



Politecnico
di Torino

Dipartimento di Scienze
Matematiche "G. L. Lagrange"

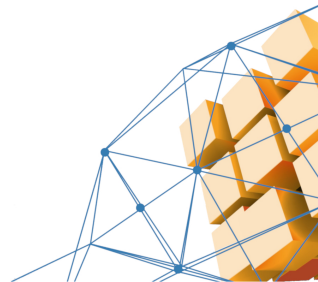


Il solutore approssimato di Roe per problemi di Riemann

Candidate:
Lorenzo Bellantuono
Michele Lupini
Andrea Tataranni

Supervisors:
Prof. D. D'Ambrosio

June 2023



Problema di Riemann per le equazioni di Eulero

Consideriamo il problema ai valori iniziali per le equazioni di Eulero:

$$\begin{cases} \mathbf{U}_t + \mathbf{F}(\mathbf{U})_x = 0 \\ \mathbf{U}(x, 0) = \begin{cases} \mathbf{U}_L & \text{if } x < x_0 \\ \mathbf{U}_R & \text{if } x > x_0 \end{cases} \end{cases} \quad (1)$$

con variabili conservative \mathbf{U} e flussi \mathbf{F} :

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ E \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ \rho uw \\ u(E + p) \end{bmatrix} \quad (2)$$

e supponiamo che esista una soluzione $\mathbf{U} = \mathbf{U}(x, t)$ in $[0, L] \times [0, +\infty)$.

Introducendo delle discretizzazioni degli intervalli spaziali e temporali, una possibile approssimazione della soluzione \mathbf{U} si ottiene con il metodo dei volumi finiti:

$$\mathbf{U}_i^{n+1} = \mathbf{U}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} [\mathbf{F}_{i+\frac{1}{2}} - \mathbf{F}_{i-\frac{1}{2}}] \quad (3)$$

dove $\mathbf{F}_{i+\frac{1}{2}} = \mathbf{F}(\mathbf{U}^\downarrow(\mathbf{U}_i, \mathbf{U}_{i+1}))$ è il flusso numerico di un metodo alla Godunov con $\mathbf{U}^\downarrow(\mathbf{U}_i, \mathbf{U}_{i+1})$ soluzione in $x_{i+1/2}$ del problema di Riemann (1).

In questo contesto l'obiettivo è trovare un modo per approssimare il flusso $\mathbf{F}_{i+\frac{1}{2}}$ (risolvendo il problema di Riemann), il quale sarà poi introdotto in (3) per l'evoluzione in tempo.

Roe ha proposto un metodo per risolvere il problema di Riemann in modo approssimato, introducendo la matrice Jacobiana:

$$\mathbf{A}(\mathbf{U}) = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{U}} \quad (4)$$

Le equazioni di Eulero si possono riscrivere sfruttando la formula della derivata delle funzioni composte

$$\mathbf{U}_t + \mathbf{A}(\mathbf{U})\mathbf{U}_x = 0 \quad (5)$$

La chiave del metodo di Roe è proprio quella di linearizzare il problema trovando un'approssimazione costante per \mathbf{A} , cioè $\tilde{\mathbf{A}} = \tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{U}_L, \mathbf{U}_R) \approx \mathbf{A}(\mathbf{U})$. In questo modo l'equazione originale diventa

$$\bar{\mathbf{U}}_t + \tilde{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{U}}_x = 0 \quad (6)$$

A questo punto il problema di Riemann viene risolto in modo esatto.

Proprietà della matrice $\tilde{\mathbf{A}}$

Per un generico sistema iperbolico a m equazioni la matrice $\tilde{\mathbf{A}}$ deve soddisfare le seguenti tre proprietà per approssimare coerentemente il sistema:

Iperbolicità del sistema: Si chiede che $\tilde{\mathbf{A}}$ abbia autovalori reali $\tilde{\lambda}_i = \tilde{\lambda}_i(\mathbf{U}_L, \mathbf{U}_R)$, ordinati come $\tilde{\lambda}_1 \leq \tilde{\lambda}_2 \leq \dots \leq \tilde{\lambda}_m$, più un set completo di autovettori destri linearmente indipendenti $\{\tilde{\mathbf{K}}^{(1)}, \tilde{\mathbf{K}}^{(2)}, \dots, \tilde{\mathbf{K}}^{(m)}\}$

Consistenza: Per avere una definizione consistente è necessario che

$$\tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{U}, \mathbf{U}) = \mathbf{A}(\mathbf{U}) \quad (7)$$

Conservazione: Per ogni scelta di \mathbf{U}_R e \mathbf{U}_L deve valere

$$\mathbf{F}(\mathbf{U}_R) - \mathbf{F}(\mathbf{U}_L) = \tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{U}_R - \mathbf{U}_L) \quad (8)$$

L'esistenza di $\tilde{\mathbf{A}}$ che soddisfi la conservazione è data dal teorema della media.

Per le equazioni di Eulero nella forma (1) e (2), la matrice Jacobiana esatta \mathbf{A} è

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ (\gamma - 1)H - u^2 - a^2 & (3 - \gamma)u & -(\gamma - 1)v & -(\gamma - 1)w & \gamma - 1 \\ -uv & v & u & 0 & 0 \\ -uw & w & 0 & u & 0 \\ \frac{u}{2}[(\gamma - 3)H - a^2] & H - (\gamma - 1)u^2 & -(\gamma - 1)uv & -(\gamma - 1)uw & \gamma u \end{bmatrix} \quad (9)$$

con autovalori e autovettori $\lambda_1 = u - a$, $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = u$, $\lambda_5 = u + a$ (10)

$$\mathbf{K}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ u - a \\ v \\ w \\ H - ua \end{bmatrix} \quad \mathbf{K}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ u \\ v \\ w \\ V^2/2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{K}^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ v \end{bmatrix} \quad \mathbf{K}^{(4)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ w \end{bmatrix} \quad \mathbf{K}^{(5)} = \begin{bmatrix} 1 \\ u + a \\ v \\ w \\ H + ua \end{bmatrix} \quad (11)$$

con $a = \sqrt{\gamma \frac{p}{\rho}}$ velocità del suono, $H = \frac{E+p}{\rho}$ entalpia totale, $V^2 = u^2 + v^2 + w^2$,
 $e = \frac{p}{(\gamma-1)\rho}$ energia interna specifica ed $E = \frac{1}{2}\rho V^2 + \rho e$ energia totale per unità
 di volume.

Roe sceglie poi un vettore di parametri in funzione dei quali riscrivere tutte le variabili conservative \mathbf{U} e i flussi \mathbf{F} in (2):

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \end{bmatrix} \equiv \sqrt{\rho} \begin{bmatrix} 1 \\ u \\ v \\ w \\ H \end{bmatrix} \quad (12)$$

Esso ha la proprietà di poter esprimere tutte le componenti di \mathbf{U} e di $\mathbf{F}(\mathbf{U})$ come prodotto di due componenti di tale vettore \mathbf{Q} . Ad esempio $u_1 = q_1^2$ e $f_1 = q_1 q_2$.

Inoltre Roe introduce le seguenti matrici

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{B}} &= \begin{bmatrix} 2\tilde{q}_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \tilde{q}_2 & \tilde{q}_1 & 0 & 0 & 0 \\ \tilde{q}_3 & 0 & \tilde{q}_1 & 0 & 0 \\ \tilde{q}_4 & 0 & 0 & \tilde{q}_1 & 0 \\ \frac{\tilde{q}_5}{\gamma} & \frac{\gamma-1}{\gamma}\tilde{q}_2 & \frac{\gamma-1}{\gamma}\tilde{q}_3 & \frac{\gamma-1}{\gamma}\tilde{q}_4 & \frac{\tilde{q}_1}{\gamma} \end{bmatrix} \\ \tilde{\mathbf{C}} &= \begin{bmatrix} \tilde{q}_2 & \tilde{q}_1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\gamma-1}{\gamma}\tilde{q}_5 & \frac{\gamma+1}{\gamma}\tilde{q}_2 & -\frac{\gamma-1}{\gamma}\tilde{q}_3 & -\frac{\gamma-1}{\gamma}\tilde{q}_4 & \frac{\gamma-1}{\gamma}\tilde{q}_1 \\ 0 & \tilde{q}_3 & \tilde{q}_2 & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{q}_4 & 0 & \tilde{q}_2 & 0 \\ 0 & \tilde{q}_5 & 0 & 0 & \tilde{q}_2 \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (13)$$

che permettono di descrivere le quantità $\Delta \mathbf{U}$ e $\Delta \mathbf{F}$ in funzione di $\Delta \mathbf{Q} := \mathbf{Q}_R - \mathbf{Q}_L$ come

$$\Delta \mathbf{U} := \mathbf{U}_R - \mathbf{U}_L = \tilde{\mathbf{B}} \Delta \mathbf{Q}, \quad \Delta \mathbf{F} := \mathbf{F}(\mathbf{U}_R) - \mathbf{F}(\mathbf{U}_L) = \tilde{\mathbf{C}} \Delta \mathbf{Q} \quad (14)$$

$$\text{Pertanto, } \Delta \mathbf{F} = (\tilde{\mathbf{C}} \tilde{\mathbf{B}}^{-1}) \Delta \mathbf{U} \xrightarrow{(8)} \tilde{\mathbf{A}} = \tilde{\mathbf{C}} \tilde{\mathbf{B}}^{-1} \quad (15)$$

La jacobiana approssimata $\tilde{\mathbf{A}} = \tilde{\mathbf{C}} \tilde{\mathbf{B}}^{-1}$ è formalmente la stessa matrice presentata in (9) con la sola differenza che tutte le quantità sono sostituite con le medie di Roe, cioè le medie dei parametri di \mathbf{Q} . Lo stesso varrà per gli autovalori (10) e gli autovettori (11). Le medie di Roe sono:

$$\begin{aligned} \tilde{u} &= \frac{\sqrt{\rho_L} u_L + \sqrt{\rho_R} u_R}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}}, \quad \tilde{v} = \frac{\sqrt{\rho_L} v_L + \sqrt{\rho_R} v_R}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}}, \\ \tilde{w} &= \frac{\sqrt{\rho_L} w_L + \sqrt{\rho_R} w_R}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}}, \quad \tilde{H} = \frac{\sqrt{\rho_L} H_L + \sqrt{\rho_R} H_R}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}}, \end{aligned} \quad (16)$$

$$\tilde{a} = (\gamma - 1) \left(\tilde{H} - \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{V}} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Per determinare completamente il flusso $\mathbf{F}_{i+\frac{1}{2}}$ abbiamo bisogno delle forzanti d'onda $\tilde{\alpha}_i$. Si ottengono proiettando il salto tra le celle $\Delta \mathbf{U}$ sugli autovettori destri mediati, quindi

$$\Delta \mathbf{U} = \mathbf{U}_R - \mathbf{U}_L = \sum_{i=1}^5 \tilde{\alpha}_i \tilde{\mathbf{K}}^{(i)} \quad (17)$$

da cui si può dedurre la soluzione

$$\mathbf{U}^\downarrow(\mathbf{U}_i, \mathbf{U}_{i+1}) = \mathbf{U}_L + \sum_{\tilde{\lambda}_i \leq 0} \tilde{\alpha}_i \tilde{\mathbf{K}}^{(i)} \quad (18)$$

Esplicitando l'equazione (17) si ottiene un sistema nelle 5 componenti $\tilde{\alpha}_i$, $i = 1, 2, 3, 4, 5$

$$\begin{aligned}\tilde{\alpha}_1 + \tilde{\alpha}_2 + \tilde{\alpha}_5 &= \Delta u_1, \\ \tilde{\alpha}_1(\tilde{u} - \tilde{a}) + \tilde{\alpha}_2\tilde{u} + \tilde{\alpha}_5(\tilde{u} + \tilde{a}) &= \Delta u_2, \\ \tilde{\alpha}_1\tilde{v} + \tilde{\alpha}_2\tilde{v} + \tilde{\alpha}_3 + \tilde{\alpha}_5\tilde{v} &= \Delta u_3, \\ \tilde{\alpha}_1\tilde{w} + \tilde{\alpha}_2\tilde{w} + \tilde{\alpha}_4 + \tilde{\alpha}_5\tilde{w} &= \Delta u_4, \\ \tilde{\alpha}_1(\tilde{H} - \tilde{u}\tilde{a}) + \frac{1}{2}\tilde{\mathbf{v}}^2\tilde{\alpha}_2 + \tilde{\alpha}_3\tilde{v} + \tilde{\alpha}_4\tilde{w} + \tilde{\alpha}_5(\tilde{H} + \tilde{u}\tilde{a}) &= \Delta u_5\end{aligned}\tag{19}$$

Naturalmente dobbiamo ricordarci che i termini a destra di tutte queste equazioni sono noti in quanto sono i termini di salto delle quantità conservate.

Per risolvere il precedente sistema è conveniente sostituire la prima equazione nella terza e nella quarta: in questo modo si ottiene in modo esplicito sia $\tilde{\alpha}_3$ che $\tilde{\alpha}_4$. Successivamente si ricavano gli altri valori delle forzanti dalle altre equazioni. La soluzione si può scrivere come segue:

$$\tilde{\alpha}_1 = \frac{1}{2\tilde{a}}[\Delta u_1(\tilde{u} + \tilde{a}) - \Delta u_2 - \tilde{a}\tilde{\alpha}_2], \quad \tilde{\alpha}_2 = \frac{\gamma - 1}{\tilde{a}^2}[\Delta u_1(\tilde{H} - \tilde{u}^2) + \tilde{u}\Delta u_2 - \overline{\Delta u_5}],$$

$$\tilde{\alpha}_3 = \Delta u_3 - \tilde{v}\Delta u_1, \quad \tilde{\alpha}_4 = \Delta u_4 - \tilde{w}\Delta u_1, \quad \tilde{\alpha}_5 = \Delta u_1 - (\tilde{\alpha}_1 + \tilde{\alpha}_2) \quad (20)$$

dove $\overline{\Delta u_5} = \Delta u_5 - (\Delta u_3 - \tilde{v}\Delta u_1)\tilde{v} - (\Delta u_4 - \tilde{w}\Delta u_1)\tilde{w}$.

Per calcolare il flusso $\mathbf{F}_{i+\frac{1}{2}}$, consideriamo il sistema approssimato

$$\begin{cases} \bar{\mathbf{U}}_t + \bar{\mathbf{F}}(\bar{\mathbf{U}})_x = 0 \\ \bar{\mathbf{U}}(x, 0) = \begin{cases} \mathbf{U}_L & \text{if } x < 0 \\ \mathbf{U}_R & \text{if } x > 0 \end{cases} \end{cases} \quad (21)$$

Sfruttando l'espressione (18) per $\bar{\mathbf{U}}^\downarrow(\mathbf{U}_i, \mathbf{U}_{i+1})$ e tenendo conto che $\bar{\mathbf{F}}(\bar{\mathbf{U}}) = \tilde{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{U}}$, si ricava che

$$\mathbf{F}_{i+\frac{1}{2}} = \mathbf{F}_L + \sum_{\tilde{\lambda}_i \leq 0} \tilde{\alpha}_i \tilde{\lambda}_i \tilde{\mathbf{K}}^{(i)} \quad (22)$$

Implementazione dell'algoritmo di Roe

In definitiva un algoritmo per il calcolo computazionale del flusso numerico di Roe come in (22) è il seguente:

- (1) Calcola i valori medi per $\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}, \tilde{H}, \tilde{a}$ come in (16)
- (2) Calcola autovettori e autovalori mediati $\tilde{\mathbf{K}}^{(i)}, \tilde{\lambda}_i$ come in pagina 6 usando le quantità medie calcolate al punto precedente
- (3) Calcola le forzanti d'onda dalle formule (20)
- (4) Usa la formula (22) per calcolare il flusso $\mathbf{F}_{i+\frac{1}{2}}$ usando tutte le quantità trovate precedentemente

Criterio di entropia

Le soluzioni dei problemi di Riemann linearizzati consistono in sole discontinuità di tipo salto. Quindi, esse sono accettabili quando la soluzione del problema di Riemann esatto è un'onda d'urto o una superficie di contatto, ma non nel caso di un'onda di rarefazione. Infatti, in quest'ultimo caso, la soluzione del problema linearizzato non è accettabile fisicamente, in quanto viola il criterio di entropia:

$$\lambda(\mathbf{U}_L) > S > \lambda(\mathbf{U}_R) \quad (23)$$

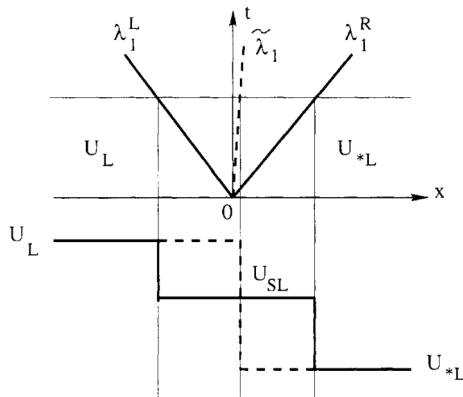
dove $\lambda(\mathbf{U}_L)$ e $\lambda(\mathbf{U}_R)$ sono rispettivamente le velocità delle caratteristiche a sinistra e a destra della discontinuità, che si muove a velocità S .

Entropy fix di Harten-Hyman

Tuttavia, in un contesto computazionale pratico, si hanno problemi solo nel caso in cui la soluzione del problema esatto sia un'onda di rarefazione transonica. Ciò che si fa in questi casi è applicare una correzione al metodo detta "entropy fix".

Un esempio potrebbe essere l'entropy fix di Harten-Hyman. L'onda di rarefazione transonica del problema esatto, approssimata dallo schema di Roe come una discontinuità di tipo salto, viene corretta tramite due discontinuità (con salto di ampiezza minore) e con uno stato intermedio che può essere costante (versione standard) oppure lineare (versione generalizzata).

Entropy fix di Harten-Hyman



Il singolo salto $U_{*L} - U_L$ che viaggia a velocità $\tilde{\lambda}_1$ per lo schema senza entropy fix (linee tratteggiate) viene separato nei due salti $U_{SL} - U_L$ e $U_{*L} - U_{SL}$ che viaggiano rispettivamente a velocità λ_1^L e λ_1^R per lo schema con entropy fix.

Risultati numerici

Consideriamo quattro casi studio delle equazioni di Eulero 1-dimensionali e tempo-dipendenti per i gas perfetti ($\gamma = 1.4$) nell'intervallo spaziale $[0, 1]$, di cui è nota la soluzione esatta.

Lo stato iniziale è definito da una funzione costante a tratti, con discontinuità in $x = x_0$ e valori dati da $\mathbf{U}_L = [\rho_L, u_L, p_L]^T$, $\mathbf{U}_R = [\rho_R, u_R, p_R]^T$ i cui valori numerici sono assegnati nella tabella.

Test	ρ_L	u_L	p_L	ρ_R	u_R	p_R
1	1.0	0.75	1.0	0.125	0.0	0.1
2	1.0	0.0	1000.0	1.0	0.0	0.01
3	5.99924	19.5975	460.894	5.99242	-6.19633	46.0950

La soluzione numerica è calcolata attraverso il metodo di Godunov del primo ordine (upwind) con il solutore di Riemann approssimato di Roe, in $M = 100$ celle, con coefficiente del numero di Courant $C_{cfl} = 0.9$.

Test 1 : versione modificata del problema di Sod, con soluzione esatta data da un'onda d'urto della terza famiglia che viaggia verso destra, una superficie di contatto che viaggia verso destra e infine un'onda di rarefazione della prima famiglia. La soluzione numerica ottenuta col metodo di Roe senza entropy fix presenta una discontinuità di tipo salto all'interno dell'onda di rarefazione. Come già fatto notare in precedenza, questo tipo di discontinuità non è accettabile fisicamente, in quanto viola il criterio di entropia (23). Invece, la soluzione con entropy fix risolve il problema, descrivendo molto bene l'onda di rarefazione.

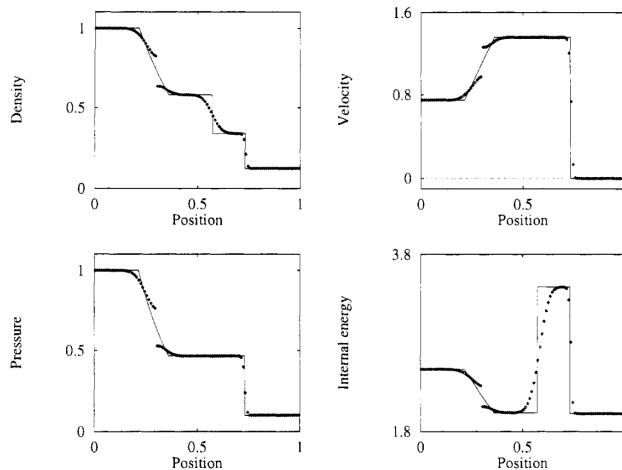


Figure: Test 1: metodo di Godunov con solutore di Roe (**senza** entropy fix) con $x_0 = 0.3$. La soluzione numerica (tratteggiata) e quella esatta (linea continua) sono paragonate in $t = 0.2$

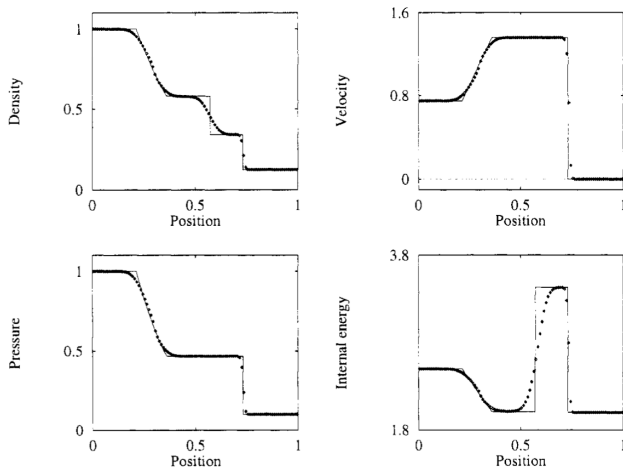


Figure: Test 1: metodo di Godunov con solutore di Roe (**con** entropy fix) con $x_0 = 0.3$. La soluzione numerica (tratteggiata) e quella esatta (linea continua) sono paragonate in $t = 0.2$

Test 2 : obiettivo: verificare la robustezza e l'accuratezza dei metodi numerici. La soluzione esatta consiste di una forte onda d'urto della terza famiglia, una superficie di contatto e un'onda di rarefazione della prima famiglia. Nonostante il grande salto di pressione previsto dai dati iniziali, la soluzione numerica sembra catturare le discontinuità della soluzione esatta. Nel caso della densità, si può però notare una sottostima del valore raggiunto tra la superficie di contatto e l'onda d'urto: ciò potrebbe essere dovuto all'accuratezza al prim'ordine dello schema numerico.

Test 3 : la soluzione consiste in tre forti discontinuità che viaggiano verso destra, due onde d'urto (prima e terza famiglia) e una superficie di contatto. Dai grafici sembra che l'urto della prima famiglia venga catturato meno accuratamente dell'urto della terza famiglia.

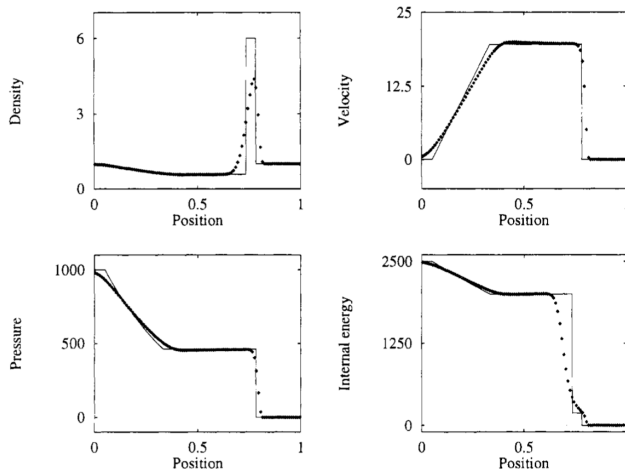


Figure: Test 2: metodo di Godunov con solutore di Roe (**con** entropy fix) con $x_0 = 0.5$. La soluzione numerica (tratteggiata) e quella esatta (linea continua) sono paragonate in $t = 0.012$

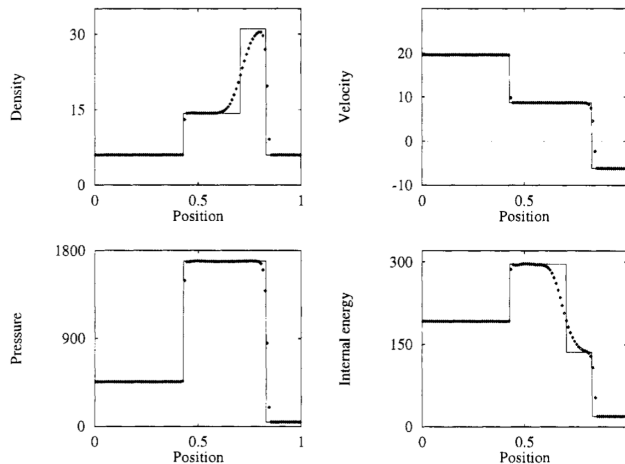




Figure: Test 3: metodo di Godunov con solutore di Roe (**con** entropy fix) con $x_0 = 0.4$. La soluzione numerica (tratteggiata) e quella esatta (linea continua) sono paragonate in $t = 0.035$

Un tratto comune alle soluzioni numeriche di tutti i tre test precedenti è l'approssimazione poco accurata delle superfici di contatto.

La motivazione risiede nel fatto che le caratteristiche in prossimità delle superfici di contatto non portino informazione alla discontinuità poiché viaggiano parallele ad essa.

Ciò non avviene invece per gli urti: in questo caso infatti le caratteristiche convergono verso la discontinuità portando continuamente informazione.

References I

-  P.L. Roe, *Approximate riemann solvers, parameter vector, and difference schemes*, Journal of Computational Physics **43** (1981), 357–372.
-  E.F. Toro, *Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics*, Springer Berlin, Heidelberg, 2009.



Grazie per l'attenzione



Politecnico
di Torino