Def. Modi naturali e parametri caratteristici:

I modi naturali sono le componenti fondamentali dell'evoluzione dello stato, cioè sono le evoluzioni che avvengono nello spazio di stato in prefissate direzioni/piani dello spazio di stato. Modi naturali avvengono in direzioni se sono associati ad autovalori reali, oppure avvengono in piani se sono associati a coppie di complessi coniugati.

Caso modo aperiodico in un sistema a tempo continuo:

- Nel caso particolare n=1 si avrà che la traiettoria sarà confinata sulla direzione dell'autovettore u1 e se
  - λ>0 Evoluzione sarà divergente
  - λ=0 Evoluzione rimane nello stato iniziale
  - λ<0 Evoluzione ha un moto convergente verso l'origine

Caso modo pseudoperiodico sistema a tempo continuo:

- L'evoluzione temporale ammette un inviluppo esponenziale $e^{\alpha t}$ ma non componenti periodiche seno e coseno lungo le direzioni del piano del moto:
  - α>0 Spirale divergente
  - α=0 Elisse
  - α<0 Spirale convergente

Caso modo aperiodico sistema a tempo discreto:

- λ> 0 $\Rightarrow$ modo aperiodico - > evoluzione avviene lungo autovettore u
  - Se λ>1 -> evoluzione è divergente
  - Se λ=1 -> evoluzione rimane nel punto iniziale
  - Se λ<1 -> evoluzione converge verso lo zero

Caso modo alternante sistema a tempo discreto:

- λ< 0 $\Rightarrow$ modo alternante
  - Se λ >-1 -> evoluzione si alterna tendendo a zero
  - Se λ = 1 -> evoluzione salta tra -1 e 1
  - Se λ < -1 -> evoluzione si alterna tendendo a infinito

Caso modo pseudoperiodico sistema a tempo discreto:

- α + j ω $\Rightarrow$ modo pseudoperiodico
  - Se |σ| >1 -> evoluzione come se fosse una spirale che diverge
  - Se |σ| =1 -> evoluzione come se fosse un elisse
  - Se |σ| < 1 -> evoluzione come se fosse una spirale che converge a zero

Def. Smorzamento e pulsazione naturale:

Pulsazione naturale : $\omega_n = \sqrt{(\alpha^2 + \omega^2)}$

Smorzamento : $\xi = sin\theta = \frac{-\alpha}{\sqrt{(\alpha^2 + \omega^2)}}$

ξ si chiama fattore di smorzamento perché al suo aumento corrisponde una maggiore attenuazione dell'inviluppo della funzione oscillatoria

- $\xi = \pm 1$ autovalori reali e coincidenti, nessun fenomeno oscillatori
- $\xi=0$ autovalori immaginari puri, moto oscillatorio puro
- $-1<\xi<0$ modo pseudoperiodico divergente
- $0<\xi<1$ modo pseudoperiodico convergente
- $|\xi|>1$ autovalori reali e disgiunti, moto aperiodico

Def. W(t):

$W(t)=Ce^{A(t)}B$

W(t) è la matrice di risposta impulsiva in uscita ed essa contiene tutti i modi che sono sia eccitabili che osservabili

La matrice delle risposte impulsive $W(t-\tau)$ rappresenta la risposta del sistema quando l'ingresso $u(t) = \delta(t- \tau)$, ovvero quando si ha in ingresso un impulso unitario.

Def. Eccitabilità modo naturale:

I modi eccitabili sono tutti quei modi contenuti nella Matrice di risposta impulsiva dello stato H(t) vuol dire che un modo è eccitabile se verifica la seguente condizione necessaria e sufficiente

$v_i * B \neq 0$

Def. Molteplicità Geometrica:

Data A una matrice e d(s) polinomio caratteristico avente zeri $\lambda_1,\dots,\lambda_r$ che hanno molteplicità $\mu_1,\dots,\mu_m$
Dove $\mu_1+\dots+\mu_m=n$ -> grado del polinomio caratteristico
Il polinomio minimo m(s), dove ci sono tutti gli autovalori che però non hanno necessariamente le stesse molteplicità
$m_1,\dots,m_m$ dove
$m_1+\dots+m_m=l$
dove $l<n$
Chiamiamo molteplicità geometrica il numero di volte in cui è zero per il polinomio minimo
Def. W(s) e significato fisico:
$W(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$ è detta funzione di trasferimento
Il suo significato fisico è la risposta armonica.
Def. Relazione tra poli di W(s)e autovalori:
I poli corrispondono agli autovalori che compaiono nella funzione di trasferimento e quindi i cui modi sono contemporaneamente eccitabili ed osservabili, dunque i poli di W(s) sono sottoinsiemi degli autovalori di A.
Def. Risposta a regime permanente:

- Risposta a regime permanente è quella funzione indipendente da $\boldsymbol{x_0}$ ma dipendente dall'ingresso applicato, quindi funzione del tempo alla quale tende la risposta in uscita al crescere del tempo

Condizioni esistenza risposta a regime permanente:

1) **GLI AUTOVALORI ASSOCIATI AI MODI OSSERVABILI devono essere TUTTI A PARTE REALE NEGATIVA**
2) **RESTANTI AUTOVALORI DEVONO ESSERE:**
   - **A PARTE REALE NEGATIVA (con qualunque molteplicità)**
   - **A PARTE REALE NULLA (con molteplicità unitaria)**

Def. Risposta armonica e suo siignificato fisico:

La risposta armonica non è una risposta ma è la W(s) calcolata in $s = j\omega$

La risposta armonica assume significato fisico in termini di risposta ,quando esiste la risposta a regime permanente e rappresenta $\omega\ per\ \omega$ la variazione in modulo e la variazione in fase che subisce un segnale periodico puro che entra nel sistema.

Def. Guadagno e suo significato fisico:

$$W(s)|_{s=0}\ quando\ sono\ stati\ eliminati\ i\ poli\ in\ zero$$

Il guadagno ha significato, nel caso in cui esista la risposta a regime permanente, rappresenta il valore a cui tende la risposta a regime all'ingresso a gradino unitario e coincide con la W(s) calcolata in zero perché in questo caso non ci sono poli in zero

Def. Rappresentazione di Bode:

La rappresentazione di Bode è la rappresentazione grafica della risposta armonica che consiste in due grafici che rappresentano rispettivamente modulo e fase della pulsazione ω

Problema della discretizzazione:

Il problema del calcolo dell'evoluzione dell'uscita e dello stato campionate quando l'ingresso è costante a tratti su intervalli della stessa ampiezza dell'intervallo di campionamento, la procedura di campionamento e tenuta sono sincrone.

Oppure

Il sistema tempo discreto equivalente ad un dato sistema a tempo continuo è una sua rappresentazione quando il segnale d'ingresso è costante a tratti su intervalli di ampiezza fissa oppure campionato e si è interessati a calcolare le evoluzioni negli istanti, detti di campionamento, corrispondenti alla variazione dell'ingresso. Il problema del calcolo del sistema a tempo discreto equivalente è detto anche problema della discretizzazione.

Dim. Autovalori a tempo discreto equivalente di un sistema a tempo continuo

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

pongo $\boldsymbol{t_0} = \boldsymbol{kt}$ e $\boldsymbol{t} = (\boldsymbol{k}+\mathbf{1})\boldsymbol{T}$

ottengo che

$$x(k+1) = e^{AT}x'(k) + \int_{kT}^{(k+1)T} e^{A((k+1)T-\tau)}Bd\tau u'(k)$$

pongo $(\boldsymbol{k}+\mathbf{1})\boldsymbol{T} - \boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\xi}$

$$x(k+1) = e^{AT}x'(k) + \int_{0}^{T} e^{A\xi}Bd\xi u'(k)$$

- $A_D = e^{AT}$
- $B_D = \int_0^T e^{A\xi}Bd\xi$

$$\begin{cases} x'(k+1) = A_D x'(k) + B_D u'(k) \\ y'(k) = Cx'(k) \end{cases}$$

$\boldsymbol{\lambda_i^D} = e^{\lambda_i T}$ perché si vede semplicemente scrivendo la forma spettrale della matrice e^{At} che è la forma spettrale di e^{AT}

$e^{At} = \sum_{i=1}^{n} e^{\lambda_i t} u_i v_i$ forma spettrale

Condizione necessaria e sufficiente affinchè si possa risolvere il problema della realizzazione:

$K(s)$ sia matrice di funzioni razionali proprie

- Se il legame ingresso-uscita è caratterizzato da un nucleo $K(t)$ la cui trasformata di Laplace $K(s)$ **NON** è matrice di funzioni razionali proprie, questo legame ingresso-uscita **NON** può essere realizzato mediante un sistema lineare stazionario a dimensione finita

Def. Stato Raggiungibile:

$\bar{x}$ è $detto\ raggiungibile\ a\ T\ da\ x_o\ se\ \exists t_o < T$
$eduningressou_{[t_o,T)} sull'intervalloditempo[t_o,T) cheportalostatox_o a\bar{x}$

$$cio\grave{e}\ (\bar{x} = e^{A(T-to)}x_o + \int_{to}^{T} e^{A(t-\tau)}B\,u(\tau)d\tau \ \ \epsilon \ \ u_{[t_o,T)}$$

Nel caso di rappresentazione lineare stazionaria $x_o = 0$

Def. Insieme degli Stati raggiungibili:

$$R_T(0) = \{\bar{x} \in R^n = \int_{to}^{T} e^{A(t-\tau)}B\,u(\tau)d\tau \ : \exists t_o, u_{[t_o,T)}\}$$

Th. Scomposizione per la Raggiungibilità:

Premessa: Se un sistema S non è tutto raggiungibile Allora lo puoi sempre vedere come fatto da due parti, una raggiungibile e una no,cioè come interconnessione di 2 sistemi in cui uno è raggiungibile e l'altro no

$\rho(B|\ AB|..|A^{n-1}B)$

$\rho(R) = m$ m=rang insime degli stati raggiungibili

Se m < n

$\exists T(nxn)\ :\ |T| \neq 0$ z=Tx=$\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_2 \end{pmatrix}$

$TAT^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}$ $TB = \begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $CT^{-1} = (C_1 \quad C_2)$

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} base & \forall \\ di\ R & \vdots \\ m - colonne & n - m \end{pmatrix}$$

le rimanenti n−m qualsiasi, ma ovviamente tali da generare n vettori indipendenti

$$\begin{cases} \dot{z_1} = A_{11}z_1 + A_{12}z_2 + B_1 u \\ \dot{z_2} = A_{22}z_2 \\ y = C_1 z_1 + C_2 z_2 \end{cases}$$

Allora (A_{11}, B_1, C_1) è $tutta\ raggiungibile\ \Rightarrow\ tutti\ i\ suoi\ modi\ sono\ eccitabili$

Equivale a dire $\rho(B|\ AB|..|A^{n-1}B) = n \quad \Leftrightarrow\ tutti\ i\ suoi\ modi\ sono\ eccitabili$

- $H(t) = e^{TAT^{-1}}TB = \begin{pmatrix} e^{A_{11}T}B \\ 0 \end{pmatrix}$
- A_{11} **→(m×n)** B_1 **→(m×p)** C_1**→(q×m)**

Dim. L'insieme stati raggiungibili coincide con immagine della matrice R=$(\boldsymbol{B}|\ \boldsymbol{AB}|..|\boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{B})$

$x_{k+1} = A_{x_k} + B_{u_k}$

$x_1 = B_{u_0}\ al\ variare\ di\ u$ Per k=0

$R_1(0) = Im(B)$

$x_2 = A_{x_1} + B_{u_1} = AB_{u_0} + B_{u_1}$ $per\ k = 1$

$R_2(0) = Im(B|AB)$

Per Cayley -Hamilton

$R_n(0) = Im(B|AB|...|A^{n-1}B)$

Condizione necessaria e sufficiente per completa Raggiungibilità / Condizione di Hautus:

Un sistema è tutto raggiungibile $\Leftrightarrow$ il rango della matrice $(A - \lambda_i B) = n \quad \forall i = 1,..,n$

Teorema Cayley – Hamilton:

Ogni matrice A è annullante del proprio polinomio caratteristico

$d(A) = a_0 I + a_1 A + ... + a_{n-1}A^{n-1} + a_n A^n = 0$

Def. Stati indistinguibili:

x_a, x_b sono indistinguibili a t_o se $\forall u_{[t_o,t]}$ risulta che

$y(t, x_a, u_{[t_o,t]}) = y(t, x_b, u_{[t_o,t]})$

quando le due uscite lo stesso andamento anche se le evoluzioni dei due stati distinti sono diverse e ovviamene l'ingresso è la stessa

Questa definizione vale $\forall t$

$$Ce^{A(t-to)}x_a + \int_{to}^{t} W(t-\tau)\, u(\tau) d\tau = Ce^{A(t-to)}x_b + \int_{to}^{t} W(t-\tau)\, u(\tau) d\tau$$

Due stati sono indistinguibili se e solo se le uscite in evoluzione libere sono le stesse

$Ce^{A(t-to)}x_a = Ce^{A(t-to)}x_b \qquad \forall t >= t_o$

$t_o = 0$

$Ce^{At}x_a = Ce^{At}x_b$

$Ce^{At}(x_a - x_b) = 0$

Def. Stato inosservabile:

Uno stato che da evoluzione libera in uscita uguale a zero si dice stato inosservabile

Def. Insieme Stati inosservabili:

$I = \{x \epsilon R^n : Ce^{At} = 0, \forall t >= 0\}$

Th. Scomposizione canonica per osservabilità:

Se $\rho\begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix}$=m < n

$\exists T : \ |T| \neq 0 : z = Tx$

$TAT^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$ $\qquad TB = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}$

$CT^{-1} = (C_1 \quad 0)$

$T^{-1} = \begin{pmatrix} \forall & base \\ \vdots & di\ I \\ m & n-m \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} \dot{z_1} = A_{11}z_1 + B_1u \\ \dot{z_2} = A_{21}z_1 + A_{22}z_2 + B_2u \\ y = C_1z_1 \end{cases}$$

Allora (A_{11}, B_1, C_1) è $tutto\ osservabile \ \Rightarrow \ Sistema$ è $tutto\ osservabile \Rightarrow tutti\ i\ modi\ ad\ esso\ associati\ sono\ osservabili$

A_{11} **→(m-n×m-n)** B_1 **→(m×p)** C_1**→(q×m)**

- $\psi(t) = Ce^{At} = (C_1e^{A_{11}t} \quad 0)$

La scomposizione di Kalman:

Dati due sottospazi

R=insieme stati Raggiungibili

I=insieme stati Inosservabili

Possiamo definire 4 sottospazi

$\chi_1 = R \cap I \quad stati\ raggiungibili\ e\ stati\ inosservabili$

$\chi_2 : \chi_1 \oplus \chi_2 = R \qquad stati\ raggiungibili\ e\ osservabili$

$\chi_3 : \chi_1 \oplus \chi_3 = I$ $\qquad$ stati non raggiungibili e inosservabili

$\chi_4 : \chi_1 \oplus \chi_2 \oplus \chi_3 \oplus \chi_4 = R^n\ stati\ non\ raggiungibili\ e\ osservabili$

$T^{-1} = (base\ di\ \chi_1 \quad base\ di\ \chi_2 \quad base\ di\ \chi_3 \quad base\ di\ \chi_4)$

$TAT^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ 0 & A_{22} & 0 & A_{24} \\ 0 & 0 & A_{33} & A_{34} \\ 0 & 0 & 0 & A_{44} \end{pmatrix}$ $\qquad TB = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\qquad CT^{-1} = (0 \quad C_2 \quad 0 \quad C_4)$

$$\begin{cases} \dot{z_1} = A_{11}z_1 + A_{12}z_2 + A_{14}z_4 + B_1u \\ \dot{z_2} = A_{22}z_2 + A_{24}z_4 + B_2u \\ \dot{z_3} = A_{33}z_3 + A_{34}z_4 \\ \dot{z_4} = A_{44}z_4 \\ y = C_2z_2 + C_4z_4 \end{cases}$$

Il sottosistema S1 è influenzato da S2, da S3 e anche da S4 e infine dall'ingresso u. Il sottosistema S2 è influenzato da S4, e dall'ingresso u. Il sottosistema S3 è influenzato da S4, ed S4 è un sottosistema che evolve in modo autonomo. Infine l'uscita è condizionata da S2 e S4.

- S1 è un sottosistema tutto raggiungibile ma non osservabile
- S2 è un sottosistema caratterizzato da stati raggiungibili e osservabili
- S3 non è raggiungibile e inosservabile
- S4 è un sottosistema non raggiungibile, ma osservabile.

Def. **Stato equilibrio:**

- **Uno stato è di equilibrio se trovandosi il sistema in quello stato vi permane con ingresso nullo.**
- quindi lo stato di equilibrio x_e soddisfa la condizione:
    - $f(x_e) = 0$
- Nel caso dei sistemi lineari dove $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$ gli stati di equilibrio sono quelli che soddisfano la seguente equazione:
    - $\mathrm{A}x_e = 0$
    - **Da ciò si constata che $x_e = 0$ cioè l'origine dello spazio di stato è sempre uno stato di equilibrio ,in generale non è unico , lo è solo se il determinante di A è diverso da zero**

Def. **Stato equilibrio x_e stabile:**

- **x_e è stabile se** $\quad \forall\epsilon \quad \exists\delta_\epsilon : \| x_0 - x_\epsilon \| < \delta_\epsilon \quad \Rightarrow \quad \| x(t) - x_\epsilon \| < \epsilon \quad \forall t >= 0$

Def. **Stato equilibrio x_e attrattivo/stabilità asintotica:**

- **x_e è attrattivo se:**
    - $\exists\delta_a(\epsilon) : \| x_0 - x_\epsilon \| < \delta_a \quad \Rightarrow \quad \lim_{t\to\infty} \| x(t) - x_\epsilon \| = 0$
    - $\boldsymbol{la\ stabilit\grave{a}\ asintotica\ pu\grave{o}\ sussistere\ solo\ per\ lo\ stato\ zero\ e\ solo\ se\ la\ matrice\ A\ \grave{e}\ invertibile}$

Condizione necessaria e sufficiente di stabilità semplice:

$\| \phi(t - t_o) \| < k \qquad \forall t \qquad \Leftrightarrow Re(\lambda_i^{=1}) \leq 0 \; \& \; Re(\lambda_i^{>1}) < 0$

Condizione necessaria e sufficiente di stabilità asintotica:

- $\lim_{t\to\infty} \| \phi(t - t_o) \| = 0 \qquad \Leftrightarrow Re(\lambda_i) < 0$
- $\boldsymbol{se\ vale\ questa\ pi\grave{u}\ quella\ sopra\ si\ ha\ la\ stabilit\grave{a}\ asintotica}$

Def. **Stabilità esterna:**

Se un sistema è BIBO(Bound input bound output) comunque preso x e ingresso limitato u

Cioè $\| u(t) \| < M \Rightarrow \exists \mathcal{N}_{u,x_0} : \| y(t) \| < \mathcal{N}$

Condizione necessaria e sufficiente di stabilità esterna nello stato zero:

- $\int_0^\infty \| W(t) \| \, dt < \infty \qquad \forall t \qquad \Leftrightarrow Re(\lambda_i^{ecc\ e\ oss}) < 0$

Condizione necessaria e sufficiente di stabilità esterna:

- $\| \psi(\mathbf{t}) \| < \boldsymbol{k} \qquad \forall t \qquad \Leftrightarrow Re(\lambda_i^{oss>1}) < 0 \ \& \ Re(\lambda_i^{oss=1}) \leq 0$
- $\boldsymbol{se\ vale\ questa\ pi}$ù $\boldsymbol{quella\ sopra\ si\ ha\ la\ stabilit}$à $\boldsymbol{esterna}$

Criterio di Routh:

- Il criterio di Routh consente di stabilire se tutti gli zeri hanno parte reale negativa ed eventualmente quanti sono gli zeri a parte reale positiva
    -