1. Modelli ingresso uscita lineari e rappresentazioni con lo stato

1.1. Il problema della realizzazione

Il problema che studieremo, la realizzazione, consiste nell' associare ad una data matrice di funzioni di variabile complessa, che viene assunta a descrivere un legame ingresso - uscita, una rappresentazione con lo stato.

I problemi finora trattati sono principalmente orientati a chiarire il comportamento a partire da una rappresentazione. Il calcolo delle risposte, anche quelle forzate nel dominio della variabile complessa sono di questo tipo. Il problema che tratteremo è in un certo senso inverso: quale è l'eventuale rappresentazione con lo stato, A, B, C, D, associata ad una assegnata funzione di variabile complessa?

Questo problema è interessante, perché come sappiamo alla rappresentazione con lo stato è associato uno schema detto di realizzazione che consente di simulare in tempo reale il comportamento del sistema

Immagineremo, quindi di avere identificato in qualche modo il legame funzionale che c'è tra ingresso e uscita forzata di un assegnato processo; sotto quali condizioni questo legame funzionale può essere riprodotto dal comportamento forzato di una rappresentazione lineare?

La formulazione è la seguente: assegnato un legame funzionale definito dall'integrale di convoluzione con un nucleo $K(t)$

$$y(t) = \int_0^t K(t-\tau)u(\tau)d\tau$$

sotto quali condizioni questo legame funzionale coincide con la risposta forzata di un sistema lineare, stazionario a dimensione finita, causale?
Poiché come sappiamo il legame forzato di un sistema lineare, stazionario a dimensione finita, è caratterizzato da:

$$y_f(t) = \int_0^t \left(Ce^{A(t-\tau)}B + D\delta(t-\tau)\right)u(\tau)d\tau$$

il problema formulato ammette soluzione se il nucleo, $K(t)$, coincide con la matrice delle risposte impulsive di un sistema.

Si perviene quindi alle seguenti riformulazioni del problema nel dominio del tempo e della variabile complessa, rispettivamente.

Problema della realizzazione

Assegnato $K(t)$ $(q \times p)$ trovare $(n,\ A,\ B,\ C,\ D)$ tali che

$$Ce^{At}B + D\delta(t) = K(t)$$

Equivalentemente: assegnato $K(s)$ $(q \times p)$ trovare $(n,\ A,\ B,\ C,\ D)$ tali che

$$C(sI-A)^{-1}B + D = K(s)$$

La quaterna $(A,\ B,\ C,\ D)$ è detta realizzazione di $K(t)$ o di $K(s)$.

Una condizione certamente necessaria per la realizzabilità è che $K(s)$ sia una matrice di funzioni razionali proprie.Infatti ha questa caratteristica l'espressione della matrice delle funzioni di trasferimento di un sistema dinamico lineare. Ciò significa che se il legame funzionale tra ingresso - uscita è caratterizzato da un nucleo $K(t)$ la cui trasformata di Laplace, $K(s)$, non è una matrice di funzioni razionali proprie, questo legame ingresso - uscita non può essere realizzato mediante un sistema lineare, stazionario a dimensione finita.

Sorge spontanea la domanda: ma questa condizione è anche sufficiente? La condizione è anche sufficiente come viene mostrato nel seguito.

La prova è costruttiva, cioè si mostrerà come a partire da una matrice di funzioni razionali proprie, si possa costruire, per ispezione sui coefficienti delle matrici che la descrivono, una sua realizzazione.

Si assuma, senza perdita di generalità che $K(s)$ sia una matrice di funzioni razionali strettamente proprie, sono tali le funzioni razionali quando il grado del numeratore è più basso del grado del denominatore. Si è detto senza perdita di generalità perché si può sempre passare da una forma propria ad una strettamente propria, infatti, una matrice razionale propria si può sempre scrivere come

$$\overline{K(s)} = K_0 + K(s)$$

con K_0 matrice costante e $K(s)$ matrice razionale strettamente propria. Posto $D = K_0$, il problema della realizzazione si riduce al calcolo di n, A, B, C per una matrice razionale strettamente propria del tipo

$$K(s) = \frac{B_0 + B_1 s + \ldots + B_{n-1} s^{n-1}}{a_0 + a_1 s + \ldots + a_{n-1} s^{n-1} + s^n}$$

ove le B_i sono matrici $(q \times p)$ di costanti.

A titolo di esempio, la realizzazione del seguente nucleo

$$\overline{K(s)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{s+1} \\ \frac{s+1}{s} \end{pmatrix} = \begin{array}{c} D \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{array} + \begin{array}{c} K(s) \\ \begin{pmatrix} \frac{1}{s+1} \\ \frac{1}{s} \end{pmatrix} \end{array}$$

si riconduce alla realizzazione di una $K(s)$ razionale strettamente propria.

Due realizzazioni in forma canonica

Due diverse realizzazioni possono essere ottenute direttamente per ispezione dei coefficienti della $K(s)$ nella forma data.

Realizzazione in forma canonica raggiungibile

Una prima realizzazione cosiddetta in *forma canonica raggiungibile*, di dimensione np, ove p indica la seconda dimensione di K e n il grado del minimo comune multiplo dei polinomi a denominatore.

$$A_R = \begin{pmatrix} 0 & I & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & I & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & I \\ -a_0 I & & \cdots & & -a_{n-1} I \end{pmatrix} \quad B_R = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ I \end{pmatrix}$$

$$C_R = \begin{pmatrix} B_0 & \ldots & \ldots & B_{n-1} \end{pmatrix}$$

ove le matrici identità, I, sono matrici che hanno dimensione $(p \times p)$. e, di conseguenza, le matrici A_R, B_R e C_R hanno dimensione $(np \times np)$, $(np \times p)$ e $(q \times np)$,rispettivamente.

Esempio:

$$K(s) = \begin{pmatrix} \frac{1}{s+1} \\ \frac{1}{s} \end{pmatrix} = \frac{\begin{pmatrix} s \\ s+1 \end{pmatrix}}{s^2+s} = \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} s}{s^2+s}$$

$$A_R = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad B_R = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad C_R = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

infatti è facile verificare che

$$C_R(sI - A_R)^{-1} B_R = K(s)$$

Altro esempio:

$$K(s) = \frac{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} s}{1 + 3s + s^2}$$

in cui

$$p = 2 \quad n = 2$$

e la realizzazione, di dimensione 4, è

$$A_R = \left(\begin{array}{c|c} 0 & I \\ \hline -a_0 I & -a_1 I \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline -1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -3 \end{array}\right)$$

$$B_R = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad C_R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

La dimostrazione della correttezza della procedura seguita per calcolare la realizzazione consiste nel verificare che la matrice delle funzioni di trasferimento associata a tale rappresentazione coincide con la $K(s)$ assegnata.

A questo proposito bisogna calcolare

$$C_R(sI - A_R)^{-1} B_R = C_R \frac{(sI - A_R)^{a^T}}{(sI - A_R)} B_R$$

$$= \begin{pmatrix} B_0 & \dots & B_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ 0 & & & & -1 \\ a_0 & \cdots & \cdots & a_{n-2} & s + a_{n-1} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ove si è fatto riferimento al caso $p = q = 1$ per semplicità di notazioni. Si osservi, innanzitutto che il calcolo del determinante di $sI - A_R$ dá

$$a_0 + a_1 s + \ldots + s^n$$

ciò che è sempre vero per una matrice A che abbia la struttura di A_R: gli elementi dell'ultima riga sono proprio i coefficienti del polinomio caratteristico

Il calcolo della funzione di trasferimento è notevolmente semplificato dalla struttura di B_R che ha tutti zeri ed un 1 nell'ultima posizione. Basterà quindi calcolare solo l'ultima colonna dell'aggiunta - trasposta; sviluppando i calcoli

$$\frac{(B_0 \ldots B_{n-1})}{a_0 + a_1 s + \ldots + s^n} \qquad \begin{pmatrix} * & * & 1 \\ * & * & s \\ * & * & \vdots \\ * & * & \vdots \\ * & * & s^{n-1} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} * & * & \dfrac{B_0 + B_1 s + \ldots + B_{n-1} s^{n-1}}{a_0 + a_1 s + \ldots + s^n} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

e quindi

$$K(s) = \frac{B_0 + B_1 s + \ldots + B_{n-1} s^{n-1}}{a_0 + a_1 s + \ldots + s^n}$$

Lo schema di realizzazione/simulazione associato a questa rappresentazione con lo stato comporta operazioni di integrazione, moltiplicazione per costante e somma come messo in evidenza nella figura seguente in cui si è assunto per semplicità $n = 2$.

$$A_R = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{pmatrix} \qquad B_R = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad C_R = (\, b_0 \quad \ldots \quad b_1 \,)$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -a_0 x_1 - a_1 x_2 + u \\ \; y = b_0 x_1 + b_1 x_2 \end{cases}$$

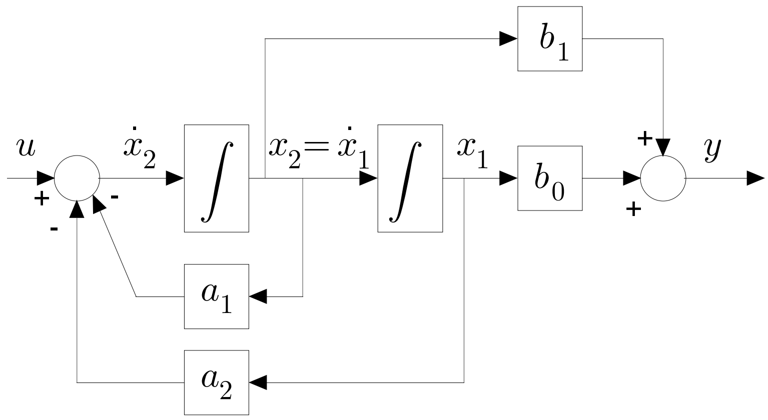

Figura 1.1

Si noti che la realizzazione individuata secondo questa tecnica ha dimensione $(np \times np)$; quindi tutte le volte che il numero di ingressi è uno, indipendentemente dal numero di uscite, la dimensione di questa realizzazione è n.

La realizzazione (A_R, B_R, C_R) è detta in forma canonica raggiungibile in quanto lo spazio di stato ad essa associato è tutto raggiungibile. Infatti, a partire dall'espressione

$$A_R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 & \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & & & & 1 \\ -a_0 & & \dots & & a_{n-1} \end{pmatrix} \qquad B_R = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$C_R = (\, b_0 \quad \dots \quad b_{n-1} \,)$$

si calcola facilmente la matrice di raggiungibilità

$$(\, B \quad | \quad \dots \quad A^{n-1}B \,) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ \vdots & 0 & 1 & & \\ 0 & 1 & * & & \\ 1 & * & * & & \end{pmatrix}$$

che ha determinante diverso da zero e perciò rango pieno e pari ad n. Ciò prova che la realizzazione (A_R, B_R, C_R) è tutta raggiungibile.

Si noti che se si collegano i risultati acquisiti con quanto mostrato nello studio delle propreità di raggiungibilità ed osservabilità, disponiamo di una procedura di calcolo che ci consente, assegnata una generica realizzazione di un dato nucleo, di calcolarne una nuova che soddisfi la proprietà di essere tutta raggiungibile. Se infatti (A, B, C) è una realizzazione non tutta raggiungibile,

$$\rho(B \dots A^{n-1}B) < n$$

effettuando una scomposizione rispetto all proprietà di raggiungibilità ed estraendone la parte raggiungibile si ottiene una nuova terna (A_{11}, B_1, C_1) che ha la stessa matrice delle risposte impulsive, e quindi è ancora una realizzazione del nucleo dato, è tutta raggiungibile.

Realizzazione in forma canonica osservabile
Una seconda realizzazione che considereremo, di dimensione nq, è quella cosiddetta in *forma canonica osservabile*, A_o, B_o, C_o.

$$\underset{(nq \times nq)}{A_o} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & -a_0 I \\ I & & & & \vdots \\ 0 & \ddots & & \vdots & \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & I & -a_{n-1} I \end{pmatrix} \qquad \underset{(nq \times p)}{B_o} = \begin{pmatrix} B_0 \\ \vdots \\ \vdots \\ B_{n-1} \end{pmatrix}$$

$$\underset{(q \times nq)}{C_o} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & I \end{pmatrix}$$

$$C_o(sI - A_o)^{-1} B_o = K(s)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s & 0 & \cdots & 0 & +a_0 \\ -1 & s & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & s + a_{n-1} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} B_0 \\ \vdots \\ \vdots \\ B_{n-1} \end{pmatrix}$$

$$|sI - A_o| = a_0 + a_1 s + \ldots + s^n$$

$$\frac{\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}}{a_0 + \cdots + s^n} \begin{pmatrix} s & 0 & \cdots & 0 & +a_0 \\ -1 & s & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & s + a_{n-1} \end{pmatrix}^{a^T} \begin{pmatrix} B_0 \\ \vdots \\ \vdots \\ B_{n-1} \end{pmatrix}$$

in virtù della struttura della matrice C_o, l'unica cosa che vogliamo calcolare è l'ultima riga, in quanto le precedenti vengono moltiplicate per degli zeri.

$$\frac{\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}}{a_0 + \ldots + s^n} \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ 1 & \cdots & s^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_0 \\ \vdots \\ \vdots \\ B_{n-1} \end{pmatrix}$$

Il prodotto complessivo è proprio la $K(s)$

Esempio:

$$\underset{q \times p}{K(s)} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} s}{3 + 2s + s^2} \qquad p = q = 2$$

$$A_o = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ \hline 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right) \qquad B_o = \left(\begin{array}{cc} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ \hline 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$C_o = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$(q \times p) \qquad q = 1$

$$K(s) = \frac{\begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \end{pmatrix} s}{3 + 2s + s^2}$$

$$A_o = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \qquad B_o = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad C_o = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Lo schema di realizzazione/simulazione associato a questa rappresentazione con lo stato comporta operazioni di integrazione, moltiplicazione per costante e somma come messo in evidenza nella figura seguente in cui si assume per semplicità $n = 2$.

$$A_o = \begin{pmatrix} 0 & -a_0 \\ 1 & -a_1 \end{pmatrix} \qquad B_o = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \end{pmatrix} \qquad C_o = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -a_0 x_2 + b_0 u \\ \dot{x}_2 = x_1 - a_1 x_2 + b_1 u \\ \;\; y = x_2 \end{cases}$$

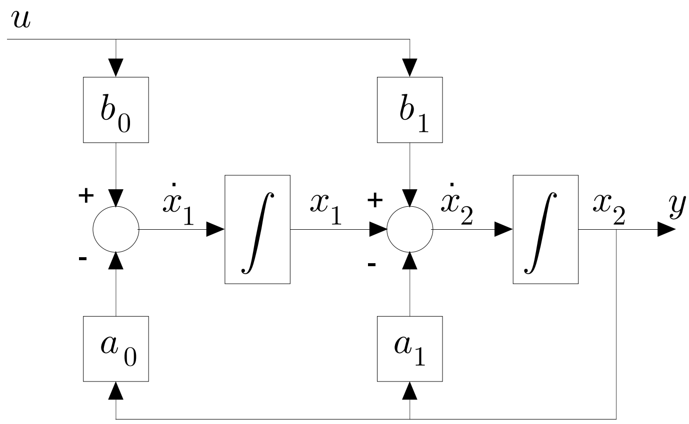

Figura 1.2

La realizzazione ora introdotta è detta in forma canonica osservabile in quanto dalla forma delle matrici A_0 e C_0 si ottiene

$$\begin{pmatrix} C_o \\ C_o A_o \\ \vdots \\ C_o A_o^{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & & & 0 & 1 \\ 0 & & 0 & 1 & * \\ 0 & & & & \\ & & & & \\ 1 & * & & & \end{pmatrix}$$

La matrice di osservabilità è triangolare destra, ed è quindi non singolare. La realizzazione è dunque tutta osservabile.

Infine quanto studiato fornisce, implicitamente, una tecnica di riduzione rispetto a tale proprietà. Infatti assegnata una realizzazione A, B, C, eventualmente la realizzazione di un dato nucleo $k(t) = Ce^{At}B$, se essa non è tutta osservabile, si può estrarre a seguito di una trasformazione,T, una nuova realizzazione A_{11}, B_1, C_1, di dimensione $m < n$. Si tratta di una realizzazione dello stesso nucleo di dimensione inferiore e tutta osservabile.

1.2. Le realizzazioni minime

Il problema della realizzazione, come si ricorderà, studia sotto quali condizioni e in quale modo un legame funzionale ingresso - uscita descritto dalla convoluzione di un assegnato nucleo $K(t)$ (nel tempo continuo integrale di convoluzione, nel tempo discreto sommatoria di convoluzione), possa essere realizzato mediante la risposta forzata di un sistema dinamico, lineare stazionario, a dimensione finita.

Data $K(s)$, che senza perdita di generalità si può assumere ad elementi funzioni razionali proprie, si deve trovare una dimensione n e delle matrici A, B, e C che definiscono una rappresentazione con lo stato del sistema dinamico che ha funzione di trasferimento coincidente con $K(s)$.

Come si è mostrato condizione necessaria e sufficiente di realizzabilità è che $K(s)$ sia una matrice razionale propria. Inoltre abbiamo visto come costruire due diverse realizzazioni. Quella in forma canonica raggiungibile:

$$K(s) = \frac{B_0 + \cdots + B_{n-1}s^{n-1}}{a_0 + \cdots + s^n}$$

$$\underset{(np \times np)}{A_R} = \begin{pmatrix} 0 & I & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & I \\ -a_0 I & \cdots & \cdots & -a_{n-1}I \end{pmatrix} \qquad B_R = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ I \end{pmatrix}$$

$$C_R = \begin{pmatrix} B_0 & \cdots & B_{n-1} \end{pmatrix}$$

e quella in forma canonica osservabile:

$$\underset{(nq \times nq)}{A_o} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & -a_0 I \\ I & & & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & I & -a_{n-1} I \end{pmatrix} \qquad B_o = \begin{pmatrix} B_0 \\ \vdots \\ B_{n-1} \end{pmatrix}$$

$$C_o = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & I \end{pmatrix}$$

avendo queste realizzazioni dimensioni pari a n quando si va a realizzare un nucleo che caratterizza un legame ingresso - uscita con un solo ingresso $p = 1$ o con una sola uscita. $q = 1$

Ulteriori esempi elementari. L'integratore:

$$K(s) = \frac{1}{s} \Rightarrow A = 0 \quad B = 1 \quad C = 1$$

$$\dot{x} = u \quad y = x$$

La funzione con una costante di tempo τ e guadagno K:

$$K(s) = \frac{K}{1 + \tau s} = \frac{K/\tau}{\frac{1}{\tau} + s} \Rightarrow A = -\frac{1}{\tau} \quad B = \frac{K}{\tau} \quad C = 1$$

$$\dot{x} = -\frac{1}{\tau} x + \frac{K}{\tau} u \quad y = x$$

il doppio integratore:

$$K(s) = \frac{1}{s^2}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad \dot{x}_2 = u \quad y = x_1$$

Le considerazioni che seguono riguardano la dimensione delle realizzazioni; quelle di dimensione minima sono da preferirsi come viene messo in luce nel seguito. Si ricordi, innanzitutto che diverse realizzazioni di una fissata $K(s)$

possono essere calcolate a partire da una qualsiasi (A, B, C) mediante trasformazioni di coordinate

$$|T|_{n\times n} \neq 0 \Rightarrow (TAT^{-1}, TB, CT^{-1})$$

Ma di realizzazioni ne esistono anche di dimensioni diverse, infatti sappiamo che la matrice delle risposte impulsive contiene informazioni circa le leggi di moto dei modi che sono simultaneamente eccitabili ed osservabili, quindi la $W(s)$ non mantiene le informazioni su tutti gli autovalori di A. Si consideri ad esempio,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$$

la funzione di trasferimento è:

$$W(s) = \frac{1}{s-1}$$

e, la costruzione di una sua realizzazione secondo una delle due tecniche già viste dá

$$\bar{A} = 1 \qquad \bar{B} = 1 \qquad \bar{C} = 1$$

si ha, quindi, una diversa realizzazione $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$ di dimensione 1 che non è equivalente a quella precedente di dimensione 2.

Poiché le dimensioni possono essere diverse si pone naturalmente l'esigenza di disporre di tecniche che forniscono realizzazioni con la dimensione dello stato più piccola possibile. Alla riduzione della dimensione corrisponde, infatti una minore complessità in termini di procedure di calcolo, un'economia di dispositivi in termini di realizzazione fisica. É, quindi importante andare a costruire realizzazioni minime cioè che abbiano dimensione dello stato N la più piccola possibile.

Una prima osservazione riguarda le tecniche proposte che, come già sottolineato forniscono realizzazioni di dimensione n in condizioni particolari. In questo caso tali realizzazioni sono anche minime.

Se infatti con n indichiamo il grado del polinomio a denominatore nella $K(s)$, è semplice comprendere che realizzazioni di dimensione N inferiore ad n non esistono. Basta ricordare che il polinomio a denominatore di una funzione di trasferimento ha dimensione minore o uguale a quella della matrice; ciò comporta che una matrice dinamica A di dimensione inferiore ad n non esiste; poiché quella calcolata ha questa dimensione, essa è minima.

$$q = 1 \Rightarrow (A_o, B_o, C_o) \quad minima$$
$$p = 1 \Rightarrow (A_R, B_R, C_R) \quad minima$$

Quindi già disponiamo di una tecnica di realizzazione minima per nuclei, K, che sono vettori riga o colonna. Nel caso generale questo non è vero. Ad esempio il sistema a due ingressi e due uscite:

$$K(s) = \begin{pmatrix} \frac{1}{s+1} & 0 \\ \frac{2}{s(s+2)} & \frac{1}{s+2} \end{pmatrix} = \frac{\begin{pmatrix} s^2+2s & 0 \\ 2s+2 & s^2+1 \end{pmatrix}}{s^3+3s^2+2s} =$$

$$\frac{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} s + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} s^2}{2s+3s^2+s^3}$$

$$\begin{cases} p = q = 2 \\ n = 3 \end{cases} \rightarrow N = 6$$

ammette, secondo le tecniche proposte, realizzazioni di dimensione 6.

É possibile mettere a punto delle tecniche di realizzazione che consentano nel caso generale di individuare delle realizzazioni in forma minima? Ciò è possibile.

Preliminarmente e con riferimento all'esempio, si metterà in luce come sia possibile, già con le informazioni che abbiamo, individuare una realizzazione di dimensione inferiore a 6.

Da un primo punto di vista la matrice data definisce due legami ingresso - uscita mediante vettori riga a due elementi, K_i, tra ciascun uscita e i due ingressi

$$K(s) = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{s+1} & 0 \\ \dfrac{2}{s(s+2)} & \dfrac{1}{s+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_1(s) \\ K_2(s) \end{pmatrix}$$

Si hanno quindi due legami

$$K_1(s) = \frac{(\,1 \quad 0\,)}{s+1}$$

realizzabile mediante le matrici

$$A_o^1 = (-1) \qquad B_o^1 = (\,1 \quad 0\,) \qquad C_o^1 = 1$$

$$K_2(s) = \frac{(\,2 \quad 0\,)(\,0 \quad 1\,)\,s}{s^2+2s}$$

realizzabile mediante le matrici

$$A_o^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \qquad B_o^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad C_o^2 = (\,0 \quad 1\,)$$

A partire dalle realizzazioni di K_1 e K_2, realizzazioni delle righe, possiamo calcolare una realizzazione di dimensione 3 del nucleo dato mediante le seguenti matrici

$$A = \begin{pmatrix} A_o^1 & 0 \\ 0 & A_o^2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} B_o^1 \\ B_o^2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} C_o^1 & 0 \\ 0 & C_o^2 \end{pmatrix}$$

ove si è tenuto conto del fatto che il sistema risulta dalla connessione di due sottosistemi che hanno gli stessi ingressi e ciascuno definisce un'uscita. Una tecnica alternativa consiste nel realizzare ciascuna colonna. In questo caso

$$K(s) = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{s+1} & 0 \\ \dfrac{2}{s(s+2)} & \dfrac{1}{s+2} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} K_1(s) & K_2(s) \end{array} \right)$$

A ciascuna di queste colonne posso associare una realizzazione di dimensione 3 per K_1

$$K_1(s) = \frac{\begin{pmatrix} s(s+2) \\ 2(s+1) \end{pmatrix}}{s(s+1)(s+2)} \rightarrow n_1 = 3$$

e 1 per K_2

$$K_2(s) = \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{s+2} \Rightarrow n_2 = 1$$

la realizzazione complessiva avrà dimensione $N = n_1 + n_2 = 4$ ed è del tipo

$$A = \begin{pmatrix} A_o^1 & 0 \\ 0 & A_o^2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} B_o^1 & 0 \\ 0 & B_o^2 \end{pmatrix} \qquad C = (\, C_o^1 \quad C_o^2 \,)$$

ove si è tenuto conto del fatto che il sistema risulta dalla connessione di due sottosistemi che hanno le stesse uscite e ciascuno un solo ingresso.

Con riferimento all'esempio a più ingressi e uscite in esame la tecnica di realizzazione per righe risulta essere più conveniente di quella per colonne.
In conclusione con le informazioni a noi note siamo in grado di costruire delle realizzazioni di dimensione inferiore a quella che risulterebbe essere la dimensione della realizzazione costruita direttamente sulla $K(s)$.

1.2.a. Una tecnica di realizzazione minima nel caso di p e q maggiori di 1 *

La tecnica in questione è fondata su alcune considerazioni elementari a partire dall'espansione della $K(s)$ in frazioni parziali.

$$K(s) = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{s+1} & 0 \\ \dfrac{2}{s(s+2)} & \dfrac{1}{s+2} \end{pmatrix} = \frac{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}{s} + \frac{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}{s+1} + \frac{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}{s+2}$$

$$K(s) = \sum_{i=1}^{r} \frac{K_i}{s - p_i}$$

che supporremo caratterizzata dalla presenza di poli semplici: polinomio a denominatore comune con zeri a molteplicità unitaria. K_i sono i residui matriciali di dimensione $(q \times p)$.
Sia

$$\rho_i = rango \quad K_i$$

e siano C_i e B_i due matrici di rango interno ρ_i che caratterizzano una fattorizzazione minima del residuo stesso

$$\begin{aligned} &K_i = C_i B_i \\ &(q \times \rho_i)(\rho_i \times p) \end{aligned}$$

Una realizzazione che risulta essere minima è quella di dimensione $N = \sum_{i=1}^{r} \rho_i$ con

- A diagonale ad elementi coincidenti con i poli dell'espansione in frazioni parziali con molteplicità ciascuno pari al rango del residuo relativo

- B e C, l'aggregato delle matrici B_i e C_i

$$B = \begin{pmatrix} B_1 \\ \cdots \\ \vdots \\ \cdots \\ B_r \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} C_1 & \vdots & \cdots & C_r & \vdots \end{pmatrix}$$

Nel caso dell'esempio precedente:

$$K_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$K_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$K_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix}$$

e, quindi

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Questa tecnica ci consente, nel caso di poli semplici dell'espansione in frazioni parziali della $K(s)$, di individuare una realizzazione minima per altro in una formula semplice, con A diagonale.

Un ultimo aspetto che si vuole mettere in luce è che *le realizzazioni minime hanno dimensioni pari al rango della seguente matrice, H, detta matrice di Hankel.* Tale risultato, che non sarebbe difficile dimostrare, è importante nelle applicazioni in quanto consente di rilevare l'ordine delle realizzazioni minime eventualmente a partire dall'esame del comportamento ingresso - uscita.

$$\begin{matrix} K(t) \\ (q \times p) \end{matrix} \qquad S_i = q \times p$$

$$H = \begin{pmatrix} S_0 & S_1 & S_2 & \cdots \\ S_1 & S_2 & S_3 & \cdots \\ S_2 & S_3 & S_4 & \cdots \\ S_3 & S_4 & \vdots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix}$$

matrice infinita, a blocchi, in cui

$$S_i = \left. \frac{d^i K(t)}{dt^i} \right|_{t=0}$$

La matrice di Hankel a partire da una realizzazione (A, B, C) di un sistema dinamico, può essere ottenuta andando a sostituire alla $K(t)$ l'espressione della risposta impulsiva, ottenendo per i coefficienti:

$$S_i \rightarrow CA^iB$$

1.3. Introduzione allo studio dei Sistemi Interconnessi

I sistemi interconnessi, cioè costituiti da più parti, da più sottosistemi tra loro collegati in vario modo sono l'oggetto di questa lezione.

Il primo problema che si pone è il calcolo del modello che descrive complessivamente il sistema interconnesso a partire dalla conoscenza dei modelli delle singole parti che lo costituiscono. In quanto segue vengono introdotte le connessioni elementari: *in serie*, *in parallelo* e *a controreazione*.

Si considerino due sistemi, il primo S_1 che ha ingresso u_1 e uscita y_1; il secondo S_2 con u_2 e y_2. Una prima connessione che si può considerare è che l'uscita del primo diventa l'ingresso del secondo; si ha quindi una interconnessione precisata dalle seguenti condizioni:

$$u_2 = y_1 \qquad u = u_1 \quad y = y_2$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = A_1 x_1 + B_1 u_1 \\ y_1 = C_1 x_1 \end{cases} \begin{cases} \dot{x}_2 = A_2 x_2 + B_2 y_1 \\ y_2 = C_2 x_2 \end{cases}$$

Quindi si può trovare il modello complessivo introducendo nelle descrizioni di ciascuno dei due sistemi la condizione di interconnessione, in questo caso:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = A_1 x_1 + B_1 u \\ y_1 = C_1 x_1 \end{cases} \begin{cases} \dot{x}_2 = A_2 x_2 + B_2 C_1 x_1 \\ y = C_2 x_2 \end{cases}$$

Viene quindi spontaneo considerare come variabile di stato del sistema complessivo l'aggregato delle due variabili di stato x_1, x_2. Si ottiene, allora l'espressione:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ B_2 C_1 & A_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \end{pmatrix} u$$

$$y = \begin{pmatrix} 0 & C_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Si può quindi notare che l'aggregato dei due sistemi è ancora un sistema, e lo spazio di stato lo si può considerare attraverso l'aggregato delle componenti dello spazio di stato del primo sistema e del secondo. Questa è una connessione importante la connessione in cascato o *connessione in serie* ed è riportata in figura

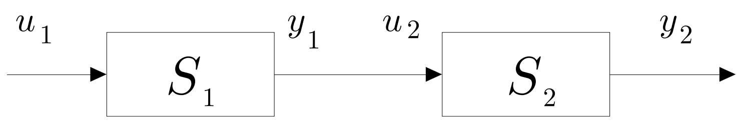

Figura 1.3

Altro tipo di connessione è la *connessione in parallelo* riportata nella figura seguente

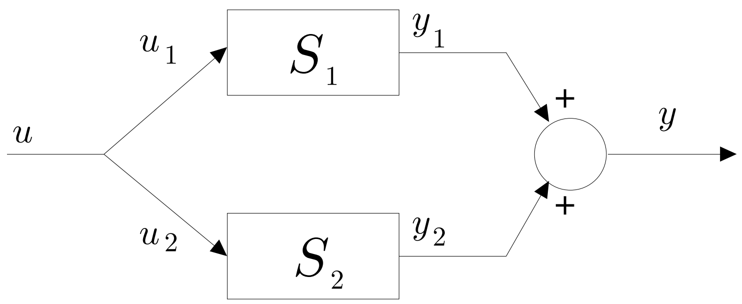

Figura 1.4

Si chiama collegamento in parallelo quello in cui l'ingresso u è comune ai due sistemi, l'uscita invece diviene la somma delle due uscite. Le condizioni di interconnessione in questo caso sono:

$$u_1 = u_2 = u \qquad y = y_1 + y_2$$

Imponendo i vincoli, si ottiene:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = A_1 x_1 + B_1 u \\ y_1 = C_1 x_1 \end{cases} \begin{cases} \dot{x}_2 = A_2 x_2 + B_2 u \\ y_2 = C_2 x_2 \end{cases}$$

$$y = y_1 + y_2$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} u$$

$$y = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Quindi costruire il modello complessivo è abbastanza facile, basta considerare le due rappresentazioni e introdurre i vincoli di interconnessione
Un altro tipo di connessione è la *connessione a controreazione* riportata in figura

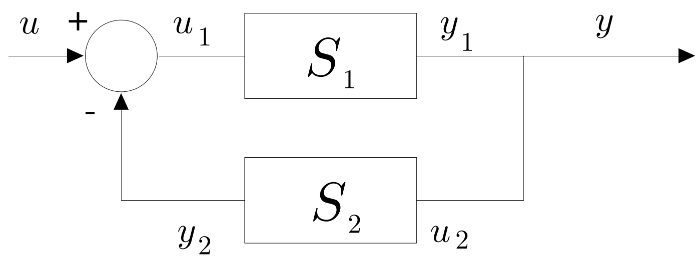

Figura 1.5

Si tratta di collegare i due sistemi S_1ed S_2 in modo diverso. Si prenda il sistema S_1 con ingresso u_1 e uscita y_1 e il sistema S_2 con u_2 e y_2 in senso inverso; si parta da un ingresso esterno u definito indipendentemente e si vada a sottrarre ad esso l'uscita y_2 del secondo sistema:

$$u_1 = u - y_2$$

Poi si consideri l'uscita complessiva del sistema y e come ingresso del sistema S_2 l'uscita y_1, cioè:

$$u_2 = y_1 \qquad y = y_1$$

Si costruisce una interconnessione in cui ad agire sul primo sistema è la differenza tra un ingresso esterno e la sua uscita riportata indietro e sottratta, dopo essere passata per il sistema S_2, all'ingresso u. Si ha un ciclo che si chiama controreazione, perché si introduce il segno meno, cioè si va a sottrarre l'uscita y_1 al suo ingresso. Questo sistema a controreazione o a ciclo chiuso, o ad anello chiuso è molto importante soprattutto nella descrizione dei fenomeni naturali, oltre che in ambito tecnologico e applicativo.

Il sistema complessivo, partendo dalle descrizioni dei due sistemi S_1, S_2, ha le equazioni:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = A_1x_1 + Bu - B_1C_2x_2 \\ y = C_1x_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_2 = A_2x_2 + B_2C_1x_1 \\ y_2 = C_2x_2 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & -B_1C_2 \\ B_2C_1 & A_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \end{pmatrix} u$$

$$y = \begin{pmatrix} C_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Sono stati esaminati tre casi emblematici, un sistema con due parti in cascata o in serie, un sistema con due parti in parallelo, e uno con due parti in uno schema a controreazione, infine si è verificato che assumendo come stato l'aggregato degli stati delle parti componenti si riesce a descrivere un sistema della stessa natura, con la dimensione finita, lineare, stazionario, regolare.
In definitiva si è trovato come la rappresentazione di un sistema interconnesso di più parti si possa individuare a partire dai modelli delle parti che lo costituiscono. Naturalmente le interconnessioni possono essere anche più complesse, ma allora forse è opportuno introdurre delle notazioni grafiche più semplici di quelle degli schemi a blocchi finora utilizzati.

Rappresentazioni di sistemi interconnessi mediante grafi di flusso

Negli gli schemi a blocchi, considerati fino ad ora, le variabili sono rappresentate da archi che collegano blocchi; il blocco rappresenta il sistema che collega le due variabili ingresso - uscita; i collegamenti avvengono per collegamento, derivazione e somma di archi. Si hanno quattro simboli, quattro notazioni attraverso cui si costruisce lo schema a blocchi: archi, blocchi, sommatori e lettere.

I *grafi di flusso* rappresentano uno strumento alternativo per descrivere i sistemi interconnessi. In essi la variabile è rappresentata da un punto, un nodo u, il sistema attraverso un tratto che collega due variabili $u - y$, vi è un certo dualismo questa volta il tratto rappresenta il sistema, infine il fatto che la stessa variabile può essere ingresso o uscita di più sistemi, rappresenta semplicemente la diramazione da una generica variabile u. La somma invece viene assunta a seguito della convergenza su un nodo, stabilendo che la variabile che trovata al punto di convergenza è la somma degli effetti dei due sistemi rappresentati dai due segmenti. La notazione è quindi molto semplice e consente di rappresentare rapidamente le interconnessioni. Non ha niente di concettualmente diverso dalla simbologia dello schema a blocchi, ma è molto più snella.

I simboli hanno dei nomi ben consolidati, i punti si chiamano nodi e rappresentano variabili, i tratti sono chiamati rami, e l'insieme dei nodi e dei rami costituisce un grafo di flusso, cioè la rappresentazione grafica del sistema. In alcuni casi si hanno dei cammini aperti, cammini paralleli, ci sono però altre configurazioni caratteristiche cioè gli anelli, cicli chiusi. Cammini aperti e anelli che in un grafo di flusso permettono di sviluppare una teoria per descrivere il sistema complessivo in modo molto semplice.
La funzione di trasferimento del sistema complessivo
Caso di sistemi in cascata: sia W_1 la funzione di trasferimento che collega ingresso - uscita, e W_2 ingresso - uscita del secondo sistema.

$$y_1 = W_1 u_1 \qquad y_2 = W_2 u_2$$

Questa non è una descrizione completa come quella della variabile di stato, perché è una descrizione che rappresenta solo la parte costituita dai modi osservabili della dinamica e dai modi raggiungibili, però quando il sistema ha queste caratteristiche la rappresentazione mediante la funzione di trasferimento è usuale. A seguito dell'interconnessione:

$$y = W_2 W_1 u = W u$$

$$W = W_1 W_2$$

Per il parallelo:

$$y_1 = W_1 u + W_2 u$$

$$y = (W_1 + W_2) u = W u$$

$$W = W_1 + W_2$$

Quindi in cascata la funzione di trasferimento è il prodotto, nel collegamento in parallelo è la somma.
Infine, per la controreazione:

$$y = W_1 (u - W_2 y)$$

$$y(1 + W_1 W_2) = W_1 u$$

$$y = \frac{W_1}{1 + W_1 W_2} u = W u$$

$$W = \frac{W_1}{1 + W_1 W_2}$$

Questa ultima espressione è molto interessante perché W_1 è la funzione di trasferimento del cammino diretto che collega ingresso - uscita; $1 + W_1 W_2$ al denominatore può essere interpretato come 1 meno il prodotto delle funzioni di trasferimento dell'anello $(-W_1 W_2)$. Quindi si possono introdurre due concetti importanti:

$$P = W_1$$

$$L = -W_1 W_2$$

$$D = 1 - L = 1 + W_1 W_2$$

$$W = \frac{W_1}{1 + W_1 W_2} = \frac{P}{1 - L} = \frac{P}{D}$$

La funzione D ha una interpretazione diretta. Si supponga di dividere il nodo, del caso a controreazione, in due parti, un nodo in cui ci sono rami di partenza in questo caso uno, e l'altro con rami in arrivo, cioè di tagliare il nodo dove c'è il ciclo, inoltre si supponga di inserire un segnale uguale a 1 in questo ciclo interrotto. Qual'è il segnale che si ha alla fine del ciclo interrotto ?

$$1 \cdot (-W_1 W_2) = L$$

Quindi se in un ciclo viene tagliato il nodo e si inserisce un segnale unitario ciò che ritorna è L, che è la misura del modo in cui si comporta il ciclo.
$1-L$ è la differenza tra ciò che si immette, cioè 1, e ciò che ritorna. Questa funzione differenza ha un significato preciso. quindi le funzioni di trasferimento in questo caso, compaiono con al numeratore la funzione di trasferimento del legame diretto ingresso - uscita W_1, e al denominatore la funzione differenza.

A partire da questa considerazione elementare si può generalizzare questo modo di considerare i sistemi a controreazione anche in strutture più complesse.
Un'ultima osservazione che è importante fare riguarda un approfondimento sulla schema a controreazione. Uno schema a controreazione con: un blocco

P, in catena diretta, che rappresenta il processo che si vuole fare evolvere secondo un andamento desiderato; con organi G, in catena diretta prima del processo, e un meccanismo H che misura l'uscita e riporta le indicazioni, all'ingresso, rappresenta uno schema caratteristico nella concezione di sistemi di controllo ed anche intuitivamente si presta a rappresentare le modalità secondo le quali si esercita un'azione di intervento su un assegnato sistema per farlo comportare nel modo voluto. P rappresenta il sistema che su cui si vuole intervenire, il nostro modello della realtà su cui intendiamo intervenire, H rappresenta le misure, le valutazioni che contemplano gli effetti del nostro intervento, G rappresenta la legge di controllo, la strategia di intervento con la quale sulla base delle misure riteniamo di modificare nel modo voluto il comportamento del sistema. Lo schema quindi concettualmente esprime una filosofi di intervento su di un sistema non direttamente sull'ingresso ma sulla differenza tra l'ingresso e l'uscita misurata y. In esso u rappresenta in qualche modo il valore desiderato ciò che si vorrebbe in uscita.

Qual'è il principio di funzionamento di questo sistema ?
Se l'uscita è nella corrispondenza desiderata con l'ingresso, e se:

$$Hy = u,$$

allora il segnale in entrata è zero e non c'è nessuna segnalazione ulteriore attraverso G su P perché l'uscita corrisponde all'ingresso. Se però c'è uno scostamento, se y cambia, cambia anche il segnale di errore, la differenza tra u e y; se diminuisce c'è un' azione che tende a far crescere l'uscita, se cresce c'è un'azione che tende a farla diminuire.

Quindi questo sistema agisce automaticamente quale che sia la causa che provoca lo scostamento dell'uscita rispetto al valore desiderato. ASi pensi ad esempio a un disturbo z che agisce sull'uscita, se agisce questa perturbazione esterna, l'uscita si scosterà dall'andamento che ha e di nuovo si avrà un segnale che all'ingresso tenderà a compensare questa azione disturbatrice. Ciò accade anche se si hanno delle modifiche del processo P, il processo varierà le sue caratteristiche, questa variazione provocherà una variazione in uscita, questa si risentirà in ingresso e di nuovo il sistema interverrà. La grande potenzialità di questo meccanismo è di reagire a qualsiasi causa di disturbo.

É un meccanismo capace di funzionare in modo molto soddisfacente per far corrispondere l'uscita all'ingresso. Tutti i processi naturali che funzionano in tempo reale, agiscono secondo questo schema. Questo schema a controreazione è fondamentale alla base della teoria dei controlli, e anche della teoria della regolazione automatica.

Quanto esposto in questa lezione, getta le basi per lo studio dei sistemi interconnessi. Si tratta di uno studio molto ampio che va ben al di là degli obiettivi del corso di Teoria dei Sistemi come lasciano intendere le ultime considerazioni svolte. Alcuni argomenti saranno affrontati nella prossima lezione con l'obiettivo di dare una procedura sistematica per la descrizione del sistema complessivo ed alcuni elementi di analisi della stabilità sulla base dalle proprietà dei sottosistemi che lo compongono.

1.3.a. Sistemi interconnessi: calcolo del modello

Questo paragrafo è dedicato alla presentazione di due metodi per il calcolo del modello matematico di un sistema interconnesso; la funzione di trasferimento (formula di Mason) e la rappresentazione ingresso - stato - uscita.

Per il calcolo della funzione di trasferimento del sistema complessivo se si indica con S_i la funzione di trasferimento del generico, i-mo sottosistema (detta trasferenza di trasferenza di ramo nel grafo di flusso), è utile l'impiego della seguente espressione nota come la *formula di Mason*

$$S = \frac{\sum_i \Delta_i P_i}{\Delta}$$

in cui

$$P_i \Rightarrow \text{ trasferenza dell' i} - \text{mo cammino da } \quad u \rightarrow y$$

$$\Delta \Rightarrow 1 - (-1)^{k+1} \sum_k \sum_j P_j^k$$

$$P_j^k \Rightarrow \text{ prodotto di k trasferenze d'anello di anelli che non si toccano}$$

$$\Delta_i \Rightarrow \Delta \text{ privato di tutti i prodotti di trasferenze che sono toccati da } \quad P_i$$

Quindi P_i è la trasferenza dell'i-esimo cammino per andare da u a y.

Con riferimento al grafo di flusso rappresentato in figura

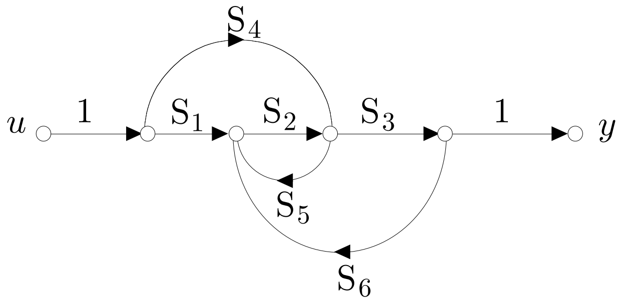

Figura 1.6

Da u a y si hanno due cammini

$$\begin{cases} P_1 = S_1 S_2 S_3 \\ P_2 = S_3 S_4 \end{cases}$$

$$\Delta = 1 - (\text{ somma trasferenze d'anello}) +$$
$$\left(\sum \text{ di prodotti di trasferenze di coppie di anelli} \neq \right)$$
$$- \left(\sum \text{ prodotti di triple di anelli} \neq \right) + \dots$$

Ritornando al caso preso in considerazione:

$$\Delta = 1 - S_2 S_5 - S_2 S_3 S_6$$

in questo caso ci si deve fermare, perché gli anelli si toccano, hanno un ramo in comune, ma basta anche un solo nodo in comune per non poter più considerare il prodotto delle coppie, che quindi diventa nullo, così come tutti quelli che seguono.
$\Delta_i = \Delta$ privato di tutti quanti quei prodotti di funzioni di trasferimento che coinvolgono una qualche funzione di trasferimento che sta già in P_i

$$\begin{cases} \Delta_1 = 1 \\ \Delta_2 = 1 - S_2 S_5 \end{cases}$$

In conclusione per quanto riguarda la funzione di trasferimento, dell'esempio preso in considerazione, si avrà la seguente espressione:

$$S = \frac{P_1\Delta_1 + P_2\Delta_2}{\Delta} = \frac{S_1S_2S_3 + S_3S_4 - S_2S_3S_4S_5}{1 - S_2S_5 - S_2S_3S_6}$$

Un ulteriore esempio che viene trattato è riportato in figura

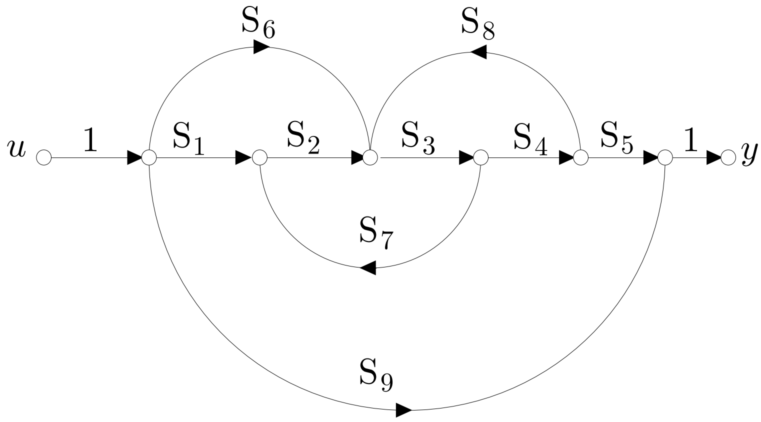

Figura 1.7

$$P_1 = S_6S_3S_4S_5 \qquad \Delta = 1 - S_2S_3S_7 - S_3S_4S_8$$
$$P_2 = S_1S_2S_3S_4S_5 \qquad \Delta_1 =$$
$$P_3 = S_9 \qquad \Delta_2 =$$
$$\Delta_3 =$$

Dopo aver calcolato $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ si applichi la formula.

Si affronterà ora il *calcolo della rappresentazione ingresso - stato - uscita*

$$S_i : \begin{cases} \dot{x}_i = A_ix_i + B_iu_i \\ y_i = C_ix_i \end{cases}$$

il calcolo si riduce ad imporre i vincoli topologici stabiliti dai collegamenti tra i diversi sottosistemi. Come già visto, nel caso della connessione in cascata si ha

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = A_1 x_1 + B_1 u \\ \dot{x}_2 = A_2 x_2 + B_2 C_1 x_1 \\ \ \ y = C_2 x_2 \end{cases}$$

in cui lo stato è l'aggregato degli stati dei sottosistemi. La procedura euristica che consiste nell'imporre il rispetto dei vincoli è semplice nei casi elementari, ma quando si considerano collegamenti con più sottosistemi, con molteplici connessioni in controreazione, è necessario fare riferimento ad una procedura sistematica fondata sull'analisi del diagramma di flusso del sistema interconnesso. Tale procedura è fondata sul fatto che in assenza di cicli il calcolo della rappresentazione non presenta difficoltà. Si tratta quindi di rilasciare alcune connessioni in modo per ottenere ad un grafo aciclico, calcolarne il modello e poi ripristinare le connessioni aperte.

Si consideri il grafo di flusso e si effettuino, possibilmente in numero minimo, separazioni di nodi in modo che nel grafo risultante non ci siano più cicli. La separazione deve essere fatta in modo da lasciare tutti quanti i rami entranti da una parte e i rami uscenti dall'altra. Per un grafo di questo tipo, senza cicli, la rappresentazione con lo stato è immediatamente calcolata, a partire da quella dei sottosistemi.
Infatti il vettore di stato x è l'aggregato dello stato dei singoli sottosistemi e la rappresentazione può essere semplicemente scritta per ispezione sul grafo di flusso. Ciò sarà messo in evidenza facendo riferimento all'esempio di figura

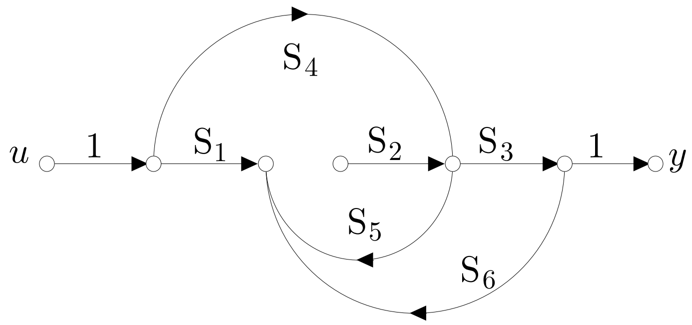

Figura 1.8

$p =$ pozzo, la parte del nodo separato dove arrivano tutti i rami

$s =$ sorgente, la parte da cui partono soltanto rami
Quindi si ottiene:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = A_1 x_1 + B_1 u \\ \dot{x}_2 = A_2 x_2 + B_2 s \\ \dot{x}_3 = A_3 x_3 + B_3 C_2 x_2 + B_3 C_4 x_4 \\ \dot{x}_4 = A_4 x_4 + B_4 u \\ \dot{x}_5 = A_5 x_5 + B_5 C_2 x_2 + B_5 C_4 x_4 \\ \dot{x}_6 = A_6 x_6 + B_6 C_3 x_3 \end{cases}$$

$$y = C_3 x_3 \qquad p = C_1 x_1 + C_5 x_5 + C_6 x_6$$

Da cui si ottiene

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = A_1 x_1 + B_1 u \\ \dot{x}_2 = A_2 x_2 + B_2 s \\ \dot{x}_3 = A_3 x_3 + B_3 C_2 x_2 + B_3 C_4 x_4 \\ \dot{x}_4 = A_4 x_4 + B_4 u \\ \dot{x}_5 = A_5 x_5 + B_5 C_2 x_2 + B_5 C_4 x_4 \\ \dot{x}_6 = A_6 x_6 + B_6 C_3 x_3 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} y &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & C_3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} x \\ p &= \begin{pmatrix} C_1 & 0 & 0 & 0 & C_5 & C_6 \end{pmatrix} x \end{aligned}$$

per ripristinare il grafo iniziale è necessario imporre che s coincida con p. Facendo questo si ottiene la rappresentazione con lo stato del sistema complessivo.

In conclusione la rappresentazione complessiva è ottenuta: separando alcuni nodi del grafo, calcolando la rappresentazione associata, imponendo il vincolo di coincidenza dei nodi separati
Quindi due metodi: uno per il calcolo della funzione di trasferimento, l'altro per il calcolo della rappresentazione con lo stato, mettono, tral'altro, in evidenza che lo stato del sistema complessivo è l'aggregato degli stati dei sottosistemi.

A tale proposito vale la pena di osservare che a seguito della connessione può prodursi perdita di proprietà di raggiungibilità e/o osservabilità. Si considerino ad esempio i sottosistemi S_1, S_2 caratterizzati dalle rispettive funzioni di trasferimento:

$$\left(\frac{s+1}{s-1}\right) \qquad \left(\frac{1}{s+1}\right)$$

la funzione di trasferimento del sistema complessivo risulta

$$W(s) = \frac{1}{s-1}$$

ed ammette la seguente realizzazione con lo stato

$$\begin{cases} \dot{x} = x + u \\ y = x \end{cases}$$

Si è ottenuto un sistema di dimensione uno mentre la dimensione del sistema complessivo, interconnessione di due sottosistemi di dimensione uno, è due. Questo fatto può essere spiegato in termini di perdita di raggiungibilità o di osservabilità del sistema, perché la funzione di trasferimento del sistema complessivo è influenzata solo dal sottosistema tutto raggiungibile e tutto osservabile.
In realtà il caso preso in considerazione corrisponde ad una perdita di raggiungibilità del sistema. Ciò si può verificare realizzando i due sottosistemi, trovando le rappresentazioni con lo stato, la rappresentazione complessiva ed infine verificando che il sistema non è tutto raggiungibile.

Ad una cancellazione opposta corrisponderà una perdita di osservabilità.

In conclusione un sistema interconnesso realizzato con sottosistemi raggiungibili e osservabili manifesta una perdita di raggiungibilità e/o osservabilità se il denominatore della funzione di trasferimento ha grado inferiore alla somma delle dimensioni dei sottosistemi.