1. Le rappresentazioni lineari stazionarie nel dominio complesso

In questo capitolo viene introdotto il metodo di analisi nel dominio della variabile complessa che impiega la trasformata di Laplace. Lo studio dei sistemi dinamici lineari stazionari nel dominio delle trasformate consente di collegare la risposta impulsiva al comportamento del sistema in risposta a sollecitazioni periodiche. Si tratta di una caratterizzazione del comportamento dinamico sulla quale è fondata la classificazione in uso nel settore dell'ingegneria.

1.1. La trasformata di Laplace nello studio dei sistemi a tempo continuo

Si ricorda la definizione di trasformata di Laplace; essa associa ad una funzione $f(t)$, definita su $t \in [0, \infty)$, la funzione di variabile complessa, $F(s)$

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) := \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt$$

che risulta definita per $Re[s] > \alpha_f$, essendo α_f un numero reale associato ad $f(t)$ e detto *ascissa di convergenza.* Tale operazione è lineare e valgono importanti proprietà che sono alla base del calcolo delle trasformate di classi di funzioni. Tra queste la seguente, nota come *teorema della derivazione*, collega la trasformata della derivata di una funzione alla sua trasformata. Derivando ambo i membri della precedente identità la trasformata della derivata assume la seguente espressione

$$\mathcal{L}\left[\frac{d}{dt}f(t)\right] = sF(s) - f(0).$$

con ascissa di convergenza coincidente con α_f

Questi semplici richiami consentono di calcolare la trasformata di Laplace di ambo i membri delle equazioni che descrivono una rappresentazione lineare, stazionaria, a dimensione finita, regolare. Si ottiene, indicando con le lettere maiuscole le trasformate delle corrispondenti funzioni del tempo,

$$\begin{aligned} sX(s) - x_0 &= AX(s) + BU(s) \\ Y(s) &= CX(s) + DU(s) \end{aligned}$$

e, con semplici manipolazioni,

$$X(s) = (sI - A)^{-1}x_0 + (sI - A)^{-1}BU(s) := \phi(s)x_0 + H(s)U(s)$$

$$Y(s) = C(sI - A)^{-1}x_0 + (C(sI - A)^{-1}B + D)U(s) := \psi(s)x_0 + W(s)U(s)$$

Le precedenti relazioni esprimono la trasformata di Laplace delle evoluzioni nello stato e in uscita. Esse dunque non sono altro che la rappresentazione esplicita del sistema nel dominio della variabile complessa s, cioé la trasformata di Laplace di

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau = \phi(t)x_0 + \int_0^t H(t-\tau)u(\tau)d\tau$$
$$y(t) = Ce^{At}x_0 + \int_0^t Ce^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau + Du(t) = \psi(t)x_0 + \int_0^t W(t-\tau)u(\tau)d\tau$$

Per identificazione dei termini corrispondenti nelle precedenti uguaglianze si ottengono le seguenti identità:

$$\phi(s) = \mathcal{L}\left[\phi(t)\right] = \mathcal{L}\left[e^{At}\right] = (sI - A)^{-1} \qquad H(s) = \mathcal{L}\left[H(t)\right] = (sI - A)^{-1}B$$

$$\psi(s) = \mathcal{L}\left[\psi(t)\right] = C(sI - A)^{-1} \qquad W(s) = \mathcal{L}\left[W(t)\right] = C(sI - A)^{-1}B + D$$

e

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t w(t-\tau)u(\tau)d\tau\right] = W(s)U(s)$$

La matrice $W(s)$, $(q \times p)$, trasformata di Laplace di $W(t)$, è detta *matrice delle funzioni di trasferimento* o semplicemente *funzione di trasferimento*.

Le precedenti identità esprimono due proprietà della trasformata di Laplace che ne spiegano l'interesse dell'uso nello studio dei sistemi dinamici lineari. Le trasformate di funzioni di tipo esponenziale (quindi anche costanti, periodiche e pseudoperiodiche) sono funzioni razionali strettamente proprie; la trasformata di un integrale di convoluzione (è di questo tipo la risposta forzata che pesa i valori dell'ingresso a τ con quelli della risposta impulsiva a $(t - \tau)$) è pari al prodotto delle trasformate, *teorema della convoluzione*.

Per quanto riguarda la funzione di trasferimento $W(s)$ si osservi che i suoi elementi sono funzioni razionali proprie, cioè rapporto di polinomi nella variabile complessa s. Inoltre il polinomio a denominatore ha grado $N \leq n$, essendo n la dimensione della matrice dinamica.

Questo fatto, che sarà chiarito nel seguito del capitolo, dipende da eventuali cancellazioni di fattori a numeratore e denominatore nel calcolo dell'inversa di $(sI - A)$ e nelle successive operazioni di moltiplicazione.

Segue, dalle precedenti considerazioni che la matrice di trasferimento di un sistema lineare stazionario con p ingressi e q uscite a dimensione finita assume la forma

$$W(s) = D + \frac{B_0 + B_1 s + B_2 s^2 + \ldots + B_{n-1}s^{N-1}}{a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \ldots + a_{n-1}s^{N-1} + s^N}$$

per opportune matrici costanti D e B_i, $i = 0, \ldots, N-1$, $(q \times p)$.

Quanto sinora esposto fornisce un metodo alternativo per il calcolo delle risposte o, ciò che è equivalente, per il passaggio alla rappresentazione esplicita. Assegnato un ingresso, e calcolatane la trasformata di Laplace, il calcolo dell'evoluzione in uscita a partire da uno stato iniziale x_0 comporta il calcolo di $(sI - A)^{-1}$, semplici moltiplicazioni ed una operazione di antitrasformazione. L'operazione di antitrasformazione è particolarmente semplice in presenza di ingressi che ammettono trasformate razionali; in tal caso la risposta libera e forzata in s sono esse stesse funzioni razionali che possono essere antitrasformate senza difficoltà una volta calcolate le corrispondenti espansioni in frazioni parziali.

Si consideri a titolo di esempio un sistema che ha funzione di trasferimento

$$W(s) = \frac{1}{s+1}$$

e si calcoli la risposta forzata all'ingresso a gradino unitario, $u(t) = \delta_{-1}(t)$. Poichè, come è facile calcolare $\mathcal{L}\left[\delta_1(t)\right] = \frac{1}{s}$, si ha

$$y_f(t) = \mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{s(s+1)}] = \mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}] = (1 - e^{-t})\delta_{-1}(t)$$

Si osserva che nel calcolo è buona abitudine nell'operazione di antitrasformazione, per sottolineare che la funzione che si ottiene è definita da zero in poi, moltiplicare a destra per la funzione $\delta_{-1}(t)$.

Nel seguito vengono approfonditi gli aspetti del calcolo nel dominio complesso e vengono stabiliti i collegamenti con l'analisi condotta nel capitolo precedente.

1.2. La matrice di transizione nel dominio complesso

Si assuma che la matrice A, $(n \times n)$, abbia autovalori $(\lambda_1, \ldots, \lambda_r)$, con molteplicità algebrica $(\mu_1, \ldots, \mu_r)$ $(\mu_1 + \ldots + \mu_r = n)$. Poichè il calcolo della matrice di transizione nella variabile complessa si riduce al calcolo dell'inversa di $(sI - A)$, si ottiene

$$(sI - A)^{-1} = \frac{(sI - A)^{a^T}}{|sI - A|} = \frac{\big(E(s)\big)}{(s - \lambda_1)^{m_1} \ldots (s - \lambda_r)^{m_r}} = \frac{\big(E(s)\big)}{m(s)}$$

in cui si è indicato con $m(s)$ il polinomio

$$m(s) = (s - \lambda_1)^{m_1} \dots (s - \lambda_r)^{m_r}$$

minimo comune multiplo dei polinomi a denominatore degli elementi della matrice $(sI - A)^{-1}$. Tale polinomio si chiama il **polinomio minimo**. Si tratta di un polinomio fattore del polinomio caratteristico

$$d(s) = (s - \lambda_1)^{\mu_1} \dots (s - \lambda_r)^{\mu_r}$$

in quanto esso ha le stesse radici di quest'ultimo, ma ciascuna con una molteplicità m_i, detta **molteplicità geometrica**, che è inferiore o uguale a quella algebrica (μ_i). Una dimostrazione indiretta del fatto che tutti gli autovalori compaiano tra gli zeri del polinomio minimo si ha osservando che se così non fosse per un fissato autovalore allora la corrispondente legge esponenziale non comparirebbe nell'esponenziale della matrice; ciò che sappiamo non essere possibile.

Nel caso particolare di molteplicità geometrica unitaria si ha

$$(sI - A)^{-1} = \frac{\big(E(s)\big)}{(s - \lambda_1) \dots (s - \lambda_r)}$$

che ammette l'espansione in fratti semplici

$$= \sum_{i=1}^{\mu} \frac{R_i}{s - \lambda_i} + \sum_{k=1}^{\nu} \left(\frac{R_k}{s - \lambda_k} + \frac{R_k^*}{s - \lambda_k^*} \right) \qquad \mu + 2\nu = r$$

Tale espressione, posto

$$R_k = R_{ka} + jR_{kb} \qquad \lambda_k = \alpha_k + j\omega_k$$

si riscrive

$$(sI - A)^{-1} = \sum_{i=1}^{\mu} \frac{R_i}{s - \lambda_i} + \sum_{k=1}^{\nu} \left(\frac{2R_{ka}(s - \alpha_k) - 2R_{kb}\omega_k}{(s - \alpha_k)^2 + \omega_k^2} \right)$$

e restituisce, mediante antitrasformazione, l'espressione dell'esponenziale di matrice nel caso di A regolare già calcolata nel capitolo precedente.

Quando la molteplicità di alcuni autovalori non è unitaria, allora, come si comprende dal calcolo in s ed avremo occasione di esaminare con maggiore precisione nel seguito, le leggi di moto dei modi naturali sono più complesse infatti l'espansione in frazioni parziali è composta non solo da addendi con polinomi di primo grado a denominatore (fratti semplici), ma anche da addendi con denominatore di grado superiore ad uno (fratti composti) che sono le trasformate di funzioni esponenziali a coefficienti polinomiali in t. E' questo il caso che si presenta quando la matrice A non è regolare, cioè non ammette la forma diagonale, ma quella di Jordan. In questo caso la dimensione del blocco di Jordan più grande coincide con la molteplicità geometrica.

Per verificare con un esempio elementare come possa accadere che nell'espressione di $\phi(s)$ il polinomio a denominatore non coincida con quello caratterisctico ed abbia grado $N < n$, si consideri

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (sI - A)^{-1} = \frac{1}{(s+1)^2} \begin{pmatrix} s+1 & 0 \\ 0 & s+1 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{(s+1)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{(s+1)} \end{pmatrix} = \frac{1}{(s+1)} I$$

Si tratta di una matrice di dimensione due con il solo autovalore -1 che presenta molteplicità algebrica due e geometrica uno. La molteplicità geometrica unitaria rende conto della presenza di una legge esponenziale semplice nell' esponenziale di questa matrice.

Ciò non accade in questo altro semplice caso

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (sI - A)^{-1} = \frac{1}{(s+1)^2} \begin{pmatrix} s+1 & 1 \\ 0 & s+1 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{(s+1)} & \frac{1}{(s+1)^2} \\ 0 & \frac{1}{(s+1)} \end{pmatrix} = \frac{1}{(s+1)^2} \begin{pmatrix} (s+1) & 1 \\ 0 & (s+1) \end{pmatrix}$$

in cui la molteplicità geometrica dell'autovalore è uguale a quella algebrica ed è pari a due. In questo caso l'esponenziale della matrice vede la comparsa di una legge esponenziale non semplice nell'elemento fuori dalla diagonale.

In presenza di autovalori con molteplicità geometrica unitaria, è questo il caso del primo esempio, le leggi di moto dei modi naturali sono quelle semplici, esponenziali o pseudoperiodiche. Nel caso dell'esempio si calcola facilmente mediante antitrasformazione degli elementi della matrice la legge temporale e^t. Come è noto questo caso corrisponde all'esistenza della forma diagonale, matrice A regolare.

In presenza di autovalori con molteplicità geometrica maggiore di uno, è questo il caso del secondo esempio, le leggi di moto dei modi naturali sono quelle complesse, a coefficienti polinomiali in t. Nel caso dell'esempio si calcolano facilmente mediante antitrasformazione le leggi e^t e te^t. Come è noto questo è il caso in cui la matrice A non ammette la forma diagonale e la matrice è non regolare.

1.3. I modi naturali nel dominio complesso

Il caso di autovalori reali a molteplicità geometrica unitaria

Si assume che la matrice dinamica A, $(n \times n)$, abbia r autovalori reali, λ_i, con molteplicità algebrica μ_i non definita e molteplicità geometrica m_i unitaria.

In tal caso si ottiene

$$A \begin{array}{c} \lambda_1 \cdot \mu_1 \\ | \\ \lambda_r \cdot \mu_r \end{array} \qquad m_i = 1 \Leftrightarrow (sI - A)^{-1} = \frac{\big(E(s)\big)}{(s-\lambda_1)\dots(s-\lambda_r)}$$

$$= \frac{R_1}{s-\lambda_1} + \frac{R_2}{s-\lambda_2} + \dots + \frac{R_r}{s-\lambda_r} = \sum_{i=1}^{r} \frac{Ri}{s-\lambda_i} = \mathcal{L}(e^{At})$$

ove i residui R_i sono matrici quadrate $(n \times n)$ di rango pari alla molteplicità algebrica. I residui possono essere calcolati mediante

$$R_i = \lim_{s \to \lambda_i} \big((s-\lambda_i)((sI-A)^{-1}\big)$$

Si ha infatti

$$L^{-1}\big((sI-A)^{-1}\big)=\sum_{i=1}^{r}R_i e^{\lambda_i t}$$

Se si ricorda l'espressione della matrice di transizione nel dominio del tempo, non è difficile verificare che

$$R_i=\sum_{j=1}^{\mu_i}u_{ij}v'_{ij}=U_iV'_i$$

dove u_{ij} $(j=1,\ldots,\mu_i)$ sono gli autovettori destri, tutti del primo ordine in questo caso, associati all'autovalore λ_i. La matrice R_i, $(n\times n)$, ha rango μ_i essendo i vettori u_{ij} indipendenti.

Un esempio elementare:

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & -2\end{pmatrix}\qquad (sI-A)=\begin{pmatrix}s+1 & -1\\ 0 & s+2\end{pmatrix}$$

$$(sI-A)^{-1}=\frac{1}{(s+1)(s+2)}\begin{pmatrix}s+2 & 1\\ 0 & s+1\end{pmatrix}=\frac{R_1}{s+1}+\frac{R_2}{s+2}$$

con R_1 e R_2 matrici residue (2×2) di rango unitario (autovalori distinti) ottenute per espansione in fratti semplici

$$\phi(s)=\frac{R_1}{s+1}+\frac{R_2}{s+2}=\frac{\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}}{s+1}+\frac{\begin{pmatrix}0 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}}{s+2}$$

Possiamo ora antitrasformare e ottenere la matrice di transizione

$$\phi(t)=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}e^{-t}+\begin{pmatrix}0 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}e^{-2t}$$

$$\phi(t)=e^{-t}u_1v'_1+e^{-2t}u_2v'_2\qquad u_1v'_1=R_1\qquad u_2v'_2=R_2$$

Il caso di matrice dinamica regolare

Se vi sono anche ν coppie di autovalori complessi coniugati, $\lambda_k = \alpha_k + j\omega_k$ e $\lambda_k* = \alpha_k - j\omega_k$, si ottiene

$$(sI - A)^{-1} = \sum_{i=1}^{\mu} \frac{Ri}{s - \lambda_i} + \sum_{k=1}^{\nu} \left(\frac{R_k}{s - \lambda_k} + \frac{R_k^*}{s - \lambda_k^*} \right)$$

$$(sI - A)^{-1} = \sum_{i=1}^{\mu} \frac{R_i}{s - \lambda_i} + \sum_{k=1}^{\nu} \frac{2R_{ka}(s - \alpha_k) - 2R_{kb}\omega_k}{(s - \alpha_k)^2 + \omega_k^2}$$

Anche in questo caso, ricordando l'espressione della matrice di transizione in t, si può verificare che

$$R_k = R_{ka} + jR_{kb} = (u_{ka} + ju_{kb})\big(\frac{v'_{ka}}{2} - j\frac{v'_{kb}}{2}\big)$$

e, sviluppando il calcolo,

$$R_{ka} = \frac{1}{2}(u_{ka}v'_{ka} + u_{kb}v'_{kb}) \qquad R_{kb} = \frac{1}{2}(u_{kb}v'_{ka} - u_{ka}v'_{kb})$$

Moltiplicando per lo stato iniziale:

$$R_i x_0 = c_i u_i$$

$$\frac{2R_{ka}(s - \alpha_k) - 2R_{kb}\omega_k}{(s - \alpha_k)^2 + \omega_k^2} \cdot x_0$$

$$= \frac{m_k\big((s - \alpha_k)sen\varphi_k + \omega_k \cos\varphi_k\big)u_{ka} + m_k\big((s - \alpha_k)\cos\varphi_k - \omega_k sen\varphi_k\big)u_{kb}}{(s - \alpha_k)^2 + \omega_k^2}$$

ove si è tenuto conto delle definizioni dei parametri. Infatti, antitrasformando secondo Laplace si ottengono i modi aperiodici e pseudoperiodici

$$c_i e^{\lambda_i t} u_i \qquad m_k e^{\alpha_k t}\big(sen(\omega_k t + \varphi_k)u_{ka} + \cos(\omega_k t + \varphi_k)u_{kb}\big)$$

Rispetto alle costanti di tempo, alle pulsazioni naturali e agli smorzamenti si ottiene, con semplici calcoli:

$$(sI - A)^{-1} = \sum_{i=1}^{\mu} \frac{R_i \tau_i}{1 + \tau_i s} + \sum_{k=1}^{\nu} \frac{\frac{2R_{ka}}{\omega_{nk}}\left(\frac{s}{\omega_{nk}} + \zeta_k\right) - \frac{2R_{kb}}{\omega_{nk}}\sqrt{1-\zeta_k^2}}{1 + \frac{2\zeta_k}{\omega_{nk}} s + \frac{s^2}{\omega_{nk}^2}}$$

A titolo di esempio si consideri il modello del semplice circuito elettrico studiato nel terzo capitolo

$$A = \begin{pmatrix} \frac{-1}{R_1 C} & \frac{-1}{C} \\ \frac{1}{L} & \frac{-R_2}{L} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} \frac{1}{R_1 C} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & R_2 \end{pmatrix}$$

$$\phi(s) = \frac{1}{s^2 + \left(\frac{R_2}{L} + \frac{1}{R_1 C}\right)s + \frac{1}{LC}} \begin{pmatrix} s + \frac{R_2}{L} & -\frac{1}{C} \\ \frac{1}{L} & s + \frac{1}{R_1 C} \end{pmatrix}$$

da cui

$$W(s) = \frac{\frac{R_2}{R_1 C L}}{s^2 + \left(\frac{R_2}{L} + \frac{1}{R_1 C}\right)s + \frac{1}{LC}}$$

e con $LC = 1$, $\frac{R_1 R_2 C + L}{R_1 L C} = 1$, la funzione di trasferimento diventa

$$W(s) = \frac{\frac{R_2}{R_1}}{1 + s + s^2}$$

con poli

$$s_{1/2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - 1} = -\frac{1}{2} \pm j\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Il caso di autovalori a molteplicità geometrica maggiore di uno

Nel caso generale, indicata con m_i la molteplicità geometrica, si ha per la matrice di transizione l'espressione

$$(sI - A)^{-1} = \sum_{i=1}^{r} \sum_{k=1}^{m_i} \frac{R_{ik}}{(s - \lambda_i)^k}$$

$$R_{ik} = \lim_{s \to \lambda_i} \frac{1}{(m_i - k)!} \frac{d^{m_i - k}}{ds^{m_i - k}} \left((sI - A)^{-1} (s - \lambda_i)^{m_i} \right)$$

Antitrasformando secondo Laplace

$$L^{-1}(sI-A)^{-1} = \sum_{i=1}^{r}\sum_{k=1}^{m_i} R_{ik}\frac{t^{k-1}}{(k-1)}e^{\lambda_i t}$$

Per identità con le espressioni calcolate in t si ottiene il legame tra i residui R_{ik} ed i vettori $\mathbf{c_i}$ (componenti di x_0 negli autospazi U_i). Si ottiene

$$\mathbf{c_i} = R_{i1}x_0 \qquad (A-\lambda_i I)\mathbf{c_i} = R_{i2}x_0 \qquad (A-\lambda_i I)^{m_i-1}\mathbf{c_{m_{i-1}}} = R_{i,m_i}x_0$$

1.4. La funzione di trasferimento

Come più volte sottolineato la funzione di trasferimento, essendo la trasformata di Laplace della risposta impulsiva, è un modello del comportamento forzato di un sistema dinamico lineare stazionario. La sua conoscenza consente infatti di calcolare una qualsiasi risposta forzata ad un asseganto ingresso mediante la semplice relazione

$$y_f(t) = L^{-1}(Y_f(s)) = L^{-1}(W(s)U(s))$$

In base a quanto osservato, la funzione di trasferimento può essere calcolato, in un approccio di modellazione cosiddetto a scatola nera in cui si assume di non avere altre informazioni sul sistema se non le misure degli ingressi e delle corrispondenti uscite, a partire dalla conoscenza della trasformata di una qualsiasi coppia ingresso-uscita forzata. Infatti si ha

$$W(s) = \frac{Y_f(s)}{U(s)}$$

e se l'ingresso è l'impulso unitario $\delta(t)$, poichè $L(\delta(t) = 1$, la trasformata dell'uscita forzata è proprio la funzione di trasferimento.

Per sistemi a più ingressi più uscite, la caratterizzazione delle componenti della matrice delle funzioni di trasferimento permette di definire gli esperimenti che è necessario condurre per calcolare la W. Dall'espressione della matrice delle funzioni di trasferimento

$$W(s) = \begin{pmatrix} W_{11}(s) & \dots & W_{1p}(s) \\ \dots & \dots & \dots \\ W_{q1}(s) & \dots & W_{qp}(s) \end{pmatrix}$$

si deduce, infatti,

$$y_i = W_{i1}U_1 + \ldots + W_{ip}U_p \Rightarrow W_{ij} = \left.\frac{y_i}{U_j}\right|_{U_k=0 \quad k\neq j}$$

In realtà la procedura di identificazione ora delineata che consiste nel calcolare la funzione di trasferimento a partire da q esperimenti ingresso-uscita, corrisponde, nel dominio del tempo, a calcolare la risposta impulsiva mediante operazioni di deconvoluzione. Una tale procedura di identificazione è di non facile impiego nella pratica per la complessità intrinseca delle misure in regime dinamico e delle elaborazioni ad esse collegate in particolare in presenza di errori ed incertezze di misura. Vedremo nel seguito del capitolo come i valori che assume la funzione di trasferimento di un sistema lineare a dimensione finita possano essere collegati direttamente a una parte della risposta nel tempo, la risposta a regime permanente. Ciò permette di consente di mettere a punto una procedura sperimentale semplice e robusta rispetto ad incertezze di misura per l'identificazione della funzione di trasferimento.

Prima di entrare nel dettaglio di questi aspetti che sono alla base di una caratterizzazione del comportamento del sistema in relazione al suo *comportamento in frequenza*, è importante osservare che il modello funzione di trasferimento può anche essere ottenuto direttamente secondo l'approccio cosiddetto a scatola trasparente in cui si suppone di disporre di un modello dei componenti del sistema e se ne conoscono le connessioni. Procedure di questo tipo, fondate sulla manipolazione di grafi, sono disponibili per la modellazione di sistemi meccanici ed elettrici. Tra queste la più nota nell' ingegneria è il metodo delle impedenze complesse caratteristico della teoria dei circuiti. Con riferimento a tale metodo è infatti noto che associata ad ogni componente un'impedenza complessa e costruito il grafo, che esprime le connessioni del circuito, opportune manipolazioni definiscono una procedura sistematica di calcolo dell'impedenza complessa del circuito, che non è altro che la funzione di trasferimento.

Poichè il modello nel dominio della variabile complessa può, al pari della rappresentazione con lo stato, essere il punto di partenza nello studio di un assegnato sistema fisico è necessario precisarne la rappresentatività.

Un semplice esempio che lascia comprendere in quale misura la funzione di trasferimento sia un modello parziale del comportamento dinamico del sistema, è il seguente. Si consideri una semplice rete elettrica lineare composta dalla connessione in serie di una resistenza con due condensatori; l'ingresso sia la tensione di alimentazione e l'uscita sia la tensione ai capi del secondo condensatore. Non è difficile verificare che mentre la rappresentazione con lo stato ha dimensione due (in quanto due sono i componenti con memoria) la funzione di trasferimento ha un solo polo. Sviluppando i calcoli si verifica che dal punto di vista del legame ingresso uscita forzato il circuito è equivalente ad uno composto dalla serie della stessa resistenza con un condensatore di capacità pari al parallelo in cui l'uscita sia ridotta, mediante un partitore, di un valore pari alla capacità del primo diviso la somma delle capacità dei due condensatori. Esiste, dunque, una diversa rete elettrica che ha un solo condensatore e che ammette lo stesso comportamento forzato della precedente; essa è cioè equivalente alla prima per quanto riguarda il comportamento forzato. Tale rete però non è equivalente da un punto di vista puntuale a quella assegnata in quanto non potrà riprodurre tutte le risposte a partire da condizioni iniziali non nulle.

Dal punto di vista delle formule le precedenti considerazioni trovano un riscontro nello studio condotto sull'eccitabilità e l'osservabilità dei modi naturali essendo, la funzione di trasferimento, la trasformata di Laplace della risposta impulsiva. In estrema sintesi, e con riferimento ad un sistema con autovalri distinti, la funzione di trasferimento è rappresentativa di tutti e soli i modi che sono simultaneamente eccitabili e osservabili. Ciò si comprende anche osservando che sotto l'operazione di trasformazione combinazioni lineari di esponenziali si trasformano in rapporti di polinomi e gli zeri del denominatore coincidono con gli esponenti delle leggi temporali; quindi gli zeri del denominatore della $W(s)$ coincidono con gli autovalori associati ai modi eccitabili e osservabili.

1.4.a. Poli e zeri della funzione di trasferimento

Gli zeri del polinomio a denominatore della funzione di trasferimento nel caso $p = q = 1$ (gli zeri del polinomio minimo comune multiplo dei polinomi a denominatore nel caso generale) si chiamano poli della funzione di trasferimento (poli della matrice di funzioni di trasferimento). Alla luce di quanto osservato, i poli sono un sottoinsieme degli autovalori del sistema.

Gli zeri del polinomio a numeratore nel caso $p = q = 1$ (gli zeri comuni ai determinanti delle matrici polinomiali, di dimensione pari al minimo tra p e q, che si ottengono considerando tutte le combinazioni di q colonne tra le p disponibili se $q < p$, che si ottengono considerando tutte le combinazioni di p righe tra le q possibili se $p < q$), si chiamano zeri della funzione di trasferimento, (zeri di trasmissione della matrice delle funzioni di trasferimento).
Il significato dei poli è noto. I poli sono gli autovalori che compaiono nella funzione di trasferimento: le corrispondenti leggi di moto, aperiodiche o pseudoperiodiche, convergenti, costanti o divergenti, caratterizzano il comportamento forzato.
Anche gli zeri della funzione di trasferimento ammettono una interpretazione in termini di comportamento ingresso uscita. Sia z uno zero (z_1 e z_2 una coppia di zeri complessi coniugati) e sia $u(t)$ un ingresso che ammette trasformata di Laplace

$$\frac{1}{(s-z)} \qquad (\frac{1}{(s-z_1)(s-z_2)})$$

Si calcoli ora la risposta forzata e si osservi che, a seguito della cancellazione che si ha tra la trasformata dell'ingresso e lo zero (la coppia di zeri) l'andamento nel tempo di tale risposta non contiene i termini che corrispondono nello sviluppo in frazioni parziali ai poli che competono alla trasformata dell'ingresso. In altre parole quel tipo di ingresso genera una risposta forzata che si riduce ad un'evoluzione libera. Come avremo occasione di meglio comprendere in seguito la presenza di uno o più zeri si traduce nella capacità del sistema di filtrare l'effetto di una classe di funzioni di ingresso. Questa caratteristica, che può essere pensata come una mancanza di reattività del sistema rispetto a determinate sollecitazioni, è ancora più evidente (e per certi aspetti sorprendente) quando si pensi ad una tale azione di filtro per effetto della presenza di zeri a parte reale positiva. In questo caso, infatti, l'azione di filtro avviene in presenza di un ingresso la cui ampiezza tende all'infinito al crescere del tempo.

Si tornerà su questi aspetti nel prossimo capitolo dove, con riferimento ai sistemi a più ingressi e più uscite, lo studio sarà ripreso sulla base della seguente definizione di zero fondata sulla rappresentazione con lo stato. Gli zeri di trasmissione del sistema coincidono con i valori di s che annullano il determinante della cosiddetta **matrice di sistema**. Sono cioè quei valori $s*$ tali che

$$det \begin{pmatrix} s^*I - A & -B \\ C & 0 \end{pmatrix} = 0$$

Come avremo occasione di mostrare tale definizione è equivalente alla precedente.

1.4.b. Le rappresentazioni della funzione di trasferimento

In conclusione del paragrafo si vogliono mettere in luce tre diverse espressioni della funzione di trasferimento: **rapporto di polinomi**; **fattorizzazione (poli - zeri)**; **forma di Bode**.

Rapporto di polinomi

Prende tale denominazione la rappresentazione già introdotta nel paragrafo 5.1.1

$$W(s) = \frac{B_0 + B_1 s + \ldots + B_m s^m}{a_0 + a_1 s + \ldots + s^N}$$

ove B_i, (q, p), sono opportune matrici di coefficienti.

Come esempio si consideri

$$W(s) = \begin{pmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{s-1}{s^2+2s} \\ \frac{1}{s+2} & 0 \end{pmatrix} = \frac{\begin{pmatrix} s(s+2) & (s^2-1) \\ s(s+1) & 0 \end{pmatrix}}{s(s+1)(s+2)}$$

$$W(s) = \frac{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} s + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} s^2}{s^3 + 3s^2 + 2s}$$

Forma fattorizzata (poli - zeri)

In tale forma ogni elemento della matrice $W(s)$ viene scritto come

$$W_{ij}(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = k' \frac{\prod_{i=1}^{m} (s - z_i)}{\prod_{j=1}^{n} (s - p_j)}$$

Forma di Bode

Si consideri, preliminarmente, la seguente la seguente fattorizzazione a coefficienti reali di un polinomio:

$$\begin{aligned} p(s) &= h \prod_i (s - \lambda_i) \prod_k (s - \alpha_k - j\omega_k)(s - \alpha_k + j\omega_k) \\ &= h \prod_i (s - \lambda_i) \prod_k \left((s - \alpha_k)^2 + \omega_k^2\right) \\ &= h \prod_i (s - \lambda_i) \prod_k (s^2 - 2\alpha_k s + \alpha_k^2 + \omega_k^2) \\ &= h \prod_i (-\lambda_i) \prod_i (1 + \tau_i s) \prod_k (s^2 - 2\alpha_k s + \alpha_k^2 + \omega_k^2) \end{aligned}$$

$$p(s) = h \prod_i (-\lambda_i) \prod_k (\omega_{nk}^2) \prod_i (1 + \tau_i s) \prod_k \left(1 + \frac{2\zeta_k}{\omega_{nk}} s + \frac{s^2}{\omega_{nk}^2}\right)$$

$$\begin{aligned} \alpha_k^2 + \omega_k^2 &= \omega_{nk}^2 \\ \omega_{nk}\zeta_k &= -\alpha_k \end{aligned}$$

A partire dalla precedente espressione si ottiene

$$W(s) = \frac{h' \prod_i (1 + \tau_i' s) \prod_k \left(1 + \frac{2\zeta_k'}{\omega_{nk}'} s + \frac{s^2}{\omega_{nk}'^2} \right)}{h \prod_i (1 + \tau_i s) \prod_k \left(1 + \frac{2\zeta_k}{\omega_{nk}} s + \frac{s^2}{\omega_{nk}^2} \right)}$$

che è l'espressione utilizzata per caratterizzare ciascun elemento della matrice della funzione di trasferimento.
In una fattorizzazione a coefficienti reali di questo tipo sono messe in evidenza, le costanti di tempo τ_i, associate agli autovalori reali, lo smorzamento ζ_k e la pulsazione naturale ω_{nk} associate ad ogni coppia di autovalori complessi coniugati, la presenza di un eventuale eccesso di poli in zero, s^r e il guadagno, $\mathbf{k}$,

$$W(s) = \mathbf{k} \frac{\prod_{\mathbf{i=1}}^{\nu'} (\mathbf{1} + \tau_{\mathbf{i}}' \mathbf{s}) \prod_{\mathbf{k=1}}^{\mu'} \left(\mathbf{1} + \frac{\mathbf{2}\zeta_{\mathbf{k}}'}{\omega_{\mathbf{nk}}'} \mathbf{s} + \frac{\mathbf{s^2}}{\omega_{\mathbf{nk}}'^{\mathbf{2}}}' \right)}{\mathbf{s^r} \prod_{\mathbf{i=1}}^{\nu} (\mathbf{1} + \tau_{\mathbf{i}} \mathbf{s}) \prod_{\mathbf{k=1}}^{\mu} \left(\mathbf{1} + \frac{\mathbf{2}\zeta_{\mathbf{k}}}{\omega_{\mathbf{nk}}} \mathbf{s} + \frac{\mathbf{s^2}}{\omega_{\mathbf{nk}}^{\mathbf{2}}} \right)}$$

1.5. La risposta a regime permanente

Lo studio nel dominio complesso permette di comprendere come le caratteristiche della risposta di un sistema dinamico siano collegate al comportamento rispetto ad una classe particolare di sollecitazioni: le sollecitazioni periodiche. Questi aspetti sono alla base della cosiddetta analisi in frequenza di un sistema dinamico; un approccio al quale fanno ricorso gli ingegneri nello studio dei sistemi dinamici. Il punto di partenza è rappresentato dalla caratterizzazione del significato fisico della funzione di trasferimento valutata sui punti dell'asse immaginario e riposa sul concetto di risposta a regime permanente.

La risposta a regime permanente ad un assegnato ingresso è definita come quella funzione del tempo alla quale, indipendentemente dallo stato iniziale, tende la risposta in uscita al crescere del tempo.

Se si ricorda che la risposta in uscita è composta da evoluzione libera e forzata, si comprende che al fine di ottenere l'indipendenza dallo stato iniziale è necessario che le leggi di moto che compaiono in Ce^{At} tendano a zero al crescere del tempo. In altre parole la condizione di indipendenza dallo stato iniziale si riduce a richiedere che i modi osservabili siano associati ad autovalori a parte reale negativa. Infatti, sotto tale condizione, in

$$y(t) = Ce^{A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^{t} W(t-\tau)u(\tau)d\tau$$

la generica evoluzione libera per un fissato t_0 tende a zero al crescere del tempo. In realtà per un sistema fisico l'esistenza del regime permanente non può prescindere da un'ulteriore proprietà che rende possibile il corretto funzionamento del sistema stesso: si tratta della limitatezza di tutte le evoluzioni interne. Affinchè questo accada, come si può comprendere alla luce dello studio condotto sui modi naturalli e come avremo occasione di precisare nelle fasi successive del nostro studio, avendo già imposto che gli autovalori associati a modi osservabili abbiano parte reale negativa, è necessario che gli altri autovalori abbiano parte reale strettamente negativa se a molteplicità geometrica maggiore di uno, parte reale minore o uguale a zero se a molteplicità geometrica unitaria. In altre parole è necessaria quella proprietà che è nota come stabilità interna del sistema. Assumeremo, dunque, la stabilità interna ed in aggiunta, per garantire la citata indipendenza dallo stato iniziale assumeremo che gli autovalori associati ai modi osservabili abbiano parte reale strettamente negativa indipendentemente dalla loro molteplicità.

Limitata in tal modo la classe dei sistemi ai quali ci riferiremo, quelli che hanno autovalori a parte reale negativa ed eventualmente nulla quelli non osservabili a molteplicità geometrica unitaria, definiremo la risposta a regime permanente come quella funzione che si ottiene facendo il limite per t_0 che va a $-\infty$ della risposta del sistema.

Più precisamente definiamo

$$y_r(t) = \lim_{t_0 \to -\infty} \int_{t_0}^{t} W(t-\tau)u(\tau)d\tau$$

se una tale funzione del tempo esiste per un fissato u diremo che questa è la risposta a regime permanente corrispondente all'ingresso fissato.

Dalla definizione si comprende che l'esistenza del regime permanente dipende non solo dalle proprietà del sistema, quelle fissate, ma anche dall'ingresso; infatti deve essere assicurata la sommabilità della funzione integranda a secondo membro della precedente espressione. Vedremo che per fissate classi di ingressi, periodici e polinomiali, il regime permanente esiste ed ha la stessa forma dell'ingresso. La risposta a regime è dunque caratterizzata da alcuni parametri che ne precisano la modifica rispetto all'ingresso.

Per comprendere che la funzione così calcolata coincida con l'andamento verso il quale tende ad assestarsi la risposta del sistema basta ossevare che per la stazionarietà del sistema l'osservazione della risposta al tempo $(t + t')$ è equivalente all'osservazione a t avendo applicato lo stesso ingresso a partire dall'istante $(t_0 - t')$. Quindi osservare al crescere del tempo equivale ad osservare al tempo t le risposte alla successione di ingressi ottenuta per traslazione verso l'infinito negativo.

Mostreremo che la risposta ora definita rappresenta quella funzione alla quale tende, nel senso usuale del limite, la risposta forzata del sistema. A tal fine si mostrerà che

$$\forall \epsilon, \exists T_a : ||y(t) - y_r(t)|| < \epsilon, \ \forall t \geq T_a.$$

T_a prende il nome di *tempo di assestamento* e dipende dagli autovalori di A. A questo proposito si osservi che in base alla definizione data ed in virtù delle proprietà di regolarità della risposta impulsiva e per funzioni di ingresso regolari l'operazione di limite può essere spostata sull'estremo di integrazione e, a seguito di un cambiamento di variabile, si ottiene

$$y_r(t) = \int_{-\infty}^{t} W(t-\tau)u(\tau)d\tau = \int_{0}^{\infty} W(\xi)u(t-\xi)d\xi$$

ciò che consente di esprimere la differenza $y - y_r$ in istanti di tempo superiori a T_a, come

$$y(T_a + t) - y_r(T_a + t) = Ce^{A(T_a+t)}x_0 + \int_0^{T_a+t} W(T_a + t$$

$$-\tau)u(\tau)d\tau - \int_0^{\infty} W(\xi)u(T_a + t - \xi)d\xi$$

da cui segue

$$y(T_a + t) - y_r(T_a + t) = Ce^{A(T_a+t)}x_0 - \int_{T_a+t}^{\infty} W(\xi)u(T_a + t - \xi)d\xi$$

che può essere inferiore ad ogni prefissato ε per $T_a(\varepsilon)$ sufficientemente grande. Ciò è conseguenza del fatto che gli elementi di Ce^{At} e $W(t)$ sono combinazioni lineari di funzioni esponenziali decrescenti che diventano infinitesimi al crescere del tempo.

Per concludere è opportuno sottolineare che a seguito della introduzione della risposta a regime permanente la risposta complessiva in uscita può essere interpretata, per classi di ingressi che ammettono il regime e per sistemi stabili asintoticamente, come la somma di due risposte denominate transitoria e permanente

$$y(t) = y_t(t) + y_r(t)$$

Poggiano su tale scomposizione della risposta alcuni metodi di studio e di progetto di sistemi dinamici lineari stazionari; per tale motivo essa rappresenta una scomposizione in un certo senso complementare rispetto a quella nota in risposta in evoluzione libera e forzata.

Valer la pena di osservare che poichè il regime coincide con l'andamento limite, al crescere del tempo, della risposta e le condizioni di esistenza, come abbiamo visto, richiedono che la risposta in evoluzione libera tenda a zero, possiamo concludere che il regime permenente è la parte persistente della risposta forzata mentre la risposta libera è parte del transitorio.

1.5.a. Il regime permanente ad ingressi periodici

Ciò premesso è importante caratterizzare la risposta a regime permanente ad ingressi di tipo periodico puro. Sia, dunque, $u(t) = e^{\jmath\omega t}$ si ha

$$y_r(t) = \lim_{t_0 \to -\infty} \int_{t_0}^{t} W(t-\tau) e^{\jmath\omega\tau} d\tau$$

e posto $(t-\tau) = \xi$, sviluppando il calcolo ricordando che per la regolarità delle funzioni coinvolte il limite si sposta sull'estremo di integrazione, si ottiene

$$y_r(t) = e^{\jmath\omega t} \int_{0}^{\infty} W(\xi) e^{-\jmath\omega\xi} d\xi = e^{\jmath\omega t} W(s)\big|_{s=\jmath\omega}$$

L'ultima uguaglianza è garantita dal fatto che essendo l'ascissa di convergenza della trasformata di Laplace è negativa essendo $W(t)$ una combinazione lineare di esponenziali a parte reale negativa. Sfruttando la linearità e osservando che $W(\jmath\omega)$ in qualità di trasformata di una funzione reale verifica

$$W(-\jmath\omega) = M(\omega) e^{-\jmath\phi(\omega)}$$

ove

$$M(\omega) = |W(\jmath\omega)|\,, \qquad \phi(\omega) = \angle W(\jmath\omega)$$

si ottiene

$$y_r(t) = \frac{M(\omega)e^{\jmath\omega t}e^{\jmath\phi(\omega)} - M(\omega)e^{-\jmath\omega t}e^{-\jmath\phi(\omega)}}{2\jmath} = M(\omega)\sin\left(\omega t + \phi(\omega)\right)$$

Si ha quindi l'importante risultato che la risposta a regime permanente ad un ingresso periodico puro è una funzione dello stesso tipo dell'ingresso con la stessa pulsazione ω e modificata in modulo e fase di quantità $M(\omega)$ e $\phi(\omega)$ che sono il modulo e la fase di $W(s)$ calcolata in $s = \jmath\omega$, ω pulsazione dell'ingresso. Per tale motivo possiamo dire che il modulo e la fase di $W(\jmath\omega)$ caratterizzano, al variare di ω e nell'ipotesi di stabilità della rappresentazione, il comportamento del sistema a regime per ingressi periodici puri. $W(\jmath\omega)$ viene detta *risposta armonica*, e matrice delle risposte armoniche nel caso generale, p e/o $q > 1$.

Se si pensa alla formula di inversione di Laplace in cui interviene la funzione di variabile complessa calcolata lungo una retta parallela all'asse immaginario ed interna al semipiano di convergenza, e si ricorda contestualmente che l'asse immaginario, per l'ipotesi $Re[\lambda_i] < 0$, appartiene a tale semipiano si comprende, da un punto di vista matematico, come il comportamento a regime permanente al variare di ω (modulo e fase di $W(\jmath\omega)$) contenga tutte le informazioni sul comportamento dinamico ingresso-uscita. In altre parole il modulo e la fase della risposta armonica per un fissato valore di pulsazione rendono conto del comportamento a regime permanente a quella pulsazione; il modulo e la fase della risposta armonica al variare della pulsazione rendono conto del comportamento dinamico del sistema: quindi anche del comportamento transitorio che compete al comportamento forzato.

Per caratterizzazione del comportamento in frequenza, da un punto di vista applicativo, si intende l'andamento di $M(\omega)$ e $\phi(\omega)$. Tali funzioni sono significative dal punto di vista del comportamento dinamico e a queste fanno riferimento metodi di analisi e di identificazione. Tra questi il più semplice dei metodi di identificazione, detto metodo della risposta armonica, consiste nell'effettuazione di più misure ingresso-uscita su risposte a regime ad ingressi periodici puri con diverse pulsazioni $\omega_1, \ldots, \omega_N$. Calcolati in tal modo M_i e ϕ_i, $i = 1, \ldots, N$, il problema si risolve calcolando una funzione razionale interpolante tali valori. Si tratta di individuare due interi n ed m e due polinomi $n(s)$ e $d(s)$ di variabile complessa, di grado m e n rispettivamente, tali che posto $W(s) = n(s)/d(s)$ si abbia

$$\left| W(s)\big|_{s=\jmath\omega} \right| = M_i, \quad \angle W(s)\big|_{s=\jmath\omega} = \phi_i$$

Ovviamente quanto detto rappresenta la linea concettuale del procedimento di identificazione che presenta aspetti complessi legati alle scelte di N, m ed n ed al filtraggio dell'effetto di rumori sulle misure.

In conclusione la risposta armonica $W(j\omega)$ descrive il comportamento in frequenza di un sistema dinamico lineare stazionario e allo stesso tempo consente di dare alla funzione di trasferimento un'interpretazione fisica equivalente a quella data alla risposta impulsiva. Per questo motivo assumono importanza le rappresentazioni grafiche della risposta armonica; le più note sono le rappresentazioni di **Bode**, diagrammi di modulo (in dB) e fase rispetto ad un ascissa in scala logaritmica, quella **polare**, una curva nel piano complesso tarata ω che descrive l'immagine secondo W dell'asse immaginario, quella di **Nichols**, equivalente a quella polare, ma rispetto ad un sistema di coordinate ortogonali per il modulo (in dB) e la fase.

In appendice viene presentata una procedura per il tracciamento di tali grafici. L'interesse di tale argomento riposa, in base alle considerazioni precedenti, sull'importanza di disporre di una chiave di lettura che consenta di comprendere il comportamento dinamico a partire dalla conoscenza delle rispostea regime a sollecitazioni periodiche.

1.5.b. Il regime permanente a ingressi canonici

Si procederà ora, nell'ipotesi che il sistema soddisfi la citata condizione di esistenza, al calcolo della risposta a regime permanente ad ingressi cosiddetti canonici; cioè del tipo

$$u(t) = \frac{t^k}{k!}\delta_{-1}(t)$$

Il calcolo della risposta a regime permanante può essere effettuato in t o in s. Per quanto riguarda il calcolo in t, a partire dalla definizione stessa di risposta a regime si ha

$$\begin{aligned}
y_r(t) &= \lim_{t_0 \to -\infty} \int_{t_0}^{t} W(t-r)\frac{r^k}{k!}dr = \qquad t - r = \xi \\
&= \int_0^\infty W(\xi)\frac{(t-\xi)^k}{k!}d\xi \\
&= \int_0^\infty W(\xi) \cdot \sum_{i=0}^{k} \frac{t^{k-i}}{k!}\xi^i(-1)^i \binom{k}{i} d\xi \\
&= \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{k!} \binom{k}{i} t^{k-i}(-1)^i \int_0^\infty W(\xi)\xi^i d\xi \\
&= \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{i!(k-i)!}(-1)^i t^{k-i} M_i
\end{aligned}$$

Sia ottiene quindi un polinomio di grado k i cui coefficienti sono i parametri M_i

$$M_i = \int_0^\infty W(\xi)\xi^i d\xi$$

detti **momenti** della risposta impulsiva. Si osservi che tali coefficienti sono ben definti in quanto per le ipotesi sul sistema nella risposta impulsiva compaiono leggi temporali di modi associati ad autovalori a parte reale negativa; ciò che garantisce la limitatezza dell'integrale.

I momenti della risposta impulsiva sono collegati da una semplice relazione ai coefficienti dello sviluppo in serie di Mac Laurin della $W(s)$. Si ha infatti:

$$M_i = (-1)^i \frac{d^i W(s)}{ds^i}\bigg|_{s=0}$$

Ricordando lo sviluppo di Mc Laurin $W(s) = \sum c_i s^i$, in cui

$$c_i = \frac{1}{i!}\frac{d^i(W(s)}{ds^i}\bigg|_{s=0}$$

si ottiene

$$(-1)^i M_i = i! c_i$$
$$\Downarrow$$
$$M_i = (-1)^i i! c_i$$

In definitiva, per la risposta a regime permanente all'ingresso canonico di ordine k si ottiene

$$y_r(t) = \sum_{i=0}^{k} \frac{t^{k-i}}{(k-i)!} c_i = c_0 \frac{t^k}{k!} + \ldots + c_k$$

Nel caso particolare di ingresso a gradino unitario, $k = 0$, $u(t) = \delta_{-1}(t)$ si ottiene

$$y_r(t) = c_0 = W(0)$$

la risposta a regime è dunque costante e pari a $W(0)$, tale valore costante è detto *guadagno* della funzione di trasferimento. Il guadagno della funzione di trasferimento di un sistema ha, nel caso in cui esista la risposta a regime permanente, il significato fisico di valore di regime della risposta al gradino unitario.

Come si è detto in precedenza un approccio diverso nell'analisi del regime permanente rispetto ad ingressi canonici è fondato sullo studio della risposta nel dominio della trasformata di Laplace.

Un'osservazione preliminare può essere fatta per giustificare la dizione *ingressi canonici*. Gli ingressi allo studio sono detti ingressi canonici perchè, in analogia a quanto accade con l'ingresso impulsivo, la risposta forzata ad uno di tali ingressi è un modello del comportamento forzato del sistema. Più precisamente, se si indica con '$\star$' il prodotto di convoluzione di due funzioni del tempo,

$$L(W \star u) = W(s)U(s) =$$

$$= sW_{-1}(s)U(s) = W_{-1}(s)sU(s)$$

$$= L(W_{-1} \star u')$$

dove l'apice indica la derivazione rispetto al tempo e

$$W_{-1}(s) = \frac{W(s)}{s}$$

Quindi la risposta forzata, pari alla convoluzione di u con W (risposta impulsiva), può anche essere ottenuta come convoluzione di W_{-1} (risposta forzata all'ingresso a gradino unitario) con la derivata dell'ingresso se, come avviene nel caso degli ingressi che qui si considerano, la derivata in zero è nulla.
Questi argomenti possono essere generalizzati alle derivate di ordine superiore degli ingressi ed alle risposte ad ingressi canonici di ordine superiore se si osserva che la trasformata di Laplace dell'ingresso canonico di ordine k:

$$u(t) = \frac{t^k}{k!}\delta_{-1}(t)$$

vale

$$\mathcal{L}\left(\frac{t^k}{k!}\delta_{-1}(t)\right)= \frac{1}{s^{k+1}}$$

Infatti

$$\mathcal{L}\big(\delta_{-1}(t)\big)= \frac{1}{s} \Rightarrow \mathcal{L}\big(t\delta_{-1}(t)\big)= \frac{1}{s^2}$$

infatti $\delta_{-1}(t)$ è la derivata di $t\delta_{-1}(t)$ e quindi

$$\mathcal{L}\big(\delta_{-1}(t)\big)= s \cdot \frac{1}{s^2} - 0 = \frac{1}{s}$$

Generalizzando

$$\mathcal{L}\big(\frac{t^(k-1)}{(k-1)!}\delta_{-1}(t)\big)= \frac{1}{s^k} \Rightarrow \mathcal{L}\big(\frac{t^k}{k!}\delta_{-1}(t)\big)= \frac{1}{s^(k+1)}$$

Tornando allo studio della risposta a regime, si consideri la risposta forzata all'ingresso di ordine k,

$$y_f(s) = \frac{W(s)}{s^{k+1}} = \frac{A_0 + A_1 s + \ldots + A_k s^k}{s^{k+1}} + + \frac{B_1}{s-p_1} + \ldots + \frac{B_n}{s-p_n}$$

$$y_f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{A_0 + \ldots + A_k s^k}{s^{k+1}}\right) + \sum_{i=1}^{n} B_i e^{p_i t}$$

da ciò si evince che, avendo i poli p_i parte reale negativa, al crescere del tempo la risposta tende ad assumere un andamento pari a

$$y_r(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{A_0 + \ldots + A_k s^k}{s^{k+1}}\right)$$

Calcoliamo questa antitrasformata:

$$A_0 = \frac{W(s)}{s^{k+1}} s^{k+1}\bigg|_{s=0} = W(0) = \mathbf{k} \quad \textbf{guadagno}$$

$$A_1 = \frac{d}{ds}\left(\frac{W(s)}{s^{k+1}} s^{k+1}\right)|_{s=0} = \frac{dW}{ds}\bigg|_{s=0}$$

$$|$$

$$A_k = \frac{1}{k!}\frac{d^k}{ds^k}W(s)\bigg|_{s=0}$$

$$\downarrow$$

$$y_r(t) = A_0\frac{t^k}{k!} + A_1\frac{t^{k-1}}{(k-1)!} + \ldots + A_k$$

Si riottiene, in definitiva, l'espressione precedente ove con A_i sono qui indicati i coefficienti c_i dello sviluppo in serie di Mc Laurin. Al calcolo di tali coefficienti si riduce il calcolo della la risposta a regime permanente.

1.5.c. La risposta indiciale

Esaminiamo in dettaglio la risposta forzata all'ingresso a gradino; come già detto tale risposta è chiamata *risposta indiciale.* Sia

$$W(s) = \frac{b_0 + b_1 s + \ldots + b_m s^m}{a_0 + a_1 s + \ldots + a_{n-1}s^{n-1} + s^n}$$

posto $u(t) = \delta_{-1}(t)$, la risposta forzata in s è data da

$$y(s) = \frac{W(s)}{s} = \frac{A_0}{s} + \frac{A_1}{s-p_1} + \ldots + \frac{A_n}{s-p_n}$$

dove con p_i si sono indicati i poli della funzione di trasferimento. Ancora una volta, poichè $Re(p_i) < 0$ si comprende che l'antitrasformata della risposta forzata è una funzione che al crescere del tempo tende al valore costante A_0 $= \mathbf{k}$, *guadagno.* Infatti:

$$y_f(t) = A_0\delta_{-1}(t) + \sum_{i=1}^{n} A_1 e^{p_i t}\delta_{-1}(t)$$

$A_0 = W(0)$ può anche essere calcolato applicando il teorema del valore finale nel dominio delle trasformate

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} s \quad F(s)$$

In conclusione, a seguito dell'applicazione dell'ingresso a gradino unitario $u(t) = \delta_{-1}(t)$,

$$y_r(t) = W(0)\delta_{-1}(t) = K\delta_{-1}(t)$$

la risposta a regime permanente tende ad un valore costante pari al guadagno.

Il comportamento della risposta indiciale intorno allo zero può essere messo in relazione con i parametri della $W(s)$. Se si ricorda che per il teorema del valore iniziale:

$$\lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{s\to\infty} s \quad F(s)$$

si ottiene immediatamente

$$y(0) = W(\infty) = 0 \quad se \qquad n > m$$

inoltre

$$y'(0) = \lim_{s\to\infty} s\big(sy(s) - y(0)\big) = \lim_{s\to\infty} sW(s) =$$

$$= b_{n-1} \quad se \quad m = n-1 \qquad = 0 \quad se \quad m < n-1$$

$$\vdots$$

$$y^{(n-m)}(0) = b_m$$

In conclusione: la risposta in zero fino alla derivata di ordine $(n-m-1)$ è nulla. La derivata di ordine $(n-m)$ è pari al coefficiente di ordine massimo del numeratore.

Esempio della massa - molla - smorzatore

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\dfrac{k}{M}x_1 - \dfrac{b}{M}x_2 + \dfrac{u(t)}{M} \end{cases}$$

$$y = x_1$$

$$W(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s & -1 \\ \frac{k}{M} & s + \frac{b}{M} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{s\left(s + \frac{b}{M}\right) + \frac{k}{M}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s + \frac{b}{m} & 1 \\ -\frac{k}{M} & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow W(s) = \frac{\frac{1}{M}}{s^2 + \frac{b}{M}s + \frac{k}{M}}$$

Il guadagno, lo spostamento a regime sotto l'azione di una forza unitaria, è pari a

$$A_0 = \frac{1}{k}$$

mentre il comportamento intorno allo zero è caratterizzato da

$$y(0) = 0 \qquad y'(0) = 0 \qquad y''(0) = \frac{1}{M}$$

Si conclude il paragrafo mettendo in evidenza due parametri che sono generalmente assunti a caratterizzare la risposta indiciale:

- sovraelongazione, $s*$: scostamento rispetto al valore massimo normalizzato al valore di regime

$$s* = \frac{y_M - \mathbf{k}}{\mathbf{k}}$$

- tempo di salita, t_s: tempo necessario a raggiungere la prima volta il valore di regime (nel caso oscillante); tempo per passare da $0,1$ a $0,9$ del valore finale nel caso non oscillante.

t_s e $s*$ sono legati ai parametri nel dominio della frequenza, risultando per funzioni di trasferimento in una vasta gamma: $B_3 t_s \cong$ costante e $\frac{1+s*}{M_r} \cong$ costante. Infatti, come l'intuizione suggerisce ad una più ampia banda passante corrisponde una maggiore prontezza di risposta. Inoltre se si pensa al contenuto spettrale del segnale gradino unitario si è condotti a pensare ad una ingresso di tale tipo come 'sollecitante' il comportamento su tutto lo spettro delle frequenze (da zero, per la componente continua, fino all'infinito, per la discontinuità iniziale); ciò naturalmente conduce a collegare la presenza di sovraelongazioni nella risposta indiciale a risonanze nel comportamento in frequenza.

1.6. Le leggi di moto nel caso di autovalori multipli

Come è noto l'espressione generale dell'espansione in frazioni parziali di una matrice di funzioni razionali strettamente proprie è la seguente

$$\phi(s) = \frac{(sI - A)^{a^T}}{|sI - A|} = \frac{E(s)}{m(s)} = \sum_{i=1}^{r} \sum_{k=1}^{m_i} \frac{R_{ik}}{(s - \lambda_i)^k}$$

dove gli autovalori di A hanno molteplicità geometriche, m_i, e algebriche, μ_i, per le quali valgono le relazioni

$$\begin{array}{ccc} \lambda_1 & m_1 & \leq \mu_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda_r & m_r & \leq \mu_r \end{array}$$

Il calcolo delle leggi di moto nel caso generale comporta l'antitrasformazione delsecondo membro in cui R_{ik} hanno le espressioni

$$R_{ik} = \lim_{s \to \lambda_i} \frac{1}{(m_i - k)!} \frac{d^{m_i - k}}{ds^{m_i - k}} \left((sI - A)^{-1} (s - \lambda_i)^{m_i} \right)$$

Si ottiene

$$\phi(t) = \sum_{i=1}^{r} \sum_{i=1}^{m_i} R_{ik} L^{-1} \left(\frac{1}{s - \lambda_i} \right)^k$$

Poichè

$$L\left(\frac{t^{k-1}}{(k-1)!} e^{\lambda_i t} \right) = \frac{1}{(s - \lambda_i)^k}$$

si ha, in definitiva

$$\phi(t) = \sum_{i=1}^{r} \sum_{i=1}^{m_i} R_{ik} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} e^{\lambda_i t}$$

Le leggi temporali sono dunque del tipo

$$(\alpha_0 + \alpha_1 t + \dots \alpha_{k-1} t^k) e^{\lambda_i t} \qquad k = 0, \dots, m_i - 1$$

Le leggi temporali che compaiono in $\phi(t)$ al variare della molteplicità geometrica, hanno andamenti analoghi al crescere del tempo se la parte reale dell'autovalore è positiva o negativa, rispettivamente convergenti a zero o divergenti, che si discostano nel caso in cui la parte reale dell'autovalore è nulla. Se, infatti, la molteplicità geometrica è unitaria le leggi di moto sono costanti o comunque limitate, se è maggiore di uno sono divergenti.

1.7. Sistemi a tempo discreto: analisi nel dominio della variabile complessa

Per le rappresentazioni lineari stazionarie a tempo discreto si possono sviluppare considerazioni analoghe a quelle svolte fondate sulla Z-trasformata. Data una funzione $f(t)$ definita in $\mathbf{Z}_+$ si definisce Z trasformata di $f(t)$ la funzione di variabile complessa

$$Z[f(t)] = F(z) = \sum_{t=0}^{\infty} f(t) z^{-t}$$

che risulta definita per $|z| > \rho_f$, ρ_f raggio di convergenza associato alla funzione f.

Come mostrato in appendice, si tratta di una trasformazione lineare e vale la proprietà, nota come teorema della traslazione a destra

$$Z[f(t+1)] = zF(z) - zf(0).$$

L'applicazione ad una rappresentazione implicita a tempo discreto dà, con semplici calcoli

$$\begin{aligned} X(z) &= (zI - A)^{-1} z x_0 + (zI - A)^{-1} B U(z) \\ Y(z) &= C(zI - A)^{-1} z x_0 + \big(C(zI - A)^{-1} B + D\big) \end{aligned}$$

La Z-trasformata della matrice di transizione è quindi data da

$$Z\left[A^t\right] = (zI - A)^{-1}z$$

e rimane anche implicitamente dimostrato che la Z-trasformata di una convoluzione è pari al prodotto delle trasformate

$$Z\left(A^{t-1} * Bu(\tau)\right) = (zI - A)^{-1}BU(z)$$

1.7.a. La trasformata Z nello studio dei sistemi a tempo discreto

Per le rappresentazioni lineari stazionarie a tempo discreto si possono sviluppare considerazioni analoghe a quelle svolte impiegando la Z-trasformata.

Assegnata una funzione $f(t)$ definita in $\mathbf{Z}_+ \cup 0$ si definisce Z trasformata di $f(t)$ la funzione di variabile complessa

$$\mathcal{Z}\left[f(t)\right] = F(z) = \sum_{t=0}^{\infty} f(t)z^{-t}$$

che risulta definita per $|z| > \rho_f$, ρ_f raggio di convergenza associato alla funzione f.

La trasformazione che tale operazione induce è lineare e valgono interessanti proprietà che sono alla base del calcolo delle trasformate di classi di funzioni e dell'applicazione allo studio dei sistemi dinamici a tempo discreto che qui interessa. Tra questa, si ricorda la seguente, nota come *teorema della traslazione a sinistra*

$$\mathcal{Z}\left[f(t+1)\right] = zF(z) - zf(0).$$

Questi semplici richiami consentono di calcolare la trasformata zeta di ambo i membri delle equazioni che descrivono una rappresentazione lineare, stazionaria, a dimensione finita. Si ottiene, indicando con le lettere maiuscole le trasformate delle corrispondenti funzioni

$$zX(z) - zx_0 = AX(z) + BU(z) \qquad Y(z) = CX(z) + DU(z)$$

e con semplici manipolazioni

$$X(z) = (zI - A)^{-1} z x_0 + (zI - A)^{-1} B U(z)$$
$$Y(z) = C(zI - A)^{-1} z x_0 + \big(C(zI - A)^{-1} B + D\big)\, U(z)$$

t Le precedenti relazioni esprimono la trasformata zeta delle evoluzioni nello stato e in uscita; esse dunque non sono altro che la rappresentazione esplicita del sistema nel dominio della variabile complessa z, cioé la trasformata zeta di

$$x(t) = A^t x_0 + \Sigma_0^{t-1} A^{(t-\tau-1)} B u(\tau)$$
$$y(t) = A^t x_0 + \Sigma_0^{t-1} C A^{(t-\tau-1)} B u(\tau) + D u(t)$$

In z il il sistema è quindi definito dalle matrici

$$\phi(z) = (zI - A)^{-1} z \qquad H(z) = (zI - A)^{-1} B$$
$$\psi(z) = C(zI - A)^{-1} z \qquad W(z) = C(zI - A)^{-1} B + D$$

$W(z)$, $(q \times p)$, è detta matrice delle funzioni di trasferimento ed è la trasformata zeta di $W(t)$.

Per identificazione dei termini corrispondenti nelle precedenti uguaglianze si ottengono le seguenti identità:

$$\mathcal{Z}\left[A^t\right] = (zI - A)^{-1} z$$

e

$$\mathcal{Z}\left[\Sigma_0^t w(t-\tau) u(\tau)\right] := (A^{(t-1)} * B u(t)) = W(z) U(z)$$

Queste identità esprimono due proprietà della trasformata di Laplace che spiegano l'interesse dell'uso nello studio dei sistemi dinamici lineari. Le trasformate di funzioni di tipo potenza in t (quindi anche funzioni costanti, periodiche e pseudoperiodiche) sono funzioni razionali proprie; la trasformata di un integrale di convoluzione, è di questo tipo la risposta forzata che pesa i valori dell'ingresso a τ con quelli della risposta impulsiva a $t - \tau$, è pari al prodotto delle trasformate, *teorema della convoluzione*.

Nell'ultima uguaglianza si è tenuto conto della proprietà nota come *teorema della traslazione a destra*

$$\mathcal{Z}\left[f(t-1)\right] = \frac{F(z)}{z}$$

la dimostrazione è elementare ed è riportata in appendice.

Anche in questo caso, con una perfetta analogia ai sistemi a tempo continuo, gli elementi di $W(z)$ sono funzioni razionali proprie; cioè rapporto di polinomi nella variabile complessa z. Inoltre il polinomio a denominatore ha grado N al più pari ad n, la dimensione della matrice dinamica.

Segue, dalle precedenti considerazioni che la matrice di trasferimento di un sistema lineare stazionario con p ingressi e q uscite a dimensione finita assume la forma

$$W(z) = D + \frac{B_0 + B_1 z + B_2 z^2 + \ldots + B_{n-1} z^{N-1}}{a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_{n-1} z^{N-1} + z^N}$$

per opportune matrici costanti D e B_i, $i = 0, \ldots, N-1$, $(q \times p)$.

In base a quanto esposto rimane quindi individuato un metodo alternativo per il calcolo delle risposte o, ciò che è equivalente, per il passaggio alla rappresentazione esplicita. Assegnato un ingresso, e calcolatane la trasformata di Laplace, ed uno stato iniziale la soluzione richiede il calcolo di $z(zI-A)^{-1}$, semplici moltiplicazioni ed una operazione di antitrasformazione. L'operazione di antitrasformazione è particolarmente semplice in presenza di ingressi che ammettono trasformate razionali; in tal caso le espressioni da antitrasformare sono funzioni razionali che possone essere antitrasformate senza difficoltà una volta calcolate le corrispondenti espansioni in frazioni parziali.

1.7.b. I modi naturali nel dominio complesso

Valgono le stesse considerazioni fatte per i sistemi a tempo continuo ove si tenga presente che

$$\mathcal{Z}(A^t) = (zI - A)^{-1} z$$

Iniziamo la nostra analisi dalla risposta in evoluzione libera nello stato:

$$x_l(t) = A^t x_0$$

che implica, in z

$$X_l(z) = (zI - A)^{-1} z x_0$$

Valgono le stesse considerazioni fatte per i sistemi a tempo continuo con gli stessi algoritmi per il calcolo della matrice di transizione $\phi(z) = (zI - A)^{-1}z$. Unica differenza è la moltiplicazione per z.

Come esempio si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0,5 \end{pmatrix}$$

nel calcolo conviene fare riferimento a

$$\frac{\phi(z)}{z} = (zI - A)^{-1} = \frac{\begin{pmatrix} z-1 & 0 \\ 1 & z-0,5 \end{pmatrix}^{a^T}}{(z-1)(z-0,5)} = \frac{\begin{pmatrix} z-0,5 & 0 \\ -1 & z-1 \end{pmatrix}}{(z-1)(z-0,5)}$$

e farne l'espansione in frazioni parziali; infatti moltiplicando per z si avranno espressioni del tipo noto, $\frac{z}{z-\lambda}$, di cui si sa calcolare l'antitrasformata. Nell'esempio allo studio,

$$\phi(z) = \frac{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}}{(z-1)} + \frac{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ +2 & 1 \end{pmatrix}}{(z-0,5)}$$

da cui, si calcola

$$\phi(t) = \mathcal{Z}\left(\frac{z\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}}{(z-1)} + \frac{z\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ +2 & 1 \end{pmatrix}}{(z-0,5)} \right) = (R_1 + R_2 \cdot 0,5^t)\delta_{-1}(t)$$

Per il calcolo della risposta in uscita, che assume la forma

$$Y(z) = C(zI - A)^{-1} z x_0 + C(zI - A)^{-1} B U(z)$$

siano

$$C = (\,1 \quad 0\,) \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

e, si ottiene con semplici calcoli

$$W(z) = \frac{1}{z-1}$$

Mentre il sistema è caratterizzato da due modi naturali e quindi due leggi di moto, una soltanto è eccitabile e osservabile e cioè quella associata al modo costante con autovalore 1. In definitiva otteniamo una funzione di trasferimento caratterizzata da un solo polo.

Come è facile verificare questa funzione di trasferimento è quella caratteristica di un dispositivo detto integratore numerico e rappresentato dalle seguenti equazioni:

$$\begin{cases} x(t+1) = x(t) + u(t) \\ y(t) = x(t) \end{cases} \qquad x(0) = 0 \Rightarrow y(t) = \sum_{\tau=0}^{t-1} u(\tau)$$

L'integratore numerico effettua una somma dei valori del segnale in ingresso proprio come l'integratore continuo, caratterizzato da una funzione di trasferimento $W(s) = \frac{1}{s}$, effettua l'integrale

$$W(s) = \frac{1}{s} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}(t) = u(t) \\ y(t) = x(t) \end{cases} \quad W(t) = 1$$

$$y(t) = \int_0^t u(\tau) dr$$

Si osservi la corrispondenza tra le operazioni di integrazione discreta e continua: la funzione di trasferimento in z di un integratore discreto (sommatore) ha un polo in $z = 1$, la funzione di trasferimento in s di un integratore ha un polo in 0.

Il seguente esempio mostra che anche per i sistemi a tempo discreto valgono le considerazioni già fatte per quelli a tempo continuo in merito alle caratteristiche filtranti di un dato sistema nei confronti di ingressi la cui trasformata ammette poli coincidenti con parte degli zeri della funzione di trasferimento. Si consideri il sistema con funzione di trasferimento

$$W(z) = \frac{z+2}{(z-0,5)(z+1)}$$

e l'ingresso $u(t) = a^t$

$$\frac{y_f(z)}{z} = \frac{1}{z-a}\frac{z+2}{(z-0,5)(z+1)}$$

e, a seguito di un'espansione in frazioni parziali e un'antitrasformazione, dà una risposta del tipo

$$y_f(t) = r_1 a^t + r_2 0,5^t + r_2(-1)^t$$

Rimane evidente che una parte della risposta ha lo stesso andamento temporale dell'ingresso. Ciò non accade solo se si verifica una cancellazione con uno zero della funzione di trasferimento. Se fosse, ad esempio

$$u(t) = (-2)^t \Rightarrow U(z) = \frac{z}{z+2}$$

si avrebbe, in uscita

$$y_f(t) = r_1 0,5^t + r_2(-1)^t$$

Dunque gli zeri di una funzione di trasferimento rappresentano potenzialmente azioni di filtro nei confronti di prefissate classi di ingressi o parti di essi; si tratta di quelle parti degli ingressi la cui trasformata z ha uno o più poli coincidenti con uno o più zeri della funzione di trasferimento.

Come ulteriore esempio si calcolerà la risposta forzata al gradino unitario, la *risposta indiciale*,

$$y_f(z) = W(z)U(z) \qquad U(z) = \frac{z}{z-1} \Leftarrow u(t) = \delta_{-1}(t)$$

$$\frac{y_f(z)}{z} = \frac{W(z)}{z-1} = \frac{K}{z-1} + \frac{r_1}{z-p_1} + \ldots + \frac{r_n}{z-p_n}$$

$$|p_i| < 1 \qquad W = \frac{N}{D}$$

$$y_f(t) = K\delta_{-1}(t) + \sum_{i=1}^{n} r_i p_i^t \qquad y_r(t) = K\delta_{-1}(t)$$

Comportamento analogo al tempo continuo: al crescere del tempo se i poli della $W(z)$ hanno tutti quanti modulo < 1, la risposta si assesta intorno ad un andamento costante,K,

$$K = \frac{W(z)}{z-1}(z-1)|_{z=1} = W(1)$$

detto *guadagno* del sistema a tempo discreto, cioè quel valore a cui tende la risposta al crescere del tempo quando la funzione di trasferimento ha tutti i poli con modulo < 1.
Parallelo perfetto quindi con i sistemi a tempo continuo in cui il guadagno è $W(0)$ e ritroviamo la corrispondenza più volte citata tra lo 0 in s e 1 in z..

Procediamo nella nostra analisi osservando che assegnata

$$W(z) = \frac{b_0 + b_1 z + \ldots + b_m z^m}{a_0 + a_1 z + \ldots + z^n} \qquad n \geq m$$

il valore in zero può essere calcolato impiegando il *teorema del valore iniziale* (in appendice)

$$f(0) = \lim_{|z| \to \infty} F(z)$$

Per la risposta indiciale, otteniamo

$$y_f(z) = \frac{W(z)}{(z-1)} = \qquad y_f(0) = W(\infty) \begin{cases} = 0 & n > m \\ = b_m & m = n \end{cases}$$

da cui risulta che il valore in zero della risposta al gradino unitario è $\neq 0$ se e solo se $m = n$, altrimenti il primo valore $\neq 0$ si ha al tempo $t = n - m$ e la sua ampiezza è pari a b_m. Infatti ricordando il teorema della traslazione si calcola con facilità

$$y_f(0) = y_f(1) = \ldots y_f(n-m-1) = 0 \qquad y_f(n-m) = b_m$$

In sintesi da un'analisi qualitativa di $W(z)$ risulta che il ritardo nella risposta indiciale è pari ad $n-m$, l'eccesso poli - zeri; l'ampiezza del primo campione non nullo nella risposta indiciale è pari a b_m; al crescere del tempo la risposta indiciale tende ad assumere un valore costante e pari a $W(1)$.

1.7.c. La risposta a regime permanente

Come è stato messo bene in luce con riferimento ai sistemi a tempo continuo, un altro modo di procedere al calcolo della $W(s)$ è quello di fare esperimenti sul comportamento a regime permanente nei confronti ad esempio di ingressi di tipo periodico caratterizzando modulo e fase della $W(s)$ stessa. Analoghe considerazioni possono essere fatte per sistemi a tempo discreto alla luce del significato che assume la risposta a regime permanente ad ingressi periodici. Tale argomento viene sinteticamente esposto nel seguito.

1.7.d. La risposta a regime ad ingressi periodici

Assegnato l'ingresso $u(t) = sen\theta t$

$$\begin{aligned} u(t) &= sen\theta t \\ y_r(t) &= M(\theta) sen(\theta t + \phi(\theta)) \\ M(\theta) &= |W(e^{j\theta})| \\ \phi(\theta) &= W(e^{j\theta}) \end{aligned}$$

Noi sappiamo che la risposta a regime permanente è quell'andamento intorno al quale tende ad assestarsi il comportamento del sistema, andamento che vogliamo non dipenda dallo stato iniziale. Imporre l'indipendenza dallo stato iniziale corrisponde, analogamente a quanto visto per i sistemi a tempo continuo:

$$CA^{t-t_0}x_0 \to 0 \qquad \forall x_0 \Rightarrow |\lambda_i| < 1$$

In altre parole la condizione di indipendenza dallo stato iniziale si riduce a richiedere che i modi osservabili siano associati ad autovalori a parte reale negativa. Anche in questo caso c'è da osservare che l'esistenza del regime permanente non può prescindere da un'ulteriore proprietà che rende possibile il corretto funzionamento del sistema stesso: si tratta della limitatezza di tutte le evoluzioni interne. Affinchè questo accada, come si può comprendere alla luce dello studio condotto sui modi naturalli e come avremo occasione di precisare nelle fasi successive del nostro studio, è necessario che gli autovalori a molteplicità geometrica unitaria abbiano modulo minore o uguale a uno e quelli a molteplicità geometrica maggiore di uno abbiano modulo strettamente inferiore ad uno. In altre parole è necessaria quella proprietà che è nota come stabilità interna del sistema. Assumeremo, dunque, la stabilità interna ed in aggiunta, per garantire la citata indipendenza dallo stato iniziale assumeremo che gli autovalori associati ai modi osservabili abbiano modulo strettamente inferiore ad uno indipendentemente dalla loro molteplicità.

Assunta tale condizione sugli autovalori del sistema e passando al limite per $t_0 \to -\infty$, si ottiene l'espressione della risposta a regime permanente

$$y_r(t) = \sum_{\tau=-\infty}^{t} W(t-\tau)u(\tau)$$

che esiste per definite classi di funzioni di ingresso. Consideriamo classi di ingressi particolari

$$u(t) = sen\theta t = \frac{e^{j\theta t} - e^{-j\theta t}}{2j}$$

si ottiene

$$y_r(t) = \sum_{\tau=-\infty}^{t} W(t-\tau)e^{j\theta\tau}$$

e posto

$$t - \tau = \xi$$

$$y_r(t) = \sum_{\xi=0}^{\infty} W(\xi)e^{j\theta(t-\xi)} = e^{j\theta t}\sum_{\xi=0}^{\infty} W(\xi)e^{-j\theta\xi}$$

$$\sum_{\xi=0}^{\infty} W(\xi)(e^{j\theta})^{-\xi} = W(z)|_{e^{j\theta}}$$

Quindi la risposta a regime permanente a questo ingresso è :

$$y_r(t) = e^{j\theta t} \cdot W(e^{j\theta})$$

Gli stessi calcoli per $e^{-j\theta t}$ danno:

$$e^{-j\theta t} W(e^{j\theta})$$

Si noti che la $W(z)$ per $z = e^{j\theta}$ è definita; infatti si potrebbe dimostrare che il raggio di convergenza della $W(z)$ coincide con il massimo dei moduli degli autovalori. Essendo questi per ipotesi tutti minori di 1, sulla circonferenza di raggio unitario la funzione di trasferimento è ben definita.

Dal precedente calcolo, adottando la rappresentazione polare per la W

$$\begin{array}{cc} W(e^{j\theta}) & W(e^{-j\theta}) \\ \Downarrow & \Downarrow \\ M(\theta)e^{j\phi(\theta)} & M(-\theta)e^{j\phi(-\theta)} \end{array}$$

ed osservando che M e ϕ sono funzioni, rispettivamente pari e dispari di θ

$$\phi(\theta) = -\phi(-\theta) \qquad M(\theta) = M(-\theta)$$

si ottiene

$$\frac{e^{j\theta t} \cdot W(e^{j\theta}) - e^{-j\theta t} \cdot W(e^{-j\theta})}{2j} = \frac{M(\theta)(e^{j\theta t} \cdot e^{j\phi(\theta)} - e^{-j\theta t} \cdot e^{-j\phi(\theta)})}{2j}$$

cioè

$$y_r(t) = M(\theta) sen(\theta t + \phi(\theta))$$

In conclusione la risposta a regime permanente ad un ingresso periodico puro è dello stesso tipo dell'ingresso ed ha la stessa pulsazione; risulta modificata in modulo e ampiezza di quantità che sono pari al modulo e alla fase della W calcolata in $z = e^{j\theta}$. Per questo motivo si usa dire che il modulo e la fase di $W(z)$ per $z = e^{j\theta}$ al variare di θ tra 0 e π caratterizzano il comportamento in frequenza.

1.7.e. La risposta a regime ad ingressi canonici

Sia $t^{(k)}$ un polinomio fattoriale di ordine (k)

$$t^{(k)} = t(t-1)(t-2)\cdots(t-k+1)$$

e si consideri l'ingresso canonico di ordine (k) per i sistemi a tempo discreto

$$u(t) = \frac{t^{(k)}}{k!}$$

$$\begin{aligned} y_r(t) &= \lim_{t_0 \to -\infty} \sum_{r=t_0}^{t} W(t-r)u(r) \\ &= \lim_{t_0 \to -\infty} \sum_{r=t_0}^{t} W(t-r)\frac{r^{(k)}}{k!} \qquad t-r=\theta \\ &= \sum_{\theta=0}^{\infty} W(\theta)\frac{(t-\theta)^{(k)}}{k!} \end{aligned}$$

Poichè per il polinomio fattoriale di ordine (k) di un binomio vale lo sviluppo seguente

$$(t-\theta)^{(k)} = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (-1)^i t^{(k-i)} (\theta+i-1)^{(i)}$$

si ha

$$\begin{aligned} y_r(t) &= \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{k!} \binom{k}{i} (-1)^i t^{(k-i)} \sum_{\theta=0}^{\infty} W(\theta)(\theta+i-1)^{(i)} \\ &= \sum_{i=0}^{k} \frac{(-1)^i}{i!} M_i \frac{t^{(k-i)}}{(k-i)!} \end{aligned}$$

in cui si è posto

$$M_i = (-1)^i \frac{d^i W(z)}{dz^i}|_{z=1}$$

infatti
$$\frac{d^i W(z)}{dz^i} = \frac{d^i}{dz^i}\sum_{t=0}^{\infty}\frac{W(t)}{z^t} = (-1)^i\sum_{t=0}^{\infty}(t+i-1)^{(i)}\frac{W(t)}{z^{t+1}}$$
Se inoltre si considera lo sviluppo in serie di potenze di $W(z)$ intorno a $z = 1$,
$$W(z) = \sum_{i\geq 0}\frac{1}{i!}\frac{d^i W}{dz^i}|_{z=1}(z-1)^i$$
si deduce che
$$M_i = (-1)^i i! c_i$$
ed in conclusione per la risposta a regime permanente si ottiene l'espressione
$$y_r(t) = \sum_{i=0}^{k} c_i \frac{t^{(k-1)}}{(k-1)}$$
che presenta una stretta analogia formale con quella ottenuta per i sistemi a tempo continuo.

La risposta a regime permanente può anche essere calcolata come la parte persistente della risposta forzata. In questo caso giova fare riferimento al dominio delle trasformate.

Un primo aspetto riguarda il calcolo della trasformata dell'ingresso canonico fattoriale
$$\frac{t^{[k]}}{k!} = \frac{t(k-1)\dots(t-k+1)}{k!}$$
risulta
$$Z\left[\frac{t^{[k]}}{k!}\right] = \frac{z}{(z-1)^{k+1}}$$
Per verificare quanto asserito è necessario premettere una proprietà della trasformata zeta. Più precisamente
$$Z\big(tf(t)\big) = -z\frac{d}{dz}F(z)$$
infatti
$$\frac{d}{dz}\left(f(0)+\frac{f(1)}{z}+\frac{f(2)}{z^2}+\dots\right) = -\left(+\frac{f(1)}{z^2}+\frac{2f(2)}{z^3}+\frac{3f(3)}{z^4}\right) =$$

e moltiplicando per $-z$

$$-z\frac{d}{dz}F(z) = \frac{f(1)}{z} + \frac{2f(2)}{z^2} + \ldots = Z\big(t \cdot f(t)\big)$$

Possiamo ora calcolare la Z trasformata di t.

$$Z[t] = -z\frac{d}{dz}\frac{z}{z-1} = \frac{z}{(z-1)^2}$$

e poi la trasformata Z del polinomio fattoriale

$$t^{[k]} = t(t-1)\ldots(t-k+1)$$

$$Z[t^{[2]}] = Z[t \cdot (t-1)] = -z\frac{d}{dz}\frac{1}{(z-1)^2} = \frac{2z}{(z-1)^3}$$

$$Z\left[\frac{t^{[2]}}{2!}\right] = Z\left[\frac{t \cdot (t-1)}{2}\right] = -z\frac{d}{dz} \cdot \frac{1}{(z-1)^2 2} = \frac{z}{(z-1)^3}$$

$$Z\left[\frac{t(t-1)(t-2)}{3!}\right] = \frac{z}{(z-1)^4}$$

e, in generale:

$$Z\left[\frac{t^{[k]}}{k!}\right] = \frac{z}{(z-1)^{k+1}}$$

La risposta a regime permanente ad un tale ingresso può essere calcolata facilmente; si ha infatti

$$\frac{y_f(z)}{z} = \frac{W(z)}{(z-1)^{k+1}} = \frac{N(z)}{D(z)(z-1)^{k+1}}$$

e, sviluppando i calcoli

$$\frac{y_f(z)}{z} = \frac{c_0}{(z-1)^{k+1}} + \frac{c_1}{(z-1)^k} + \ldots + \frac{c_k}{(z-1)} + \sum_{i=1}^{n} \frac{r_i}{z-p_i}$$

$$y_f(t) = c_0\frac{t^{(k)}}{k!} + c_1\frac{t^{(k-1)}}{(k-1)!} + \ldots + c_k + \sum_{i=1}^{n} r_i p_i^t$$

e, infine

$$y_r(t) = c_0 \frac{t^{(k)}}{k!} + c_1 \frac{t^{(k-1)}}{(k-1)!} + \ldots + c_k$$

con

$$c_0 = K = \left. \frac{W(z)}{(z-1)^{k+1}} (z-1)^{k+1} \right|_{z=1} = W(1)$$

guadagno del sistema discreto

$$c_1 = \left. \frac{d}{dz} \left(\frac{W(z)}{(z-1)^{k+1}} (z-1)^{k+1} \right) \right|_{z=1}$$

.....

$$c_i = \left. \frac{1}{i!} \frac{d^i}{dz^i} W(z) \right|_{z=1}$$

Anche nel caso del sistema a tempo discreto possiamo ripetere le stesse considerazioni fatte in precedenza; i coefficienti non sono altro che i coefficienti dello sviluppo in serie di Taylor, della $W(z)$ intorno al punto $z = 1$.

1.7.f. Le leggi di moto nel caso generale

Possiamo qui ripetere le stesse considerazioni già fatte nel caso a tempo continuo

$$\frac{\phi(z)}{z} = \sum_{i=1}^{r} \sum_{k=1}^{m_i} \frac{R_{ik}}{(z-\lambda_i)^k}$$

$$\phi(t) = \sum_i \sum_k R_{ik} Z^{-1} \left(\frac{z}{(z-\lambda_i)^k} \right)$$

Per antitrasformare è necessario osservare una proprietà della trasformata zeta:

$$Z[\lambda^t f(t)] = F(\lambda^{-1} z)$$

infatti

$$Z[\lambda^t f(t)] = f(0) + f(1)\frac{\lambda}{z} + f(z)\frac{\lambda^2}{z^2} + \ldots$$

da cui

$$Z\left[\lambda^t \frac{t^{(k-1)}}{(k-1)!}\right] = \frac{z/\lambda}{(z/\lambda - 1)^k} = \frac{z}{\frac{\lambda}{\lambda^k}(z-\lambda)^k} = \frac{z\lambda^{(k-1)}}{(z-\lambda)^k}$$

Ancora, si ha

$$Z\left[\lambda^{-k+1}\lambda^t \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}\right] = \frac{z\lambda^{k-1}}{(z-\lambda)^k} \cdot \lambda^{-k+1}$$

cioè

$$Z\left[\lambda^{t-k+1} \frac{t^{(k-1)}}{(k-1)!}\right] = \frac{z}{(z-\lambda)^k}$$

e

$$\phi(t) = \sum_{i=1}^{r} \sum_{k=1}^{m_i} R_{ik} \frac{t^{(k-1)}}{(k-1)!} \lambda_i^{t-k+1}$$

Queste sono le leggi di moto che compaiono; perciò non più solo leggi di moto del tipo (λ^t), ma anche leggi di moto con coefficienti che sono dei polinomi in (t). Ciò corrisponde ai termini che caratterizzano la potenza di una matrice A quando questa non è regolare (non esiste la forma diagonale). Valgono le stesse considerazioni fatte a proposito dei sistemi a tempo continuo, ricordando che in questo caso la diversità di comportamento al crescere del tempo si riscontra nel caso di autovalori a modulo unitario.

1.7.g. Discretizzazione della funzione di trasferimento di un sistema continuo

Supponiamo che il sistema a tempo continuo sia descritto dalla funzione di trasferimento

$$S_{tc} = W(s)$$

Il sistema che otteniamo è un sistema a tempo discreto lineare quindi il legame forzato sarà caratterizzato da una $W(z)$. Si mostrerà ora come calcolare direttamente la $W(z)$ a partire dalla $W(s)$.

$$Real. \downarrow \qquad \uparrow C_D(zI - A_D)^{-1}B_D$$

$$(A, B, C) \underset{D}{\longrightarrow} (A_D, B_D, C_D)$$

La soluzione è la seguente:

$$W(z) = \frac{z-1}{z} Z \left[L^{-1} \left(\frac{W(s)}{s} \right) \Bigg|_{t=KT} \right]$$

Per comprendere tale espressione si noti che essendo il sistema a tempo discreto lineare, è sufficiente per calcolare la $W(z)$ esprimere il rapporto tra un'uscita forzata e il corrispondente ingresso; inoltre, la risposta al gradino a tempo discreto coincide con il campionamento della risposta al gradino unitario del sistema a tempo continuo (ciò perchè la tenuta di un gradino discreto, dà un gradino continuo); quindi la risposta indiciale continua campionata:

$$L^{-1} \left(\frac{W(s)}{s} \right) \Bigg|_{kT}$$

coincide con la risposta indiciale del sistema a tempo discreto. Facendone la Z - trasformata

$$Z \left[L^{-1} \left(\frac{W(s)}{s} \right) \Bigg|_{kT} \right]$$

e dividendo per la Z trasformata del gradino a tempo discreto si ottiene, per quanto osservato, la funzione di trasferimento cercata

$$W(z) = \frac{y_f(z)}{u_f(z)} = \frac{z-1}{z} Z \left[L^{-1} \left(\frac{W(s)}{s} \right) \Bigg|_{kT} \right]$$

Esempio:

$$W(s) = \frac{1}{s^2}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u \\ y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x \end{cases}$$

realizzazione del modello $W(s) = \frac{1}{s^2}$.
Questo è un modello molto usuale, modello su cui si fondano molte considerazioni sia di analisi che di sintesi, di intervento e di strategie di controllo.
Calcolo:

$$\frac{W(s)}{s} = \frac{1}{s^3}$$

$$L^{-1}\left(\frac{W(s)}{s}\right) \qquad \frac{t^2}{2}$$

$$L^{-1}\left(\frac{W(s)}{s}\right)\Bigg|_{t=kT} \qquad \frac{k^2T^2}{2}$$

$$Z\left[L^{-1}\left(\frac{W(s)}{s}\right)\Bigg|_{t=kT}\right] = \frac{T^2}{2} z(k^2)$$

$$z(k) = \frac{z}{(z-1)^2}$$

$$z(k \cdot k) = -z\frac{d}{dz}\frac{z}{(z-1)^2}$$

$$Z\left[L^{-1}\left(\frac{W(s)}{s}\right)\Bigg|_{t=kT}\right] = \frac{T^2}{2}\frac{z(z+1)}{(z-1)^3}$$

$$\frac{z-1}{z} Z\left[L^{-1}\left(\frac{W(s)}{s}\right)\Bigg|_{t=kT}\right] = \frac{T^2}{2}\frac{z(z+1)}{(z-1)^3}\frac{z-1}{z}$$

$$\frac{z-1}{z} Z\left[L^{-1}\left(\frac{W(s)}{s}\right)\Bigg|_{t=kT}\right] = \frac{T^2}{2}\frac{(z+1)}{(z-1)^2} = W(z)$$

Nella soluzione c'è un polo doppio in uno:
$(z-1)^2$, proprio come nella $W(s) = \frac{1}{s^2}$ dove c'è un polo doppio in zero.

Zeri di $W(s)$ sotto discretizzazione:

Mentre gli autovalori, e quindi anche i poli della funzione di trasferimento, si trasformano secondo la corrispondenza $z = e^{sT}$, la situazione si presenta complessa per quanto riguarda gli zeri. Un primo aspetto riguarda il loro numero; è genericamente $(n-1)$ indipendentemente da quanti siano gli zeri di $P(s)$. Quindi sotto discretizzazione *appaiono* nuovi zeri; più precisamente se $W(s)$ ha m zeri, $W(z)$ ha $(n-m-1)$ zeri in più. Si potrebbe dimostrare che per T sufficientemente piccolo

$$z_i^D \cong e^{z_i T} \qquad i = 1, \ldots, m$$

$$i = m+1, \ldots, n-1 \qquad z_i^D \Rightarrow \text{zeri del discretizzato di } \tfrac{1}{s^{n-m}}$$

è importante notare che per $(n-m) > 2$ gli zeri del discretizzato di $\frac{1}{s^{n-m}}$ sono instabili ($|z_i^D| > 1$).
In altre parole per T piccolo (come usualmente accade) la funzione di trasferimento, del discretizzato di un processo continuo con eccesso poli-zeri > 2, presenta zeri instabili, anche se il processo non li ha.

Discretizzazione di sistemi con ritardo

L'ultima considerazione riguarda la discretizzazione di sistemi con ritardo.

$$W(s) = e^{-\lambda s} H(s)$$

$$\lambda T = eT \cdot mT \qquad 0 < m < 1$$

$$\frac{W(s)}{s} = e^{-lTs} \frac{e^{mTs} a}{s(s+a)}$$

$$\downarrow$$

$$W(z) = \frac{z-1}{z} \frac{1}{z^l} z \left[L^{-1} \left(\frac{e^{mTs}}{s} - \frac{e^{mTs}}{s+a} \right) \Bigg|_{t=KT} \right]$$

$$= \frac{z-1}{z^{l+1}} z \left(\delta_{-1}(kT + mT) - e^{-a(kT+mT)} \right)$$

$$W(z) = \frac{z-1}{z^{l+1}} \left(\frac{z}{z-1} - \frac{e^{-amT} z}{z - e^{-aT}} \right)$$

Si ottiene quindi una $W(z)$ che è un rapporto di polinomi, in realtà si ottiene che il grado a denominatore è pari a $(\lambda + 1)$. Perciò si ha una funzione di trasferimento che è rapporto di polinomi e quindi una rappresentazione con lo stato che è a dimensione finita, cosa che in realtà non si avrebbe in questo caso per il sistema a tempo continuo.

1.7.h. Dal modello forzato in z alla rappresentazione con lo stato

La coincidenza del modello forzato nel dominio complesso comporta che le stesse soluzioni individuate per i sistemi a tempo continuo possano essere applicate ai sistemi a tempo discreto.

1.8. Appendice 4

1.8.a. La trasformata di Laplace

Si ricorda la definizione di trasformata di Laplace che associa ad una funzione $f(t)$ definita su $t \in [0, \infty)$ la funzione di variabile complessa s

$$\mathcal{L}\left[f(t)\right] = F(s) := \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt$$

che risulta definita per $Re[s] > \alpha$, α associata a $f(t)$ detta ascissa di convergenza. Tale operazione è lineare; inoltre si può verificare derivando ambo i membri della precedente identità che la trasformata della derivata assume la seguente espressione con ascissa di convergenza coincidente con quella di f (*teorema della derivazione*)

$$\mathcal{L}\left[\frac{d}{dt} f(t)\right] = sF(s) - f(0).$$

Definizione, proprietà, scomposizione residui, formule elementari. proprietà per modi multipli

1.8.b. I diagrammi di Bode

E' usuale fare riferimento ad una particolare rappresentazione poli-zeri a coefficienti reali della funzione di trasferimento. A tale proposito si ricorda che la forma fattorizzata è

$$p = q = 1 \qquad W(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = k' \frac{\prod_i (s - z_i)}{\prod_j (s - p_j)}$$

Per ricondurla alla forma desiderata si procede come indicato nel seguito per un generico polinomio.

$$\begin{aligned} p(s) &= h \prod_i (s - \lambda_i) \prod_k (s - \alpha_k - j\omega_k)(s - \alpha_k + j\omega_k) \\ &= h \prod_i (s - \lambda_i) \prod_k \big((s - \alpha_k)^2 + \omega_k^2\big) \\ &= h \prod_i (s - \lambda_i) \prod_k (s^2 - 2\alpha_k s + \alpha_k^2 + \omega_k^2) \\ &= h \prod_i (-\lambda_i) \prod_i (1 + \tau_i s) \prod_k (s^2 - 2\alpha_k s + \alpha_k^2 + \omega_k^2) \end{aligned}$$

$$p(s) = h \prod_i (-\lambda_i) \prod_k (\omega_{nk}^2) \prod_i (1 + \tau_i s) \prod_k \left(1 + \frac{2\zeta_k}{\omega_{nk}} s + \frac{s^2}{\omega_{nk}^2}\right)$$

$$\begin{aligned} \alpha_k^2 + \omega_k^2 &= \omega_{nk}^2 \\ \omega_{nk}\zeta_k &= -\alpha_k \end{aligned}$$

A partire dalla forma della generica fattorizzazione a coefficienti reali di un polinomio $p(s)$, si ottiene

$$W(s) = \frac{h' \prod_i (1 + \tau_i' s) \prod_k \left(1 + \frac{2\zeta_k'}{\omega_{nk}'} s + \frac{s^2}{\omega_{nk}'^2}\right)}{h \prod_i (1 + \tau_i s) \prod_k \left(1 + \frac{2\zeta_k}{\omega_{nk}} s + \frac{s^2}{\omega_{nk}^2}\right)}$$

che è l'espressione utilizzata per caratterizzare un elemento della matrice della funzione di trasferimento.
In una fattorizzazione a coefficienti reali di questo tipo dove sono messe in evidenza, le costanti di tempo τ_i, associate agli autovalori reali, lo smorzamento ζ_k e la pulsazione naturale ω_{nk} associate ad ogni coppia di autovalori complessi coniugati, la presenza di un eventuale eccesso di poli in zero, s^r e il guadagno, K,

$$W(s) = \frac{K \prod_i (1+\tau_i' s) \prod_k \left(1 + \frac{2\zeta_k'}{\omega_{nk}'} s + \frac{s^2}{\omega_{nk}'^2}'\right)}{s^r \prod_i (1+\tau_i s) \prod_k \left(1 + \frac{2\zeta_k}{\omega_{nk}} s + \frac{s^2}{\omega_{nk}^2}\right)}$$

A partire da tale forma fattorizzata a coefficienti reali, la cosiddetta forma fattorizzata di Bode, è relativamente semplice capire qual'è il comportamento in frequenza del sistema ben rappresentato, come è not,o dalla risposta armonica, $W(j\omega)$. E' infatti necessario ricordare che il suo modulo e la sua fase rappresentano, nell'ipotesi di autovalori tutti quanti a parte reale negativa, la modifica in modulo e fase che subisce un segnale periodico puro nel transitare attraverso il sistema.
La costante K è il guadagno del sistema, che è esattamente la $W(s)$ calcolata in $s = 0$ una volta che sono stati eliminati eventuali poli in zero nella funzione di trasferimento.
Il significato fisico associato al guadagno, come il valore a cui tende la risposta a regime permanente all'ingresso a gradino unitario, potrà essere attribuito soltanto in assenza di poli in zero e con tutti gli altri poli a parte reale strettamente negativa.

$$K \qquad s \qquad 1+\tau s \qquad 1 + \frac{2\zeta}{\omega_n} s + \frac{s^2}{\omega_n^2}$$

sono i quattro diversi tipi di termini che caratterizzano la $W(s)$; il termine costante K, monomio s, binomio $1 + \tau s$, trinomio $1 + \frac{2\zeta}{\omega_n} s + \frac{s^2}{\omega_n^2}$. Il prodotto di termini di questo tipo, a numeratore e a denominatore, dà vita ad una generica $W(s)$.

I diagrammi di Bode

Posto

$$|W(j\omega)| = M(\omega)$$

$$fase \quad W(j\omega) = \phi(\omega)$$

I diagrammi di Bode sono una rappresentazione di

$$\begin{cases} M(\omega) \\ \phi(\omega) \end{cases}$$

Rappresentazione particolare perché sull'asse delle ω viene utilizzata una scala logaritmica vengono rappresentati quindi il modulo e la fase ϕ al variare di ω ma secondo una scala, sull'asse delle ascisse, che è appunto logaritmica in base 10. Si usa riportare sull'asse i valori veri di ω. Rispetto ad ω, la fase ϕ viene rappresentata in gradi o radianti e il modulo in dB, M_{dB},

$$M_{dB} = 20\log_{10} M \qquad Rappresentazione \quad logatitmica \quad del \quad modulo$$

La giustificazione di una tale scelta è data nei seguenti passaggi dove si nota che i diagrammi di una funzione di trasferimento prodotto, ciò che corrisponde alla cascata di due sistemi, sono ottenuti per somma dei diagrammi dei moduli in dB e delle fasi

$$\begin{aligned} W(s) &= W_1(s)W_2(s) \\ W &= Me^{j\phi} = M_1e^{j\phi_1} \cdot M_2e^{j\phi_2} \\ W &= M_1 \cdot M_2e^{j(\phi_1+\phi_2)} \end{aligned}$$

e con la rappresentazione in dB

$$M_{dB} = (M_1M_2)_{dB} = M_{1dB} + M_{2dB}$$

Quindi, a partire dalle rappresentazioni grafiche di moduli e fasi, la rappresentazione grafica complessiva è ottenuta facendo le somme ω per ω.
In base alla precedente considerazione l'opportunità della scelta delle modalità di rappresentazione è avvalorata dal fatto che, come già osservato, la $W(s)$ stessa è il prodotto di quattro termini, costante, monomio, binomio e trinomio.

Tracciamento dei diagrammi di Bode

Per rappresentare il comportamento in frequenza di una $W(s)$ basterà fare la somma degli andamenti dei singoli termini.
Passiamo, quindi in rassegna le rappresentazioni grafiche dei singoli termini
La prima rappresentazione riguarda il termine **costante** K

$$K_{dB} = 20 \log_{10} |K|$$

il suo valore è positivo se $|K| > 1$; negativo se il guadagno $|K| < 1$
La fase sarà costantemente nulla se K è positivo e sarà $-\pi$ se K è negativo.
La figura seguente illustra due diverse situazioni

$$K = 100$$

$$K = -1000$$

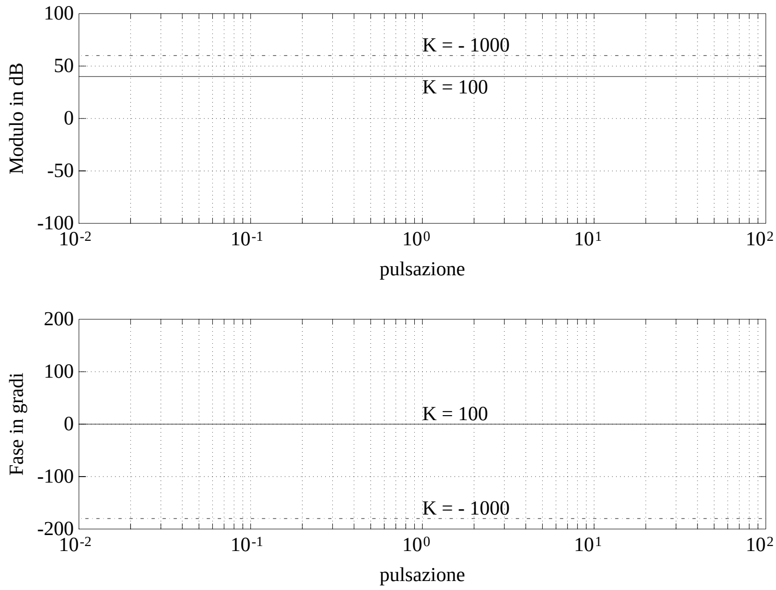

Figura 1.1

Per il termine **monomio** $j\omega$, si ha

$$y = M_{dB} = 20 \log_{10} \omega = 20x$$

cioè il modulo è una retta con pendenza $20dB$ per decade, con andamento sempre crescente. La fase invece è costantemente pari a $\frac{\pi}{2}$. Un fattore monomio a denominatore è rappresentato da andamenti opposti. In figura sono riportati gli andamenti

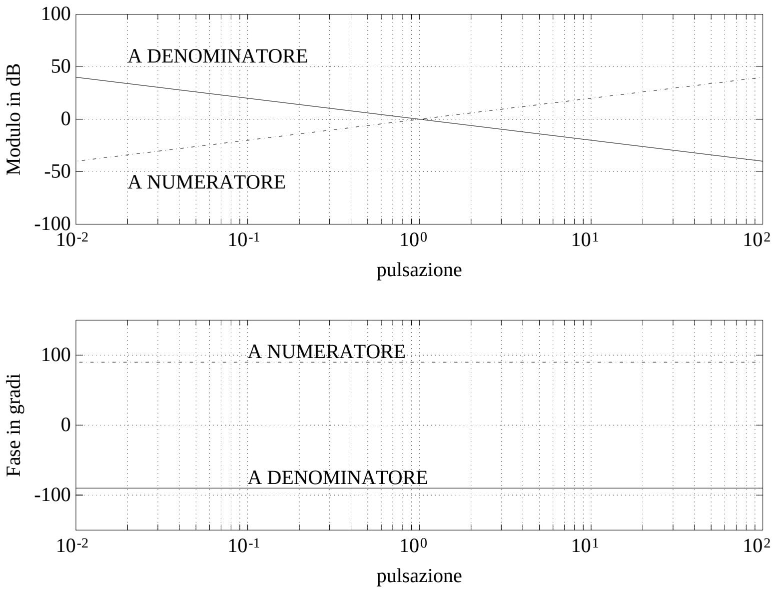

Figura 1.2

Si consideri, ora, il termine **binomio** $1 + j\omega\tau$

$$M_{dB} = 20\log_{10}\sqrt{1+\omega^2\tau^2}$$

$$\omega = \frac{1}{|\tau|} \Rightarrow M_{dB} = 20\log_{10}\sqrt{2} = +3\underline{dB}$$

$$\omega \ll \frac{1}{|\tau|} \Rightarrow M_{dB} \cong 20\log_{10}\sqrt{1} = 0$$

$$\omega \gg \frac{1}{|\tau|} \Rightarrow M_{dB} \cong 20\log_{10}\omega + 20\log_{10}\tau$$

Per ω molto minore di $\frac{1}{|\tau|}$ il diagramma asintotico coincide con l'asse delle ascisse; una retta con pendenza $20dB$ per decade rappresenta il valore del modulo per $\omega \gg \frac{1}{|\tau|}$. Tale retta interseca in $\omega = \frac{1}{|\tau|}$ l'asse delle ascisse. La rappresentazione approssimata costituita dalla spezzata a due lati si chiama diagramma asintotico.

La fase per $\omega \ll \frac{1}{|\tau|}$ è praticamente nulla, per $\omega \gg \frac{1}{|\tau|}$ è praticamente pari a $\frac{\pi}{2}$ con $\tau > 0$ e pari a $-\frac{\pi}{2}$ con $\tau < 0$.

In figura sono rappresentati il modulo e la fase di termini binomi a numeratore e denominatore per valori di τ positivi.

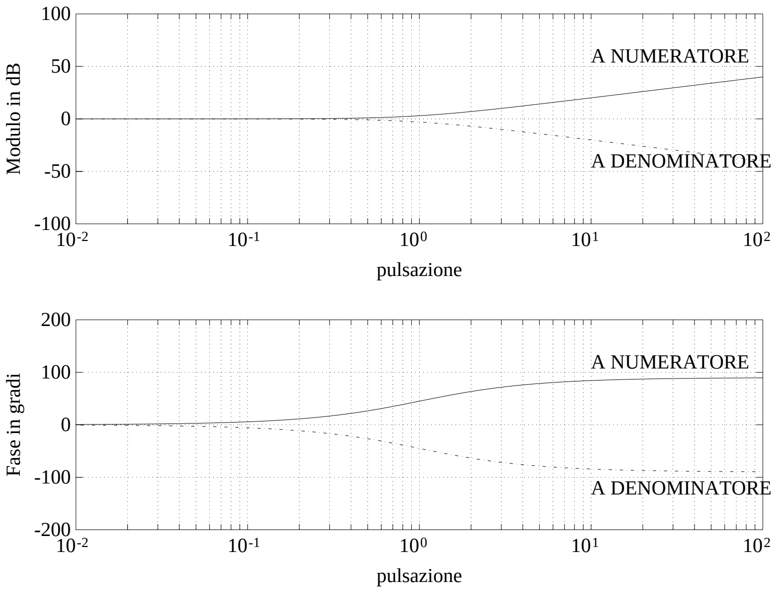

Figura 1.3

Con riferimento a un termine binomio a denominatore, in $\omega = \frac{1}{|\tau|}$ il modulo presenta una variazione di $(1/\sqrt{2})_{dB} = -3dB$ rispetto al valore nullo del diagramma asintotico

Come osservato nella figura, l'andamento corrispondente a valori di τ negativi non cambia per quanto riguarda il modulo, mentre diventa opposto per quanto riguarda la fase. Con il tracciamento dei termini di tipo costante e del termine binomio siamo in grado di caratterizzare il comportamento in frequenza di un sistema che ad esempio ha una funzione di trasferimento tipo

$$W(j\omega) = \frac{K}{1 + j\omega\tau}$$

In base a quanto esposto, l'andamento del modulo e della fase è caratterizzato dalla somma degli andamenti modulo - fase dei due fattori che in questo caso sono K e $1+j\omega\tau$. La pulsazione $\omega = \frac{1}{|\tau|}$ è quella pulsazione in corrispondenza della quale il valore del guadagno del modulo è $-3dB$ rispetto al valore iniziale, questa pulsazione è normalmente indicata come la banda passante, B_3.

Ci rimane da trattare la rappresentazione di un termine **trinomio**, che supporremo a denominatore, corrispondente quindi alla funzione di trasferimento di un sistema dinamico caratterizzato da una coppia di autovalori complessi coniugati. Ciò consentirà di attribuire un significato fisico a parametri noti quali la pulsazione naturale e lo smorzamento

$$\frac{1}{1 + \frac{2\zeta}{\omega_n} j\omega + \frac{(j\omega)^2}{\omega_n^2}}$$

$$M_{dB} = -20 \log_{10} \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right) + \frac{4\zeta^2}{\omega_n^2}\omega^2}$$

In corrispondenza di $\omega = \omega_n$, il valore del modulo dipende da ζ secondo:

$$M_{dB} = -20 \log_{10} 2|\zeta|$$

e per ζ in modulo unitario, ciò che corrisponde all'annullamento della parte immaginaria e alla riduzione del termine trinomio al quadrato di un termine binomio, il valore del modulo risulta $-20 \log 102 = -6$

Per quanto riguarda i comportamenti asintotici, per bassi e alti valori di ω rispetto a ω_n,

$$\omega \ll \omega_n \Rightarrow M_{dB} \cong 0$$

$$\omega \gg \omega_n \quad M_{dB} \cong -20 \log_{10} \frac{\omega^2}{\omega_n^2}$$

$$M_{dB} \cong -40 \log_{10} \omega + 40 \log_{10} \omega_n$$

si ha, quindi una retta che ha pendenza $-40dB$ per decade, che attraversa l'asse delle ω proprio nel punto ω_n. Si potrebbe verificare che l'andamento effettivo è praticamente coincidente con quello asintotico ad una decade di distanza da ω_n.

$$\begin{cases} \omega_n = \sqrt{\alpha^2 + \omega^2} \quad \textit{pulsazione naturale o pulsazione di risonanza} \\ \zeta = \dfrac{-\alpha}{\omega_n} \quad \textit{smorzamento} \end{cases}$$

Se lo smorzamento ζ è basso si ha in corrispondenza di ω_n una risonanza, un'amplificazione della risposta. Lo scostamento degli andamenti al variare di ζ è riportato nella figura seguente con riferimento ad un'ascissa normalizzata rispetto al valore ω_n

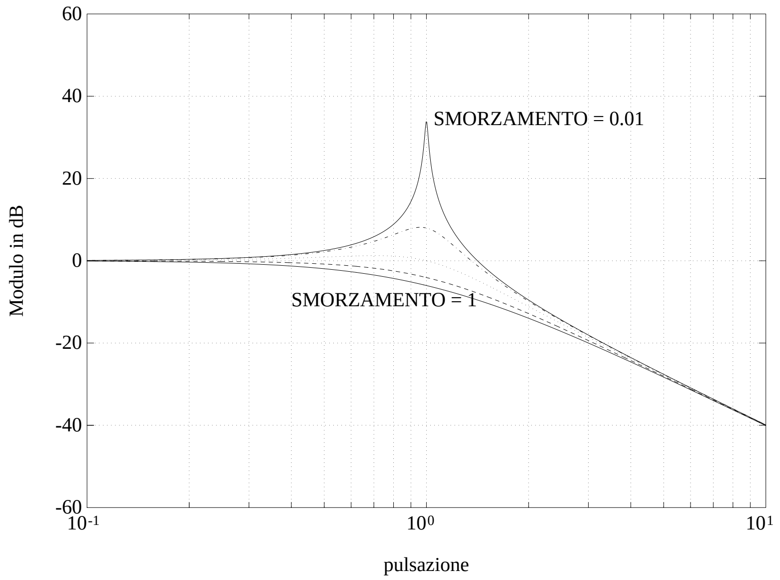

Figura 1.4

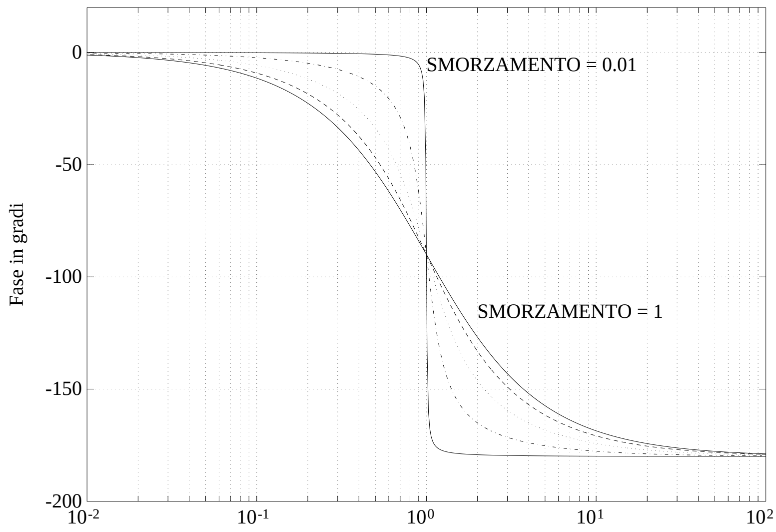

Figura 1.5

Analoghe considerazioni possono essere svolte per gli andamenti della fase di un termine trinomio a denominatore.

$$\phi = \arctan \frac{\frac{2\zeta\omega}{\omega_n}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}}$$

Pur dipendendo da ζ e ipotizzando in prima istanza che questo sia positivo, per ω molto minore di ω_n la fase è circa zero, al tendere ad ω_n da valori inferiori tende a $-\infty$ e al crescere di ω tende di nuovo a zero da valori negativi, ciò corrisponde ad un andamento tra zero e $-\pi$ come indicato in figura per diversi valori di ζ positivi.

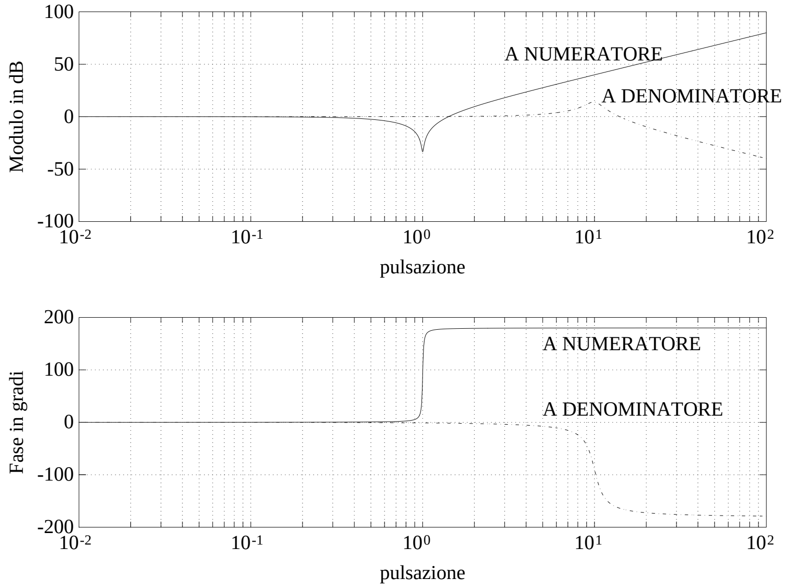

Figura 1.6

Ovviamente gli andamenti della fase per valori di ζ negativi sono opposti a quelli indicati.
E' interessante esaminare il comportamento in frequenza di uno dei sistemi fisici considerati nelle precedenti lezioni.
Diagrammi di Bode dello smorzatore meccanico

$$W(s) = \frac{1/K}{\frac{Ms^2}{k} + \frac{bs}{k} + 1}$$

$$\frac{1}{\omega_n^2} = \frac{M}{k}$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{M}} \qquad \zeta = \frac{b}{2\sqrt{kM}}$$

Se $b > 2\sqrt{kM}$ lo smorzamento risulterebbe 1 ciò che corrisponde a autovalori reali.
Valutiamo tali parametri al variare della massa, della costante elastica della molla e del coefficiente b di attrito dinamico.

$$M = 10^4 \quad Kg \qquad k = 10^6 \quad Nm \rightarrow \omega_n = 10 rad/sec$$

$$b = 10^4 \Rightarrow \zeta = \frac{10^4}{2\sqrt{kM}} = \frac{1}{20} = 0,05$$

$$b = 10^2 \Rightarrow \zeta = \frac{10^2}{2\sqrt{kM}} = 0,0005$$

Esaminiamo cosa accade nei due casi quando si sollecita il sistema con un segnale periodico di pulsazione proprio $= \omega_n = 10 rad/sec$

$$|W(j10)| = \left| \frac{\frac{1}{10^6}}{\frac{(j10)^2}{100} + \frac{b}{k} j + 1} \right| = \frac{1}{10b} = 10^{-1} b^{-1}$$

Cioè, se sollecitiamo con una pulsazione di 10 radianti al secondo con una forza di un 100 Newton si ottiene, a regime, un'oscillazione di $10^{-3} m$, 1 mm (millimetro), nel primo caso, 10 centimetri, nel secondo.

Un sistema dinamico caratterizzato da una coppia di autovalori complessi coniugati può essere impiegato per descrivere, sia pure con estrema semplificazione, la dinamica della parte centrale di una struttura edile, quale quella di un ponte, sottoposta a sollecitazioni verticali. Si può ritenere, infatti che in prima approssimazione l'effetto delle parti collegate ad essa abbia, nei confronti di sollecitazioni agenti lungo la verticale, un effetto di 'richiamo' pari a quello di una molla e uno smorzatore. Un tale modello, alla luce delle considerazioni svolte, si presta ad interpretare alcuni fenomeni caratteristici della dinamica delle strutture; infatti, come il modello suggerisce, in presenza di smorzamenti non elevati (strutture ad ampie luci/flessibili) esiste una frequenza, propria della struttura stessa, in corrispondenza della quale le sollecitazioni periodiche possono produrre esaltazioni della risposta. Le precedenti considerazioni non sono lontane dalla realtà in quanto la dinamica di una struttura meccanica flessibile può sempre essere descritta mediante l'interconnessione di sistemi dinamici di questo tipo. Il modello risultante presenta il fenomeno della risonanza in corrispondenza di diverse frequenze; la prima di esse, che si assume a caratterizzare la struttura, corrisponde ad

una modellistica semplificata e impiega un modello del tipo massa-molla-smorzatore.
Per quanto riguarda il tracciamento dei diagrammi di Bode a partire dai diagrammi dei singoli fattori, sinora trattati, valgono le considerazioni già fatte; il diagramma complessivo è ottenuto facendo la somma dei singoli fattori.

A titolo di esempio si consideri la seguente funzione di trasferimento

$$W(j\omega) = \frac{100\left(1 + \frac{2\zeta}{\omega_n}(j\omega) + \frac{(j\omega)^2}{j\omega_n^2}\right)}{j\omega(1 + j\omega\tau_1)(1 + j\omega\tau_2)}$$

la risposta armonica nella forma fattorizzata di Bode è caratterizzata dai seguenti parametri

$$\tau_1 = 10 \qquad \tau_2 = 0,1 \qquad \zeta = 0,1 \qquad \omega_n = 10$$

L'andamento è riportato nelle figure seguenti

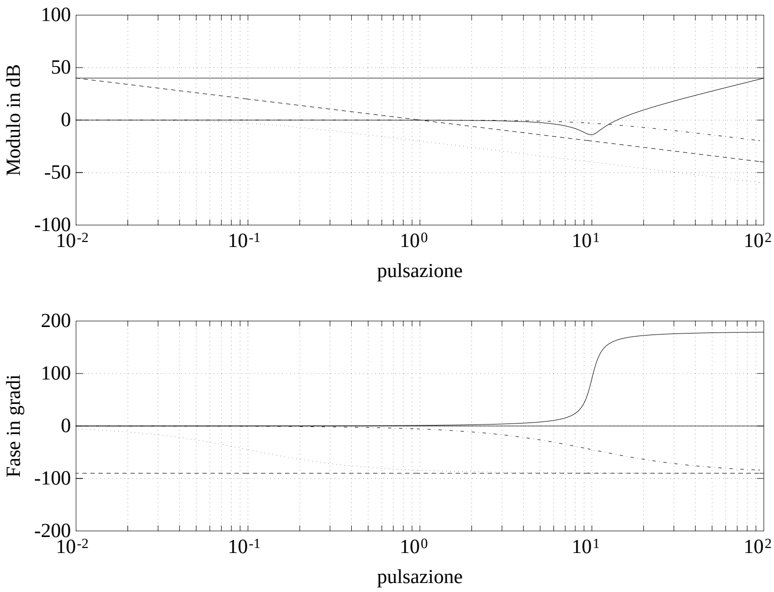

Figura 1.7

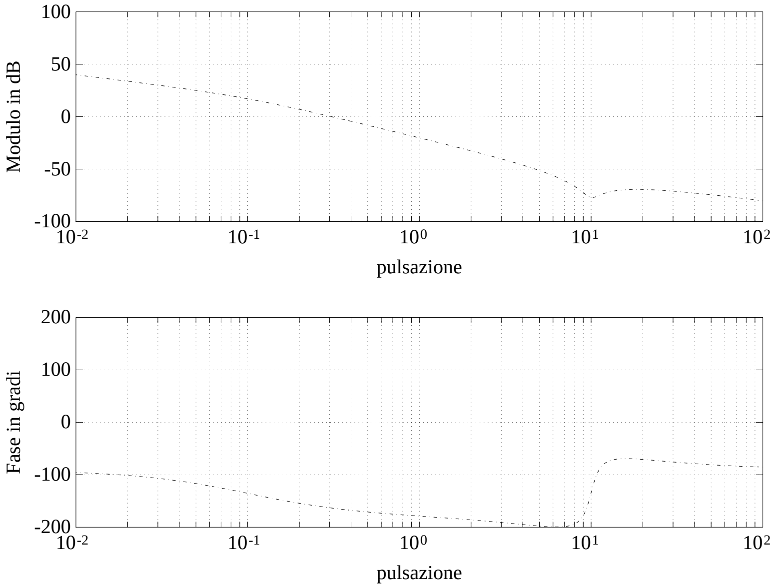

Figura 1.8

Le considerazioni svolte circa il tracciamento dei diagrammi di Bode sono importanti non per il tracciamento effettivo dei diagrammi stessi, ciò che può essere demandato ad un semplicissimo strumento di calcolo, ma per capire per ispezione sui fattori della funzione di trasferimento quale sarà il comportamento in frequenza e, quindi nel tempo, del sistema stesso. Innanzitutto è necessario ricordare che gli andamenti corrispondenti ai diversi fattori sono standard: ad un termine monomio, che corrisponde ad un'azione integrativa, rimane associato un fissato andamento che si traduce in concreto in una costante diminuzione del guadagno alle diverse frequenze e uno sfasamento costante; ad un termine binomio corrisponde un andamento standard che si traduce in un mantenimento del guadagno ed una successiva costante diminuzione con corrispondente aumento di sfasamento; la costante di tempo non modifica il comportamento del dispositivo, ma solo la sua 'collocazione' in frequenza; analoghe considerazioni valgono per un termine trinomio che inoltre può esercitare una risonanza o una azione di filtro (si pensi ad un termine trinomio a numeratore).

Un'ultima considerazione riguarda il comportamento *passa basso* di un sistema dinamico lineare strettamente causale. In base a quanto visto, al crescere di ω, il modulo va sempre a zero ($-\infty$ in dB), tutte le volte che il grado del denominatore è maggiore del grado del numeratore (cioè il sistema è strettamente causale). Inoltre la fase al crescere di ω tende sempre a valori multipli di $\pi/2$ positivi o negativi

Alcuni esempi di comportamento a regime permanente ad ingressi periodici sono proposti nel seguito.

Si consideri la seguente funzione di trasferimento

$$W(s) = \frac{1}{\left(1 + \frac{2\zeta}{\omega_n}s + \frac{s^2}{\omega_n^2}\right)}$$

$$\zeta = 0,1 \qquad \omega_n = 2$$

In figura è riportato l'andamento della risposta a regime

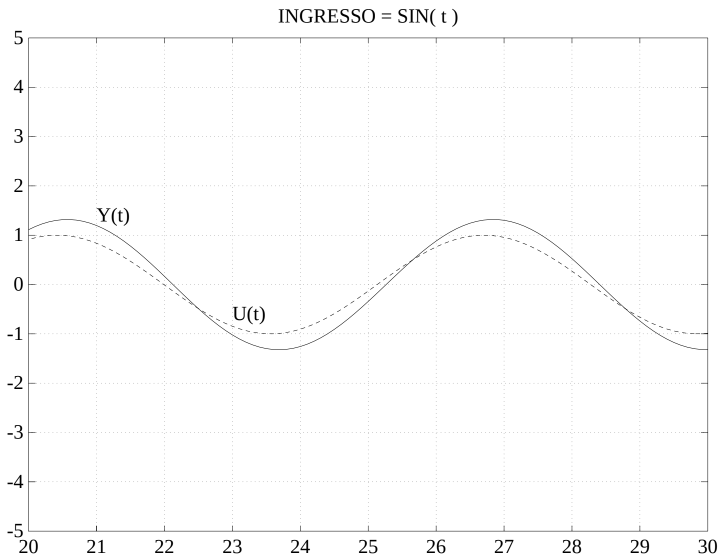

Figura 1.9

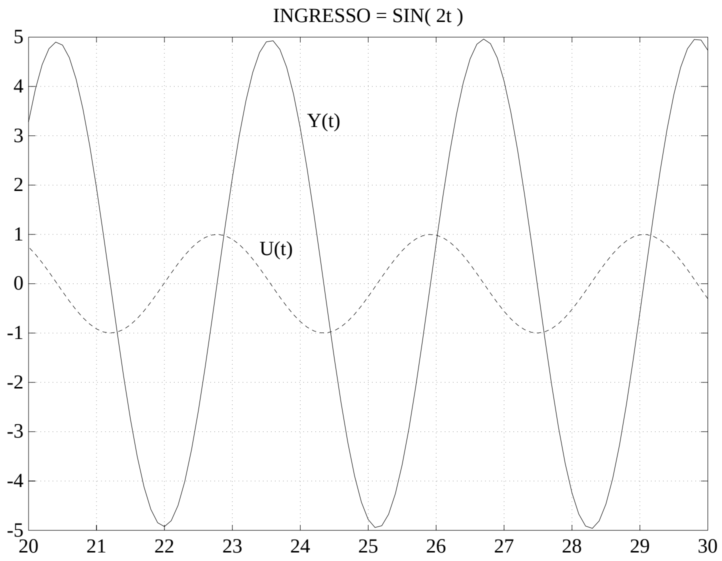

Figura 1.10

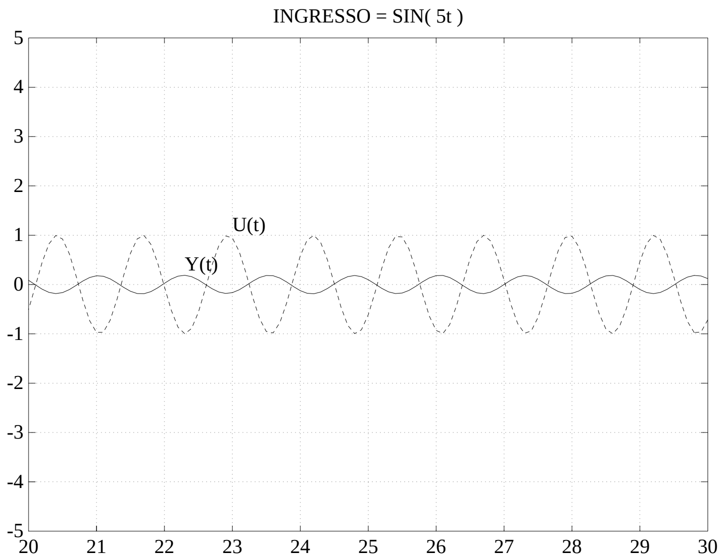

Figura 1.11

Siamo intorno alla pulsazione naturale del sistema come mostrano i diagrammi di Bode riportati qui di seguito

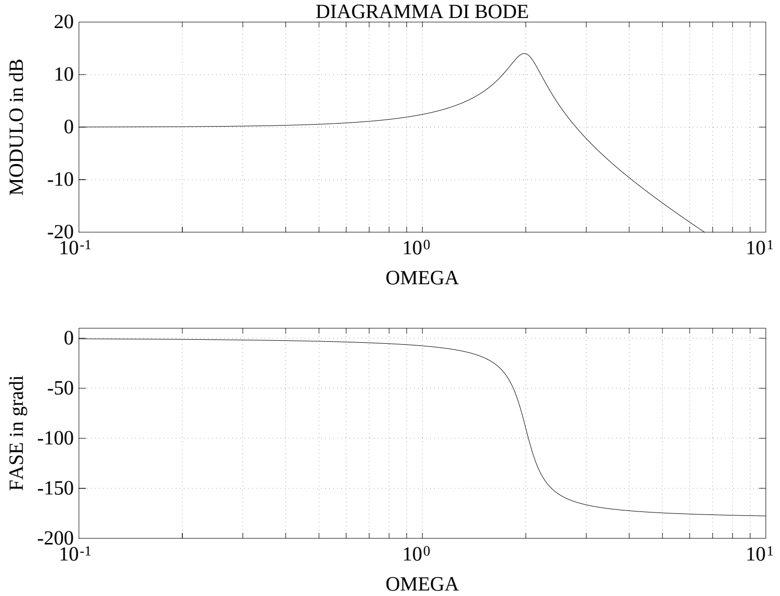

Figura 1.12

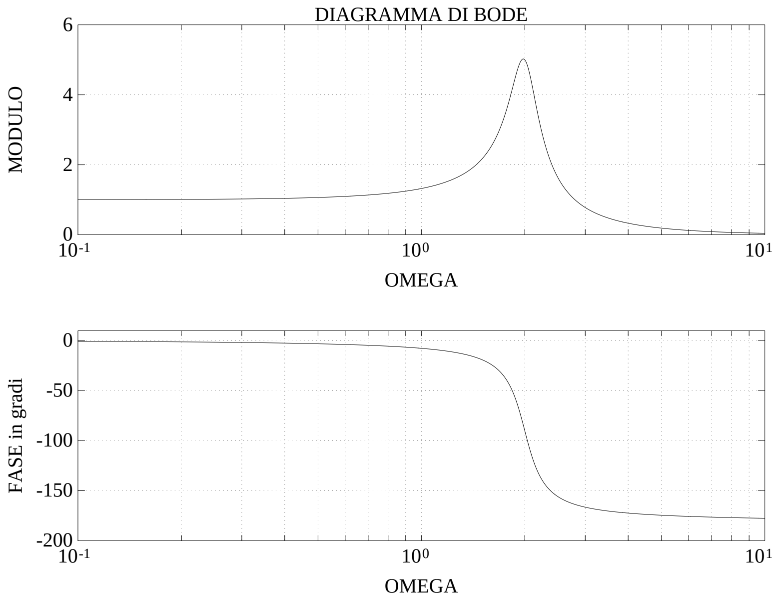

Figura 1.13

Nel diagramma del modulo sono presenti due parametri che sono spesso assunti a caratterizzare il comportamento in frequenza: *la banda passante* B_3, quella pulsazione a partire dalla quale si ha un'attenuazione nella risposta a regime permanente superiore a 0.707 rispetto al valore in $\omega = 0$; *il modulo alla risonanza* M_r, cioè il valore massimo del modulo diviso il valore del modulo in zero.

Risonanze pronunciate mettono in evidenza il fatto che ci sono delle frequenze che vengono esaltate, mentre una banda passante ampia caratterizza la rapidità con la quale il sistema risponde (piccole costanti di tempo). Questi parametri e le precedenti semplici considerazioni trovano un riscontro immediato nell'andamento della risposta al gradino unitario. Infatti una larga banda passante, rapidità di risposta, si traduce in una tendenza rapida al valore di regime (basso tempo di risposta), mentre l'esaltazione di segnali in un certo intervallo di frequenza si traduce nella presenza di un'esaltazione della risposta in presenza della sollecitazione iniziale discontinua e per questo ricca in contenuto armonico.

A titolo di esempio, e per verificare gli aspetti ora sottolineati, si considerino le due funzioni di trasferimento seguenti

$$W_1(s) = \frac{K}{1+\tau_1 s} \qquad \tau_2 \ll \tau_1$$
$$W_2(s) = \frac{K}{1+\tau_2 s}$$

e si calcolino la risposta indiciale e la banda passante in entrambi i casi.
Come ulteriore esercizio si calcoli la risposta a regime ad un ingresso periodico ad onda quadra di un sistema che ha funzione di trasferimento

$$W(s) = \frac{1}{\left(1+\frac{2\zeta}{\omega_n}s+\frac{s^2}{\omega_n^2}\right)}$$

$$\omega_n = 5 \qquad \zeta = 0,5$$

il risultato è riportato nella figura seguente. Le considerazioni precedenti lasciano intendere l'andamento qualitativo in corrispondenza dei diversi valori dei parametri ζ e ω_n.

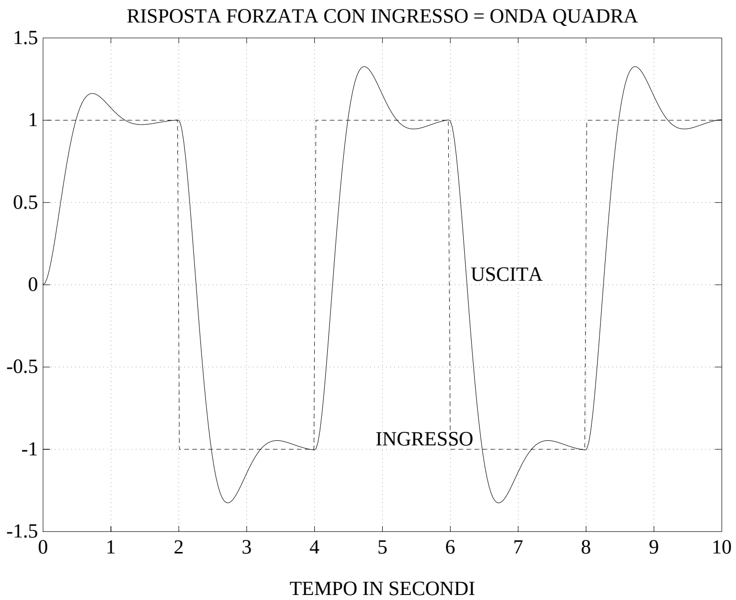

Figura 1.14

Allo stesso modo è facile comprendere che aggiungendo un legame diretto ingresso uscita unitario, si ottiene l'andamento riportato nella figura seguente.

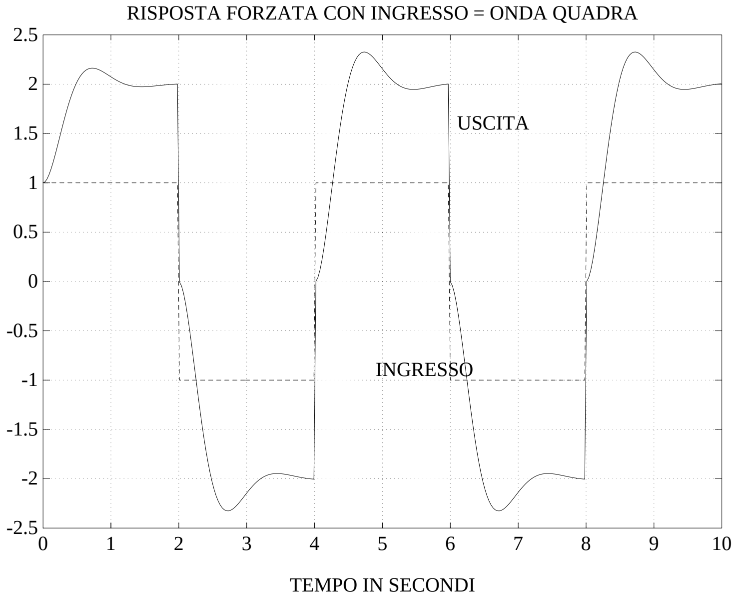

Figura 1.15

1.8.c. I diagrammi polari

Un'ulteriore rappresentazione grafica della risposta armonica utile nello studio dei sistemi dinamici e nel progetto dei sistemi di controllo è quella cosiddetta *polare*.
Formalmente il diagramma polare è l'immagine secondo la funzione $W(s)$ dell'asse immaginario. La W è una trasformazione del piano complesso in se stesso che trasforma i punti dell'asse immaginario in una curva nel piano complesso che per motivi di regolarità (immagine di una funzione olomorfa) descrive una curva chiusa nel piano complesso se non ci sono singolarità sull'asse immaginario (tali singolarità non possono che essere eventuali zeri del polinomio a denominatore della funzione di trasferimento).

L'andamento qualitativo del diagramma polare può facilmente essere compreso a partire dall'andamento qualitativo dei diagrammi di Bode.

Una prima osservazione importante riguarda la simmetria che il diagramma manifesta rispetto all'asse reale. Ciò può essere facilmente compreso se si ricorda che la $W(j\omega)$ è la trasformata di Laplace di una funzione del tempo calcolata in $s = j\omega$. Scrivendo tale trasformata e usando la formula di Eulero per rappresentare l'esponenziale, $e^{j\omega} = cos\omega t + jsen\omega t$, è infatti immediato verificare che si ottiene una funzione complessa la cui parte reale (e modulo) è una funzione pari di ω e la parte immaginaria (e fase) una funzione dispari di ω; ciò che corrisponde alla citata simmetria.

Tracciato dunque l'andamento per ω positivi il diagramma polare complessivo è subito ottenuto in quanto per valori di ω negativi la figura è speculare rispetto all'asse reale. A titolo di esempio si considerino le funzioni di trasferimento seguenti e i relativi diagrammi di Bode e polari.

$$\frac{10}{(1 + j\omega\tau_1)} \qquad \tau_1 = 1$$

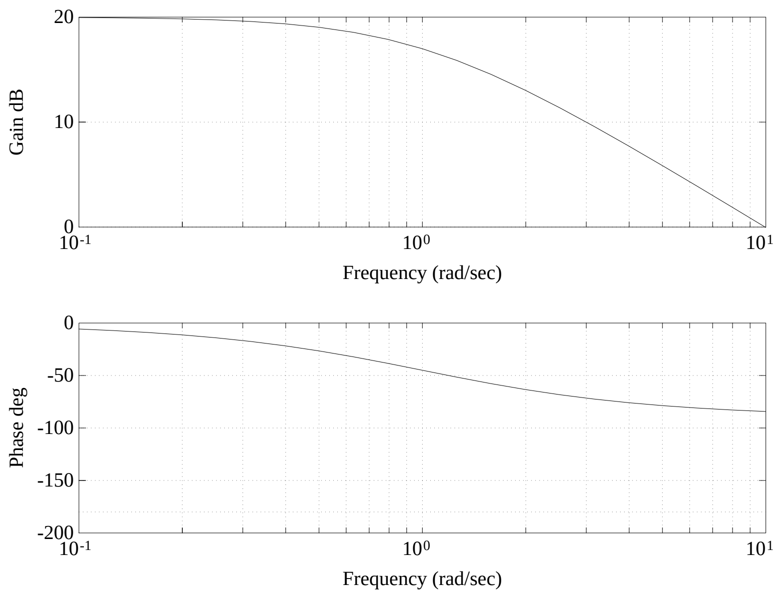

Figura 1.16

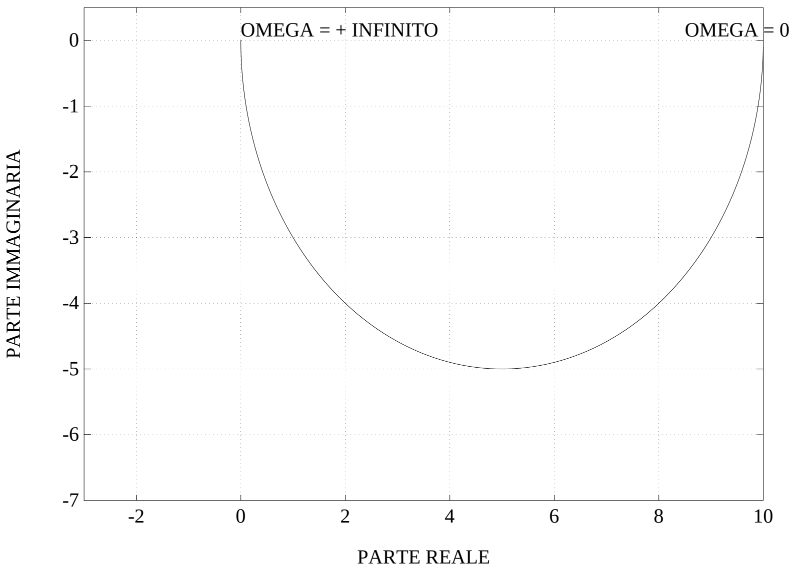

Figura 1.17

$$\frac{K}{(1+\tau_1 s)(1+\tau_2 s)} \qquad \tau_1\tau_2 > 0$$

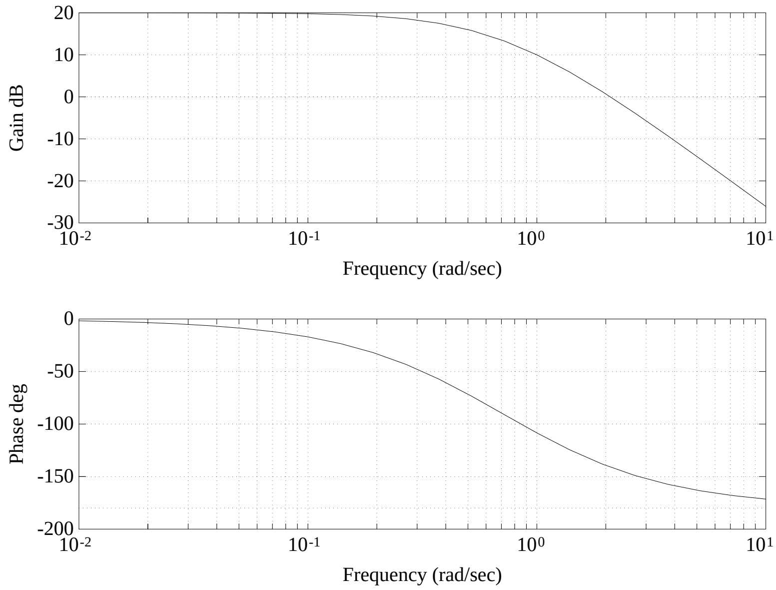

Figura 1.18

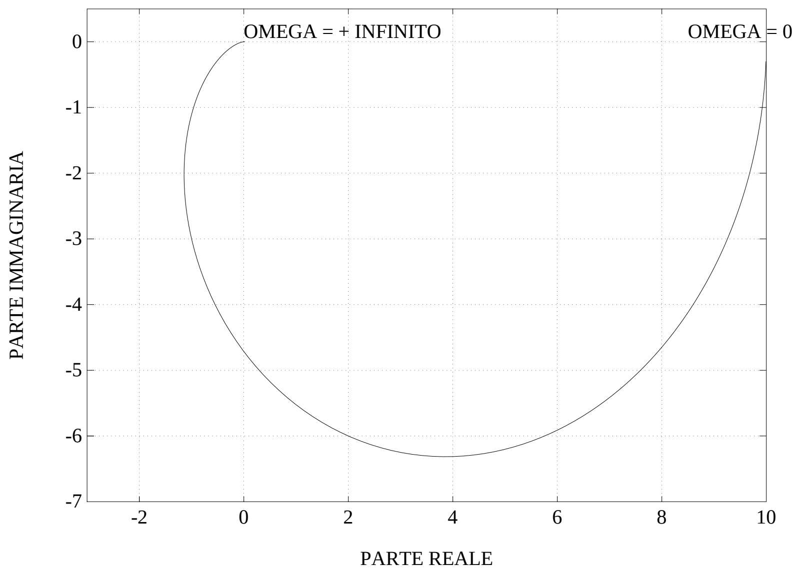

Figura 1.19

$$\frac{10}{(1+j\omega\tau_1)(1+j\omega\tau_2)} \qquad \tau_1 = 1 \quad \tau_2 = 2$$

$$\frac{10}{(1+j\omega\tau_1)(1+j\omega\tau_2)(1+j\omega\tau_3)} \qquad \tau_1 = 1 \quad \tau_2 = 2 \quad \tau_3 = 2$$

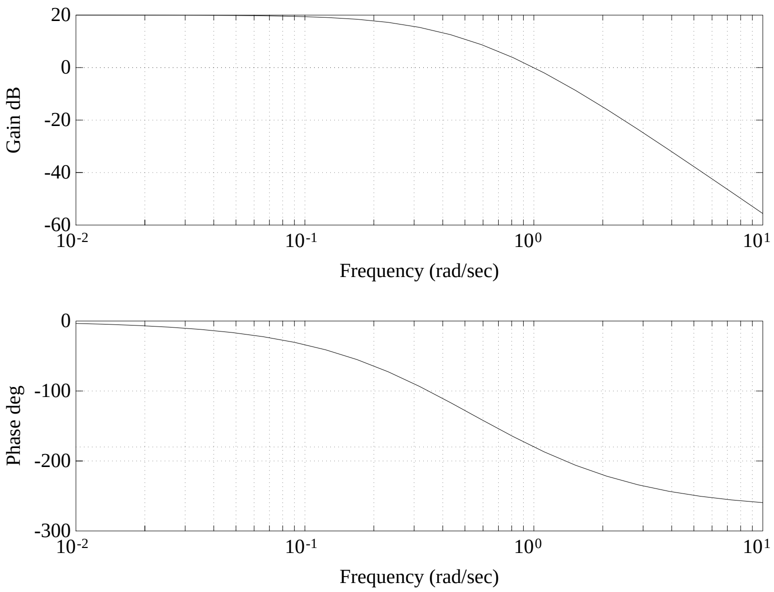

Figura 1.20

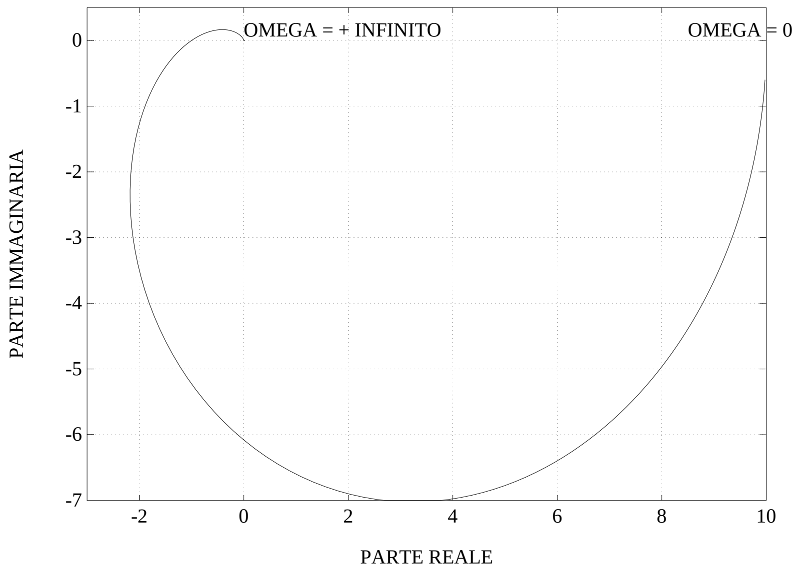

Figura 1.21

$$W(s) = 40\frac{(s-0,5)}{(s+1)(s+4)}$$

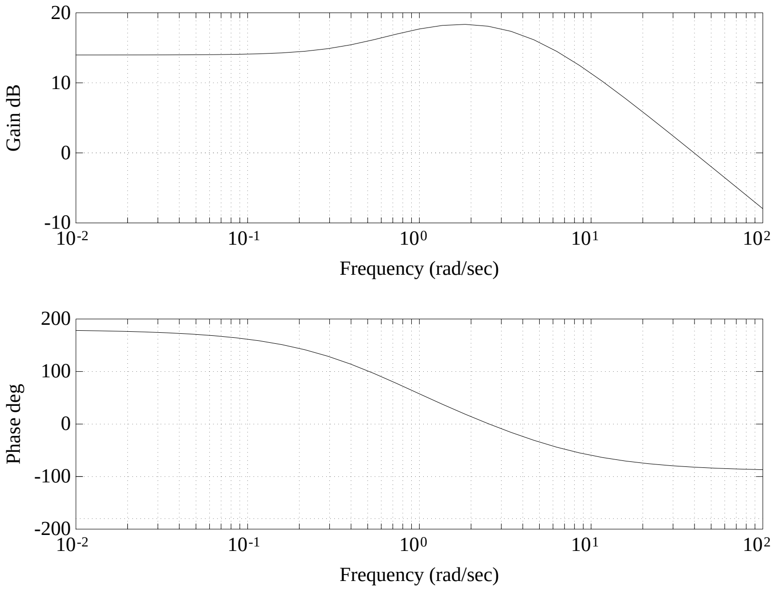

Figura 1.22

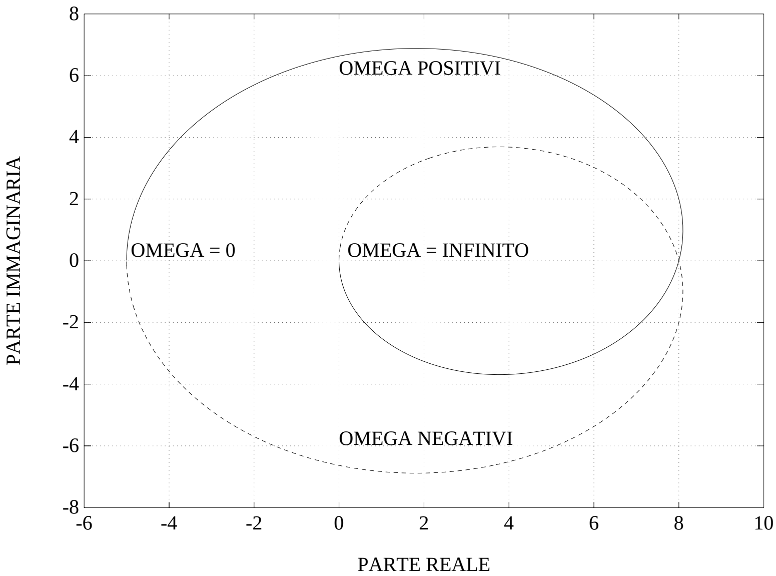

Figura 1.23

Per concludere si noti che se ci sono singolarità sull'asse immaginario il diagramma polare è aperto, ci sono cioè rami che vanno all'infinito.

1.8.d. Sul calcolo della matrice di transizione*

Indifferentemente per un sistema a tempo continuo o discreto si ha:

$$(sI - A)^{-1} = \frac{(sI - A)^{aT}}{|sI - A|}$$

$$= \frac{E_0 + \ldots + E_{n-1}s^{n-1}}{a_0 + \ldots + a_{n-1}s^{n-1} + s^n}$$

in cui $E_0, \cdots E_{n-1}$ sono matrici reali nxn. Dalla precedente relazione risulta che l'inversa di $(\lambda I - A)$ è una matrice (nxn) i cui elementi sono rapporti di polinomi in λ con coefficienti reali, in cui il grado del polinomio a numeratore è, al massimo, $n-1$ e quello del polinomio a denominatore è n.

Vale per il calcolo di $E_0, \cdots E_{n-1}$ e per il calcolo dei coefficienti del polinomio caratteristico $a_0, \cdots, a_{n-1}$ la procedura illustrata nel seguito e nota come algoritmo di Soriau.

$$|sI - A|I = (a_0 + \ldots + s^n)I = (sI - A)(E_0 + \ldots + E_{n-1}s^{n-1})$$

e per identificazione dei coefficienti si ottiene:

$$E_{n-1} = I$$

$$E_{n-2} = AE_{n-1} + a_{n-1}I$$

$$E_{n-3} = AE_{n-2} + a_{n-2}I$$

$$\vdots$$

$$E_0 = AE_1 + a_1 I$$

$$0 = AE_0 + a_0 I$$

l'ultima relazione è ridondante e può essere impiegata per fare una verifica. Le relazioni trovate definiscono un algoritmo particolarmente utile se si tiene presente che

$$a_{n-1} = -tr(AE_{n-1})$$
$$a_{n-2} = -\frac{1}{2}tr(AE_{n-2})$$
$$\vdots$$
$$a_i = -\frac{1}{n-i}tr(AE_i)$$

ove *tr* indica la traccia di una matrice, cioè la somma degli autovalori o, ciò che è lo stesso, la somma degli elementi sulla diagonale. Per la verifica delle precedenti uguaglianze si deve ricordare che detta s_i la somma delle potenze $i - me$ degli zeri di un polinomio, valgono le relazioni di Newton

$$a_{n-1} = -s_1$$
$$2a_{n-2} = -(s_2 + an - 1s_1)$$
$$3a_{n-3} = -(s_3 + an - 1s_2 + an - 2s_1)$$
$$\dots$$
$$na_0 = -(s_n + an - 1s_{n-1} + \cdots + a_1 s_1)$$

Inoltre, poichè gli autovalori della potenza i-ma di una matrice sono gli autovalori stessi alla potenza i-ma, e la somma degli autovalori è pari alla traccia della matrice, si ha che

$$s_i = tr(A^i)$$

Ne segue che l'$i - mo$ elemento delle relazioni di Newton si può esprimere nel modo seguente

$$ia_{n-i} = -tr(A^{n-i-1} + a_{n-1}A^{n-i-2} + \cdots + a_{n-i}A)$$

Infine le matrici E_{n-i} soddisfano le relazioni

$$E_{n-i} = A^{n-i-1} + a_{n-1}A^{n-i-2} + \cdots + a_{n-i+1}A + a_{n-i} \qquad i = 0, \dots n-1$$

Dalle ultime due uguaglianze si deduce

$$a_i = -\frac{1}{n-i} tr(AE_i)$$

In conclusione vale la seguente procedura per il calcolo della funzione di trasferimento:

$$i = n - 1$$

$$\Downarrow$$

$$E_i = I$$

$$\Downarrow$$

$$C_i = AE_i$$

$$\Downarrow$$

$$a_i = \frac{1}{n-1} tr(AE_i)$$

$$\Downarrow$$

$$E_{i-1} = C_i + a_i I$$

$$\Downarrow$$

$$STAMPA(i, E_i, a_i)$$

$$\Downarrow$$

$$i = 0 \quad \Rightarrow AE_0 + a_0 I \cong 0 \quad Stop$$

$$\Downarrow$$

$$i = i - 1 \quad \Rightarrow ITERA$$

Per $n \leq 10$ si ottengono in genere buoni risultati.

sottosezione Appendice 9

1.8.e. La Trasformata Z

La trasformata Z, che associa ad una funzione del tempo discreto definita per $t \geq 0$, $f(t)$, una funzione di variabile complessa, $F(z) = Z[f(t)]$, è uno strumento di grande utilità nello studio dei sistemi lineari stazionari a tempo discreto. Lo studio del sistema nel dominio complesso non solo consente alcune semplificazioni computazionali, come avremo occasione di verificare, ma importanti spunti interpretativi sul comportamento fisico del sistema.

Questa appendice è dedicata a introdurre questo strumento matematico, le sue principali proprietà e alcune trasformazioni elementari.

La trasformata Z, associata ad una funzione $f(t)$ definita per $t \geq 0$, è

$$Z[f(t)] = \sum_{t=0}^{\infty} f(t) z^{-t} = f(0) + \frac{f(1)}{z} + \frac{f(2)}{z^2} + \ldots = F(z)$$

è cioè una funzione della variabile complessa z che risulta definita per $|z| > \rho_f$ (ρ_f raggio di convergenza). La classe di funzioni per le quali tale operazione di trasformazione è definita è estremamente ampia, è infatti intuitivo comprendere che per valori di z in modulo sufficientemente ampi la serie è convergente essendo i campioni della funzione sono moltiplicati per z^t.

E' evidente l'analogia con la trasformata di Laplace.

$$L[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt = F(s)$$

che è definita per $Re(s) > \alpha_f$ (α_f ascissa di convergenza)

Nella trasformata Z i valori della funzione sono moltiplicati per la potenza di $\frac{1}{z}$, nella trasformata di Laplace i valori della funzione sono moltiplicati per l'esponenziale di $-s$. Si tratta di una corrispondenza già riscontrata nello studio dei modi naturali e nelle considerazioni circa la convergenza delle leggi di moto.

Molto spesso per indicare che la funzione di cui si fa la trasformata è definita per $t \geq 0$ si usa la convenzione di rappresentare la funzione con $f(t)\delta_{-1}(t)$

essendo δ_{-1} il gradino unitario, la funzione pari ad uno per $t \geq 0$. Un primo aspetto che consideriamo è il calcolo per funzioni elementari. Tra queste consideriamo le espressioni temporali dei modi naturali che, come sappiamo, caratterizzano la descrizione esplicita del sistema. La legge di moto di un modo aperiodico o alternante è del tipo λ^t e si ha

$$Z[\lambda^t \delta_{-1}(t)] = Z[\lambda^t] = 1 + \frac{\lambda}{z} + \frac{\lambda^2}{z^2} + \ldots = \frac{1}{1 - \frac{\lambda}{z}} = \frac{z}{z - \lambda}$$

ed è definita per

$$\left|\frac{\lambda}{z}\right| < 1 \Leftrightarrow |z| > |\lambda|$$

La verifica è semplice se si osserva che la funzione in questione è la somma di una serie geometrica di ragione $\frac{\lambda}{z}$ e che per una serie geometrica di ragione a

$$S = 1 + a + a^2 + a^3 + \ldots \qquad (serie \quad geometrica)$$

posto

$$S_n = 1 + a + a^2 + a^3 + \ldots + a^n$$

si ha

$$S_n = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}$$

e quindi

$$S = S_\infty = \lim_{n \Rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \Rightarrow \infty} \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a} = \frac{1}{1 - a} \qquad |a| < 1$$

Un caso particolare è rappresentato dal gradino unitario. Risulta ovviamente

$$z[\delta_{-1}(t)] = \frac{z}{z - 1} \qquad |z| > 1$$

Come secondo esempio si consideri una legge temporale periodica

$$sen\theta t = \frac{e^{j\theta t} - e^{-j\theta t}}{2j}$$

Con semplici passaggi si ottiene

$$Z[sen\theta t] = Z\left[\frac{e^{j\theta t} - e^{-j\theta t}}{2j}\right] = \frac{1}{2j} Z[e^{j\theta t}] - Z[e^{-j\theta t}] =$$

$$= \frac{1}{2j}\left(\frac{z}{z - e^{j\theta}} - \frac{z}{z - e^{-j\theta}}\right) = \frac{1}{2j} \frac{z^2 - ze^{-j\theta} - z^2 + ze^{j\theta}}{z^2 - z(e^{j\theta} + e^{-j\theta}) + 1} =$$

$$Z[sen\theta t] = \frac{zsen\theta}{z^2 - 2z\cos\theta + 1} \qquad |z| > 1$$

dove si è fatto uso della proprietà di *linearità*.

E' questa una proprietà fondamentale della trasformata Z che formalmente si esprime

$$Z[k_1 f_1(t) + k_2 f_2(t)] = k_1 F_1(z) + k_2 F_2(z) \qquad \forall k_1, k_2$$

$$\rho_f = max\{\rho_{f_1}, \rho_{f_2}\}$$

Ulteriori proprietà della trasformata Z che saranno ore messe in luce sono le seguenti

- *Traslazione* (a destra e a sinistra)
- *Convoluzione*
- *Valore iniziale e finale* (nel tempo)

Traslazione a destra

$$Z[f(t-1)] = \frac{1}{z} F(z)$$

Infatti, dalla definizione:

$$Z[f(t-1)] = \sum_{t=0}^{\infty} f(t-1) z^{-t} = \frac{f(0)}{z} + \frac{f(1)}{z^2} + \dots$$

si può calcolare

$$zZ[f(t-1)] = z\left(\frac{f(0)}{z} + \frac{f(1)}{z^2} + \dots\right) = F(z)$$

e quindi

$$Z[f(t-1)] = \frac{1}{z}F(z)$$

cioè traslare a destra di un passo nel tempo equivale a moltiplicare per $\frac{1}{z}$ nel dominio della variabile complessa z.

Traslazione a sinistra

$$Z[f(t+1)] = zF(z) - zf(0)$$

Infatti dalla definizione

$$Z[f(t+1)] = f(1) + \frac{f(2)}{z} + \frac{f(3)}{z^2} + \dots$$

si può calcolare

$$\frac{1}{z}Z[f(t+1)] = -f(0) + f(0)\frac{f(1)}{z} + \frac{f(2)}{z^2} + \frac{f(3)}{z^3} + \dots$$

e quindi

$$Z[f(t+1)] = zF(z) - zf(0)$$

Si noti l'analogia col teorema della derivazione nel dominio di Laplace

$$L\left(\dot{f}(t)\right) = sF(s) - f(0)$$

Convoluzione

$$Z\left[\sum_{\tau=0}^{t} f(\tau)g(t-\tau)\right] = F(z)\cdot G(z)$$

che si esprime dicendo che la convoluzione nel dominio del tempo corrisponde al prodotto nel dominio delle trasformate. Infatti

$$Z\left(\sum_{\tau=0}^{t} f(\tau)g(t-\tau)\right) =$$

$$= f(0)\cdot g(0)+\frac{1}{z}\Big(f(0)\cdot g(1)+f(1)\cdot g(0)\Big)+\frac{1}{z^2}\Big(f(0)g(2)+f(1)g(1)+f(2)g(0)\Big)+\dots$$

$$= f(0)\Big(g(0)+\frac{g(1)}{z}+\frac{g(2)}{z^2}+\dots\Big)+\frac{f(1)}{z}\Big(g(0)+\frac{g(1)}{z}+\frac{g(2)}{z^2}+\dots\Big)$$

$$+\frac{f(2)}{z^2}\Big(g(0)+\frac{g(1)}{z}+\dots\Big)$$

$$= f(0)G(z)+\frac{f(1)}{z}G(z)+\frac{f(2)}{z^2}G(z)\dots$$

$$= \Big(f(0)+\frac{f(1)}{z}+\frac{f(2)}{z^2}+\dots\Big)G(z) = F(z)\cdot G(z)$$

Si osservi che tale proprietà comporta una semplificazione nel calcolo della risposta, infatti la risposta forzata nello stato.

$$\sum_{\tau=0}^{t-1} H(t-\tau)u(\tau)$$

è pari alla convoluzione nel dominio del tempo e si traduce nel prodotto tra trasformate z.

Teorema del valore iniziale

$$f(0) = \lim_{|z|\to\infty} F(z)$$

Infatti

$$F(z) = f(0)+\frac{f(1)}{z}+\frac{f(2)}{z^2}+\dots$$

e

$$\lim_{|z|\to\infty} F(z) = f(0)$$

teorema del valore finale

$$f(\infty) = \lim_{z\to 1}(z-1)F(z)$$

Tale risultato può essere dimostrato con i seguenti calcoli

$$Z\Big(f(t+1)-f(t)\Big)=zF(z)-zf(0)-F(z)=\lim_{N\to\infty}\sum_{t=0}^{N}\big(f(t+1)-f(t)\big)z^{-t}$$

e quindi

$$\lim_{z\to 1}\big(zF(z)-zf(0)-F(z)\big)=\lim_{z\to 1}\lim_{N\to\infty}\sum_{t=0}^{N}\big(f(t+1)-f(z)\big)z^{-t}$$

cioè

$$\lim_{z\to 1}(z-1)F(z)-f(0)=\lim_{N\to\infty}\sum_{t=0}^{N}\Big(f(t+1)-f(t)\Big)=f(\infty)-f(0)$$

In conclusione:

$$\lim_{z\to 1}(z-1)F(z)-f(0)=f(\infty)-f(0)$$

Per concludere calcoliamo la trasformata Z di A^t . Il calcolo ricalca i passaggi svolti nel caso scalare

$$Z[A^t]=I+\frac{A}{z}+\frac{A^2}{z^2}+\frac{A^3}{z^3}+\dots$$

e posto

$$S_n=\left(I+\frac{A}{z}+\dots+\frac{A^n}{z^n}\right)$$

risulta

$$\left(I-\frac{A}{z}\right)S_n=\left(I-\frac{A}{z}\right)\left(I+\frac{A}{z}+\dots+\frac{A^n}{z^n}\right)=I-\frac{A^{n+1}}{z^{n+1}}$$

cioè

$$S_n=\left(I-\frac{A}{z}\right)^{-1}\left(I-\frac{A^{n+1}}{z^{n+1}}\right)$$

e, in conclusione

$$Z[A^t]=lim_{n\Rightarrow\infty}S_n=\left(I-\frac{A}{z}\right)^{-1}=\left(\frac{zI-A}{z}\right)^{-1}=z(zI-A)^{-1}$$

che converge per

$$\left\|\frac{A}{z}\right\|<1\Rightarrow|z|>\|A\|$$