Politecnico di Torino
Dipartimento di Scienze Matematiche "G. L. Lagrange"
DISMA
ECCELLENZA 2018·2022

Proprietà qualitative di alcuni modelli cinetici di dinamica delle opinioni

Candidato:
Michele Lupini

Supervisore:
Prof. A. Tosin

Laurea in Matematica per l'ingegneria

Contesto storico

I metodi classici della meccanica statistica, sviluppati da Ludwig Boltzmann (Vienna, 1844 - Duino, 1906) e tipicamente impiegati nell'ambito della teoria cinetica dei gas, possono essere sfruttati in contesti che studiano il comportamento collettivo di una popolazione avente un numero sufficientemente grande di individui (agenti).
Negli ultimi decenni, la modellizzazione della formazione delle opinioni ha attratto l'interesse di un crescente numero di ricercatori e sono stati proposti svariati approcci al problema.

Obiettivi e passaggi principali

L'obiettivo della prova finale è la descrizione dell'evoluzione delle opinioni tra gli individui di una popolazione. Per farlo procederemo per passi:

- Formulazione del modello generale, con caratterizzazione di:
  - Interazioni sociali
  - Self-thinking
- Presentazione di alcuni modelli
- Studio delle proprietà qualitative

Formulazione del modello I

Interazioni sociali

Ispirandoci alla teoria cinetica di Boltzmann e ai metodi per la dinamica dei gas, definiamo l'insieme $\Omega = (-1, +1)$ in modo che $\overline{\Omega}$ sia lo spazio delle possibili opinioni e rappresentiamo l'effetto delle interazioni tra due individui con la regola seguente:

$$\begin{cases} x_1' = x_1 + I_1(x_1, x_2) \\ x_2' = x_2 + I_2(x_2, x_1) \end{cases}$$

dove $I_1 : \overline{\Omega} \times \overline{\Omega} \to \overline{\Omega}$, $I_2 : \overline{\Omega} \times \overline{\Omega} \to \overline{\Omega}$ sono due possibili funzioni di interazione tali che $x_1', x_2' \in \overline{\Omega}$ per ogni $x_1, x_2 \in \overline{\Omega}$.

Definizione

Sia $f = f(t, x)$ la funzione di distribuzione per ogni opinione $x \in \overline{\Omega}$ al tempo $t \geq 0$, tale che $f(t, \cdot) \in L^1(\Omega)$ per ogni $t \geq 0$.

Formulazione del modello II

Interazioni sociali

Considerando un intervallo di osservazione Δt, introduciamo:

- $X_t \in \overline{\Omega}$: variabile aleatoria distribuita secondo f, che rappresenta l'opinione di un agente e segue la precedente regola di interazione;
- $B = B(x, y) > 0$: nucleo di interazione, funzione delle opinioni
- $T \sim \mathrm{Bernoulli}(B\Delta t)$: variabile aleatoria che modellizza la possibilità che l'interazione avvenga o meno;
- $\varphi = \varphi(x)$: osservabile qualsiasi, funzione dell'opinione.

L'evoluzione delle opinioni nella popolazione è descritta da:

$$X_{t+\Delta t} = (1 - T)X_t + TX'_t$$

Applicando φ a entrambi i membri e calcolando la media, per $\Delta t \to 0^+$:

$$\frac{d}{dt}E[\varphi(X_t)] = E[B(\varphi(X'_t) - \varphi(X_t))]$$

Formulazione del modello III

Interazioni sociali

In definitiva, considerando le opinioni $X_{1,t}, X_{2,t}$ associate ai due agenti e sfruttando l'ansatz di Boltzmann, otteniamo un'equazione integro-differenziale per l'evoluzione temporale di f, che costituisce anche la forma debole del problema considerando φ funzione test:

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega \varphi(x) f(t,x)\,dx = \langle Q(f,f),\varphi\rangle$$
$$:= \frac{1}{2}\iint_{\Omega^2} B\Big[\varphi(x') + \varphi(y') - \varphi(x) - \varphi(y)\Big] f(t,x) f(t,y)\,dx\,dy$$

dove Q si dice integrale di collisione e assume la struttura classica dei nuclei dissipativi di Boltzmann.

Formulazione del modello IV

Interazioni sociali

L'equazione di Boltzmann per la distribuzione delle opinioni f suggerisce una strategia per generalizzare il modello al caso di interazioni multiple tra M agenti, considerando la nuova regola di interazione:

$$x_i' = x_i + I_i(x_1, \dots, x_M), \qquad \forall i = 1, \dots, M$$

dove $I_i : \overline{\Omega}^M \to \overline{\Omega}$ per ogni $i = 1, \dots, M$ è una funzione di interazione tale che per ogni $x_1, \dots, x_M \in \overline{\Omega}$ si ha che $x_1', \dots, x_M' \in \overline{\Omega}$.
Sfruttando l'ansatz di Boltzmann e procedendo come nel caso precedente si ottiene che per ogni φ osservabile o funzione test:

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega \varphi(x) f(t,x)\, dx = \frac{1}{M}\int_{\Omega^M} B \sum_{i=1}^{M} \Big[\varphi(x_i') - \varphi(x_i)\Big] \left[\prod_{j=1}^{M} f(t, x_j)\right] dx_1 \cdots dx_M$$

Formulazione del modello

Self-thinking

- Le interazioni sociali e il giusto compromesso che scaturisce dallo scambio di opinioni determinano delle variazioni nella distribuzione delle opinioni, tuttavia non rappresentano l'unico motivo.
- Il self-thinking esprime la possibilità che un individuo cambi la propria opinione in autonomia o per l'interazione con i media.
- Assumiamo che la disponibilità di un individuo a cambiare opinione sia influenzata dall'opinione stessa e decresca avvicinandosi agli estremi
- Proponiamo interpretazioni descrittive del self-thinking:
  - perturbazione casuale su ogni singola interazione microscopica;
  - diffusione globale che si sovrappone all'effetto medio delle interazioni.

Rivisitazione del modello di Sznajd I

L'aspetto centrale del modello originale di Sznajd è costituito dall'idea per cui solo gruppi di opinioni simili possono diffondersi attraverso la popolazione. Consideriamo interazioni ternarie tali che se due individui condividono la stessa opinione, allora sono in grado di convincere il terzo a cambiare la propria posizione nell'opinione maggioritaria e assumeremo che $\Omega = \{-1, +1\}$ sia lo spazio delle opinioni.

$$\text{se } x_1 = x_2 \text{, allora } \begin{cases} x_1' = x_1 \\ x_2' = x_1 \\ x_3' = x_1 \end{cases}$$

$$\text{se } x_1 \neq x_2 \text{, allora l'interazione non avviene}$$

La regola definita permette di costruire il seguente nucleo di interazione:

$$B(x_1, x_2, x_3) = \chi(x_1 = x_2)$$

Rivisitazione del modello di Sznajd II

La densità si può esprimere sfruttando le percentuali $p(t)$, $q(t)$ degli individui che condividono rispettivamente le opinioni $x = 1$ e $x = -1$:

$$f(t,x) = p(t)\delta(x-1) + q(t)\delta(x+1)$$

Applicando i metodi della teoria cinetica, otteniamo il seguente sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{dp}{dt} = \dfrac{1}{3}pq(p-q) \\ \dfrac{dq}{dt} = \dfrac{1}{3}pq(q-p) \end{cases}$$

e, osservando che $q = 1 - p$, deduciamo un'equazione nell'unica incognita p:

$$\frac{dp}{dt} = \frac{1}{3}p(1-p)(2p-1)$$

Rivisitazione del modello di Sznajd III

Una generalizzazione del modello prevede l'introduzione dell'indecisione, identificata nello lo stato x=0 in $\Omega = \{-1, 0, +1\}$ spazio delle opinioni. Definendo la percentuale $r(t)$ degli individui indecisi tale che $p + r + q = 1$, si ha che:

$$f(t,x) = p(t)\delta(x-1) + r(t)\delta(x) + q(t)\delta(x+1)$$

e, procedendo in modo simile al caso precedente, otteniamo il sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{dp}{dt} = \dfrac{1}{3}p\left[p(r+q) - r^2 - q^2)\right] \\ \dfrac{dr}{dt} = \dfrac{1}{3}r\left[r(p+q) - p^2 - q^2)\right] \\ \dfrac{dq}{dt} = \dfrac{1}{3}q\left[q(p+r) - p^2 - r^2)\right] \end{cases}$$

Modello di Toscani I

Il modello di Toscani offre una descrizione della dinamica delle opinioni affiancando all'effetto interazioni quello del self-thinking e interpretando quest'ultimo come una perturbazione causale su ogni singola interazione microscopica nello spazio delle opinioni $\overline{\Omega}$, con $\Omega = (-1, +1)$.

$$\begin{cases} x_1' = x_1 - \gamma P(|x_1|)(x_1 - x_2) + \eta_1 D(|x_1|) \\ x_2' = x_2 - \gamma P(|x_2|)(x_2 - x_1) + \eta_2 D(|x_2|) \end{cases}$$

- $0 < \gamma < \frac{1}{2}$ parametro costante;
- η_1, η_2 variabili aleatorie con la stessa distribuzione, con media zero e varianza σ^2, che assumono valori su $\mathcal{B} \subseteq \overline{\Omega}$;
- $0 \leq P(|x|),\ D(|x|) \leq 1$ funzioni non crescenti rispetto a $|x|$, che descrivono il peso locale dell'interazione e della diffusione per ogni opinione.

Modello di Toscani II

Siano $\mathcal{M}_p(\overline{\Omega})$ lo spazio delle misure di probabilità Borel avente momenti finiti di ordine p, $\mathcal{F}_s(\overline{\Omega})$ lo spazio delle funzioni reali su $\overline{\Omega}$ tali che $h(\pm 1) = h'(\pm 1) = 0$ e $h^{(m)}$ hölderiana di ordine $0 < \delta \leq 1$, con $m \in \mathbb{Z}$ tale che $m + \delta = s$.

- Fissato $\alpha > 0$, definiamo la densità di probabilità simmetrica $\Theta(\eta) \in \mathcal{M}_{2+\alpha}(\overline{\Omega})$, con media zero e varianza σ^2, ottenuta da σY, dove Y è una variabile aleatoria con media zero e varianza unitaria.
- Assumiamo che per ogni $x_1, x_2 \in \overline{\Omega}$ si abbia $x_1', x_2' \in \overline{\Omega}$.
- Introduciamo il seguente nucleo di interazione:

$$B(x, y; \eta_1, \eta_2) = B(\eta_1, \eta_2) = \Theta(\eta_1)\Theta(\eta_2)$$

Modello di Toscani III

Definiamo la forma debole del problema per l'evoluzione di $f \in C^1([0, T]; \mathcal{M}_0(\overline{\Omega}))$, cioè per ogni $\varphi \in \mathcal{F}_p(\overline{\Omega})$:

$$\int_\Omega \varphi(x) f_t(t, x)\, dx = \langle Q(f, f), \varphi \rangle$$
$$:= \iint_{\mathcal{B}^2} \iint_{\Omega^2} B(\eta_1, \eta_2) \Big[\varphi(x') - \varphi(x) \Big] f(t, x) f(t, y)\, dx\, dy\, d\eta_1\, d\eta_2$$

con distribuzione iniziale $f(0, x) = f^{in}(x) \in \mathcal{M}_0(\overline{\Omega})$ tale che

$$\lim_{t \to 0} \int_\Omega \varphi(x) f(t, x)\, dx = \int_\Omega \varphi(x) f^{in}(x)\, dx$$

Modello di Toscani IV

Data $f = f(t,x)$ soluzione debole e $f^{in} \in \mathcal{M}_0(\overline{\Omega})$, sostituendo nella forma debole delle particolari φ, si dimostra che:

- l'opinione totale nella popolazione si conserva;
- se $P(|x|)$ costante, allora l'opinione media si conserva;
- esistono delle equazioni per descrivere l'evoluzione dei momenti statistici della distribuzione delle opinioni.

Osservazione

Essendo $|x| \leq 1$, si ha che tutti i momenti sono limitati. Pertanto per il teorema di Prokhorov, ogni successione $\{f(t,x)\}_{t\geq 0}$ contiene infinite sottosuccessioni che convergono debolmente a una certa misura di probabilità f_∞

Modello di Toscani V

Nel caso $P(|x|) = 1$, il limite quasi-invariante per $\gamma, \sigma \to 0$ in modo che $\sigma^2 = \lambda\gamma$ è collegato alla formazione di profili asintotici della distribuzione delle opinioni. Ispirati dalla precedente Osservazione, possiamo enunciare il seguente:

Teorema

Sia $f^{in} \in \mathcal{M}_0(\overline{\Omega})$ la densità di probabilità iniziale delle opinioni nella popolazione. Allora, per $\gamma, \sigma \to 0$ in modo che $\sigma^2 = \lambda\gamma$, la soluzione debole dell'equazione di Boltzmann per la densità scalata $g_\lambda(\tau, x) = f(t, x)$ con $\tau = \gamma t$ converge, per estrazione di una sottosuccessione, a una densità di probabilità $g(\tau, x)$ tale che conserva l'opinione media ed è soluzione debole dell'equazione di Fokker-Planck:

$$\partial_\tau g = \frac{\lambda}{2}\,\partial_x^2\Big(D(|x|)^2 g\Big) + \partial_x\Big((x-m)g\Big)$$

Modello di Toscani VI

Il Teorema può essere generalizzato considerando una funzione $P(|x|)$ non necessariamente costante, in questo caso ti trova infine che g soddisfa:

$$\partial_\tau g = \frac{\lambda}{2}\partial_x^2\Big(D(|x|)^2 g\Big) + \partial_x\Big(P(|x|)(x-m)g\Big)$$

In principio il limite tale che $\sigma^2 = \lambda\gamma$ non è l'unico ed è possibile considerare limite del rapporto $\frac{\sigma^2}{\gamma}$ diversi:

- $\frac{\sigma^2}{\gamma} \to +\infty$: esiste $\alpha < 1$ tale che $\frac{\sigma^2}{\gamma^\alpha} \to \lambda$,
  inoltre il termine diffusivo è dominante e $g(\tau, x) = f(t, x)$, con $\tau = \gamma^\alpha t$, soddisfa l'equazione di diffusione;
- $\frac{\sigma^2}{\gamma} \to 0$: esiste $\alpha > 1$ tale che $\frac{\sigma^2}{\gamma^\alpha} \to \lambda$,
  inoltre il compromesso è dominante e $g(\tau, x) = f(t, x)$, con $\tau = \gamma^\alpha t$, soddisfa l'equazione di puro trasporto conservativo.

Modello di Boudin-Salvarani I

Il modello di Boudin-Salvarani propone una raffigurazione della dinamica delle opinioni in una popolazione, in cui il self-thinking si traduce in una diffusione lineare, separata dall'effetto delle interazioni tra gli agenti.

$$\begin{cases} x_1' = \dfrac{x_1 + x_2}{2} + \eta(x_1)\dfrac{x_1 - x_2}{2} \\ x_2' = \dfrac{x_1 + x_2}{2} + \eta(x_2)\dfrac{x_2 - x_1}{2} \end{cases}$$

dove $\eta : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ è una funzione di classe $C^1(\overline{\Omega})$ e si dice funzione di attrazione e

- $0 \leq \eta(x) < 1$ funzione pari, per garantire l'invarianza per scambi di etichette delle opinioni e affinché $x_1', x_2' \in \overline{\Omega}$;
- $\eta'(x) > 0 \quad \forall x > 0$, in modo che le opinioni estreme siano meno volubili;
- $\exists \epsilon > 0$ tale che il determinante della matrice jacobiana è $J(x_1, x_2) \geq \epsilon$, pertanto la regola di interazione è invertibile.

Modello di Boudin-Salvarani II

Ricordando la definizione del operatore di collisione per regole di interazione simmetriche e introducendo il termine di guadagno Q^+, si ha

$$\langle Q(f,f),\varphi\rangle = \langle Q^+(f,f),\varphi\rangle - \beta \iint_{\Omega^2} \varphi(x) f(t,x) f(t,y)\, dx\, dy$$

$$\langle Q^+(f,f),\varphi\rangle = \beta \iint_{\Omega^2} \varphi(x') f(t,x) f(t,y)\, dx\, dy$$

inoltre attraverso il cambio di variabile $y \mapsto x'$ per x fissata, essendo $f(t,\cdot) \in L^1(\Omega)$, si dimostra che esistono $c_1, c_2 > 0$ tali che

$$\|Q(f,f)(t,\cdot)\|_{L^1(\Omega)} \leq c_1 \|f(t,\cdot)\|^2_{L^1(\Omega)}$$

$$\|Q^+(f,f)(t,\cdot)\|_{L^1(\Omega)} \leq c_2 \|f(t,\cdot)\|^2_{L^1(\Omega)}$$

Modello di Boudin-Salvarani III

Introduciamo un operatore di diffusione che segue una legge di Fourier non uniforme, con termine di Fourier $\alpha : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ non negativo e di classe $C^1(\overline{\Omega})$, che rappresenta il peso del processo diffusivo, e tale che:

- $\alpha(x) = \alpha(-x) \quad \forall x \in \overline{\Omega}$, per avere una simmetria nelle fluttuazioni;
- $\alpha(-1) = \alpha(+1) = 0$, per rappresentare la tendenza a non cambiare delle opinioni più estreme, con l'annullamento della diffusione sul bordo di $\overline{\Omega}$.

Combinando i due fenomeni, si giunge a un'equazione integro-differenziale di tipo Boltzmann per l'evoluzione della distribuzione delle opinioni, cioè per ogni $\varphi \in C^2(\overline{\Omega})$, per $(t, x) \in [0, T] \times \Omega$ con $T > 0$:

$$\int_\Omega \varphi(x) f_t(t, x)\, dx = \int_\Omega \Big[\alpha(x)\varphi_x(x)\Big]_x f(t, x)\, dx + \langle Q(f, f), \varphi \rangle$$

a cui si affianca un'eventuale condizione iniziale $f(0, x) = f^{in}(x)$ per ogni $x \in \overline{\Omega}$.

Modello di Boudin-Salvarani IV

Dalla forma debole del problema, data $f^{in} \in L^1(\Omega)$ non negativa, si dimostra:

- $\|f(t,\cdot)\|_{L^1(\Omega)} = \|f^{in}\|_{L^1(\Omega)}$ per q.o. $t \geq 0$, cioè l'opinione totale si conserva;
- $\int_\Omega x^n f(t,x)\,dx \leq \|f^{in}\|_{L^1(\Omega)}$ per q.o. $t \geq 0$, cioè i momenti di f sono limitati, infatti $|x| \leq 1$.

Inoltre, grazie a tali risultati possiamo enunciare il seguente:

Teorema

Consideriamo l'equazione di Boltzmann che ha senso in $\mathcal{D}'(-T,T)$, se la condizione iniziale $f^{in} \in L^1(\Omega)$ è una funzione non negativa.
Allora esiste $f \in L^\infty((0,T); L^1(\Omega))$ soluzione debole non negativa

Il teorema non assicura l'unicità, né fornisce una caratterizzazione della soluzione in funzione dei dati al contorno. Tuttavia, se $f \in C^1([0,T]; C^2(\overline{\Omega}))$, allora la soluzione soddisfa in modo naturale le condizioni al bordo di Neumann.

Conclusioni

- I modelli per la formazione delle opinioni discussi permettono di descrivere gli effetti di interazioni e self-thinking e grazie ai deboli vincoli matematici imposti, si prestano a rappresentare svariati contesti sociologici.
- In ogni caso è opportuno considerare una popolazione sufficientemente grande per poter sfruttare gli strumenti della meccanica statistica.
- La teoria cinetica offre un approccio flessibile nell'ambito dei sistemi multi-agente e consente di delineare una conoscenza multiscala, caratterizzando le interazioni tra i singoli individui e le relazioni con i fenomeni emergenti dei sistemi.

Bibliografia I

- E. Ben-Naim, *Opinion dynamics: rise and fall of political parties*, Europhysics Letters **69** (2005), 671–677.
- A. Bressan, *Notes on the Boltzmann equation*, 2005, Lecture notes for a summer course given at SISSA, Trieste (Italy).
- L. Boudin and F. Salvarani, *A kinetic approach to the study of opinion formation*, Mathematical Modelling and Numerical Analysis **43** (2009), no. 4, 507–522.
- R. Illner C. Cercignani and M. Pulvirenti, *The mathematical theory of dilute gases*, Springer, 1994.
- M. Fraia and A. Tosin, *The Boltzmann legacy revisited: kinetic models of social interactions*, Matematica, Cultura e Società – Rivista dell'Unione Matematica Italiana **5** (2020), no. 2, 93–109.

Bibliografia II

- S. Galam, *Rational group decision making. a random field ising model at t=0*, Physica A **238** (1997), 66–80.
- S. Galam and S. Moscovici, *Towards a theory of collective phenomena: Consensus and attitude changes in groups*, European Journal of Social Psychology **21** (1991), no. 1, 49–74.
- E. Ising, *Beitrag zur theorie des ferromagnetismus*, Zeitschrift für Physik **31** (1925), 253–258.
- R. G. Laha and V. K. Rohatgi, *Probability theory*, John Wiley and Sons, 1979.
- G. Metafune M. Campiti and D. Pallara, *Degenerate self-adjoint evolution equations on the unit interval*, Semigroup Forum **57** (1998), 1–36.

Bibliografia III

- R. Ochrombel, *Simulation of Sznajd sociophysics model with convincing single opinions*, International Journal of Modern Physics C **12** (2001), no. 7, 1091.
- L. Pareschi and G. Toscani, *Interacting multiagent systems: Kinetic equations and monte carlo methods*, Oxford University Press, 2013.
- Y. Gefen S. Galam and Y Shapir, *Sociophysics: A new approach of sociological collective behaviour: I. mean-behaviour description of a strike*, Journal of Mathematical Sociology **9** (1982), no. 1, 1–13.
- F. Slanina and H. Lavicka, *Analytical results for the Sznajd model of opinion formation*, European Physical Journal **35** (2003), 279–288.
- K. Sznajd-Weron and J. Sznajd, *Opinion evolution in closed community*, International Journal of Modern Physics C **11** (2000), no. 6, 1157–1165.

Bibliografia IV

G. Toscani, *Kinetic models of opinion formation*, Communications in Mathematical Sciences **4** (2006), no. 3, 481–496.

Grazie per l'attenzione

Politecnico
di Torino

1859