Davide Giglio

Esercitazioni di Teoria dei Sistemi

Anno Accademico 2010/2011

Esercitazione del 2 marzo 2011

DECOMPOSIZIONE CANONICA (DI KALMAN)

12.1

Si consideri il seguente sistema:

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underline{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underline{x}(t) \end{cases}$$

1. Discutere la stabilità, la controllabilità e l'osservabilità.
2. Effettuare la decomposizione canonica di Kalman.
3. Determinare la risposta impulsiva del sistema.

Per discutere la stabilità del sistema si devono calcolare i poli del sistema. Determino quindi le soluzioni del polinomio caratteristico:

$$\det\left(\lambda I - A\right) = 0 \qquad \rightarrow \qquad \det\left(\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ -1 & \lambda+1 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$\lambda^2(\lambda+1) = 0$$

Ho un polo in -1 e un polo in 0 con molteplicità doppia. Non posso ancora concludere nulla sulla stabilità del sistema avendo un polo in 0 a molteplicità doppia che potrebbe rendermi il sistema sia semplicemente stabile che instabile (in ogni caso il sistema non potrà mai risultare asintoticamente stabile). Devo verificare la molteplicità del polo in 0 all'interno del polinomio minimo.

Vengono di seguito proposte due diverse metodologie per determinare la molteplicità del polo in 0 nel polinomio minimo.

1. Applico il teorema di Caley-Hamilton. Se la matrice A verifica il polinomio $\lambda(\lambda+1)$ (cioé se $A(A+I) = 0$), allora esso sarà il polinomio minimo. Altrimenti, la matrice A soddisferà per forza il polinomio $\lambda^2(\lambda+1)$ (cioé $A^2(A+I) = 0$), e il polinomio minimo sarà quindi proprio $\lambda^2(\lambda+1)$.

$$\begin{aligned} A(A+I) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \neq 0 \end{aligned}$$

Verifico che A soddisfi effettivamente il polinomio $\lambda^2(\lambda+1)$.

$$\begin{aligned} A^2(A+I) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Il polinomio minimo è quindi $\lambda^2(\lambda+1)$.

2. Determino il polinomio minimo come rapporto tra il polinomio caratteristico $\varphi(\lambda)$ e $\alpha(\lambda)$, definito come il massimo comune divisore di tutti i polinomi non nulli in $\mathrm{adj}^T\big(\lambda I - A\big)$.

$$\mathrm{adj}\big(\lambda I - A\big) = \begin{bmatrix} \lambda(\lambda+1) & \lambda & \lambda+1 \\ 0 & \lambda^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda(\lambda+1) \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{adj}^T\big(\lambda I - A\big) = \begin{bmatrix} \lambda(\lambda+1) & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda^2 & 0 \\ \lambda+1 & 0 & \lambda(\lambda+1) \end{bmatrix}$$

E' evidente come sia

$$\alpha(\lambda) = 1$$

e quindi il polinomio minimo è

$$m(\lambda) = \frac{\varphi(\lambda)}{\alpha(\lambda)} = \frac{\lambda^2(\lambda+1)}{1} = \lambda^2(\lambda+1)$$

In ogni caso la molteplicità del polo in 0 nel polinomio minimo è 2 e quindi il sistema dato è instabile.

Per discutere la controllabilità del sistema, determino la matrice $P \triangleq \big[B\big|AB\big|A^2B\big]$ verificandone il suo rango.

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad A^2B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathrm{rango}\big(P\big) = 2$$

Il sistema dato è non completamente controllabile.

Per discutere l'osservabilità del sistema, determino la matrice $Q \triangleq \begin{bmatrix} C \\ \hline CA \\ \hline CA^2 \end{bmatrix}$ verificandone il suo rango.

$$CA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad CA^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathrm{rango}\big(P\big) = 1$$

Il sistema dato è non completamente osservabile.

Per effettuare la decomposizione canonica di Kalman, determino il sottospazio di raggiungibilità e il sottospazio di non osservabilità, nonché i sottospazi algebrici ortogonali ad essi. Tali sottospazi verranno utilizzati in seguito per determinare i vettori che compongono la matrice di trasformazione.

- Sottopazio di raggiungibilità X_R (costituito dalle colonne linearmente indipendenti della matrice P).

$$X_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Sottospazio algebrico X_{NR} (sottospazio ortogonale a X_R).

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \\ \begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a + b = 0 \\ c = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = -b \\ c = 0 \end{cases}$$

$$X_{NR} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Sottospazio di non osservabilità X_{NO} (costituito da tutti i vettori $\gamma \neq 0$, $\gamma \in \mathbb{R}^3$, tali che $Q\gamma = 0$).

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = 0 \rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \rightarrow \gamma_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \ \gamma_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$X_{NO} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Sottospazio algebrico X_O (sottospazio ortogonale a X_{NO}).

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \\ \begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b = 0 \\ c = 0 \end{cases}$$

$$X_O = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

A questo punto si possono calcolare i vettori che costituiscono la matrice di trasformazione T. La matrice T è infatti costruita nel seguente modo:

$$T = \begin{bmatrix} T_1 | T_2 | T_3 | T_4 \end{bmatrix}$$

dove:

- T_1 è costruita con vettori base di $X_1 \triangleq X_R \cap X_{NO}$ (insieme dei vettori controllabili e non osservabili)
- T_2 è costruita con vettori base di $X_2 \triangleq X_R \cap (X_{NR} + X_O)$ (insieme dei vettori controllabili e osservabili)
- T_3 è costruita con vettori base di $X_3 \triangleq X_{NO} \cap (X_{NR} + X_O)$ (insieme dei vettori non controllabili e non osservabili)
- T_4 è costruita con vettori base di $X_4 \triangleq X_{NR} \cap X_O$ (insieme dei vettori non controllabili e osservabili)

Nel nostro caso:

$$X_1 \triangleq X_R \cap X_{NO} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cap \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$X_2 \triangleq X_R \cap (X_{NR} + X_O) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cap \left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cap \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$X_3 \triangleq X_{NO} \cap (X_{NR} + X_O) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cap \left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cap \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$X_4 \triangleq X_{NR} \cap X_O = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \cap \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \emptyset$$

e quindi la matrice di trasformazione è:

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La matrice di trasformazione T è una matrice a rango pieno e quindi invertibile. La matrice inversa T^{-1} è calcolata nel seguente modo:

$$T^{-1} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Pongo $\underline{x} = T\underline{z}$.

Il nuovo sistema che si ottiene, nelle variabili z_1, z_2 e z_3, sarà a blocchi, e in particolare assumerà la forma

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{z}_1(t) \\ \dot{z}_2(t) \\ \dot{z}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} & \tilde{A}_{13} \\ 0 & \tilde{A}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{A}_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ z_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{B}_1 \\ \tilde{B}_2 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 0 & \tilde{C}_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ z_3(t) \end{bmatrix} \end{cases}$$

con:

- z_1 variabile controllabile e non osservabile ($\tilde{A}_{11}$ matrice $[1 \times 1]$, $\tilde{B}_1$ vettore colonna $[1 \times 1]$);
- z_2 variabile controllabile e osservabile ($\tilde{A}_{22}$ matrice $[1 \times 1]$, $\tilde{B}_2$ vettore colonna $[1 \times 1]$, $\tilde{C}_2$ vettore riga $[1 \times 1]$);
- z_3 variabile non controllabile e non osservabile ($\tilde{A}_{33}$ matrice $[1 \times 1]$).

Tali valori sono compatibili con il valore del rango delle matrici P e Q precedentemente calcolate.

Effettuo il cambiamento di base.

$$\begin{cases} T\underline{\dot{z}}(t) = AT\underline{z}(t) + Bu(t) \\ y(t) = CT\underline{z}(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \underline{\dot{z}}(t) = T^{-1}AT\underline{z}(t) + T^{-1}Bu(t) \\ y(t) = CT\underline{z}(t) \end{cases}$$

$$T^{-1}A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$T^{-1}B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad CT = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Il nuovo sistema è

$$\begin{cases} \dot{\underline{z}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \underline{z}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ z_3(t) \end{bmatrix} \end{cases}$$

Notare come la nuova matrice A sia in forma di Jordan. In tale matrice si riconoscono immediatamente i poli del sistema e la moltemplicità doppia del polo nell'origine. Inoltre, posso concludere immediatamente che:

- ho un polo in 0 controllabile e osservabile;
- ho un polo in 0 controllabile e non osservabile;
- ho un polo in -1 non controllabile e non osservabile;

Determino la risposta impulsiva del sistema originario attraverso il calcolo della funzione di trasferimento.

$$\big(sI - A\big)^{-1} = \frac{\mathrm{adj}^T\big(sI - A\big)}{\varphi(s)} = \frac{\begin{bmatrix} s(s+1) & 0 & 0 \\ s & s^2 & 0 \\ s+1 & 0 & s(s+1) \end{bmatrix}}{s^2(s+1)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & 0 & 0 \\ \frac{1}{s(s+1)} & \frac{1}{s+1} & 0 \\ \frac{1}{s^2} & 0 & \frac{1}{s} \end{bmatrix}$$

$$\big(sI - A\big)^{-1} B = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & 0 & 0 \\ \frac{1}{s(s+1)} & \frac{1}{s+1} & 0 \\ \frac{1}{s^2} & 0 & \frac{1}{s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} \\ \frac{1}{s} \\ \frac{1}{s^2} \end{bmatrix}$$

$$C\big(sI - A\big)^{-1} B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{s} \\ \frac{1}{s} \\ \frac{1}{s^2} \end{bmatrix} = \frac{1}{s}$$

la risposta impulsiva è

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} = 1(t)$$

12.2

Si consideri il seguente sistema:

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underline{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underline{x}(t) \end{cases}$$

1. Discutere la stabilità, la controllabilità e l'osservabilità.
2. Effettuare la decomposizione canonica di Kalman.
3. Determinare la risposta impulsiva del sistema.

Per determinare la stabilità del sistema calcolo i poli del sistema. Per fare ciò, determino le soluzioni del polinomio caratteristico.

$$\det(\lambda I - A) = 0$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} \lambda - 1 & 0 & -1 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 1 \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$(\lambda - 1)^3 = 0$$

Ho 3 poli in 1. *Il sistema è quindi instabile.*

Per determinare la controllabilità del sistema calcolo la matrice $P \triangleq \left[\begin{array}{c|c|c} B & AB & A^2B \end{array}\right]$ e studio il suo rango.

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad A^2B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \operatorname{rank} P = 2$$

Il rango della matrice P è 2. *Il sistema quindi è non completamente controllabile.*

Per determinare l'osservabilità del sistema calcolo la matrice $Q \triangleq \begin{bmatrix} C \\ \hline CA \\ \hline CA^2 \end{bmatrix}$ e studio il suo rango.

$$CA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$CA^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \operatorname{rank} Q = 2$$

Il rango della matrice Q è 2. *Il sistema quindi è non completamente osservabile.*

Per eseguire la decomposizione canonica di Kalman devo innanzitutto determinare lo spazio degli stati raggiungibili e lo spazio degli stati non osservabili nonché i rispettivi spazi ortogonali.

Determino lo spazio degli stati raggiungibili X_R. Esso è costituito da una base della matrice P, cioé da un insieme di colonne linearmente indipendenti della matrice P.

$$X_R = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Determino lo spazio degli stati X_{NR} ortogonale a X_R.

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \\ \begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a + b + c = 0 \\ 2a + b + c = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = -b - c \\ -2b - 2c + b + c = 0 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} a = 0 \\ b = -c \end{cases}$$

$$X_{NR} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Determino lo spazio degli stati non osservabili X_{NO}. Esso è generato da una base $\underline{\alpha} \neq 0$, $\underline{\alpha} \in \mathbb{R}^n$ tale che $Q\underline{\alpha} = 0$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} a + c = 0 \\ a + 2c = 0 \\ a + 3c = 0 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} a = 0 \\ c = 0 \end{cases}$$

$$X_{NO} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Determino lo spazio degli stati X_O ortogonale a X_{NO}.

$$\begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

$$b = 0$$

$$X_O = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A questo punto è necessario determinare i seguenti insiemi:

- Insieme dei vettori controllabili e non osservabili $X_R \cap X_{NO}$

$$X_R \cap X_{NO} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cap \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \emptyset$$

- Insieme dei vettori controllabili e osservabili $X_R \cap (X_{NR} + X_0)$

$$X_R \cap (X_{NR} + X_0) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cap \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cap \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

- Insieme dei vettori non controllabili e non osservabili $X_{NO} \cap (X_{NR} + X_0)$

$$X_{NO} \cap (X_{NR} + X_0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cap \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cap \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Insieme dei vettori non controllabili e osservabili $X_{NR} \cap X_O$

$$X_{NR} \cap X_O = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \cap \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \emptyset$$

La matrice di trasformazione è quindi

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Per potere determinare la forma canonica di Kalman del sistema iniziale consideriamo il cambiamento di base $\underline{x}(t) = T\underline{z}(t)$. Si ha

$$T\dot{\underline{z}}(t) = AT\underline{z}(t) + Bu(t)$$

$$\dot{\underline{z}}(t) = T^{-1}AT\underline{z}(t) + T^{-1}Bu(t)$$

$$y(t) = CT\underline{z}(t)$$

$$T^{-1} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 2 \end{array} \right]$$

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$T^{-1}A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$T^{-1}AT = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T^{-1}B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$CT = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Il nuovo sistema è quindi

$$\begin{cases} \underline{\dot{z}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underline{z}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} \underline{z}(t) \end{cases}$$

Ovviamente i poli del sistema non sono cambiati (i poli del sistema sono sempre invarianti rispetto a cambiamenti di base), come si può vedere dal seguente calcolo.

$$\det(\lambda I - A) = \det\left(\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ -1 & \lambda-2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-1 \end{bmatrix} \right) =$$
$$= (\lambda-1)\big[\lambda(\lambda-2)+1\big] = (\lambda-1)(\lambda^2-2\lambda+1) = (\lambda-1)^3$$

Il nuovo sistema può essere scritto nella seguente maniera

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \underline{\dot{z}}_1(t) \\ \underline{\dot{z}}_2(t) \\ \underline{\dot{z}}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{22} & 0 \\ 0 & \tilde{A}_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{z}_1(t) \\ \underline{z}_2(t) \\ \underline{z}_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{B}_2 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} \tilde{C}_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{z}_1(t) \\ \underline{z}_2(t) \\ \underline{z}_3(t) \end{bmatrix} \end{cases}$$

dove $\tilde{A}_{22}$, $\tilde{A}_{33}$, $\tilde{B}_2$ e $\tilde{C}_2$ sono

$$\tilde{A}_{22} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad \tilde{A}_{33} = 1 \qquad \tilde{B}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \tilde{C}_2 = \begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix}$$

e dove $\underline{z}_1(t)$ e $\underline{z}_2(t)$ sono variabili di stato controllabili e osservabili mentre $\underline{z}_3(t)$ è una variabile di stato non controllabile e non osservabile.

La risposta all'impulso del sistema viene determinata attraverso il calcolo della funzione di trasferimento (considero il sistema iniziale).

$$(sI - A) = \begin{bmatrix} s-1 & 0 & -1 \\ 0 & s-1 & 0 \\ 0 & 0 & s-1 \end{bmatrix}$$

$$\det(sI - A) = (s-1)^3$$

$$\operatorname{adj}(sI - A) = \begin{bmatrix} (s-1)^2 & 0 & 0 \\ 0 & (s-1)^2 & 0 \\ s-1 & 0 & (s-1)^2 \end{bmatrix}$$

$$\operatorname{adj}^{\mathrm{T}}(sI - A) = \begin{bmatrix} (s-1)^2 & 0 & s-1 \\ 0 & (s-1)^2 & 0 \\ 0 & 0 & (s-1)^2 \end{bmatrix}$$

$$(sI - A)^{-1} = \frac{\operatorname{adj}^{\mathrm{T}}(sI - A)}{\det(sI - A)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s-1} & 0 & \frac{1}{(s-1)^2} \\ 0 & \frac{1}{s-1} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{s-1} \end{bmatrix}$$

$$C(sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{s-1} & 0 & \frac{1}{(s-1)^2} \\ 0 & \frac{1}{s-1} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{s-1} \end{bmatrix} =$$
$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{s-1} & 0 & \frac{1}{(s-1)^2} + \frac{1}{s-1} \end{bmatrix}$$

$$C(sI-A)^{-1}B = \begin{bmatrix} \frac{1}{s-1} & 0 & \frac{1}{(s-1)^2}+\frac{1}{s-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{2}{s-1}+\frac{1}{(s-1)^2}$$

$$T(s) = \frac{2s-1}{(s-1)^2}$$

La risposta all'impulso è semplicemente l'antitrasformata della funzione di trasferimento.

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\big\{T(s)\big\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s-1}{(s-1)^2}\right\}$$

Antitrasformo utilizzando il metodo della scomposizione in fratti semplici.

$$\frac{2s-1}{(s-1)^2} = \frac{A}{s-1}+\frac{B}{(s-1)^2}$$

$$2s-1 = As-A+B$$

$$\begin{cases} A=2 \\ B-A=-1 \end{cases} \qquad \begin{cases} A=2 \\ B=1 \end{cases}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s-1}{(s-1)^2}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s-1}+\frac{1}{(s-1)^2}\right\} = 2e^t+te^t$$

La risposta all'impulso è quindi

$$h(t) = 2e^t+te^t$$

12.3

Si consideri il sistema descritto dalle seguenti equazioni di stato

$$
\begin{cases}
\underline{\dot{x}}(t) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underline{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\
y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underline{x}(t)
\end{cases}
$$

Effettuare la decomposizione canonica di Kalman.

$\boxed{\text{DECAKALM\_03}}$

$$\dot{\underline{x}}(t) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underline{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = [\,0 \quad 1 \quad 0 \quad 1\,]\, \underline{x}(t)$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{rank}(P) = 2$$

base di X_R : $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

base di X_{NR} : $\begin{cases} a + d = 0 \\ c + d = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a = -d \\ c = -d \end{cases} \quad \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 8 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{rank}(Q) = 2$$

base di X_{NO} : $\begin{cases} b + d = 0 \\ 2b + d = 0 \\ 4b + d = 0 \\ 8b + d = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} b = 0 \\ d = 0 \end{cases} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

base di X_0 : $\begin{cases} a = 0 \\ c = 0 \end{cases}$ $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$X_1 = X_R \cap X_{NO} \longrightarrow$ CONT NON OSS

$X_2 = X_R \cap (X_{NR} + X_0) \longrightarrow$ CONT OSS

$X_3 = X_{NO} \cap (X_{NR} + X_0) \longrightarrow$ NON CONT NON OSS

$X_4 = X_{NR} \cap X_0 \longrightarrow$ NON CONT OSS

T_1 (base di X_1)

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cap \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Esiste una dipendenza

$$\alpha\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \beta\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \gamma\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \delta\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{cases} \alpha = \gamma \\ 0 = 0 \\ \beta = \gamma \\ \alpha + \beta = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha = -\beta \\ \gamma = -\beta \\ \delta = \beta \end{cases}$$

Ad esempio

$$-\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

T_1 (base di X_1)

$$\begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\1\\1\end{bmatrix} \cap \begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\0\\-1\\0\end{bmatrix}$$

$\Downarrow$ Genero vettori del tipo

$$\begin{bmatrix}\alpha\\0\\\beta\\\alpha+\beta\end{bmatrix}$$

$\Downarrow$ Genero vettori del tipo

$$\begin{bmatrix}\gamma\\0\\\delta\\0\end{bmatrix}$$

L'unico vettore che può essere generato da entrambe le basi è

$$\begin{bmatrix}\alpha\\0\\-\alpha\\0\end{bmatrix}$$ Una sua base è $$\begin{bmatrix}1\\0\\-1\\0\end{bmatrix}$$

T_2 (base di X_2)

$$\begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\1\\1\end{bmatrix} \cap \underbrace{\begin{bmatrix}-1\\0\\-1\\1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix}-1\\0\\-1\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}}$$

$\Downarrow$ Genero vettori del tipo

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \\ \beta \\ \alpha+\beta \end{bmatrix}$$

$\Downarrow$ Genero vettori del tipo

$$\begin{bmatrix} -\gamma \\ \delta \\ -\gamma \\ \gamma+\sigma \end{bmatrix}$$

L'unico vettore che può essere generato da entrambe le basi è

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \\ \alpha \\ 2\alpha \end{bmatrix} \quad \text{Una sua base è} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

T_3 (base di X_3)

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cap \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \\ \beta \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} -\gamma \\ \delta \\ -\gamma \\ \gamma+\sigma \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \\ \alpha \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{Una sua base è} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

T_4 (base di X_4)

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cap \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow \qquad\qquad\qquad \Downarrow$$

$$\begin{bmatrix} -\alpha \\ \beta \\ -\alpha \\ \alpha \end{bmatrix} \qquad\qquad \begin{bmatrix} 0 \\ \gamma \\ 0 \\ \delta \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \beta \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Una sua base è $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Riassumendo:

$$T = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{c|c|c|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right] \\ \begin{array}{cccc} T_1 & T_2 & T_3 & T_4 \end{array} \end{array}$$

Facendo il cambio di variabile devo ottenere un sistema del tipo:

$$\underline{\dot{z}}(t) = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} & \tilde{A}_{13} & \tilde{A}_{14} \\ 0 & \tilde{A}_{22} & 0 & \tilde{A}_{24} \\ 0 & 0 & \tilde{A}_{33} & \tilde{A}_{34} \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{A}_{44} \end{bmatrix} \underline{z}(t) + \begin{bmatrix} \tilde{B}_1 \\ \tilde{B}_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \underline{u}(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & \tilde{C}_2 & 0 & \tilde{C}_4 \end{bmatrix} \underline{z}(t)$$

con $$z(t) = \begin{bmatrix} \underline{z}_1(t) \\ \underline{z}_2(t) \\ \underline{z}_3(t) \\ \underline{z}_4(t) \end{bmatrix}$$

$\underline{z}_1(t)$: variabili controllabili ma non osservabili

$\underline{z}_2(t)$: variabili controllabili e osservabili

$\underline{z}_3(t)$: variabili non controllabili e non osservabili

$\underline{z}_4(t)$: variabili non controllabili e osservabili

---

Tornando alla nostra matrice T si ha

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$C_1 = \frac{1}{2}(C_1 + C_3)$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$C_2 \Leftrightarrow C_4$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$C_4 = \frac{1}{2}(C_4 - C_3)$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$C_3 = C_3 - C_1$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Quindi $T^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$\tilde{A} = T^{-1} A T =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{B} = T^{-1} B =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{C} = C T =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{D} = D = 0$$

Il sistema è

$$\begin{cases} \dot{\underline{z}}(t) = \left[\begin{array}{c|c|c|c} -1 & 0 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right] \underline{z}(t) + \left[\begin{array}{c} \frac{1}{2} \\ \hline \frac{1}{2} \\ \hline 0 \\ \hline 0 \end{array}\right] u(t) \\ y(t) = \left[\begin{array}{c|c|c|c} 0 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right] \underline{z}(t) \end{cases}$$

E' immediato verificare che

- $s = -1$ polo CONT e NON OSS
- $s = 1$ polo CONT e OSS
- $s = 0$ polo NON CONT e NON OSS
- $s = 2$ polo NON CONT e OSS

Inoltre

$$\varphi_c(s) = \det(sI - \tilde{A}_{11}) \cdot \det(sI - \tilde{A}_{22}) = (s+1)(s-1) = s^2 - 1$$

$$\varphi_o(s) = \det(sI - \tilde{A}_{22}) \cdot \det(sI - \tilde{A}_{44}) = (s-1)(s-2) = s^2 - 3s + 2$$

$$\varphi_{co}(s) = \det(sI - \tilde{A}_{22}) = s - 1$$

Dalla trasformazione inversa $\underline{z}(t) = T^{-1}\underline{x}(t)$ è possibile risalire a chi, nel sistema originario, fosse la parte controllabile e non e la parte osservabile e non.

$$\begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ z_3(t) \\ z_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix}$$

PARTE CONT. E NON OSS.

$$\frac{1}{2}\left(x_1(t) - x_3(t)\right)$$

Nota: $\frac{1}{2}$ è ininfluente.

PARTE CONT. E OSS.

$$\frac{1}{2}x_4(t)$$

PARTE NON CONT. E NON OSS.

$$\frac{1}{2}\left(x_1(t) + x_3(t) - x_4(t)\right)$$

PARTE NON CONT. E OSS.

$$x_2(t)$$