Soluzioni del compito di
Teoria dei sistemi
8 gennaio 2013
Compito A

A cura di:
Raffaello Bonghi - bonghi@dis.uniroma1.it
Giovanni Mattei - mattei@dis.uniroma1.it

1. Assegnato il sistema dinamico

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{aligned}$$

dati:

$$A = \begin{pmatrix} a+1 & -2\,a & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 2\,a+2 & a-1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$
$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad D = 1$$

con $a = -2$

- Studiare dal punto di vista dell'analisi modale, quindi calcolare $\Phi(t)$, $H(t)$, $\Psi(t)$ e $W(t)$;
- Indicare per quali stati iniziali l'evoluzione libera non presenta oscillazioni;
- Stabilità interna ed esterna;
- Calcolare, se possibile, la risposta a regime $y_r(t)$ dato un ingresso $u(t) = \sin(t)\delta_{-1}(t - \frac{\pi}{2})$.

Sostituendo nella matrice A con $a = -2$ si ottiene:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

- Occorre innanzi tutto determinare gli autovalori di A, ossia le radici del polinomio caratteristico:
$$p(\lambda) = |A - \lambda I| = -(\lambda^2 + 4\lambda + 5)(\lambda + 1) = 0$$
si ricavano pertanto la coppia di autovalori complessi $\lambda_{1,2} = -2 \pm i$ e l'autovalore reale $\lambda_3 = -1$. Si procede quindi alla ricerca degli autovettori destri, iniziando dall'autovettore reale λ_3:
$$(A - \lambda_3 I)\, u_1 = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix} u_1 = 0$$
si trova quindi l'autovettore
$$u_1 = \begin{pmatrix} 2\alpha \\ \alpha \\ -2\alpha \end{pmatrix}$$
si sceglierà per semplicità il valore $\alpha = 1$.

Per quanto riguarda la coppia di autovettori complessi si otterrà:

$$(A - \lambda_2 I)\, u_2 = \begin{pmatrix} 1-\mathrm{i} & 4 & 2 \\ 0 & 1-\mathrm{i} & 0 \\ -1 & -2 & -1-\mathrm{i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a+\mathrm{i}d \\ b+\mathrm{i}e \\ c+\mathrm{i}f \end{pmatrix} = 0$$

ottenendo il vettore nella forma

$$u_2 = \begin{pmatrix} \alpha - \mathrm{i}\alpha \\ 0 \\ \mathrm{i}\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathrm{i} \begin{pmatrix} -\alpha \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix}$$

anche qui per semplicità si sceglierà $\alpha = 1$. Si ottiene quindi la coppia di autovettori definita come:

$$u_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice degli autovettori destri è:

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} u_1 & u_{2,1} & u_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

per quanto riguarda gli autovettori sinistri questi si calcolano imponendo la condizione di ortonormalità, ossia:

$$T = \begin{pmatrix} v_1^T \\ v_{2,1}^T \\ v_{2,2}^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 & u_{2,1} & u_{2,2} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \tag{1}$$

Si può quindi trasformare la matrice A nella matrice:

$$D = TAT^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Adesso è immediato calcolare la matrice di transizione dello stato $\Phi(t)$:

$$\Phi(t) = e^{At} = T^{-1} e^{Dt} T = T^{-1} \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2t}\cos t & e^{-2t}\sin t \\ 0 & -e^{-2t}\sin t & e^{-2t}\cos t \end{pmatrix} T =$$

$$\begin{pmatrix} e^{2t}(\cos(t)+\sin(t)) & 2e^{-t} - 2e^{-2t}\cos(t) + 2e^{-2t}\sin(t) & 2e^{-2t}\sin(t) \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ -e^{-2t}\sin(t) & 2e^{-2t}\cos(t) - 2e^{-t} & e^{-2t}(\cos(t)-\sin(t)) \end{pmatrix}$$

La matrice delle risposte impulsive dello stato $H(t)$:

$$H(t) = e^{At}B = \begin{pmatrix} 2e^{-2t}\cos(t) - 2e^{-t} - 4e^{-2t}\sin(t) \\ -e^{-t} \\ 2e^{-t} - 3e^{-2t}\cos(t) + e^{-2t}\sin(t) \end{pmatrix}$$

La matrice di trasformazione dell'uscita $\Psi(t)$:

$$\Psi(t) = Ce^{At} = \begin{pmatrix} e^{-2t}\cos(t) & 2e^{-2t}\sin(t) & e^{-2t}\cos(t) + e^{-2t}\sin(t) \end{pmatrix}$$

La matrice delle risposte impulsive $W(t)$:

$$W(t) = Ce^{At}B + D = 1 - e^{-2t}\cos(t) - 3e^{-2t}\sin(t) \tag{2}$$

- Per poter trovare quali siano gli stati iniziali per cui l'evoluzione libera non presenta oscillazioni è sufficiente osservare che, nelle coordinate trasformate, la matrice di transizione nello stato:

$$\Phi(t) = T^{-1}e^{Dt}T$$

è diagonale a blocchi e presenta una struttura tale per cui, partendo da tutti gli stati iniziali $z_0 = [k\ 0\ 0]$, si ottiene una soluzione non oscillante $z(t) = e^{Dt}z_0$, infatti si ha:

$$z(t) = e^{Dt}z_0 = \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2t}\cos t & e^{-2t}\sin t \\ 0 & -e^{-2t}\sin t & e^{-2t}\cos t \end{pmatrix} z_0$$

Utilizzando quindi il cambio di coordinate tale che $z = Tx$ (con T precedentemente calcolata nella 1), gli stati iniziali cercati sono del tipo:

$$x_0 = T^{-1}z_0 = \begin{pmatrix} 2k \\ k \\ -2k \end{pmatrix}$$

Infatti, a partire da essi, le soluzioni che si ottengono sono del tipo:

$$x(t) = \begin{pmatrix} 2ke^{-t} \\ ke^{-t} \\ -2ke^{-t} \end{pmatrix}$$

- Dati quindi gli autovalori del sistema in esame

$$\Lambda = \{-1, -2+j, -2-j\}$$

Si ha che stabilità asintotica interna per

$$\Lambda \subset C^-$$

ove C^- indica il semipiano negativo aperto dei numeri complessi, questa condizione risulta soddisfatta in quanto tutti gli autovalori sono a parte reale negativa.

Per quanto riguarda la stabilità esterna, gli autovalori simultaneamente eccitabili che osservabili, dovranno essere a parte reale negativa, ma sapengo che il sistema risulta internamente stabile questa implicherà che sarà stabile anche esternamente, infatti:

$$\Lambda_E^O \subset C^-$$

ove

$$\Lambda_E^O = \{-2+j, -2-j\}$$

- Il sistema ammette soluzione a regime permanente, in quanto tutti gli autovalori sono a parte reale minore di zero, dato quindi un segnale nella forma $u(t) = u_0 \sin \omega t$ la risposta a regime sarà nella forma:

$$y_r(t) = u_0 M(\omega) \sin(\omega t + \phi(\omega)) + Du(t)$$

ove

$$M(\omega) = |W(j\omega)| \qquad \phi(\omega) = \angle W(j\omega)$$

Dato quindi il segnale in ingresso del tipo $u(t) = \sin(t)\delta_{-1}(t - \frac{\pi}{2})$ tale segnale può essere rivisto nella forma:

$$u(t) = \cos\left(t - \frac{\pi}{2}\right)\delta_{-1}\left(t - \frac{\pi}{2}\right)$$

Presa quindi la funzione di trasferimento del sistema nella 2 si esegue la trasformata nel dominio di Laplace ottenendo:

$$W(s) = \frac{s(s+3)}{s^2 + 4s + 5}$$

dove il modulo e la fase sono rispettivamente

$$M(\omega)|_{\omega=1} = \frac{\sqrt{5}}{4} \qquad \phi(\omega)|_{\omega=1} = \arctan(2) \sim 1.1071$$

la soluzione è quindi:

$$y_r(t) \sim \frac{\sqrt{5}}{4}\cos\left(t - 0.4636\right)\delta_{-1}\left(t - \frac{\pi}{2}\right) + \sin(t)\delta_{-1}\left(t - \frac{\pi}{2}\right)$$

2. Data la funzione di trasferimento

$$W(s) = -\frac{1}{2}\frac{(s+\frac{1}{2})(s+1)}{(s^2-1)(s^2+3s+2)}$$

tracciare i diagrammi di Bode, rispettivamente del modulo e della fase.

Per prima cosa è necessario portare in forma di Bode la funzione di trasferimento, ottenendo:

$$W(s) = \frac{1}{8}\frac{(1+2s)}{(1+\frac{1}{2}s)(1-s)(1+s)} \tag{3}$$

Si hanno quindi un guadagno $K = \frac{1}{8}$ uno zero con constante di tempo in $\tau_1 = 2$, i poli in $\tau_1 = \frac{1}{2}$, $\tau_2 = -1$ e $\tau_3 = 1$.

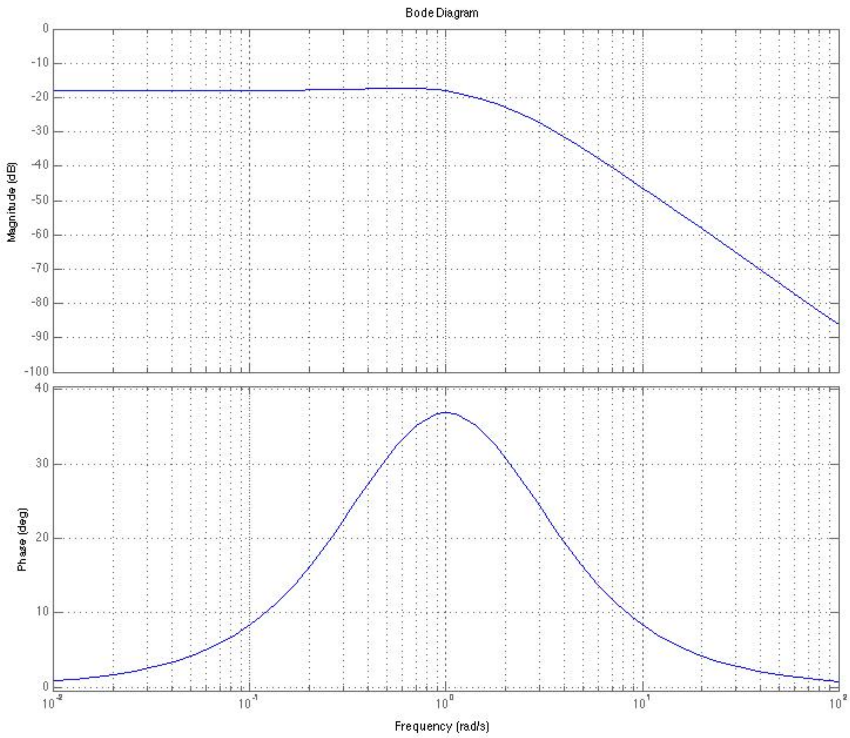

Figura 1: Diagramma di bode della funzione di trasferimento

3. Spiegare cos'è il sistema a tempo discreto equivalente ad un dato sistema a tempo continuo.

Il sistema tempo discreto equivalente ad un dato sistema a tempo continuo è una sua rappresentazione quando il segnale d'ingresso è costante a tratti su intervalli di ampiezza fissa oppure campionato e si è interessati a calcolare le evoluzioni negli istanti, detti di campionamento, corrispondenti alla variazione dell'ingresso. Il problema del calcolo del sistema a tempo discreto equivalente è detto anche *problema della discretizzazione*. Dato il sistema a tempo continuo:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned}$$

il sistema a tempo discreto equivalente, detto T il tempo di campionamento, è:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A_D x(k) + B_D u(k) \\ y(k) &= C_D(k) \end{aligned}$$

ove

$$A_D = e^{AT} \qquad B_D = \int_0^T e^{A\xi}\, d\xi\, B \qquad C_D = C$$

Teoria dei sistemi
8 gennaio 2013
Compito B

1. Assegnato il sistema dinamico

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned}$$

dati:

$$A = \begin{pmatrix} a+1 & -2\,a & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 2\,a+2 & a-1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$
$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

con $a = -1$

- Studiare dal punto di vista dell'analisi modale, quindi calcolare $\Phi(t)$, $H(t)$, $\Psi(t)$ e $W(t)$;
- Indicare per quali stati iniziali l'evoluzione libera non presenta oscillazioni;
- Stabilità interna ed esterna;
- Calcolare se possibile la risposta a regime $y_r(t)$ dato un ingresso $u(t) = \sin(t)\delta_{-1}(t - \frac{\pi}{2})$.

Sostituendo nella matrice A con $a = -1$ si ottiene:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

- Occore innanzi tutto determinare gli autovalori di A ossia le radici del polinomio caratteristico:
$$p(\lambda) = |A - \lambda I| = -(\lambda^2 + 2\lambda + 2)(\lambda + 1) = 0$$
si ricavano pertanto la coppia di autovalori complessi $\lambda_{1,2} = -1 \pm i$ e l'autovalore reale $\lambda_3 = -1$. Si procede quindi alla ricerca degli autovettori destri, iniziando dall'autovettore reale λ_3:
$$(A - \lambda_3 I)\,u_1 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} u_1 = 0$$
si trova quindi l'autovettore
$$u_1 = \begin{pmatrix} 2\alpha \\ \alpha \\ -2\alpha \end{pmatrix}$$
si sceglierà per semplicità il valore $\alpha = 1$.
Per quanto riguarda la coppia di autovettori complessi si otterrà:
$$(A - \lambda_2 I)\,u_2 = \begin{pmatrix} 1-\mathrm{i} & 2 & 2 \\ 0 & -\mathrm{i} & 0 \\ -1 & 0 & -1-\mathrm{i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a+\mathrm{i}d \\ b+\mathrm{i}e \\ c+\mathrm{i}f \end{pmatrix} = 0$$

ottenendo il vettore nella forma

$$u_2 = \begin{pmatrix} \alpha - \mathrm{i}\alpha \\ 0 \\ \mathrm{i}\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathrm{i} \begin{pmatrix} -\alpha \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix}$$

anche qui per semplicità si sceglierà $\alpha = 1$. Si otterrà la coppia di autovettori definita come:

$$u_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Si otterrà quindi la matrice degli autovettori destri:

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} u_1 & u_{2,1} & u_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

per quanto riguarda gli autovettori sinistri questi si calcolano imponendo la condizione di ortonormalità , ossia:

$$T = \begin{pmatrix} v_1^T \\ v_{2,1}^T \\ v_{2,2}^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 & u_{2,1} & u_{2,2} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \tag{4}$$

Si può quindi trasformare la matrice A nella matrice:

$$D = TAT^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Adesso è immediato calcolare la matrice di transizione dello stato $\Phi(t)$:

$$\Phi(t) = e^{At} = T^{-1} e^{Dt} T = T^{-1} \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t}\cos t & e^{-t}\sin t \\ 0 & -e^{-t}\sin t & e^{-t}\cos t \end{pmatrix} T =$$

$$\begin{pmatrix} e^{-t}(\cos(t) + \sin(t)) & 2e^{-t} - 2e^{-t}\cos(t) + 2e^{-t}\sin(t) & 2e^{-t}\sin(t) \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ -e^{-t}\sin(t) & 2e^{-t}\cos(t) - 2e^{-t} & e^{-t}(\cos(t) - \sin(t)) \end{pmatrix}$$

La matrice delle risposte impulsive dello stato $H(t)$:

$$H(t) = e^{At}B = \begin{pmatrix} 2e^{-t}\cos(t) - 2e^{-t} - 4e^{-t}\sin(t) \\ -e^{-t} \\ 2e^{-t} - 3e^{-t}\cos(t) + e^{-t}\sin(t) \end{pmatrix}$$

La matrice di trasformazione dell'uscita $\Psi(t)$:

$$\Psi(t) = Ce^{At} = \begin{pmatrix} e^{-t}\cos(t) & 2e^{-t}\sin(t) & e^{-t}\cos(t) + e^{-t}\sin(t) \end{pmatrix}$$

La matrice delle risposte impulsive $W(t)$:

$$W(t) = Ce^{At}B = -e^{-t}\cos(t) - 3e^{-t}\sin(t) \tag{5}$$

- Dati quindi gli autovalori del sistema in esame

$$\Lambda = \{-1, -1+j, -1-j\}$$

Si ha che stabilità asintotica interna per

$$\Lambda \subset C^-$$

ove C^- indica il semipiano negativo aperto dei numeri complessi, questa condizione risulta soddisfatta in quanto tutti gli autovalori sono a parte reale negativa.

Per quanto riguarda la stabilità esterna, gli autovalori simultaneamente eccitabili che osservabili, dovranno essere a parte reale negativa, ma sapengo che il sistema risulta internamente stabile questa implicherà che sarà stabile anche esternamente, infatti:

$$\Lambda_E^O \subset C^-$$

ove

$$\Lambda_E^O = \{-1+j, -1-j\}$$

- Per poter trovare quali siano gli stati iniziali per cui l'evoluzione libera non presenta oscillazioni è sufficiente osservare che, nelle coordinate trasformate, la matrice di transizione nello stato:

$$\Phi(t) = T^{-1}e^{Dt}T$$

è diagonale a blocchi e presenta una struttura tale per cui, partendo da tutti gli stati iniziali $z_0 = [k\ 0\ 0]$, si ottiene una soluzione non oscillante $z(t) = e^{Dt}z_0$, infatti si ha:

$$z(t) = e^{Dt}z_0 = \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2t}\cos t & e^{-2t}\sin t \\ 0 & -e^{-2t}\sin t & e^{-2t}\cos t \end{pmatrix} z_0$$

Utilizzando quindi il cambio di coordinate tale che $z = Tx$ (con T precedentemente calcolata nella 1), gli stati iniziali cercati sono del tipo:

$$x_0 = T^{-1}z_0 = \begin{pmatrix} 2k \\ k \\ -2k \end{pmatrix}$$

Infatti, a partire da essi, le soluzioni che si ottengono sono del tipo:

$$x(t) = \begin{pmatrix} 2ke^{-t} \\ ke^{-t} \\ -2ke^{-t} \end{pmatrix}$$

- Il sistema ammette soluzione a regime permanente, in quanto tutti gli autovalori sono a parte reale minore di zero, dato quindi un segnale nella forma $u(t) = u_0 \sin \omega t$ la corrispondente risposta a regime sarà nella forma:

$$y_r(t) = u_0 M(\omega) \sin(\omega t + \phi(\omega))$$

ove

$$M(\omega) = |W(j\omega)| \qquad \phi(\omega) = \angle W(j\omega)$$

Dato quindi il segnale in ingresso del tipo $u(t) = \sin(t)\delta_{-1}(t - \frac{\pi}{2})$ tale segnale può essere rivisto nella forma:

$$u(t) = \cos\left(t - \frac{\pi}{2}\right)\delta_{-1}\left(t - \frac{\pi}{2}\right)$$

Presa quindi la funzione di trasferimento del sistema nella 5 si esegue la trasformata nel dominio di Laplace ottenendo:

$$W(s) = -\frac{s+4}{s^2 + 2s + 2}$$

dove il modulo e la fase sono rispettivamente

$$M(\omega)|_{\omega=1} = \frac{\sqrt{5}\sqrt{17}}{5} \qquad \phi(\omega)|_{\omega=1} = \pi - \arctan\left(\frac{7}{6}\right) \sim 2.2794$$

la soluzione è quindi:

$$y_r(t) \sim \frac{\sqrt{5}\sqrt{17}}{5}\cos\left(t + 0.7086\right)\delta_{-1}\left(t - \frac{\pi}{2}\right)$$

2. Data la funzione di trasferimento

$$W(s) = \frac{3}{2}\frac{(s+1)(s-2)}{(s-5)(s+2)(s^2+3s+2)}$$

tracciare i diagrammi di Bode, rispettivamente del modulo e della fase.

Per prima cosa è necessario portare in forma di Bode la funzione di trasferimento, ottenendo:

$$W(s) = \frac{3}{20}\frac{(1+\frac{1}{2}s)}{(1+\frac{1}{5}s)(1+\frac{1}{2}s)^2}$$

Si hanno quindi un guadagno $K = \frac{3}{20}$ uno zero con constante di tempo in $\tau_1 = \frac{1}{2}$, i poli in $\tau_1 = \frac{1}{5}$ e $\tau_{2,3} = \frac{1}{2}$.

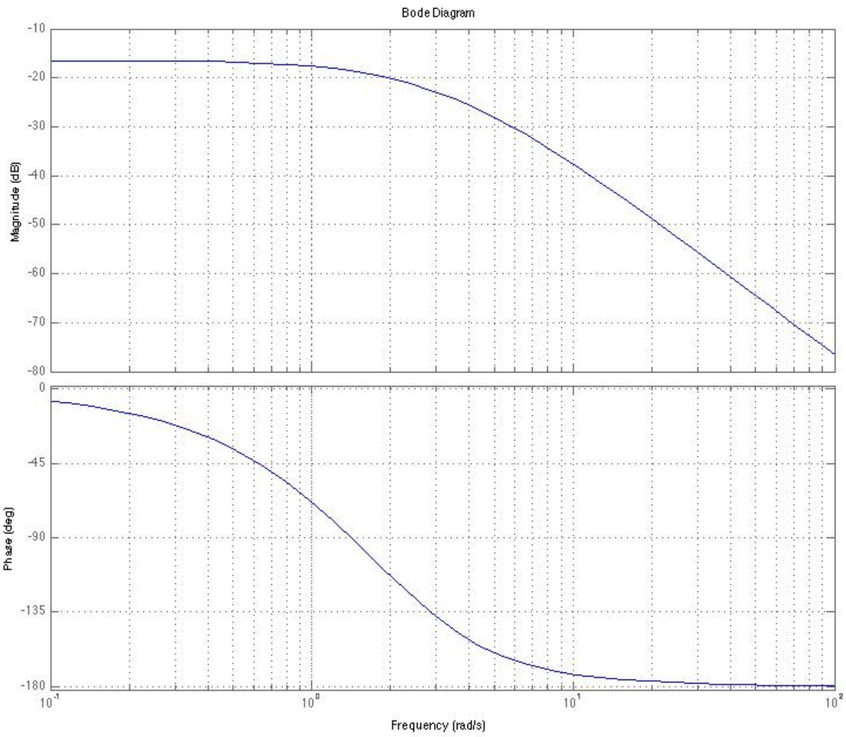

Figura 2: Diagramma di bode della funzione di trasferimento

3. Spiegare cos'è il sistema a tempo discreto equivalente ad un dato sistema a tempo continuo.

Vedi pagina 6