comportamento a regime in presenza di sollecitazioni periodiche assume particolare interesse: si pensi, a tale proposito, ai sistemi meccanici che si è detto esso rappresenta. Questo studio, svolto nel quarto capitolo, consente di stabilire un preciso collegamento tra i metodi di analisi nel dominio del tempo e quelli più tradizionali fondati, appunto, sul comportamento in frequenza.

### 1.1.b. Una rete elettrica elementare

E' data una rete elettrica alimentata in tensione  $u(t)$ , composta da due maglie: la prima con generatore, resistenza  $R_1$  e condensatore  $C$  sul ramo comune, la seconda con condensatore  $C$ , induttanza,  $L$ , e resistenza  $R_2$ .

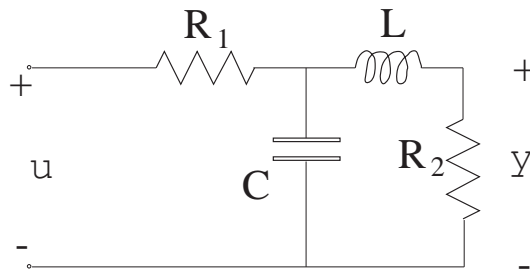


Figura 1.2

Se si assume come uscita la tensione agli estremi della resistenza  $R_2$ , una rappresentazione con lo stato può essere calcolata imponendo l'equilibrio delle tensioni in ogni maglia e delle correnti ai nodi. Si ottiene, dall' equilibrio delle tensioni alla prima maglia

$$u(t) = R_1 i_1(t) + v_c(t) \implies i_1(t) = \frac{u(t) - v_c(t)}{R_1}$$

dalla somma delle correnti al nodo

$$i_1(t) = C \frac{dv_c(t)}{dt} + i_l(t) \implies \frac{dv_c(t)}{dt} = -\frac{1}{R_1 C} v_c(t) - \frac{1}{C} i_l(t) + \frac{u(t)}{R_1 C}$$

dall' equilibrio delle tensioni alla seconda maglia:

$$v_c(t) = L \frac{di_l(t)}{dt} + R_2 i_l(t) \implies \frac{di_l(t)}{dt} = \frac{1}{L} v_c(t) - \frac{R_2}{L} i_l(t)$$

Posto

$$x_1(t) = v_c(t), x_2(t) = i_l(t)$$

si ottiene la seguente rappresentazione con lo stato lineare stazionaria

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{R_1 C} & -\frac{1}{C} \\ \frac{1}{L} & -\frac{R_2}{L} \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} \frac{1}{R_1 C} \\ 0 \end{pmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x(t)$$

Si osservi che è sempre possibile associare ad una rete elettrica composta da resistenze, condensatori, induttanze, trasformatori e giratori ideali una rappresentazione lineare di dimensione pari al numero degli elementi con memoria (condensatori, induttanze, trasformatori e giratori) avendo fissato come variabili di stato le correnti e/o le tensioni su tali elementi.

Problemi caratteristici della teoria delle reti elettriche sono quelli che si riconducono in termini sistemistici alle proprietà degli stati. E' infatti utile nella teoria delle reti elettriche stabilire se per una fissata configurazione prefissati valori di tensione e/o corrente possono essere raggiunti in alcuni rami della rete; se esistono o meno ridondanze nel circuito inessenziali per la caratterizzazione del comportamento ingresso uscita. Tali problemi possono essere formulati e risolti sulla base dei risultati del capitolo sesto.

### 1.1.c. Motore elettrico

Si consideri un motore in corrente continua alimentato in tensione. Tale dispositivo, come è noto trasforma potenza elettrica in potenza meccanica generando una coppia sull'asse del motore per effetto dell'induzione magnetica. La parte elettrica è schematizzabile con una resistenza,  $R$ , un'induttanza,  $L$  ed un generatore di forza contro elettro motrice,  $e_c$ . La parte meccanica può essere schematizzata con un volano di inerzia  $J$  azionato da una coppia  $C_m(t)$  generata per induzione. Si suppone in generale che sia presente un coefficiente di attrito dinamico  $F$ . L'ingresso è la tensione nel circuito di armatura  $u(t)$ , l'uscita è la velocità angolare dell'asse del motore. La parte elettrica è descritta dal legame tra  $u(t)$  e  $i(t)$  che risulta:

$$u(t) = Ri(t) + e_c(t) + L \frac{di(t)}{dt}$$

dove  $e_c(t) = k_c \omega(t)$ . La trasduzione elettrica e meccanica avviene per generazione di una coppia,  $C_m$ , di intensità proporzionale all'intensità della corrente  $i(t)$

$$C_m(t) = k_m i(t)$$

la dinamica della parte meccanica è descritta da

$$J \frac{d\omega(t)}{dt} + F\omega(t) = C_m(t)$$

Si ottiene in definitiva

$$\begin{aligned} \dot{i}(t) &= -\frac{R}{L}i(t) - \frac{k_c}{L}\omega(t) + \frac{1}{L}u(t) \\ \dot{\omega}(t) &= \frac{k_m}{J}i(t) - \frac{F}{J}\omega(t) \end{aligned}$$

Otteniamo in conclusione un sistema lineare stazionario di dimensione due con stato  $x(t) = (i(t) \quad \omega(t))'$ .

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{K_c}{L} \\ \frac{k_m}{J} & -\frac{F}{J} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{pmatrix} \quad C = (O \quad 1)$$

ove si è scelta per uscita la velocità angolare.

Il sistema è per sua natura interconnesso, cioè composto da diversi sottosistemi come risulta dalle precedenti considerazioni modellistiche ed è messo in evidenza nella figura seguente.

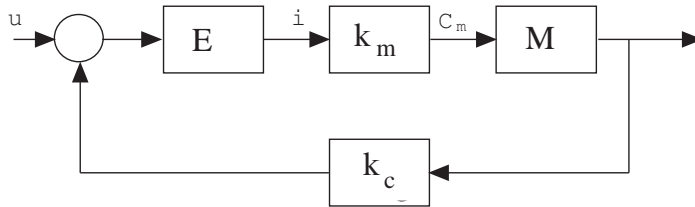


Figura 1.3

Lo studio dei sistemi interconnessi, le modalità di costruzione dei modelli a partire dalle descrizioni delle parti così come lo studio delle proprietà a partire dalle proprietà delle parti sono argomenti importanti della teoria dei sistemi che noi affronteremo per la classe dei sistemi allo studio e limitatamente ad alcuni aspetti nel capitolo ottavo.



## 1.2. Rappresentazioni equivalenti: sistemi a tempo continuo

Il concetto di equivalenza tra rappresentazioni con lo stato è collegato alla non unicità nella scelta dello stato per descrivere un dato fenomeno dinamico. Con riferimento ai semplici esempi esposti è immediato rendersi conto del fatto che scelte diverse sono possibili e che ad esse corrispondono rappresentazioni diverse tra loro. Basta pensare al circuito elettrico: lo stato è rappresentato dalle variabili degli elementi con memoria ed abbiamo scelto tensione e corrente nel caso dell'esempio studiato. Una scelta alternativa ed equivalente per lo scopo sarebbe stata la carica elettrica sul condensatore e il flusso nell'induttanza.

Limitandoci a considerare trasformazioni lineari di variabili di stato lineari mostreremo come calcolare le rappresentazioni con lo stato corrispondenti.

Assegnato il sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t)\end{aligned}$$

con una trasformazione lineare di variabili di stato mediante una matrice  $T$  costante nonsingolare

$$z = Tx \quad |T| \neq 0$$

si ottiene la rappresentazione

$$\begin{aligned}\dot{z}(t) &= T\dot{x}(t) = TAx(t) + TBu(t) = TAT^{-1}z(t) + TBu(t) \\ y(t) &= CT^{-1}z(t) + Du(t)\end{aligned}$$

che è ancora un sistema dello stesso tipo con matrice dinamica  $TAT^{-1}$ , matrice degli ingressi  $TB$ , e matrice delle uscite  $CT^{-1}$ . Lo studente non avrà difficoltà ad applicare le precedenti considerazioni ad alcuni degli esempi precedenti.

Un'osservazione importante che aiuta nel calcolo di una trasformazione di variabile di stato è la seguente: se si ricorda che  $x$  è una  $n$ -pla che rappresenta un vettore, sia  $\mathbf{v}$ , rispetto ad una base di riferimento, cioè

$$x = \sum x_i e_i = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} x_2 + \dots + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} x_n$$

poichè

$$x = T^{-1}z$$

$$(T^{-1})_i = T^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} i - \text{ma}$$

$(T^{-1})_i$ , l'iesima colonna di  $(T^{-1})$ , è la rappresentazione dell'iesimo vettore della nuova base (quella in cui il vettore è rappresentato da  $z$ ) rispetto alla vecchia base (quella in cui il vettore è rappresentato da  $x$ ). Questo vuol dire che effettuare una trasformazione lineare di variabile di stato del tipo  $z = Tx$  significa, da un punto di vista operativo, scegliere una nuova base dello spazio di stato che è rappresentata da  $\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n$  nelle coordinate di  $x$ ; cioè

$$T^{-1} = (\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n)$$

A titolo di esempio il lettore calcoli la trasformazione di coordinate che inverte l'ordine delle variabili di stato.

Un'osservazione conclusiva verte a chiarire, con un semplice esempio, che *esistono rappresentazioni nonlineari di sistemi lineari*. Assegnato, a tal fine, il seguente sistema lineare scalare, i seguenti calcoli sono immediati:

$$\dot{x}(t) = ax(t) + bu(t) \quad z = e^x \quad x = \ln z$$

$$\dot{z}(t) = e^x(ax(t) + bu(t)) = az(t)\ln z(t) + bz(t)u(t)$$

e chiariscono quanto affermato che, cioè esistono rappresentazioni non lineari di sistemi lineari.

### 1.3. Modelli equivalenti di sistemi fisici differenti

Se è vero che esistono modelli matematici diversi (le rappresentazioni equivalenti) che descrivono uno stesso sistema fisico, è anche vero che uno stesso modello può descrivere diversi sistemi fisici. E' proprio questo aspetto, tipico dell'astrazione matematica alla quale ci riferiamo, che orienta verso una classificazione in classi di modelli e allo studio delle proprietà della classe. Questo aspetto viene messo in luce con un semplice esempio.

Si considerino i due sistemi fisici della figura seguente; il primo relativo alla dinamica delle temperature  $T_1$  e  $T_2$  nelle due camere isolate interne ad un componente al variare della temperatura dell'involucro esterno supposto di metallo; il secondo relativo alla dinamica delle tensioni ai capi dei due condensatori del circuito elettrico di figura. Tale circuito può essere considerato l'equivalente elettrico del sistema termico.

Se infatti si assume che la tensione elettrica  $v(t)$  corrisponda alla temperatura  $T(t)$  e la corrente  $i(t)$  corrisponda alla quantità di calore  $q(t)$ , le equazioni di conduzione e immagazzinamento termico

$$q(t) = \frac{1}{R}(T_2(t) - T_1(t)) \quad \frac{dT(t)}{dt} = \frac{q(t)}{C}$$

trovano una corrispondenza immediata nelle equivalenti elettriche

$$i(t) = \frac{1}{R}(v_2(t) - v_1(t)) \quad \frac{dv(t)}{dt} = \frac{i(t)}{C}$$

ove si è assunto che  $R$  e  $C$  rappresentino la resistenza e capacità termica ed elettrica, espresse in *grado/caloria* e *caloria secondo/grado*, *ohm* e *farad*, rispettivamente.

Con le corrispondenze stabilite ( $e_0(t)$  corrisponderà a  $T_0(t)$ ) non è difficile verificare che le seguenti equazioni definiscono una rappresentazione differenziale del circuito valida anche per il sistema termico

$$\begin{aligned}\dot{v}_1(t) &= -\frac{1}{C_1}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)v_1(t) + \frac{1}{C_1 R_3}v_2(t) + \frac{1}{R_1 C_1}e_0(t) \\ \dot{v}_2(t) &= \frac{1}{C_2 R_3}v_1(t) - \frac{1}{C_2}\left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right)v_2(t) - \frac{1}{C_2 R_2}e_0(t)\end{aligned}$$

#### 1.4. Approssimazioni lineari di sistemi non lineari: sistemi a tempo continuo

Abbiamo sinora costruito rappresentazioni lineari di sistemi lineari. E' usuale nella pratica impiegare rappresentazioni lineari per descrivere in modo approssimato sistemi dinamici non lineari intorno a fissati punti di funzionamento (*approssimazioni lineari intorno a punti di equilibrio*).

Questo aspetto è la generalizzazione al caso dei sistemi dinamici, del semplice concetto di approssimazione di una curva nell'intorno di un fissato punto mediante la tangente in quel punto. Con riferimento alla generica funzione non lineare  $f(x)$  intorno ad un valore fissato  $f(x_e)$  lo sviluppo in serie arrestato al primo ordine, fornisce

$$y = f(x) = f(x_e) + \left. \frac{df}{dx} \right|_{x_e} (x - x_e) + \dots$$

e posto  $x_a = x - x_e$ ,  $y_a = y - y_e$ ,  $m = \left. \frac{df}{dx} \right|_{x_e}$ , si ottiene la relazione lineare seguente che approssima la curva intorno ad  $x_e$

$$y_a = m x_a.$$

La stessa idea può essere applicata alla funzione generatrice di un assegnato sistema nonlineare a tempo continuo

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, u) & f(x_e, u_e) &= 0 \\ y &= h(x, u) & h(x_e, u_e) &= h_e\end{aligned}$$

ottenendo:

$$\begin{aligned}
f(x, u) &= f(x_e, u_e) + \left( \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial u} \right) \bigg|_{x_e, u_e} \begin{pmatrix} x - x_e \\ u - u_e \end{pmatrix} + \dots \\
&= f(x_e, u_e) + \frac{\partial f}{\partial x} \bigg|_{x_e, u_e} (x - x_e) + \frac{\partial f}{\partial u} \bigg|_{x_e, u_e} (u - u_e) + \dots
\end{aligned}$$

e posto  $z = x - x_e$ ,  $v = u - u_e$ , si ha, infine:

$$\dot{z}(t) = Az(t) + Bv(t)$$

Allo stesso modo per l'uscita

$$\begin{aligned}
h(x, u) &= h(x_e, u_e) + \left( \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial u} \right) \bigg|_{x_e, u_e} \begin{pmatrix} x - x_e \\ u - u_e \end{pmatrix} + \dots \\
&= h_e + \frac{\partial h}{\partial x} \bigg|_{x_e, u_e} (x - x_e) + \frac{\partial h}{\partial u} \bigg|_{x_e, u_e} (u - u_e) + \dots
\end{aligned}$$

e, quindi l'approssimazione lineare

$$y_a(t) = Cz(t) + Dv(t)$$

Questo è il modello linearizzato che approssima intorno alla coppia  $(x_e, u_e)$  il comportamento del sistema non lineare.  $\frac{\partial f}{\partial x}$  e  $\frac{\partial f}{\partial u}$  sono le derivate del vettore  $f$  rispetto al vettore dello stato  $x$  e al vettore dell'uscita  $u$ , rispettivamente. Si ha per la prima, detta matrice jacobiana,

$$J(x) = \frac{\partial f}{\partial x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

La matrice jacobiana  $(n \times n)$ , calcolata in  $x_e$  e in  $u_e$ , è una matrice costante che abbiamo indicato con  $A$ . Lo stesso per la derivata di  $f$  rispetto ad  $u$ , e naturalmente sarà una matrice  $(n \times p)$ , che abbiamo indicato con  $B$ . Analogamente per  $C$  e  $D$ .

Queste considerazioni estendono la possibilità di utilizzare i modelli lineari. La teoria lineare consente, dunque, di studiare localmente sistemi non

lineari. L'interesse del passaggio al modello approssimato non risiede, tuttavia, nell'uso del modello per descrivere il comportamento del sistema dato quanto nel suo impiego per inferire alcune proprietà inerenti il comportamento del sistema non lineare dato. Tra queste la proprietà di stabilità come sarà mostrato nel capitolo quinto.

#### 1.4.a. Due esempi di applicazione

##### *Pendolo*

Si consideri un pendolo di massa  $m$ , sospeso ad un'asta rigida di peso trascurabile di lunghezza  $l$  su cui agisce secondo la tangente al moto una forza esterna  $u(t)$ . Si vuole scrivere un modello matematico che rappresenti lo spostamento sull'orizzontale, con origine nel punto di equilibrio, della proiezione lungo la verticale della massa del pendolo. L'equilibrio delle forze lungo la tangente al moto consente di scrivere

$$ml\ddot{\theta}(t) + mg\sin\theta(t) + kl\dot{\theta}(t) = u(t)$$

Dove  $u$  rappresenta la forza esterna agente, e  $k$  è un coefficiente di attrito dinamico. Ponendo  $x_1(t) = \theta(t)$  e  $x_2(t) = \dot{\theta}(t)$  si ha, per quanto riguarda le equazioni di stato,

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= \frac{-g}{l}\sin x_1(t) - \frac{k}{m}x_2(t) + \frac{1}{ml}u(t)\end{aligned}$$

cioè una rappresentazione non lineare del tipo

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{ml} \end{pmatrix} u(t)$$

Per quanto riguarda l'uscita con semplici calcoli trigonometrici si ottiene

$$y(t) = 2l\sin\frac{x_1(t)}{2}\cos x_1(t)$$

Il calcolo delle coppie di equilibrio corrispondenti ad ingresso nullo,  $u_e = 0$ , fornisce  $x_{e2} = 0$ ,  $x_{e1} = h\pi$  cioè tutti gli stati di equilibrio con la massa nelle posizioni verticali sopra e sotto il punto di attacco. Intorno agli stati di equilibrio sopra il punto di attacco si ha il modello linearizzato:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= \frac{g}{l}x_1(t) - \frac{k}{m}x_2(t) + \frac{1}{ml}u(t) \\ y(t) &= lx_1(t)\end{aligned}$$

per gli altri:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -\frac{g}{l}x_1(t) - \frac{k}{m}x_2(t) + \frac{1}{ml}u(t) \\ y(t) &= lx_1(t)\end{aligned}$$

#### *Dinamica di due specie interagenti*

Il seguente modello che descrive la dinamica di due specie interagenti, preda e predatore, è stato introdotto nel 1926 dal matematico italiano Vito Volterra e prende il suo nome. Tale modello riesce ad interpretare l'aspetto più saliente di tale fenomeno: si tratta della presenza di situazioni di equilibrio che, se perturbate, vedono insorgere fenomeni di oscillazione (alternanza di sviluppo tra le specie).

Si assume, nella formulazione del modello, che:

- la preda cresce, in assenza di predazione, secondo la cosiddetta *equazione logistica*

$$\dot{x}_1(t) = ax_1(t) - kx_1^2(t)$$

(si tratta di un'equazione differenziale che mette bene in evidenza sia un andamento esponenziale della crescita nella fase iniziale dell'evoluzione e per modesti valori di densità, sia una tendenza asintotica ad un valore limite,  $\frac{a}{k}$ )

(capacità portante), che tiene conto di fattori limitanti quali, ad esempio, la limitatezza delle risorse);

- il predatore ha come unico sostentamento la preda ed in assenza di questa diminuisce secondo un andamento esponenziale governato dalla seguente equazione differenziale

$$\dot{x}_2(t) = -cx_2(t)$$

- il tasso di predazione è proporzionale al prodotto degli individui delle due specie

Con queste assunzioni le equazioni che descrivono l'evoluzione delle specie possono essere facilmente dedotte dalle precedenti equazioni. Si ottiene:

$$\dot{x}_1(t) = ax_1(t) - bx_1(t)x_2(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = -cx_2(t) + dx_1(t)x_2(t)$$

$$y_1(t) = x_1(t) \quad y_2(t) = x_2(t)$$

Si ha quindi ancora una volta un modello nonlineare dello stesso tipo del precedente. Come è facile verificare si hanno in questo caso due punti di equilibrio: uno banale, corrispondente all'assenza di specie, l'altro

$$x_2(-c + dx_1) = 0 \rightarrow x_{1e} = \frac{c}{d}$$

$$x_1(a - kx_1 - bx_2) = 0 \rightarrow x_{2e} = \frac{ad - kc}{bd}$$

Intorno a tale punto di equilibrio l'evoluzione è approssimata da un sistema lineare in evoluzione libera con

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{kc}{d} & -\frac{bc}{d} \\ \frac{ad-kc}{b} & 0 \end{pmatrix}$$

### 1.5. Ulteriori esempi di sistemi a tempo continuo\*



### 1.5.a. Circuito con diodo Tunnel

Con riferimento al circuito di Figura 5 le condizioni di equilibrio delle tensioni e delle correnti danno

$$u(t) = Ri_l(t) + v_c(t) + v_l(t)$$

$$i_C(t) = i_l(t) - i_T(t)$$

L'andamento della corrente nel diodo dipende dalla tensione ai suoi capi secondo una relazione non lineare,  $i_T = h(v_T)$  riportata nel grafico di Figura 6. Con ovvi passaggi dalle precedenti uguaglianze si ottiene

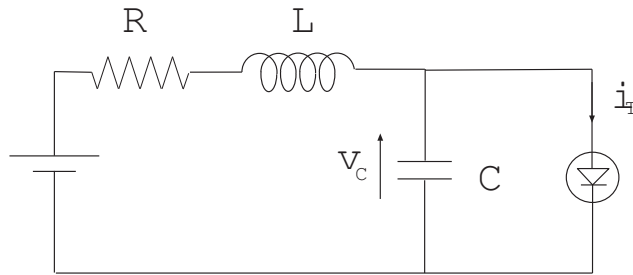


Figura 1.4

$$C \frac{dv_c(t)}{dt} = i_l(t) - h(v_c(t))$$

$$L \frac{di_l(t)}{dt} = -v_c(t) - Ri_l(t) + u(t)$$

Con posizioni analoghe alle precedenti

$$x_1(t) = v_c(t) \quad x_2(t) = i_l(t)$$

si ottiene la seguente rappresentazione con lo stato

$$\dot{x}_1(t) = -\frac{h(x_1(t))}{C} + \frac{x_2(t)}{C}$$

$$\dot{x}_2(t) = -\frac{x_1(t)}{L} - \frac{R}{L}x_2(t) + \frac{1}{L}u(t)$$

Le condizioni di equilibrio possono essere calcolate risolvendo il sistema di equazioni

$$0 = -\frac{h(x_1)}{C} + \frac{x_2}{C}$$

$$0 = -\frac{x_1}{L} - \frac{R}{L}x_2 + \frac{1}{L}U$$

Risolvendo rispetto ad  $x_2$  si ottiene l'uguaglianza

$$\frac{U}{R} - \frac{1}{R}x_1 = h(x_1)$$

che per fissati valori di  $U$  ed  $R$  ammette o una o tre soluzioni come risulta evidente dalla Figura 6

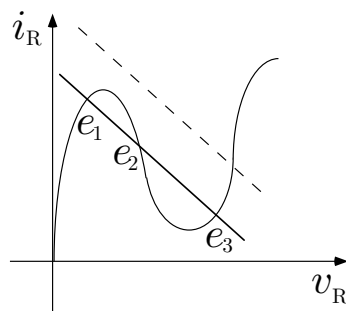


Figura 1.5

Il circuito in esame dal punto di vista sperimentale manifesta un comportamento cosiddetto bi-stabile sui due stati di equilibrio  $e_1$  ed  $e_3$  in risposta a sollecitazioni impulsive di sufficiente ampiezza.

Come si potrà verificare sulla base della teoria esposta nel capitolo 7, tale comportamento dipende dalle proprietà degli stati di equilibrio risultando  $e_1$  ed  $e_3$  stabili ed  $e_2$  instabile.

Riservandoci di riprendere lo studio con una delle tecniche di indagine che studieremo, l'andamento del comportamento effettivo può essere verificata mediante simulazione numerica. A tale proposito si possono assumere i seguenti valori dei parametri (come suggerito in L.O.Chua, C.A.Desoer and E.S.Kuh, Linear and Nonlinear Circuits, McGraw-Hill, New York, 1987)  $u = 1.2V$ ,

$R = 1.5Kohm$ ,  $C = 2pF$ ,  $L = 5\mu H$ , effettuando una scalatura dei tempi ai nanosecondi e misurando le correnti in milli ampere le equazioni del circuito diventano

$$\dot{x}_1(t) = 0.5[-h(x_1) + x_2]$$

$$\dot{x}_2(t) = 0.2(-x_1 - 1.5x_2 + 1.2)$$

Per  $h(x_1)$  si può assumere

$$h(x_1) = 17.76x_1 - 103.79x_1^2 + 229.62x_1^3 - 226.31x_1^4 + 83.72x_1^5$$

In tali condizioni si possono calcolare i punti di equilibrio  $e_1 = (0.063, 0.758)$ ,  $e_2 = (0.285, 0.61)$  e  $e_3 = (0.884, 0.21)$ . Le simulazioni effettuate a partire da diversi stati iniziali  $(x_1(0), x_2(0))$  mostrano la presenza di due famiglie di traiettorie convergenti su  $e_1$  ed  $e_2$  e separate da una curva, detta separatrice, passante per  $e_2$  e composta da due traiettorie convergenti su  $e_2$ . L'intero piano è quindi diviso in due regioni di attrazione di  $e_1$  ed  $e_3$ . Ciò consente di comprendere il comportamento reale del circuito in cui a partire dalla generica condizione iniziale il circuito transita nella corrispondente condizione di equilibrio, la condizione  $e_2$  non potendo essere mantenuta per la presenza del rumore fisico. La transizione da un equilibrio all'altro avviene a seguito della presenza di un'eccitazione che conduce lo stato iniziale nella regione di attrazione opposta.

### 1.5.b. Dinamica newtoniana

La dinamica del moto rettilineo di traslazione di un corpo rigido sottoposto ad una forza esterna  $u(t)$ , può essere ottenuta a partire dall'espressione seguente che esprime l'equilibrio delle forze agenti

$$m\ddot{y}(t) + f_a(t) + f_e(t) + f_v(t) = u(t)$$

in cui,  $f_f$  rappresenta l'attrito coulombiano e dinamico,  $f_e$  una eventuale forza elastica ed  $f_v$  uno smorzamento viscoso.

Diverse rappresentazioni matematiche delle forze agenti possono essere usate per descrivere il fenomeno.

Per quanto riguarda la forza elastica essa dipende dallo spostamento. In prima approssimazione è ben rappresentata, per piccoli spostamenti da una relazione lineare del tipo

$$f_e = ky$$

Per spostamenti significativi, una delle due seguenti relazioni può essere impiegata

$$k(1 - a^2y^2)y \quad |ay| < 1$$

che modella una diminuzione della forza elastica all'aumentare dello spostamento corrispondente ad un cedimento delle caratteristiche elastiche ; oppure una relazione del tipo

$$k(1 + a^2y^2)y$$

che modella una aumento della forza elastica all'aumentare dello spostamento corrispondente ad un irrigidimento delle caratteristiche elastiche.

Per quanto riguarda l'attrito viscoso  $f_v = h(\dot{y})$ ,  $h(0) = 0$  e per piccole velocità si può assumere  $f_v = c\dot{y}$ .

Combinando uno smorzamento viscoso lineare con una forza elastica irrigidente ed una sollecitazione esterna periodica  $A\cos\omega t$  si ottiene l'equazione di Duffin

$$m\ddot{y}(t) + c\dot{y}(t) + Ky(t) + Ka^3y^3 = A\cos\omega t$$

classica nello studio delle eccitazione periodica di dinamiche non lineari.

Infine, per quanto riguarda la forza di attrito  $f_a$ , essa manifesta un comportamento che dipende dalle condizioni di moto. In condizioni di riposo si ha una forza,  $f_s$ , parallela alla superficie che assume valori qualsiasi tra  $-\mu_s mg$ ,  $\mu_s$  coefficiente di attrito statico compreso tra 0 ed 1. Il moto avviene

in presenza di una forza agente superiore al citato valore limite. In assenza di forze esterne la massa resta ferma fino a quando  $|f_e| \mu_s mg$ . In movimento la forza di attrito assume il valore  $\mu_k mg$ ,  $\mu_k$  coefficiente di attrito dinamico. In conclusione si ha

$$f_a = \mu_k mg \operatorname{sign}(\dot{y}) \text{ per } |\dot{y}| > 0 \text{ e } f_a = f_s \text{ per } |\dot{y}| = 0.$$

La dinamica dello spostamento in regime di piccoli spostamenti, in presenza di smorzamento viscoso lineare e attrito di stacco e dinamico assume, nelle variabili di stato  $x_1 = y$  e  $x_2 = \dot{y}$ :

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = \frac{-k}{M}x_1(t) + \frac{-b}{M}x_2(t) + \frac{u(t)}{M} - \eta(x_1, x_2)$$

in cui la funzione nonlineare  $\eta$  vale  $\mu_k mg \operatorname{sign}(\dot{y})$  per  $|\dot{y}| > 0$ ,  $-ky$  per  $\dot{y} = 0$  e  $|y| \mu_s mg/k$  e  $-\mu_s mg \operatorname{sign}(y)$  per  $\dot{y} = 0$  e  $|y| > \mu_s mg/k$ .

E' possibile semplificare l'analisi per studiare le situazioni in cui  $x_2$  è diverso da zero. Per  $x_2 > 0$  si ottiene

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = \frac{-k}{M}x_1(t) + \frac{-b}{M}x_2(t) + \frac{u(t)}{M} - \mu_k g$$

e per  $x_2 < 0$

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = \frac{-k}{M}x_1(t) + \frac{-b}{M}x_2(t) + \frac{u(t)}{M} + \mu_k g$$

Si osservi che modelli lineari approssimanti diversi possono essere calcolati per descrivere la dinamica in diverse condizioni di funzionamento. Modellistica lineare a tratti.

## 1.5.c. Satellite in orbita circolare

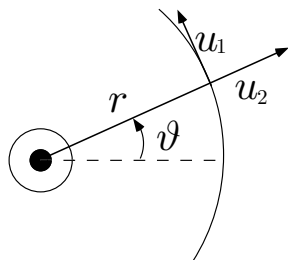


Figura 1.6

Si consideri la dinamica di un satellite artificiale che in coordinate polari è espressa dalle due equazioni differenziali del secondo ordine

$$\ddot{r}(t) = r(t)\dot{\theta}^2(t) - \frac{\beta}{r(t)^2} + u_1(t)$$

$$\ddot{\theta}(t) = -2\frac{\dot{r}(t)\dot{\theta}(t)}{r(t)} + \frac{u_2(t)}{r(t)}$$

In assenza di spinta radiale  $u_1$  e tangenziale  $u_2$  le soluzioni sono ellissi, iperboli o parabole. L'orbita più semplice è una circonferenza

$$r(t) = c_1 \quad \theta(t) = c_2$$

Con  $r(0) = r_0$ ,  $\dot{r}(0) = 0$ ,  $\theta(0) = \theta_0$ ,  $\dot{\theta}(0) = \omega_0$  e  $\omega_0 = (\frac{\beta}{r_0^3})^{\frac{1}{2}}$

L'orbita nominale è dunque descritta da

$$r_r(t) = r_0 \quad \theta_r(t) = \omega_0 t + \theta_0$$

Posto  $x_1 = r$ ,  $x_2 = \dot{r}$ ,  $x_3 = \theta$ ,  $x_4 = \dot{\theta}$  si ottiene la seguente rappresentazione con lo stato

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = x_1(t)x_4^2(t) - \beta \overline{v} x_1^2(t) + u_1(t)$$

$$\dot{x}_3(t) = x_4(t)$$

$$\dot{x}_4(t) = -2 \frac{x_2(t)x_4(t)}{x_1(t)} + \frac{u_2(t)}{x_1(t)}$$

La linearizzazione della dinamica, cioè la descrizione degli scostamenti rispetto all'orbita nominale

$$u_r(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad x_r(t) = \begin{pmatrix} r_0 \\ 0 \\ \omega_0 t + \theta_0 \\ \omega_0 \end{pmatrix}$$

dà la seguente rappresentazione lineare stazionaria

$$\dot{z}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3\omega_0^2 & 0 & 0 & 2r_0\omega_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2\frac{\omega_0}{r_0} & 0 & 0 \end{pmatrix} z(t) + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & r_0 \end{pmatrix} u(t)$$

## 1.6. Dinamica verticale di un missile

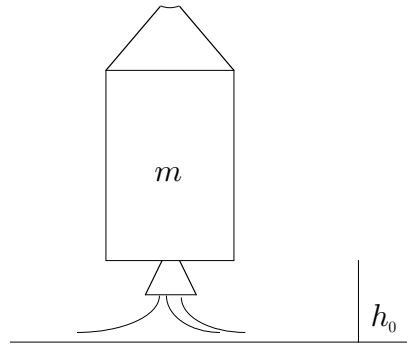


Figura 1.7

L'equilibrio delle forze agenti sul missile di figura si scrive

$$m(t)\dot{v}(t) = -m(t)g + v_e\dot{m}(t)$$

dove  $v_e$  rappresenta la velocità relativa della massa espulsa, assunta costante. Posto  $x_1 = h$ ,  $x_2 = v$  e  $x_3 = m$  si ottiene la seguente rappresentazione con lo stato

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} x_2 \\ -g + \frac{v_e u(t)}{x_3} \\ u(t) \end{pmatrix}$$

Nel caso particolare, molto frequente nella pratica, in cui si assume una variazione di massa,  $u_0$ , costante, ciò che corrisponde ad assumere che

$$m(t) = m_0 + u_0 t$$

si ottiene

$$m(t)\dot{v}(t) = -m(t)g + v_e u_0$$

e, posto  $x_1 = h$ ,  $x_2 = v$ ,

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ -g + \frac{v_e u_0}{(m_0 + u_0 t)} \end{pmatrix} \\ y(t) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x(t) \quad x(0) = 0 \end{aligned}$$

Le variazioni delle evoluzioni rispetto ad un andamento di riferimento, quello in cui si assume la variazione di massa costante, sono rappresentate dalla linearizzazione intorno alla seguente traiettoria di riferimento

$$x_{3r}(t) = m_0 + u_0 t$$

$$x_{2r}(t) = -gt + v_e \ln\left(1 + \frac{u_0}{m_0} t\right)$$

$$x_{1r}(t) = -\frac{g}{2}t^2 + \frac{m_0 v_e}{u_0} \left[ \left(1 + \frac{u_0}{m_0} t\right) \ln\left(1 + \frac{u_0}{m_0} t\right) - \frac{u_0}{m_0} t \right]$$

Nelle variabili  $z = x - x_r$  e  $v = u - u_r$ , si ottiene:



$$\dot{z}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{v_e u_0}{(m_0 + u_0 t)^2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} z(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v_e}{(m_0 + u_0 t)} \\ 1 \end{pmatrix} v(t) \quad z(0) = x(0) - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ m_0 \end{pmatrix}$$

### 1.7. Motore elettrico in corrente continua

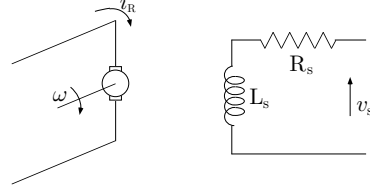


Figura 1.8

Si vuole calcolare il modello matematico che descrive la dinamica del motore elettrico in corrente continua di figura. Si assume che l'ingresso sia la tensione del circuito di eccitazione,  $u(t) = v_s(t)$ . Per il circuito d'eccitazione vale la seguente equazione alla maglia che esprime l'equilibrio delle tensioni

$$V_s(t) = R_s i_s(t) + L_s \frac{di_s(t)}{dt}$$

Il flusso generato può essere espresso da

$$\Phi(t) = L_s i_s(t)$$

Per il circuito d'armatura, vale la seguente equazione che esprime l'equilibrio delle tensioni:

$$V_r(t) - e_c(t) = R_r i_r(t) + L_r \frac{di_r(t)}{dt}$$

in cui la forza contro elettro motrice è pari a

$$e_c(t) = k_c \Phi(t) \omega(t).$$

Infine, per quanto riguarda la parte meccanica si ha

$$J \frac{d\omega(t)}{dt} + F\omega(t) = C_m(t)$$

in cui la coppia motrice,  $C_m$ , è data da

$$C_m(t) = k_m \Phi(t) i_r(t)$$

Nell'ipotesi di trasformazione senza perdite della potenza elettrica in potenza meccanica  $K_c = K_m = K$ , e posto  $x_1 = i_s$ ,  $x_2 = i_r$  e  $x_3 = \omega$  Si ottiene il modello matematico

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= -\frac{R_s}{L_s}x_1(t) + \frac{1}{L_s}u(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -\frac{R_r}{L_r}x_2(t) + \frac{V_r}{L_r} - \frac{KL_s}{L_r}x_1(t)x_3(t) \\ \dot{x}_3(t) &= -\frac{F}{J}x_3(t) + \frac{KL_s}{J}x_1(t)x_2(t)\end{aligned}$$

Si tratta ancora una volta di un modello nonlineare che può essere linearizzato intorno a condizioni di equilibrio per descrivere in modo approssimato il comportamento del sistema per piccole variazioni rispetto a tale situazione di equilibrio.

Per concludere si osservi che se si assume costante la corrente del circuito di eccitazione si ottiene il modello lineare introdotto al paragrafo 2.1.c..

## 1.8. Levitazione magnetica

Si consideri il dispositivo in figura in cui una bobina elettromagnetica viene alimentata in corrente per sostenere il peso di una sfera e mantenerla in equilibrio ad una distanza  $x_e$  dalla bobina.

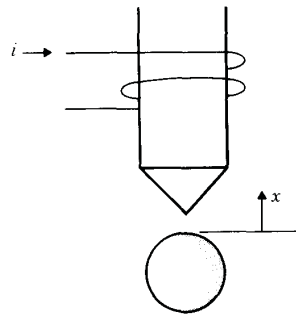


Figura 1.9

La forza di attrazione esercitata su di un corpo metallico in funzione della distanza per diversi valori della corrente è rappresentata nei grafici di figura.

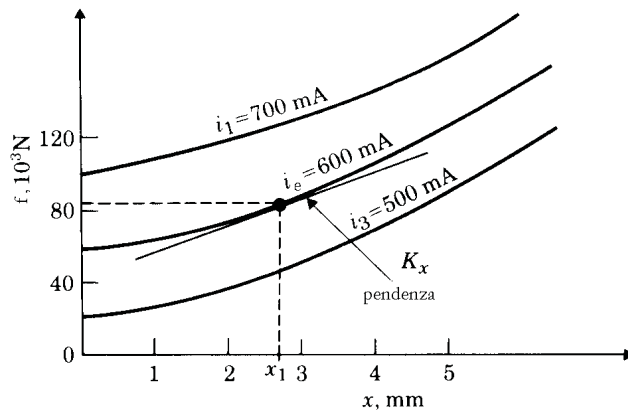


Figura 1.10

Da essi si deduce che una pallina del peso di  $8210^{-3}$  Newton può essere mantenuta in equilibrio ad una distanza di 2.7 mm con una corrente di 600 mA.

Indicata con  $M$  la massa della pallina e con  $f(x, i)$  la forza esercitata dalla bobina, Il bilancio delle forze in un punto sulla verticale ad una distanza  $x$  si

scrive

$$M\ddot{x}(t) = f(x(t), i(t)) - Mg$$

dove  $g$  indica l'accelerazione di gravità.

Intorno a  $x_e$  vale l'approssimazione lineare per  $f(x, i)$

$$f(x, i) = f(x_e, i_e) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_e, i_e)(x - x_e) + \frac{\partial f}{\partial i}(x_e, i_e)(i - i_e)$$

Le derivate rispetto a  $x$ ,  $k_x$ , e ad  $i$ ,  $k_i$ , si calcolano nel modo seguente.  $k_x$  è la pendenza alla curva a corrente costante pari ad  $i_e$  nel punto di ascissa  $x_e$ ; nel caso in esame risulta pari a 14 N/m.  $k_i$  corrisponde alla variazione di forza, in  $x_e$ , rispetto alla corrente; nel caso in esame per  $i_1 = 700mA$  la forza è pari a  $12210^{-3}N$  e per  $i_3 = 500mA$  la forza è pari a  $4210^{-3}N$ . Si ha dunque

$$k_i = \frac{(122 - 42)10^{-3}}{700 - 500} = 0.4N/A$$

Sostituendo i valori numerici, si ottiene la seguente equazione differenziale, che governa il moto intorno all'equilibrio ( $\zeta = x - x_e$  e  $u = \delta i$ )

$$(3210^{-3})\ddot{\zeta}(t) = 14\zeta(t) + 0.4\delta i(t) \quad \ddot{\zeta}(t) = 1667\zeta(t) + 47.6u(t)$$

Per evitare che nell'esecuzione di procedure numeriche di simulazione e calcolo i valori delle variabili trattate siano troppo diverse tra loro (o troppo grandi o piccole in assoluto rispetto alle caratteristiche del sistema di elaborazione), ciò che comporterebbe una non omogenea propagazione di errori di arrotondamento (o fenomeni di saturazione), è buona pratica fare in modo che i coefficienti delle equazioni assumano valori confrontabili. Valori tra 0.1 e 10 rappresentano una situazione auspicabile. Per fare questo si può procedere ad una scalatura delle variabili, ciò che ha anche un interesse fisico in quanto corrisponde ad una selezione delle unità di misura (scalatura delle variabili) e della velocità di esecuzione (scalatura del tempo) più consona allo studio del fenomeno. Nel caso in esame, ad esempio, nella precedente equazione le distanze sono espresse in metri, mentre un'unità in mm è certamente più adatta a descrivere il fenomeno.

Ad un primo livello di generalità possiamo dire che una scalatura delle variabili corrisponde ad assumere una nuova variabile,  $v_n$ , a partire da una assegnata,  $v$ , e una nuova variabile temporale,  $t_n$ , in luogo di  $t$ , secondo le espressioni seguenti

$$v_n = \frac{v}{v_0} \quad \frac{t_n}{t} = \frac{\omega_0}{\omega_0}$$

Se si osserva che l'effetto della scalatura rispetto al tempo comporta che

$$\frac{d(\cdot)}{dt} = \frac{d(\cdot)}{d(t_n/\omega_0)} = \omega_0 \frac{d(\cdot)}{dt_n}$$

sostituendo nell'equazione del moto allo studio si ottiene

$$(\omega_0^2 \zeta_0 d^2) \frac{\zeta_n(t)}{dt_n^2} = (1667 \zeta_0) \zeta_n(t) + (47.6 u_0) u(t)$$

cioè

$$\frac{d^2 \zeta_n(t)}{dt_n^2} = \frac{1667}{\omega_0^2 \zeta_0} \zeta_n + \frac{47.6 u_0}{\omega_0^2 \zeta_0} u(t)$$

Scegliendo  $\omega_0^2 = 1667$  ( $\omega_0$  circa uguale a 40) il coefficiente di  $\zeta(t)$  è pari ad uno ciò che corrisponde ad assumere una scala dei tempi pari a  $\frac{1}{40}$  secondi. Se inoltre gli spostamenti vengono misurati in cm e le correnti in Ampere, cioè si sceglie  $\zeta_0 = 0.01$  e  $u_0 = 1$ , si ottiene l'equazione

$$\frac{d^2 \zeta_n(t)}{dt_n^2} = \zeta(t) + 2.86 u(t)$$

### Messa in scala

Con riferimento al caso generale di un sistema di equazioni differenziali lineari del primo ordine nella variabile di stato  $x \in R^n$  ed ingresso  $u \in R^p$ , l'operazione di messa in scala conduce al seguente sistema

$$\dot{x}_n(t) = \frac{1}{\omega_0} S_x^{-1} A S_x + \frac{1}{\omega_0} S_x^{-1} B S_u u_n$$

in cui il numero reale  $\omega_0$  rappresenta la variazione di scala temporale ed  $S_x$  ed  $S_u$  sono matrici diagonali quadrate,  $(n \times n)$  e  $(p \times p)$ , dei coefficienti di scalatura associate alla trasformazione

$$x_n = S_x^{-1}x \quad u_n = S_u^{-1}u.$$

## 1.9. I sistemi a tempo discreto

Se la variabile temporale evolve a intervalli regolari di ampiezza prefissata, assunta per convenzione unitaria, il sistema dinamico è a tempo discreto. Lo studio dei sistemi lineari a tempo discreto presenta una forte analogia con quello svolto per i sistemi a tempo continuo e i risultati molto spesso ammettono la stessa formulazione. Sarà quindi possibile, seguendo la stessa linea di presentazione introdurre in questo capitolo i principali risultati di analisi.

### 1.9.a. Sistemi lineari stazionari a tempo discreto

Se la variabile temporale è discreta e nell'ipotesi di linearità della funzione generatrice  $f$  sullo spazio prodotto  $(X \times U)$  la rappresentazione assume la forma.

$$x(t+1) = f(x(t), u(t)) = Ax(t) + Bu(t) \quad x(t_0) = x_0 \in R^n \quad (9.1.a)$$

$$y(t) = \eta(x(t), u(t)) = Cx(t) + Du(t) \quad (9.1.b)$$

Il **modello implicito** ora introdotto suggerisce immediatamente uno schema fisico mediante il quale realizzare il sistema impiegando dispositivi che generano un ritardo, fanno la somma istante per istante di funzioni e la moltiplicazione per costanti. Lo schema, riportato in Figura 9.1 comprende blocchi,  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ , costituiti da moltiplicatori per costanti,  $n$  operatori di ritardo, mette in luce la struttura possibile del legame ingresso uscita; vi è una parte che mette in evidenza un calcolo iterativo ed è propria della parte puramente dinamica ed una parte istantanea.

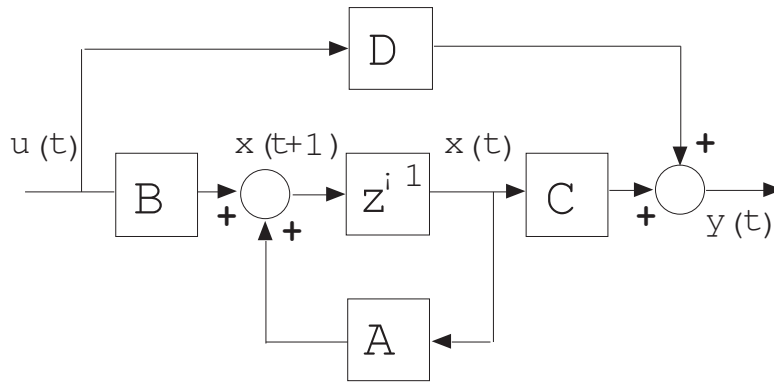


Figura 1.11

### 1.9.b. Rappresentazioni a tempo discreto di sistemi a tempo continuo

Le rappresentazioni lineari a tempo discreto possono essere impiegate per descrivere o approssimare sistemi a tempo continuo come viene precisato nel seguito.

Assegnato un sistema a tempo continuo in cui gli ingressi sono costanti a tratti su intervalli di ampiezza fissa, se si è interessati a calcolare le evoluzioni negli istanti, detti di campionamento, corrispondenti alla variazione dell'ingresso è possibile ricondursi ad un sistema a tempo discreto. La situazione è rappresentata nella figura 9.2; il calcolo del modello discreto equivalente è noto come problema della **discretizzazione**. Tale problema trova applicazione nello studio di sistemi reali collegati a dispositivi digitali; in tali circostanze l'ingresso è costante a tratti e le grandezze sono tutte ricondotte ad una scala temporale discreta multipla del ciclo di calcolo elementare.

Una diversa circostanza che conduce a riferirsi al problema della discretizzazione è quando gli ingressi continui vengono campionati, come indicato nella figura 9.3; in tal caso il modello discreto descrive in modo approssimato il comportamento campionato del sistema a tempo continuo.

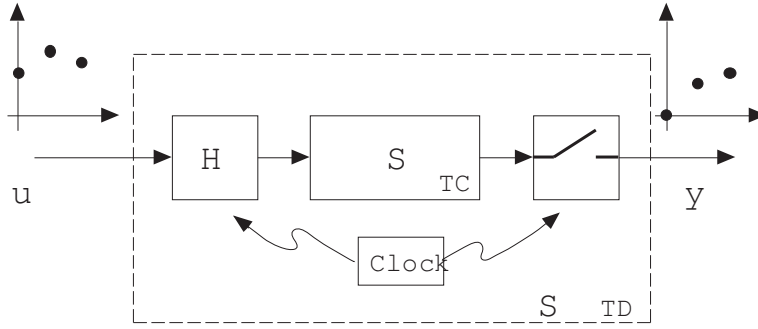


Figura 1.12

La rappresentazione a tempo discreto che descrive i legami ingresso stato e stato uscita può essere calcolata senza difficoltà calcolando l'evoluzione nello stato e in uscita tra due istanti di campionamento e ricordando che l'ingresso è costante tra gli istanti di campionamento. A parte dal sistema continuo

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad x(t_0) = x_0$$

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau \quad \begin{matrix} t_0 = kT \\ t = (k+1)T \end{matrix}$$

$$x((k+1)T) = e^{AT}x(kT) + \int_{kT}^{(k+1)T} e^{A((k+1)T-\tau)}d\tau Bu(kT) \quad (k+1)T - \tau = \xi$$

$$x((k+1)T) = e^{AT}x(kT) + \int_0^T e^{A\xi}d\xi Bu(k)$$

Se per convenzione assumiamo che l'intervallo temporale di ampiezza  $T$  coincida con il passo unitario del sistema a tempo discreto che si considera, ecco che l'espressione rappresenta un sistema a tempo discreto.

$$\begin{cases} x(k+1) = A_D x(k) + B_D u(k) \\ y(k) = C x(k) \end{cases}$$

ove

$$A_D = e^{AT} \quad B_D = \int_0^T e^{A\xi}d\xi B \quad C_D = C$$



Alcune considerazioni sul calcolo del sistema discretizzato a partire dalla rappresentazione con lo stato. Nei casi pratici è frequente calcolare  $A_D, B_D$  per via numerica a partire da  $A, B$  e  $T$  ed impiegando l'espressione dello sviluppo in serie di  $e^{AT}$ .

$$e^{AT} = I + AT + \frac{T^2}{2}A^2 + \dots + \frac{T^n}{n!}A^n +$$

E' chiaro che arrestando il calcolo in corrispondenza di un  $n$  sufficientemente grande l'errore che si commette è piccolo.

Una procedura sistematica per effettuare l'approssimazione è quella qui di seguito indicata. Si definisca

$$\psi_n := I + \frac{TA}{2} \left( I + \frac{TA}{3} \left( \dots \frac{TA}{n-1} \left( I + \frac{TA}{n} \right) \right) \dots \right) = I + \frac{TA}{2} + \frac{T^2 A^2}{3!} + \dots$$

in cui  $n$  è scelto in modo che sia soddisfatta la seguente disequaglianza  $\frac{T\|A\|}{n} < \epsilon$ . Come è facile verificare, risulta:

$$A_D = I + TA \left( I + \frac{TA}{2} + \frac{T^2 A^2}{3!} + \dots \right)$$

e quindi con buona approssimazione

$$A_D \cong I + TA \cdot \psi_n$$

e, allo stesso modo

$$B_D \cong \psi_n \cdot B$$

Un'approssimazione che spesso si trova nelle applicazioni è quella classica cosiddetta di Eulero che corrisponde ad approssimare la derivata con il suo rapporto incrementale; tale approssimazione, valida per  $T$  molto piccolo, dà:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$\downarrow$$

$$x(k+1) = x(k) + TA x(k) + TB u(k)$$

### 1.9.c. Alcuni semplici esempi

Alcuni semplici esempi nel seguito mettono in evidenza che di norma è la rappresentazione implicita il punto di partenza nello studio dei fenomeni. Inoltre il processo di modellistica conduce naturalmente a introdurre le variabili di stato.

#### Dinamica di una popolazione.

Un modello atto a descrivere nel tempo il fenomeno può essere ottenuto assumendo una suddivisione in classi di età. Per descriverne la dinamica supporremo l'ampiezza dell'intervallo temporale unitario pari all' ampiezza della classe di età. Tale insieme di variabili costituisce per il problema in esame un insieme completo di variabili di stato.

Indicato con  $x_i(t)$  il numero di persone che compiono età  $i + 1$  nell'anno  $t$ , si ha:

$$x_{i+1}(t+1) = \beta_i x_i(t), \quad i = 0, \dots, n-1$$

$$x_0(t+1) = \alpha_0 x_0(t) + \dots + \alpha_{n-1} x_{n-1}(t)$$

con  $\alpha_i$  coefficienti di fertilità e  $\beta_i$  coefficienti di sopravvivenza dedotti dalle statistiche.

#### Dinamica del prodotto nazionale lordo.

Siano:  $P(t)$  il prodotto nazionale,  $C(t)$  i consumi,  $I(t)$  gli investimenti e  $G(t)$  le spese del governo. Si ha:

$$P(t) = C(t) + I(t) + G(t)$$

Indicando con  $m$  la propensione marginale al consumo, si ha:

$$C(t) = mP(t), \quad 0 < m < 1$$

inoltre è usuale assumere che l'aumento del prodotto sia proporzionale all'investimento secondo  $r$ , fattore di crescita

$$P(t+1) - P(t) = rI(t)$$

In conclusione con ovvie sostituzioni si ottiene:

$$P(t+1) = [1 + r(1 - m)]P(t) - rG(t)$$

### Un semplice modello di microeconomia

La dinamica del prezzo in condizioni di equilibrio tra domanda e offerta. Nell'ipotesi che ci sia un solo bene indicando con  $p$  il prezzo unitario, con  $d$  la domanda e con  $s$  l'offerta, è usuale assumere che

$$\begin{aligned} d(p) &= d_0 - ap \\ s(p) &= s_0 + bp, \quad a, b > 0 \end{aligned}$$

Considerazioni elementari lasciano intendere che la domanda e l'offerta variano nel tempo secondo le due equazioni

$$\begin{aligned} s(t+1) &= s_0 + bp(t) \\ d(t+1) &= d_0 - ap(t+1) \end{aligned}$$

Assumere l'equilibrio significa assumere che  $s(t+1) = d(t+1)$  e quindi

$$p(t+1) = -\frac{b}{a}p(t) + \frac{d_0 - s_0}{a}.$$

Ne risulta l'esistenza di un equilibrio per la dinamica del prezzo dato da

$$p(t+1) = p(t) = \frac{d_0 - s_0}{a + b}.$$

Il semplice modello introdotto può essere impiegato per prevedere l'andamento del prezzo in condizioni di perturbazione rispetto all'equilibrio. Come è facile verificare si avrà un ritorno verso la condizione di equilibrio (stabilità) se  $b < a$ , un allontanamento (instabilità) se  $b > a$ . È interessante osservare che i due coefficienti  $a$  e  $b$  rappresentano, rispettivamente, la propensione al consumo (dell'acquirente) e la propensione (ambizione) di guadagno dell'imprenditore. L'interpretazione economica della condizione di stabilità dell'equilibrio prima espressa conduce alla conclusione seguente: l'eccessiva ambizione di guadagno dell'imprenditore produce instabilità di mercato.

### 1.9.d. Approssimazioni lineari di sistemi nonlineari

Come per i sistemi a tempo continuo una rappresentazione lineare può essere impiegata per descrivere in modo approssimato il comportamento intorno ad una coppia di equilibrio. Assegnato il sistema

$$x(t+1) = f(x(t), u(t)) \quad f(x_e, u_e) = x_e$$

$$y(t) = h(x(t), u(t)) \quad h(x_e, u_e) = h_e.$$

Sviluppando i calcoli, si ottiene:

$$f(x, u) = f(x_e, u_e) + \left( \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial u} \right) \Big|_{x_e, u_e} \begin{pmatrix} x - x_e \\ u - u_e \end{pmatrix} + \dots$$

$$= f(x_e, u_e) + \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x_e, u_e} (x - x_e) + \frac{\partial f}{\partial u} \Big|_{x_e, u_e} (u - u_e) + \dots$$

$$h(x, u) = h(x_e, u_e) + \left( \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial u} \right) \Big|_{x_e, u_e} \begin{pmatrix} x - x_e \\ u - u_e \end{pmatrix} + \dots$$

e posto  $z = x - x_e$ ,  $v = u - u_e$ ,  $y_a = y - h(x_e)$

$$A = \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x_e, u_e} \quad B = \frac{\partial f}{\partial u} \Big|_{x_e, u_e} \quad C = \frac{\partial h}{\partial x} \Big|_{x_e, u_e} \quad D = \frac{\partial h}{\partial u} \Big|_{x_e, u_e}$$

si ha, infine:

$$z(t+1) = Az(t) + Bv(t)$$

$$y_a = Cx(t) + Du(t)$$

**1.9.e. Rappresentazioni equivalenti**

Effettuando una trasformazione di coordinate  $z = Tx$ , si ottiene:  $z(t + 1) = Tx(t + 1) = TAx + TBu$  e poichè  $x = T^{-1}z$ , si ha in definitiva

$$\begin{aligned}z(t + 1) &= TAT^{-1}z(t) + TBu(t) \\ y(t) &= CT^{-1}z(t) + Du(t)\end{aligned}$$

Si possono, inoltre ripetere le stesse considerazioni a proposito della possibilità di descrivere sistemi lineari mediante rappresentazioni non lineari.