POLITECNICO DI TORINO

Corso di Laurea
in Matematica per l'Ingegneria

Prova finale

Proprietà qualitative di alcuni modelli cinetici di dinamica delle opinioni

Supervisore
prof. Andrea Tosin

Candidato
Michele Lupini

Anno Accademico 2021-2022

Ai miei genitori
† Ai miei nonni

Sommario

L'obiettivo dell'elaborato è la descrizione dell'evoluzione delle opinioni tra gli individui di una popolazione. Sfruttando gli strumenti della teoria cinetica di Boltzmann per la dinamica dei gas e riadattando le regole di interazione a sistemi sociali, è possibile rappresentare le interazioni tra gli individui in termini matematici. Inoltre si possono considerare gli effetti del self-thinking, cioè dei fenomeni che determinano delle variazioni dell'opinione di un individuo dovute al pensiero autonomo o all'interazione con i media, interpretandoli come perturbazioni casuali su ogni singola interazione o come un processo diffusivo globale che si sovrappone all'effetto medio delle interazioni. Nel primo capitolo si costruisce un modello generale in grado di adattarsi alle specificità di diverse popolazioni, traducendo gli effetti di interazioni tra gli agenti e self-thinking. Nel seguito si presentano tre modelli notevoli, analizzando in particolare le principali proprietà matematiche e le previsioni rese possibili.

Indice

Introduzione 4

1 Formulazione del modello 6
1.1 Richiami alla teoria cinetica di Boltzmann 6
1.2 Interazioni sociali 8
1.3 Self-thinking 15

2 Rivisitazione del modello di Snznajd 18
2.1 Presentazione del modello 18
2.2 Analisi qualitativa del comportamento asintotico in tempo 21

3 Modello di Toscani 24
3.1 Presentazione del modello 24
3.2 Principali proprietà matematiche 26
3.3 Analisi del limite quasi-invariante 28

4 Modello di Boudin-Salvarani 33
4.1 Presentazione del modello 33
4.2 Principali proprietà matematiche 35

Conclusioni 39

Introduzione

I metodi classici della meccanica statistica, sviluppati da Ludwig Boltzmann (Vienna, 1844 - Duino, 1906) e tipicamente impiegati nell'ambito della teoria cinetica dei gas, possono essere sfruttati in contesti che studiano il comportamento collettivo di una popolazione avente un numero sufficientemente grande di individui (agenti). In particolare la meccanica degli urti tra molecole di gas, descritta dalla celebre equazione di Boltzmann, ha trovato applicazione nella dinamica socio-economica e nella sociofisica, permettendo la modellizzazione di fenomeni su larga scala, come ad esempio la formazione delle opinioni, la distribuzione della ricchezza e il comportamento delle folle [13].

Negli ultimi decenni, la modellizzazione della formazione delle opinioni ha attratto l'interesse di un crescente numero di ricercatori, principalmente per le sue applicazioni in politica, offrendo un utile strumento per predire il risultato di un processo elettorale, attraverso l'analisi del comportamento degli elettori, e per descrivere le tendenze dell'opinione pubblica.

Lo scopo di questa tesi è quello di studiare la dinamica delle opinioni in una popolazione chiusa. I possibili approcci al problema sono svariati, ad esempio sono stati proposti modelli basati sulla teoria cinetica ed è disponibile una vasta letteratura basata sui modelli di Ising [8]. Il punto di partenza di alcuni è costituito dagli automi cellulari, in cui i punti di un reticolo rappresentano gli agenti di una popolazione e ciascun agente è associato a un'opinione; in questo modo la società si identifica in un grafo, dove ogni agente interagisce con i suoi vicini in modo iterativo [16]. A partire dall'inizio degli anni 2000 sono stati proposti con successo ulteriori metodi per descrivere la formazione delle opinioni attraverso le equazioni del modello di campo medio, ricorrendo a sistemi di equazioni differenziali o alle derivate parziali di tipo diffusivo [1, 14].

Nel seguito ci proponiamo di descrivere l'evoluzione nel tempo dell'insieme delle opinioni circa una specifica proposizione di una popolazione isolata e ci serviremo di un modello dipendente solo da due variabili indipendenti: tempo e opinione. Assumiamo inoltre che le opinioni riguardino solo proposizioni binarie, che l'individuo può accettare o rifiutare senza riserva con un eventuale grado di confidenza. L'opinione degli individui è rappresentata da una variabile reale uno-dimensionale, che assume valori nell'intervallo $[-1, +1]$. Si osservi che la scelta dell'intervallo chiuso, piuttosto che l'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$, indica l'effettiva possibilità che le opinioni estreme siano effettivamente raggiunte.

Presenteremo una classe di modelli cinetici della formazione delle opinioni, la cui dinamica è basata su due effetti microscopici: interazioni e self-thinking. Il primo descrive il processo attraverso cui gli individui di una popolazione si scambiano il rispettivo punto di vista e vengono influenzati da quello degli altri. Il secondo, inizialmente introdotto nei modelli di spin discreti di Galam e Moscovici [6, 7], esprime la possibilità che un individuo cambi la propria opinione in autonomia o per l'interazione con i media.

Nella prima parte, sfrutteremo alcuni concetti classici della teoria cinetica per la dinamica dei gas e li adatteremo ai sistemi multi-agente, interpretando le collisioni tra molecole come interazioni tra individui della popolazione, per comprendere i legami tra comportamenti individuali e collettivi. In seguito proporremo due approcci per l'introduzione dell'effetto del self-thinking, in particolare assumeremo che la disponibilità di un individuo a cambiare opinione sia influenzata dall'opinione stessa e decresca avvicinandosi agli estremi e lo rappresenteremo dapprima con una diffusione globale che si sovrappone all'effetto medio delle interazioni [2] e in seguito con una perturbazione casuale su ogni singola interazione microscopica.

Nella seconda parte presenteremo alcuni modelli notevoli facendo uso degli strumenti della teoria cinetica precedentemente introdotti e ne analizzeremo le principali proprietà, evidenziando l'esistenza di soluzioni e le possibili previsioni per grandi intervalli temporali.

Capitolo 1

Formulazione del modello

1.1 Richiami alla teoria cinetica di Boltzmann

La teoria cinetica di Boltzmann per la descrizione del moto dei gas è la struttura fondamentale su cui baseremo la definizione delle interazioni nei modelli per la formazione delle opinioni. Identificando le molecole con gli individui di una popolazione, sfrutteremo gli strumenti matematici della dinamica dei gas per comprendere e prevedere il comportamento collettivo di questo particolare sistema multi-agente.

Nello spazio tridimensionale, consideriamo un gas rarefatto, costituito da un numero sufficientemente grande di particelle identiche con massa $m > 0$, e supponiamo che ciascuna particella si possa trattare come un punto massa. Lo stato microscopico di ogni molecola $(t, \mathbf{r}, \mathbf{v}) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times [0, +\infty)$ è definito dalla posizione $\mathbf{r}$ e dalla velocità $\mathbf{v}$ per ogni istante di tempo t. Assumiamo che gli urti tra molecole siano elastici, in modo da poter sfruttare le leggi di conservazione della quantità di moto e dell'energia cinetica, inoltre per semplicità supponiamo che siano binari e trascuriamo gli urti che coinvolgono tre o più molecole, in quanto eventi meno probabili degli urti binari.

Consideriamo due particelle in $\mathbb{R}^3$, siano $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2 \in \mathbb{R}^3$ le velocità precedenti all'urto e $\mathbf{v}_1'$, $\mathbf{v}_2' \in \mathbb{R}^3$ le velocità istantaneamente assunte dopo l'urto. Per le leggi di conservazione della quantità di moto e dell'energia cinetica si ha:

$$\begin{cases} m\mathbf{v}_1 + m\mathbf{v}_2 = m\mathbf{v}_1' + m\mathbf{v}_2' \\ \frac{1}{2}m|\mathbf{v}_1|^2 + \frac{1}{2}m|\mathbf{v}_2|^2 = \frac{1}{2}m|\mathbf{v}_1'|^2 + \frac{1}{2}m|\mathbf{v}_2'|^2 \end{cases} \tag{1.1}$$

In particolare, sfruttando le leggi di conservazione (1.1), dato $\mathbf{n}$ un qualsiasi versore della sfera unitaria $\mathbb{S}^2$ tale che $(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) \cdot \mathbf{n} \geq 0$, si possono esprimere le velocità successive all'urto come segue:

$$\begin{cases} \mathbf{v}_1' = \mathbf{v}_1 - ((\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n} \\ \mathbf{v}_2' = \mathbf{v}_2 + ((\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n} \end{cases} \tag{1.2}$$

Ricordando che le molecole del gas sono supposte indistinguibili, l'equazione (1.2) vale per una generica coppia di particelle e pertanto descrive ogni possibile urto.

Considerando la descrizione microscopica degli urti (1.2), procediamo con la costruzione di un modello statistico che comprende la sovrapposizione di numerosi urti di quel tipo. Definiamo una funzione $f = f(t, \mathbf{r}, \mathbf{v})$ che rappresenta la densità di probabilità. In altre parole, interpretando posizione $\mathbf{R}_t \in \mathbb{R}^3$ e velocità $\mathbf{V}_t \in \mathbb{R}^3$ al tempo $t > 0$ come variabili aleatorie, per ogni coppia di insiemi misurabili $A, B \subseteq \mathbb{R}^3$ si ha:

$$\mathrm{Prob}(\mathbf{R}_t \in A,\, \mathbf{V}_t \in B) = \int_{A\times B} f(t, \mathbf{r}, \mathbf{v})\, d\mathbf{r}\, d\mathbf{v}$$

In assenza di urti, la velocità di ogni molecola resta costante nel tempo: una particella situata nel punto $\mathbf{r}$ con velocità $\mathbf{v}$ nell'istante iniziale $t = 0$, seguirà un moto lineare uniforme e al tempo $\tau > 0$ si troverà nel punto $\mathbf{r} + \tau\mathbf{v}$, mantenendo la velocità $\mathbf{v}$ costante. Osserviamo dunque che $f(\tau, \mathbf{r}, \mathbf{v}) = f(0,\, \mathbf{r} - \tau\mathbf{v},\, \mathbf{v})$ e inoltre f è una soluzione dell'equazione del trasporto lineare (cfr. [3]):

$$\partial_t f + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} f = 0 \tag{1.3}$$

La presenza di urti determina l'introduzione di un termine quadratico nell'equazione del trasporto lineare (1.3). In particolare dato un operatore Q, detto operatore di collisione, f è una soluzione di un'equazione integro-differenziale alle derivate parziali, nota come equazione di Boltzmann (cfr. [5, 12]):

$$\partial_t f + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} f = Q(f, f) \tag{1.4}$$

dove il termine $\mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} f$ rappresenta l'effetto del trasporto delle particelle libere, mentre l'operatore di collisione Q dipende dal tipo di interazione tra le particelle coinvolte ed esprime l'effetto medio delle collisioni binarie che seguono le leggi di conservazione (1.1) e di conseguenza (1.2).

Il modello con molecole maxwelliane è uno dei modelli di interazione più usati [12] e definisce l'operatore Q come:

$$Q(f, g)(t, \mathbf{v}) \coloneqq \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{S}^2} B(\mathbf{v} - \mathbf{w},\, \mathbf{n}) \Big[f(t, \mathbf{v}') g(t, \mathbf{w}') - f(t, \mathbf{v}) g(t, \mathbf{w}) \Big]\, d\mathbf{n}\, d\mathbf{w} \tag{1.5}$$

dove $d\mathbf{n}$ denota la misura di superficie normalizzata sulla sfera unitaria $\mathbb{S}^2$. La funzione B si definisce nucleo di collisione e rappresenta il tasso di con cui due molecole collidono, a partire dalla loro velocità relativa iniziale. La particolare forma della funzione B dipende dal modello scelto per descrivere le interazioni intermolecolari, un possibile esempio è dato da $B(\mathbf{v} - \mathbf{w},\, \mathbf{n}) = |(\mathbf{v} - \mathbf{w}) \cdot \mathbf{n}|$.

La descrizione dell'evoluzione temporale della densità (1.4) si basa su un'ipotesi fondamentale nota come ansatz di Boltzmann. Supponendo un numero sufficientemente grande di particelle coinvolte nel sistema, possiamo ipotizzare il caos molecolare, in altre parole assumiamo che la distribuzione delle particelle nello spazio e la distribuzione delle velocità siano casuali. In un sistema costituito da numerose particelle, ciascuna molecola si scontra con molte altre e il particolare urto ad un certo istante $t > 0$ è preceduto da molti altri urti con un elevato numero di molecole diverse. Pertanto è ragionevole assumere l'indipendenza statistica degli urti tra due molecole, cioè la successione degli urti non conserva memoria della storia collisionale passata.

In linea di principio, nel calcolo dell'effetto medio delle collisioni in (1.2) si dovrebbe tenere conto della densità di probabilità congiunta $h = h(t, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ delle velocità delle molecole che collidono e l'evoluzione temporale di f dipenderebbe dall'ulteriore incognita h. Tuttavia sfruttando l'ansatz di Boltzmann e quindi l'indipendenza tra le molecole coinvolte nell'urto si ha che $h(t, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = f(t, \mathbf{v})g(t, \mathbf{w})$, in analogia alla definizione (1.5) dell'operatore di collisione Q, che presenta le non-linearità quadratiche $f(t, \mathbf{v}')g(t, \mathbf{w}')$, $f(t, \mathbf{v})g(t, \mathbf{w})$.

Osservazione. Nella teoria cinetica per gas rarefatti, costituiti da molecole maxwelliane, tipicamente si analizza il comportamento della densità di probabilità spazialmente uniforme $f(t, \mathbf{v})$, che soddisfa l'equazione

$$\begin{aligned} \partial_t f(t, \mathbf{v}) &= Q(f, f)(t, \mathbf{v}) \\ &:= \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{S}^2} B(\mathbf{v} - \mathbf{w},\, \mathbf{n}) \Big[f(t, \mathbf{v}')f(t, \mathbf{w}') - f(t, \mathbf{v})f(t, \mathbf{w}) \Big]\, d\mathbf{n}\, d\mathbf{w} \end{aligned} \tag{1.6}$$

A partire dai primi anni del nuovo millennio, nella trattazione di fenomeni emergenti in sistemi multi-agente sono stati applicati i metodi della meccanica statistica, alla base dell'approccio cinetico di Boltzmann per la dinamica dei gas. Le tecniche della meccanica statistica costituiscono una struttura fondamentale su cui costruire modelli in grado di descrivere il comportamento umano nei più svariati ambiti. Tra gli altri, i mercati di trading, il traffico veicolare e la formazione delle opinioni si adattano all'analogia con i gas, essendo tutti caratterizzati da numerosi agenti che interagiscono tra loro.

L'approccio modellistico a questo tipo di problemi è necessariamente ad hoc e ogni caso va analizzato indipendentemente. Tuttavia, accettando alcune ipotesi sulle analogie tra molecole e agenti, urti e interazioni, è possibile sfruttare i consolidati metodi della teoria cinetica e della statistica fisica, consentendo una semplificata analisi delle proprietà matematiche dei modelli e una previsione coerente del comportamento collettivo all'equilibrio.

1.2 Interazioni sociali

Ispirandoci alla teoria cinetica di Boltzmann e ai metodi per la dinamica dei gas, ci proponiamo di costruire un modello in grado di descrivere l'evoluzione della distribuzione delle opinioni in una società per effetto delle interazioni tra gli agenti. In altre parole, in una popolazione gli individui con opinioni diverse possono interagire tra loro e influenzarsi vicendevolmente in modo tale per cui le opinioni degli stessi individui varieranno a seguito delle interazioni secondo certe leggi.

Consideriamo una proposizione rispetto a cui ogni individuo di una popolazione deve esprimere un opinione binaria, cioè del tipo “sì” o “no” senza riserva. Definiamo l'intervallo aperto $\Omega = (-1, +1)$ e denotiamo con $x = -1$ e $x = 1$ le due risposte estreme ed opposte alla proposizione esaminata. Lo spazio delle possibili opinioni è dato dall'intervallo chiuso $\overline{\Omega}$ e l'opinione di ogni individuo della popolazione è descritta da una variabile continua $x \in \overline{\Omega}$. Si osservi che se $x = 0$ l'individuo non ha preferenze in merito alla questione, altrimenti il segno dell'opinione $\text{sign}(x)$ implica una preferenza parziale per una delle due risposte con un grado di convinzione proporzionale a $|x|$.

Definiamo la densità (o funzione di distribuzione) $f = f(t,x)$, che rappresenta la distribuzione dell'opinione $x \in \overline{\Omega}$ al tempo $t \geq 0$, di cui si vuole descrivere l'evoluzione temporale per mezzo di un'equazione integro-differenziale. Per garantire la consistenza delle definizioni supponiamo che $f(t,\cdot) \in L^1(\Omega)$ per ogni $t \geq 0$. In particolare, sia $D \subseteq \overline{\Omega}$ sottoinsieme delle opinioni, la densità f permette di definire la numerosità di individui della popolazione aventi un'opinione inclusa in D in un certo istante di tempo $t \geq 0$ attraverso l'integrale:

$$\int_D f(t,x)\, dx$$

Per descrivere l'effetto delle interazioni tra gli individui nella popolazione ci serviamo della teoria cinetica dei gas e supponiamo che il fenomeno sia ben rappresentato dagli urti tra molecole. In altre parole assumiamo che gli urti tra particelle di un gas rarefatto consentono lo scambio di energia cinetica e quantità di moto nel rispetto delle leggi della meccanica, così come le interazioni sociali danno luogo allo scambio di opinioni.

Siano $x_1,\, x_2 \in \overline{\Omega}$ le opinioni di due agenti prima dell'interazione e siano $x_1', x_2' \in \overline{\Omega}$ le opinioni modificate dopo l'interazione sociale. In analogia a quanto visto per la dinamica dei gas, in cui gli urti tra più particelle si considerano effetti di ordine superiore e vengono trascurati, ipotizziamo inizialmente che le interazioni avvengano solo tra coppie di individui e ispirandoci a (1.2) possiamo rappresentare l'effetto dell'interazione tra i due individui come segue:

$$\begin{cases} x_1' = x_1 + I_1(x_1, x_2) \\ x_2' = x_2 + I_2(x_2, x_1) \end{cases} \tag{1.7}$$

dove $I_1 : \overline{\Omega} \times \overline{\Omega} \to \overline{\Omega}\,,\ I_2 : \overline{\Omega} \times \overline{\Omega} \to \overline{\Omega}$ sono due possibili funzioni di interazione, scelte in modo che (1.7) sia fisicamente consistente. In particolare, riduciamo la scelta di I_1, I_2 alle funzioni tali che per ogni $x_1, x_2 \in \overline{\Omega}$ sia garantito che $x_1', x_2' \in \overline{\Omega}$. Si osservi che differentemente dal modello per la dinamica dei gas (1.2), in cui le velocità appartenevano all'intero spazio $\mathbb{R}^3$, in questo caso consideriamo come spazio delle opinioni un sottoinsieme proprio di $\mathbb{R}$ ed è necessario restringere lo spazio delle funzioni di interazione ammissibili.

Un caso degno di nota si verifica se $I_1 = I_2$ e si dice che le interazioni (1.7) sono simmetriche, infatti la seconda equazione si ottiene scambiando le opinioni x_1, x_2.

Le equazioni (1.7) costituiscono le fondamenta per la costruzione di uno schema iterativo, in grado di simulare l'effetto delle interazioni nell'insieme delle opinioni degli individui [5]. Consideriamo una discretizzazione del tempo $t = 0,\, 1,\, \ldots$ in modo da poter studiare step successivi di interazioni. Data una popolazione di $N \gg 1$ agenti, definiamo arbitrariamente l'insieme delle opinioni $\mathbb{X}^0 = \{x_1^0, \ldots, x_N^0\}$ al tempo $t = 0$. L'insieme $\mathbb{X}^0$ può ad esempio essere inizializzato estraendo uniformemente N valori casuali in $\overline{\Omega}$, cioè in modo che le opinioni siano inizialmente distribuite secondo una distribuzione continua uniforme con densità di probabilità $f^0(x) = \frac{1}{2}\chi(x \in \overline{\Omega})$, con $\chi(x \in A)$ funzione caratteristica sull'insieme $A \subseteq \mathbb{R}$. Il passo iterativo può essere definito ricorsivamente, a partire dal passo base che delinea l'insieme iniziale delle opinioni $\mathbb{X}^0$. Ad ogni istante di tempo $t = n$, dato $\mathbb{X}^n$, scegliamo casualmente due opinioni $x_i^n, x_j^n \in \mathbb{X}^n$ di due individui distinti, cioè tali che $i \neq j$, fino ad esaurire le opinioni in $\mathbb{X}^n$. Per ogni coppia di agenti (i,j) si può decidere se si verifica l'interazione secondo una distribuzione di Bernoulli con parametro

$p \in [0{,}1]$ e si costruisce $\mathbb{X}^{n+1}$ in modo che se questa non avviene allora le opinioni rimarranno invariate $x_i^{n+1} = x_i^n$, $x_j^{n+1} = x_j^n$, altrimenti in caso di interazione si aggiorneranno secondo (1.7):

$$\begin{cases} x_i^{n+1} = x_i^n + I_1(x_i^n, x_j^n) \\ x_j^{n+1} = x_j^n + I_2(x_j^n, x_i^n) \end{cases}$$

Ad ogni passo n, si ottiene l'insieme delle opinioni $\mathbb{X}^n$, inoltre a partire da una realizzazione della densità di probabilità iniziale $f^0(x)$ ed è possibile costruire un'approssimazione della densità di probabilità $f^n(x)$ al passo n, rappresentando un istogramma dei dati in $\mathbb{X}^n$.

A partire dalla struttura data nella (1.7), possiamo costruire alcuni esempi che si basano su diversi paradigmi di interpretazione delle interazioni. In effetti, dal momento che una popolazione di agenti non è un sistema meccanico, non ci prefiggiamo di fornire un'accurata rappresentazione della realtà, tuttavia è possibile adattare il modello alle specifiche caratteristiche della società esaminata in modo da ottenere una descrizione qualitativa soddisfacente.

Esempio 1.1. Il modello presentato da Boudin-Salvarani in [2], definisce le opinioni post-interazione in funzione del valore medio delle opinioni pre-interazione e suppone che agenti con opinioni più estreme siano meno propensi a cambiare idea, rispetto ad agenti meno convinti. In particolare, trovata l'opinione media pre-interazione, le opinioni dei due individui si avvicinano ad essa tanto più questi sono indecisi.

$$\begin{cases} x_1' = \dfrac{x_1 + x_2}{2} + \eta(x_1)\dfrac{x_1 - x_2}{2} \\[2ex] x_2' = \dfrac{x_1 + x_2}{2} + \eta(x_2)\dfrac{x_2 - x_1}{2} \end{cases} \tag{1.8}$$

dove $\eta : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ è una funzione di classe $C^1(\overline{\Omega})$ e si dice funzione di attrazione, che descrive la tendenza dell'opinione iniziale ad avvicinarsi all'opinione media. Dato il determinate della matrice jacobiana della regola di interazione (1.8):

$$\begin{aligned} J(x_1, x_2) = \frac{1}{2}\Big[\eta(x_1) + \eta(x_2)\Big] + \frac{1}{4}\Big[\eta'(x_1) - \eta'(x_2)\Big](x_1 - x_2) \\ + \frac{1}{4}\Big[\eta'(x_1)\eta(x_2) - \eta'(x_2)\eta(x_1)\Big](x_1 - x_2) - \frac{1}{4}\eta'(x_1)\eta'(x_2)(x_1 - x_2)^2 \end{aligned}$$

si richiedono alcune ipotesi aggiuntive per garantire la buona definizione del modello:

- $\eta(x)$ funzione pari, affinché il modello non sia influenzato dagli scambi di etichette delle due opinioni coinvolte nell'interazione;
- $0 \le \eta(x) < 1$, per evitare che le opinioni post-interazione escano dagli estremi di $\overline{\Omega}$;
- $\eta'(x) > 0 \quad \forall x > 0$, in modo che le opinioni più forti siano meno attratte verso la media rispetto a quelle più deboli;
- $\exists \epsilon > 0$ tale che $J(x_1, x_2) \ge \epsilon$, cioè $J(x_1, x_2)$ è inferiormente limitato da una costante strettamente positiva, pertanto esiste l'inversa della regola di interazione (1.8).

Sfruttando la definizione (1.7) e la proprietà di $\eta(x)$ per cui $0 \leq \eta < 1$ per ogni $x \in \overline{\Omega}$, si può dimostrare che per ogni $x_1, x_2 \in \overline{\Omega}$

$$x_1' - x_2' = \frac{1}{2}(\eta(x_1) + \eta(x_2))(x_1 - x_2)$$

$$|x_1' - x_2'| \leq |x_1 - x_2|$$

ed è immediato osservare che gli estremi di $\overline{\Omega}$ non sono violati, in particolare si ha che

$$\max\{|x_1'|, |x_2'|\} < \max\{|x_1|, |x_2|\}$$

Infine si osservi che l'insieme delle funzioni di attrazione $\eta(x)$ accettabili non è vuoto e una possibile scelta è data da $\eta(x) = \lambda(1 + x^2)$, con $0 < \lambda < \frac{1}{2}$. Inoltre un'interazione del tipo (1.7) può essere localmente dissipativa, cioè gli agenti della popolazione al limite di infinite interazioni avranno tutti la stessa opinione, infatti scegliendo la funzione di attrazione $\eta(x)$ sopra definita, con $0 < \lambda \leq \frac{\sqrt{2}-1}{2}$ si ha che $J \geq \lambda$ e inoltre $(x_1')^2 + (x_2')^2 \leq x_1^2 + x_2^2$.

Esempio 1.2. Un modello simile è presentato da Toscani in [16], dove le opinioni post-interazione avvicinano reciprocamente rispetto a quelle pre-interazione, piuttosto che all'opinione media, e si suppone la tendenza delle opinioni a cambiare dipenda dall'opinione stessa in modo che decresca avvicinandosi agli estremi di $\overline{\Omega}$.

$$\begin{cases} x_1' = x_1 - \gamma P(|x_1|)(x_1 - x_2) \\ x_2' = x_2 - \gamma P(|x_2|)(x_2 - x_1) \end{cases} \tag{1.9}$$

dove $\gamma > 0$ è un parametro costante, $P(|x|)$ è una funzione che descrive il peso locale dell'interazione per ogni opinione e inoltre assumiamo che:

- $0 < \gamma < \frac{1}{2}$, affinché le opinioni post-interazione non escano dagli estremi di $\overline{\Omega}$;
- $0 \leq P(|x|) \leq 1 \quad \forall x \in \overline{\Omega}$ e sia una funzione non crescente rispetto a $|x|$, in modo che gli estremi di $\overline{\Omega}$ non siano violati e le opinioni più forti siano meno influenzate dall'interazione.

La definizione (1.9) può essere espressa nel seguente modo:

$$\begin{cases} x_1' = (1 - \gamma P(|x_1|))x_1 + \gamma P(|x_1|)x_2 \\ x_2' = (1 - \gamma P(|x_2|))x_2 + \gamma P(|x_2|)x_1 \end{cases}$$

da cui, ricordando le ipotesi $0 < \gamma < 1$ e $0 \leq P(|x|) \leq 1$ per ogni $x \in \overline{\Omega}$, si dimostra che

$$\max\{|x_1'|, |x_2'|\} \leq \max\{|x_1|, |x_2|\}$$

Inoltre, a partire dalla definizione (1.9) si trova che

$$x_1' + x_2' = x_1 + x_2 + \gamma(x_1 - x_2)(P(|x_1|) - P(|x_2|))$$
$$x_1' - x_2' = (1 - \gamma(P(|x_1|) + P(|x_2|)))(x_1 - x_2)$$

da cui si deduce che in generale il momento totale non si conserva. Tuttavia, ponendo $\epsilon(x_1, x_2) \coloneqq 1 - \gamma(P(|x_1|) + P(|x_2|))$ e osservando che $0 \leq \epsilon(x_1, x_2) \leq 1$, si ha che

$$|x_1' - x_2'| = \epsilon(x_1, x_2)|x_1 - x_2| \leq |x_1 - x_2|$$

dunque la differenza tra le opinioni degli individui risulta non crescente ad ogni interazione. Nel caso particolare in cui $P = 1$ è costante, le leggi di conservazione valgono in modo analogo ai modelli della teoria cinetica per la dinamica dei gas. Inoltre, sfruttando la definizione (1.9) e ricordando i limiti del parametro $0 < \gamma < \frac{1}{2}$ si trova che

$$|x_1' - x_2'| = (1 - 2\gamma)|x_1 - x_2| < |x_1 - x_2|$$

da cui è immediato osservare che la differenza tra le opinioni diminuisce ad ogni interazione e al limite di infinite interazioni tutti gli agenti della popolazione condivideranno la stessa opinione.

In generale, dopo aver definito la regola di interazione (1.7), è opportuno costruire un modello matematico in grado di descrivere l'evoluzione temporale della distribuzione delle opinioni $f(t, x)$. Nel seguito ci occuperemo quindi di ricavare l'equazione integro-differenziale di Boltzmann per la dinamica delle opinioni e formuleremo la forma debole del problema (cfr. [5, 12]).

In modo simile a come abbiamo fatto nel Paragrafo 1.1, consideriamo al tempo $t > 0$ la variabile aleatoria $X_t \in \overline{\Omega}$ distribuita secondo $f(t, x)$, cioè tale che per ogni $D \subseteq \overline{\Omega}$ misurabile si ha

$$\text{Prob}(X_t \in D) = \int_D f(t, x)\, dx$$

Presi casualmente dalla popolazione due agenti con opinioni $X_{1,t}\,, X_{2,t}$ al tempo $t > 0$, dato un intervallo di tempo $\Delta t > 0$, è possibile che si verifichi un'interazione del tipo (1.7), dipendentemente da diversi fattori, che modellizziamo attraverso il nucleo di interazione (o tasso di interazione) $B = B(x, y) > 0$, in generale funzione delle opinioni. Per rappresentare questo fenomeno supponiamo che la probabilità di interazione sia proporzionale alla durata dell'intervallo di osservazione Δt, attraverso il nucleo di interazione B, e introduciamo la variabile aleatoria $T \sim \text{Bernoulli}(B\Delta t)$ tale che:

$$\begin{cases} \text{Prob}(T = 1) = B\Delta t \\ \text{Prob}(T = 0) = 1 - B\Delta t \end{cases}$$

inoltre osserviamo che Δt deve essere scelto in modo che $0 < \Delta t \leq \frac{1}{B}$, affinché $B\Delta t$ sia effettivamente una probabilità; tuttavia questa non è una reale limitazione del modello in quanto saremo interessati al limite per $\Delta t \to 0^+$. La variabile aleatoria T rappresenta la possibilità che l'interazione tra i due agenti avvenga, in particolare se $T = 1$ gli individui interagiscono secondo (1.7), mentre se $T = 0$ mantengono le precedenti opinioni. Definiamo, inoltre, le opinioni a seguito dell'interazione come segue:

$$\begin{cases} X_{1,t}' = X_{1,t} + I_1(X_{1,t}, X_{2,t}) \\ X_{2,t}' = X_{2,t} + I_2(X_{2,t}, X_{1,t}) \end{cases}$$

In questo modo è possibile descrivere l'evoluzione temporale delle opinioni, tenendo conto di una certa probabilità di interazione per ogni intervallo di tempo Δt:

$$\begin{cases} X_{1,t+\Delta t} = (1-T)X_{1,t} + TX'_{1,t} \\ X_{2,t+\Delta t} = (1-T)X_{2,t} + TX'_{2,t} \end{cases} \tag{1.10}$$

In particolare consideriamo la prima equazione di (1.10) e sopprimiamo temporaneamente il pedice che si riferisce all'agente per alleggerire la notazione, data una qualsiasi osservabile $\varphi = \varphi(x)$ funzione dell'opinione, è possibile generalizzare la relazione applicando φ a entrambi i membri e in modo da ottenere:

$$\varphi(X_{t+\Delta t}) = \varphi((1-T)X_t + TX'_t) \tag{1.11}$$

secondo cui, dopo un intervallo Δt, l'osservabile φ può variare o meno dipendentemente da T, cioè se si verifica o meno l'interazione durante l'intervallo di tempo. Denotando con $E[\cdot]$ la media di una variabile aleatoria, calcoliamo la media di entrambi i membri di (1.11), rispetto a T, X_t, X'_t

$$E[\varphi(X_{t+\Delta t})] = (1-B\Delta t)E[\varphi(X_t)] + B\Delta t\, E[\varphi(X'_t)]$$

Riorganizzandone i termini e dividendo per Δt si ottiene la legge che descrive la variazione dell'osservabile φ:

$$\frac{E[\varphi(X_{t+\Delta t})] - E[\varphi(X_t)]}{\Delta t} = E[B(\varphi(X'_t) - \varphi(X_t)]$$

che è un'approssimazione per tempi discreti dell'equazione differenziale che si ottiene nel limite per $\Delta t \to 0^+$

$$\frac{d}{dt}E[\varphi(X_t)] = E[B(\varphi(X'_t) - \varphi(X_t)] \tag{1.12}$$

In definitiva, recuperando i pedici riferiti agli agenti, dalla (1.12) si trova la variazione istantanea del valore medio dell'osservabile per i due individui:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}E[\varphi(X_{1,t})] = E[B(\varphi(X'_{1,t}) - \varphi(X_{1,t})] \\ \dfrac{d}{dt}E[\varphi(X_{2,t})] = E[B(\varphi(X'_{2,t}) - \varphi(X_{2,t})] \end{cases} \tag{1.13}$$

Sommando le due equazioni di (1.13) si trova che:

$$\frac{d}{dt}\Big(E[\varphi(X_{1,t})] + E[\varphi(X_{2,t})]\Big) = E\Big[B\Big[\varphi(X'_{1,t}) + \varphi(X'_{2,t}) - \varphi(X_{1,t}) - \varphi(X_{2,t})\Big]\Big] \tag{1.14}$$

dove, ricordando che per definizione le variabili aleatorie $X_{1,t}\,, X_{2,t}$ sono distribuite secondo f e definendo x', y' come funzioni di x, y secondo la regola (1.7), è immediato verificare che:

$$E[\varphi(X_{1,t})] = E[\varphi(X_{2,t})] = \int_\Omega \varphi(x)f(t,x)\,dx \tag{1.15}$$

$$\begin{aligned} &E\Big[B\Big[\varphi(X'_{1,t}) + \varphi(X'_{2,t}) - \varphi(X_{1,t}) - \varphi(X_{2,t})\Big]\Big] = \\ &= \iint_{\Omega^2} B\Big[\varphi(x') + \varphi(y') - \varphi(x) - \varphi(y)\Big] f(t,x)f(t,y)\,dx\,dy \end{aligned} \tag{1.16}$$

Si osservi che per ricavare la (1.16) abbiamo sfruttato l'ansatz di Boltzmann per cui la densità di probabilità congiunta $h = h(t, x, y)$ è fattorizzabile come $h(t, x, y) = f(t, x)f(t, y)$, infatti dal momento che $\varphi(x'), \varphi(y')$ dipendono congiuntamente da x, y, in principio, avremmo dovuto calcolare la media rispetto ad h.

Infine, sostituendo (1.15) e (1.16) nella (1.14), dato $B = B(x, y)$ nucleo di interazione, per ogni φ osservabile e si ottiene l'equazione di Boltzmann, che costituisce anche la forma debole per l'evoluzione temporale di f, considerando l'osservabile φ una funzione test:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\int_\Omega \varphi(x)f(t,x)\,dx &= \langle Q(f,f),\varphi\rangle \\ &:= \frac{1}{2}\iint_{\Omega^2} B\Big[\varphi(x')+\varphi(y')-\varphi(x)-\varphi(y)\Big]f(t,x)f(t,y)\,dx\,dy \end{aligned} \tag{1.17}$$

dove il nucleo di interazione $B = B(x, y) > 0$ fissa la frequenza con cui due individui interagiscono, mentre Q, detto integrale di collisione, assume la struttura classica dei nuclei dissipativi di Boltzmann ed è caratterizzato da un termine di guadagno Q^+ e uno di perdita Q^-, i quali contano statisticamente quanti individui guadagnano o perdono l'opinione x nell'unità di tempo a seguito delle interazioni:

$$\langle Q^+(f,f),\varphi\rangle = \frac{1}{2}\iint_{\Omega^2} B\Big[\varphi(x')+\varphi(y')\Big]f(t,x)f(t,y)\,dx\,dy$$

$$\langle Q^-(f,f),\varphi\rangle = \frac{1}{2}\iint_{\Omega^2} B\Big[\varphi(x)+\varphi(y)\Big]f(t,x)f(t,y)\,dx\,dy$$

Pertanto l'equazione di Boltzmann (1.17) descrive la variazione della media di una qualsiasi osservabile φ al tempo t, come effetto della variazione media di φ in un'interazione rappresentativa.

Osservazione. Se le interazioni sono simmetriche, cioè $I_1 = I_2$ in (1.7), e il nucleo di interazione B è simmetrico, cioè $B(x, y) = B(y, x)$. Allora il nucleo di collisione si può esprimere come:

$$\langle Q(f,f),\varphi\rangle = \iint_{\Omega^2} B\Big[\varphi(x')-\varphi(x)\Big]f(t,x)f(t,y)\,dx\,dy \tag{1.18}$$

Osservazione. Sfruttando il cambio di variabili (1.7) nella (1.17), definendo J il modulo del determinante della matrice jacobiana di (1.7) ed esprimendo le opinioni pre-interazione x, y in funzione delle opinioni post-interazione x', y' secondo l'inversa di (1.7), per l'arbitrarietà di φ si trova la forma forte dell'equazione per f:

$$\partial_t f(t,x) = \int_\Omega \Big[B(x',y')\frac{1}{J}f(t,x')f(t,y') - B(x,y)f(t,x)f(t,y)\Big]\,dy \tag{1.19}$$

da cui è evidente l'analogia con l'equazione di Boltzmann per la dinamica dei gas (1.6) con nucleo di collisione $B(\mathbf{v}-\mathbf{w}, \mathbf{n}) = |(\mathbf{v}-\mathbf{w})\cdot\mathbf{n}|$, dal momento che per la regola di collisione (1.2) si ha che $J = 1$ e $B(\mathbf{v}-\mathbf{w}, \mathbf{n}) = B(\mathbf{v}'-\mathbf{w}', \mathbf{n})$.

La forma trovata dell'equazione di Boltzmann (1.17) per la distribuzione delle opinioni f, suggerisce una strategia per generalizzare la regola per le interazioni binarie (1.7) al caso di interazioni multiple tra più di due individui allo stesso tempo, che avevamo temporaneamente trascurato in quanto fenomeno meno probabile.

Cerchiamo quindi di rappresentare le interazioni multiple tra M agenti in una popolazione. Siano $x_1, \ldots, x_M \in \overline{\Omega}$ le opinioni pre-interazione di M individui e $x'_1, \ldots, x'_M \in \overline{\Omega}$ le opinioni post-interazione. In analogia alla regola per le interazioni binarie (1.7) descriviamo l'effetto dell'interazione tra M agenti come segue:

$$x'_i = x_i + I_i(x_1, \ldots, x_M), \qquad \forall i = 1, \ldots, M \tag{1.20}$$

dove $I_i : \overline{\Omega}^M \to \overline{\Omega}$ per ogni $i = 1, \ldots, M$ è una funzione di interazione ben definita, cioè tale che per ogni scelta di $x_1, \ldots, x_M \in \overline{\Omega}$ si ha che $x'_1, \ldots, x'_M \in \overline{\Omega}$. Inoltre la variazione media di una qualsiasi osservabile $\varphi = \varphi(x)$ è data da:

$$\frac{1}{M} \sum_{i=1}^{M} \Big[\varphi(x'_i) - \varphi(x_i)\Big]$$

In definitiva, sfruttando l'ansatz di Boltzmann secondo cui la densità di probabilità congiunta $h_M = h_M(x_1, \ldots, x_M)$ è fattorizzabile come $h_M(x_1, \ldots, x_M) = f(t, x_1) \cdots f(t, x_M)$, si trova l'equazione di Boltzmann per interazioni multiple tra M agenti, per ogni φ osservabile o funzione test:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \varphi(x) f(t,x)\, dx = \frac{1}{M} \int_{\Omega^M} B \sum_{i=1}^{M} \Big[\varphi(x'_i) - \varphi(x_i)\Big] \Big[\prod_{j=1}^{M} f(t, x_j)\Big]\, dx_1 \cdots dx_M \tag{1.21}$$

1.3 Self-thinking

Le interazioni sociali e il giusto compromesso che scaturisce dallo scambio di opinioni costituiscono una delle principali cause che determina le variazioni nella distribuzione delle opinioni in una popolazione, tuttavia non rappresentano l'unico motivo. Se attraverso i compromessi è possibile descrivere i conflitti e rapporti diretti tra agenti, risulta opportuno modellizzare anche gli effetti del pensiero critico e dell'interazione con le reti globali di informazione costituite dai media, che in questo contesto definiamo self-thinking.

L'inclusione degli effetti del self-thinking nel modello può assumere forme diverse, tuttavia nel tentativo di offrire una descrizione della realtà coerente è possibile supporre che le fluttuazioni nelle opinioni degli individui dovute a tale fenomeno siano rappresentabili attraverso un processo diffusivo pesato, sempre meno rilevante in prossimità degli estremi di $\overline{\Omega}$, cioè la probabilità che un'opinione vari decresce avvicinandosi ad opinioni estreme, in analogia alla realistica idea per cui opinioni estreme sono difficili da cambiare [2, 16].

Nel seguito della trattazione descriveremo i due approcci proposti da Boudin-Salvarani [2] e da Toscani [16]. Nel caso di Boudin-Salvarani si interpreta il self-thinking come un effetto diffusivo globale che si sovrappone all'effetto medio delle interazioni. Nel caso di Toscani il self-thinking è una perturbazione casuale su ogni singola interazione microscopica ed è opportuno ridefinire l'operatore di interazione Q in modo che includa entrambi i fenomeni.

Nel modello di Boudin-Salvarani [2], l'effetto diffusivo globale dovuto al self-thinking si somma linearmente all'effetto delle interazioni, pertanto è possibile descrivere l'evoluzione temporale della distribuzione delle opinioni f nella popolazione separandone i contributi. Consideriamo per semplicità il caso delle interazioni binarie (1.7) nella forma dell'Esempio 1.1, per cui l'effetto delle interazioni è ben descritto dall'equazione (1.17). Introduciamo un operatore di diffusione che segue una legge di Fourier non uniforme, con termine di Fourier $\alpha : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ non negativo e di classe $C^1(\overline{\Omega})$, che nel modello per la formazione delle opinioni rappresenta il peso del processo diffusivo, e inoltre assumiamo che:

- $\alpha(x) = \alpha(-x) \quad \forall x \in \overline{\Omega}$, in modo da trattare equivalentemente opinioni positive e negative con lo stesso grado di convinzione, mantenendo una simmetria nelle fluttuazioni;
- $\alpha(-1) = \alpha(+1) = 0$, affinché il processo diffusivo si annulli sul bordo dello spazio delle opinioni $\overline{\Omega}$, rappresentando la tendenza a non cambiare delle opinioni più estreme.

In particolare per descrivere il contributo del self-thinking nel modello per l'evoluzione di f, ci serviremo di un termine con una struttura del tipo $(\alpha f_x)_x$ in senso distribuzionale, infatti per ipotesi si ha $f(t,\cdot) \in L^1(\Omega)$ e, poiché $\alpha \in C^1(\overline{\Omega})$, si ha anche $\alpha \in W^{1,\infty}(\Omega)$, dunque si può scrivere, in senso distribuzionale:

$$(\alpha f_x)_x = (\alpha f)_{xx} - (\alpha_x f)_x$$

Inoltre si osservi che l'insieme delle funzioni α accettabili non è vuoto e una possibile scelta è data da $\alpha(x) = \kappa(1 - x^2)$, con $\kappa > 0$, che ben descrive l'idea per cui le opinioni forti sono più stabili nelle proprie convinzioni.

Infine, è possibile combinare nel modello gli effetti di interazione e quelli legati al self-thinking, mantenendone separati i contributi attraverso un'equazione integro-differenziale alle derivate parziali del secondo ordine rispetto alla variabile x, cioè per $(t,x) \in [0,T] \times \Omega$ con $T > 0$, per ogni $\varphi \in C^2(\overline{\Omega})$:

$$\int_\Omega \varphi(x) f_t(t,x)\, dx = \int_\Omega \Big[\alpha(x)\varphi_x(x)\Big]_x f(t,x)\, dx + \langle Q(f,f), \varphi\rangle \tag{1.22}$$

dove Q è definito nella (1.17) ed è possibile assegnare un'eventuale condizione iniziale:

$$f(0,x) = f^{in}(x) \qquad \forall x \in \overline{\Omega} \tag{1.23}$$

Nel modello di Toscani [16], il self-thinking agisce su ogni opinione a seguito di un'interazione, dunque, per ottenere una descrizione efficace dell'evoluzione temporale della distribuzione delle opinioni f con un'equazione di tipo Boltzmann, è necessario considerarne l'effetto congiunto. Consideriamo per semplicità il caso delle interazioni binarie, siano $x_1, x_2 \in \overline{\Omega}$ le opinioni di due agenti prima dell'interazione e siano $x_1', x_2' \in \overline{\Omega}$ le opinioni modificate dopo l'interazione. Considerando l'effetto congiunto di interazione e self-thinking e sfruttando la regola di interazione (1.7) nella forma data dall'Esempio 1.2 l'evoluzione del microstato si può descrivere come:

$$\begin{cases} x_1' = x_1 - \gamma P(|x_1|)(x_1 - x_2) + \eta_1 D(|x_1|) \\ x_2' = x_2 - \gamma P(|x_2|)(x_2 - x_1) + \eta_2 D(|x_2|) \end{cases} \tag{1.24}$$

dove $\gamma > 0$ è un parametro costante, mentre η_1, η_2 sono due variabili aleatorie con la stessa distribuzione, con media zero e varianza σ^2, che assumono valori su un insieme $\mathcal{B} \subseteq \overline{\Omega}$, in modo che gli effetti diffusivi non generino un radicale cambio di opinione. La costante γ e la varianza σ^2 misurano rispettivamente la tendenza al compromesso e la variazione dell'opinione dovuta alla diffusione. Le funzioni $P(|x|)$, $D(|x|)$ descrivono il peso locale dell'interazione e della diffusione per ogni opinione. Per garantire che $x_1', x_2' \in \overline{\Omega}$ e per descrivere la minore disposizione al cambiamento delle opinioni estreme, assumiamo che $0 < \gamma < \frac{1}{2}$ e inoltre $0 \leq P(|x|) \leq 1$, $0 \leq D(|x|) \leq 1$ per ogni $x \in \overline{\Omega}$ e siano non crescenti rispetto a $|x|$.

Pertanto, con un'applicazione dei metodi standard della teoria cinetica delle interazioni binarie [16], definendo J il modulo del determinante della matrice jacobiana di (1.24), $B = B(x, y)$ il nucleo di interazione, legato ai dettagli delle interazioni binarie, ed esprimendo le opinioni pre-interazione x, y in funzione delle opinioni post-interazione x', y' secondo l'inversa di (1.24) si trova l'equazione integro-differenziale che regola l'evoluzione di f:

$$\begin{aligned} \partial_t f(t,x) &= Q(f,f)(t,x) \\ &:= \iint_{\mathcal{B}^2} \int_{\Omega} \left[B(x',y') \frac{1}{J} f(t,x') f(t,y') - B(x,y) f(t,x) f(t,y) \right] dy \, d\eta_1 \, d\eta_2 \end{aligned} \tag{1.25}$$

in cui ridefiniamo l'operatore di collisione Q, in modo che l'integrale rappresenti la variazione istantanea della distribuzione dell'opinione dovuta all'interazione, comprensiva dello scambio binario di informazioni e dell'effetto del self-thinking. Inoltre la presenza del modulo del determinante della matrice jacobiana J garantisce la conservazione dell'opinione totale per ogni scelta del nucleo di interazione B, che caratterizza gli effetti esterni sull'opinione.

Capitolo 2

Rivisitazione del modello di Snznajd

2.1 Presentazione del modello

Il modello di Sznajd per la formazione delle opinioni descritto in [5, 15] si propone di rappresentare l'evoluzione della distribuzione delle opinioni in una popolazione, in cui l'effetto del self-thinking può essere trascurato, in altre parole le opinioni possono modificarsi solo a seguito dell'interazione tra gli individui.

Il punto di partenza per approcciare la dinamica delle opinioni è costituito dal riconoscimento di alcune analogie con il modello di Ising per il magnetismo della materia [8], usato per descrivere la transizione dal ferromagnetismo al paramagnetismo. Nel modello di Ising si considera un reticolo spaziale, in cui ogni atomo della materia assume una posizione precisa e interagisce con i suoi vicini. Ogni atomo è caratterizzato da uno spin, cioè una variabile discreta che può assumere solo i due valori ± 1, e ogni interazione tra gli atomi determina una variazione degli spin. Gli spin si modificano anche per effetto della temperatura, la quale induce delle fluttuazioni casuali e prevale nel paramagnetismo, contrapponendosi all'effetto delle interazioni, che invece tendono ad allineare gli spin degli atomi interagenti e prevalgono nel ferromagnetismo.

Nel contesto della formazione delle opinioni, in analogia con il modello di Ising, gli agenti sono gli atomi, mentre il reticolo sociale delle connessioni interpersonali si traduce nel reticolo spaziale, che permette le interazioni tra atomi vicini, cioè tra individui socialmente connessi. Le opinioni sono rappresentate dagli spin e nel caso più semplice assumono solo i due valori ± 1, che denotano le posizioni opposte trascurando la variazione nel continuo assunta nella formulazione generale. Le interazioni tra gli spin si traducono nelle interazioni sociali, mentre le fluttuazioni termiche sugli spin si possono interpretare come l'effetto del self-thinking. Nel seguito trascureremo il reticolo sociale e le fluttuazioni delle opinioni causate dal self-thinking e analizzeremo il solo effetto delle interazioni.

Per costruire una rappresentazione della dinamica delle opinioni è necessario individuare una particolare regola di interazione elementare, che caratterizzi la variazione delle opinioni degli agenti a seguito dei contatti. Tuttavia, differentemente dai sistemi di particelle che rispondono alle leggi fisiche di conservazione (1.1), una popolazione di individui non segue delle proprietà fisiche elementari e non esiste un contesto teorico formale, pertanto è opportuno postulare in modo euristico il comportamento degli individui.

L'aspetto centrale del modello originale di Sznajd è costituito dall'idea per cui solo gruppi di opinioni simili possono diffondersi attraverso la popolazione. In particolare, adotteremo l'interpretazione data in [14] e considereremo interazioni ternarie tali che se due individui condividono la stessa opinione, allora sono in grado di convincere il terzo a cambiare la propria posizione nell'opinione maggioritaria.

Definiamo lo spazio delle possibili opinioni $\Omega = \{-1, +1\}$. Siano $x_1, x_2, x_3 \in \Omega$ le opinioni di tre agenti pre-interazione e siano $x_1', x_2', x_3' \in \Omega$ le opinioni post-interazione. La regola di interazione delineata si può formalizzare come segue:

$$\begin{aligned} &\text{se } x_1 = x_2, \text{ allora } \begin{cases} x_1' = x_1 \\ x_2' = x_1 \\ x_3' = x_1 \end{cases} \\ &\text{se } x_1 \neq x_2, \text{ allora l'interazione non avviene} \end{aligned} \tag{2.1}$$

dove, nel caso $x_1 \neq x_2$, si intende che ogni individuo mantiene la propria opinione pre-interazione invariata.

Definiamo la funzione di distribuzione delle opinioni $f = f(t, x)$, con $x \in \Omega = \{-1, +1\}$, e cerchiamo di costruire un'equazione di tipo Boltzmann per descriverne l'evoluzione temporale. Dal momento che lo spazio delle opinioni Ω è costituito da solo due valori, la distribuzione di probabilità f è discreta e concentrata su tali valori, cioè definendo $p(t) \in [0,1]$ la percentuale di individui che condividono l'opinione $x = 1$ al tempo t, $q(t) = 1 - p(t) \in [0,1]$ la percentuale di individui che condividono l'opinione $x = -1$ al tempo t e denotando con $\delta(x)$ la delta di Dirac centrata in zero, si ha

$$f(t, x) = p(t)\delta(x - 1) + q(t)\delta(x + 1) \tag{2.2}$$

Richiamando l'equazione di Boltzmann (1.21) per interazioni multiple fra tre agenti, possiamo sostituire la forma (2.2) della distribuzione f e la regola di interazione (2.1), costruendo un opportuno nucleo di interazione $B = B(x_1, x_2, x_3)$. Si osservi che per la regola (2.1), se i primi due individui hanno opinioni diverse non si verifica l'interazione, pertanto in questo caso B si annulla e, sfruttando la funzione caratteristica, si può definire

$$B(x_1, x_2, x_3) = \chi(x_1 = x_2) = \begin{cases} 1 & \text{se } x_1 = x_2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \tag{2.3}$$

In definitiva, l'equazione (1.21) si trasforma in un'equazione di Boltzmann con cutoff, poiché il nucleo di interazione B elimina i casi in cui $x_1 \neq x_2$ dall'insieme delle possibili interazioni, e si ottiene un sistema di equazioni in grado di descrivere l'evoluzione temporale di p, q:

$$\begin{cases} \dfrac{dp}{dt} = \dfrac{1}{3} pq(p - q) \\ \dfrac{dq}{dt} = \dfrac{1}{3} pq(q - p) \end{cases} \tag{2.4}$$

con eventuali condizioni iniziali che descrivono la distribuzione statistica delle opinioni nella popolazione al tempo $t = 0$:

$$p(0) = p_0 \in [0,1], \quad q(0) = q_0 = 1 - p_0$$

Infine, per ottenere una descrizione più chiara dell'evoluzione delle opinioni nella popolazione, sostituiamo $q(t) = 1 - p(t)$ nel sistema (2.4) e deduciamo un'equazione nell'unica incognita p:

$$\frac{dp}{dt} = \frac{1}{3}p(1-p)(2p-1) \tag{2.5}$$

La descrizione della popolazione offerta dal modello, attraverso l'equazione (2.5), permette di rappresentare l'evoluzione della distribuzione di due opinioni, prestandosi a semplici analisi qualitative, rinunciando alle sfumature circa la convinzione degli individui. Possiamo dunque arricchire il modello, introducendo l'effetto dell'indecisione, cioè consentendo agli agenti senza una posizione chiara di assumere uno stato diverso da ± 1, che rappresenteremo come una nuova opinione: $x = 0$.

In questo contesto, le possibili opinioni assumibili dagli individui appartengono allo spazio $\Omega = \{-1,0,+1\}$. Sia $f = f(t,x)$ la distribuzione delle opinioni e oltre alle percentuali $p(t), q(t) \in [0,1]$ degli individui associati rispettivamente agli stati $x = 1$ e $x = -1$ al tempo t, introduciamo $r(t) \in [0,1]$ la percentuale degli individui che condividono l'opinione $x = 0$ al tempo t. Osservando che $p(t) + r(t) + q(t) = 1$ per ogni istante t, ispirandoci alla (2.2) si ha

$$f(t,x) = p(t)\delta(x-1) + r(t)\delta(x) + q(t)\delta(x+1) \tag{2.6}$$

a partire da cui possiamo sfruttare i risultati del modello costruito nel caso più semplice. In particolare, la regola di interazione (2.1) e il nucleo (2.3) restano gli stessi, dunque sostituendo nell'equazione di Boltzmann (1.21) per interazioni multiple fra tre agenti, si trova l'evoluzione temporale di p, r, q:

$$\begin{cases} \dfrac{dp}{dt} = \dfrac{1}{3}p\big[p(r+q) - r^2 - q^2)\big] \\ \dfrac{dr}{dt} = \dfrac{1}{3}r\big[r(p+q) - p^2 - q^2)\big] \\ \dfrac{dq}{dt} = \dfrac{1}{3}q\big[q(p+r) - p^2 - r^2)\big] \end{cases} \tag{2.7}$$

con eventuali condizioni iniziali, che descrivono la distribuzione statistica delle opinioni al tempo $t = 0$, includendo gli individui indecisi:

$$\begin{aligned} p(0) &= p_0 \in [0,1] \\ r(0) &= r_0 \in [0,1] \\ q(0) &= q_0 = 1 - p_0 - r_0 \end{aligned}$$

dove è opportuno scegliere p_0, r_0 in modo che $q_0 \in [0,1]$, cioè, fissato $p_0 \in [0,1]$, è sufficiente definire $r_0 \in [0,1]$ tale che $r_0 \leq 1 - p_0$.

Infine, sostituendo $q(t) = 1 - p(t) - r(t)$ nel sistema (2.7), ci riconduciamo a un sistema nelle due sole incognite p, r:

$$\begin{cases} \dfrac{dp}{dt} = \dfrac{1}{3}p\Big[p(1-p) - r^2 - (1-p-r)^2)\Big] \\ \dfrac{dr}{dt} = \dfrac{1}{3}r\Big[r(1-r) - p^2 - (1-p-r)^2)\Big] \end{cases} \tag{2.8}$$

che ha senso per $p \geq 0\,,\ r \leq 1$ e $r \leq 1 - p$

2.2 Analisi qualitativa del comportamento asintotico in tempo

Il modello costruito è una notevole semplificazione rispetto al caso generale presentato nel Capitolo 1, pertanto si può pensare di introdurre dei dettagli comportamentali più sofisticati, ad esempio alterando la regola di interazione (2.1). Questo approccio, tuttavia, rivela degli aspetti critici, infatti la definizione di una regola di interazione complessa conduce a una riduzione delle possibilità di analisi qualitative, rendendo più oscuri i legami tra il comportamento individuale e i fenomeni emergenti, che cercheremo di rappresentare in questo paragrafo. In effetti, piuttosto che riprodurre dettagliatamente le traiettorie empiriche del sistema, è interessante lo studio di $f(t, x)$ nel limite per $t \to +\infty$, che si ricava dall'analisi del comportamento di p, q, poiché permette di delineare gli andamenti aggregati del sistema che emergono spontaneamente dalle regole di interazione elementari (2.1). Inoltre, mantenendo il parallelismo con l'equazione di Boltzmann per dinamica dei gas (1.6), la controparte classica dell'analisi conduce alla distribuzione di Maxwell, che descrive la distribuzione delle velocità delle molecole all'equilibrio statistico.

Nel caso in cui ci sono solo due possibili opinioni ± 1, osservando che la distribuzione delle opinioni f si può esprimere come (2.2) e ricordando che $q = 1 - p$, siamo giunti a descrivere l'evoluzione nel tempo di f attraverso l'equazione (2.5) nella sola incognita p. Dallo studio dell'equazione (2.5) notiamo che ci sono tre punti di equilibrio del sistema:

$$(p, q) = (0{,}1), \qquad (p, q) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \qquad (p, q) = (1{,}0)$$

che costituiscono i possibili stati verso cui il sistema evolve nel tempo, ossia le possibili distribuzioni emergenti sul lungo periodo. Inoltre, studiando il segno del lato destro dell'equazione (2.5) ricaviamo il segno della derivata di p rispetto al tempo t e deduciamo che $(p, q) = (0{,}1), (p, q) = (1{,}0)$ sono stabili e attrattivi, mentre $(p, q) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ è instabile. In particolare, se $p_0 \in [0, \frac{1}{2})$ il sistema converge spontaneamente al punto di equilibrio stabile $(p, q) = (0{,}1)$, mentre se $p_0 \in (\frac{1}{2}, 1]$ per tempi lunghi il sistema è attratto verso $(p, q) = (1{,}0)$. Lo scenario in cui $p_0 = q_0 = \frac{1}{2}$, secondo il modello costruito, converge al punto di equilibrio instabile, tuttavia è un caso che tipicamente non si osserva nella realtà, dal momento che ogni piccola perturbazione muove il sistema verso i punti di equilibrio stabili, lontano da quelli instabili. In definitiva configurazioni iniziali diverse da quella instabile $(p, q) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, nel lungo periodo conducono tutte ad un consenso universale tra gli individui su una delle opinioni $x = \pm 1$

Nel caso in cui contempliamo l'astensione come possibile opinione $x = 0$, ricordando l'espressione (2.6) per la distribuzione delle opinioni f, con $p + q + r = 1$, siamo arrivati a descrivere l'evoluzione di f attraverso il sistema (2.8), dal cui studio possiamo ricavare i punti di equilibrio. Considerando la matrice jacobiana di (2.8):

$$J(p,r) = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -6p^2 + (6-4r)p - 2r^2 + 2r - 1 & -2p(p+2r-1) \\ -2r(2p+r-1) & -6r^2 + (6-4p)r - 2p^2 + 2p - 1 \end{bmatrix}$$

possiamo sfruttare il teorema di stabilità in prima approssimazione e attraverso lo studio dei segni degli autovalori di J, valutata sui punti di equilibrio, troviamo che il sistema si compone di tre punti di equilibrio stabili:

$$(p,r,q) = (0,0,1), \qquad (p,r,q) = (1,0,0), \qquad (p,r,q) = (0,1,0)$$

e quattro punti di equilibrio instabili:

$$(p,r,q) = \left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right), \qquad (p,r,q) = \left(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\right),$$
$$(p,r,q) = \left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right) \qquad (p,r,q) = \left(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$$

I tre punti di equilibrio stabili individuano le configurazioni in cui tutti gli individui concordano con una delle tre possibili opinioni e rappresentano la situazione limite raggiunta nel caso in cui una delle tre opinioni sia inizialmente più espressa rispetto alle altre, coerentemente con il modello per la dinamica delle opinioni senza astensione. In analogia con il modello più semplice nella configurazione $(p,q) = (\frac{1}{2},\frac{1}{2})$, il punto di equilibrio $(p,r,q) = (\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3})$ è instabile e corrisponde al caso ideale in cui le tre opinioni sono equamente espresse nella popolazione, cioè la loro distribuzione è in equilibrio statistico e le interazioni rimescolano gli individui associati alle opinioni preservando i rapporti. Inoltre, anche in questo caso, una piccola perturbazione della distribuzione $(p,r,q) = (\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3})$ tale per cui una delle tre opinioni prevalga sulle altre, determina la rottura dell'equilibrio e la convergenza del sistema a uno dei tre punti di equilibrio stabile. Differentemente rispetto al modello con due soli stati, risulta possibile che le opinioni inizialmente maggioritarie nella popolazione siano due, in questo caso l'opinione minoritaria tenderà a sparire nel tempo, mentre gli individui che la condividevano saranno portati verso una delle due più diffuse nella stessa proporzione, fino a raggiungere uno dei tre punti di equilibrio $(p,r,q) = (\frac{1}{2},0,\frac{1}{2})$, $(p,r,q) = (\frac{1}{2},\frac{1}{2},0)$, $(p,r,q) = (0,\frac{1}{2},\frac{1}{2})$. Inoltre osserviamo che anche in questo caso si tratta di equilibri instabili, infatti ad esempio per $(p,r,q) = (\frac{1}{2},0,\frac{1}{2})$ le due opinioni predominanti $x = \pm 1$ riproducono la stessa configurazione di equilibrio instabile per il modello senza astensione, pertanto ogni piccola perturbazione condurrebbe il sistema verso uno dei due equilibri stabili $(p,r,q) = (1,0,0), (p,r,q) = (0,0,1)$.

In definitiva, il modello per la dinamica delle opinioni definito dalla regola di interazione "due contro uno" (2.1) descrive una popolazione in cui l'opinione inizialmente maggioritaria, nel lungo periodo, tende ad attrarre tutto il consenso, determinando la scomparsa delle altre.

Il risultato a cui siamo giunti può sembrare una rappresentazione semplicistica della dinamica delle opinioni nella popolazione, ma a sostegno dell'informatività del modello, possiamo considerare una diversa regola di interazione locale, osservando come si modifica la dinamica collettiva. Ad esempio sostituiamo la regola di interazione (2.1) nel caso senza astensione, con la seguente [11]:

$$\begin{cases} x_1' = x_1 \\ x_2' = x_1 \end{cases} \tag{2.9}$$

secondo cui ogni individuo è in grado di convincere gli altri. In questo caso dall'equazione di Boltzmann (1.17), si ottiene:

$$\frac{dp}{dt} = \frac{dq}{dt} = 0 \tag{2.10}$$

Pertanto la distribuzione delle opinioni non varia nel tempo, cioè la regola di interazione (2.9) non è in grado di spostare il consenso collettivo, differentemente dalla regola (2.1).

Capitolo 3

Modello di Toscani

3.1 Presentazione del modello

Il modello di Toscani mostrato in [16] offre una descrizione della dinamica delle opinioni affiancando all'effetto interazioni quello del self-thinking e interpretando quest'ultimo come una perturbazione causale su ogni singola interazione microscopica.

Sia $\Omega = (-1, +1)$ un intervallo aperto, definiamo $\overline{\Omega}$ lo spazio delle possibili opinioni e $f = f(t, x)$ la distribuzione delle opinioni. Per semplicità consideriamo il caso di interazioni binarie e sfruttiamo la regola di interazione definita nell'Esempio 1.2. Includiamo quindi l'effetto del self-thinking introducendo un termine aggiuntivo nella regola (1.9), come illustrato nel Paragrafo 1.3, e definiamo la descrizione delle interazioni microscopiche tra gli agenti attraverso la (1.24). Inoltre sfruttando gli strumenti della teoria cinetica di Boltzmann, possiamo descrivere l'evoluzione di f attraverso l'equazione integro-differenziale (1.25), in cui consideriamo un nucleo di interazione B della forma:

$$B(x, y; \eta_1, \eta_2) = \Theta(\eta_1)\Theta(\eta_2)\chi(|x'| \leq 1)\chi(|y'| \leq 1) \tag{3.1}$$

dove x', y' sono funzioni di x, y attraverso la regola di interazione (1.24) e $\Theta(\eta)$ è una densità di probabilità simmetrica con media zero e varianza σ^2, definita in modo da preservare gli estremi di $\overline{\Omega}$. Infatti, per una densità di probabilità generale $\Theta(\eta)$, il nucleo di interazione B dipende dalle opinioni x', y' attraverso la funzione caratteristica, tuttavia è possibile considerare una situazione semplificata in cui si ha che $|x'| \leq 1$, $|y'| \leq 1$ per un'opportuna scelta della funzione di diffusione $D(|x|)$ e un supporto $\mathcal{B} \subseteq \overline{\Omega}$ delle variabili aleatorie η_1, η_2 sufficientemente piccolo. Dunque consideriamo l'operatore di interazione con la seguente espressione:

$$\begin{aligned} Q(f, f)(t, x) = \iint_{\mathcal{B}^2} \int_{\Omega} \Big[& B(x', y'; \eta_1, \eta_2) \frac{1}{J} f(t, x') f(t, y') \\ & - B(x, y; \eta_1, \eta_2) f(t, x) f(t, y) \Big] \, dy \, d\eta_1 \, d\eta_2 \end{aligned} \tag{3.2}$$

L'esistenza di una soluzione debole del problema ai valori iniziali per l'equazione (1.25) si dimostra sfruttando i metodi della teoria di Boltzmann [4]. Inoltre, per semplificare la trattazione del comportamento delle opinioni sul lungo periodo, nel seguito restringeremo l'analisi del modello al caso in cui il nucleo B non dipenda dalle opinioni, in modo da avere

$$B(x, y; \eta_1, \eta_2) = B(\eta_1, \eta_2) = \Theta(\eta_1)\Theta(\eta_2)$$

In particolare, possiamo porre $D(|x|) = 1 - |x|$ e $\mathcal{B} = \big(-(1-\gamma),\, 1-\gamma\big)$ e si verifica che $x_1', x_2' \in \overline{\Omega}$. Infatti, sostituendo nella regola di interazione (1.24) si ottiene

$$\begin{aligned} x_1' &= (1 - \gamma P(|x_1|))x_1 + \gamma P(|x_1|)x_2 + \eta_1(1 - |x_1|) \\ &\leq (1 - \gamma P(|x_1|))x_1 + \gamma P(|x_1|) + \eta_1(1 - |x_1|) \end{aligned}$$

pertanto, affinché si abbia $|x_1'| \leq 1$ è sufficiente che:

$$(1 - \gamma P(|x_1|))x_1 + \gamma P(|x_1|) + \eta_1(1 - |x_1|) \leq 1$$

cioè, riordinando i termini:

$$\eta_1(1 - |x_1|) \leq (1 - \gamma P(|x_1|))(1 - x_1)$$

che è verificata per ogni $x_1 \geq 0$, se $\eta_1 \leq 1 - \gamma$, dal momento che $P(|x|) \leq 1$. Inoltre un risultato analogo si ottiene per $x_1 \leq 0$.

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ insieme, denotiamo con $\mathcal{M}_0(A)$ lo spazio delle misure di probabilità che assumono valori in A e con

$$\mathcal{M}_p(A) = \left\{ \Theta \in \mathcal{M}_0(A) \;\middle|\; \int_A |x|^p \, d\Theta(x) < +\infty \,,\; p \geq 0 \right\}$$

lo spazio delle misure di probabilità di Borel avente momenti finiti di ordine p, con la nozione di convergenza debole di misure. Definiamo inoltre lo spazio delle funzioni reali su $\overline{\Omega}$ con $h^{(m)}$ hölderiana di ordine δ:

$$\mathcal{F}_s(\overline{\Omega}) = \left\{ h : \overline{\Omega} \to \mathbb{R} \;\middle|\; h(\pm 1) = h'(\pm 1) = 0 \,,\; \|h^{(m)}\|_\delta < +\infty \right\}$$

con $m \in \mathbb{Z}$, $0 < \delta \leq 1$ tali che $m + \delta = s$, e in cui si denota

$$\|h^{(m)}\|_\delta = \sup_{x \neq y} \frac{|h^{(m)}(x) - h^{(m)}(y)|}{|x - y|^\delta}$$

Nel seguito supporremo che la densità di probabilità $\Theta(\eta)$, che caratterizza il fenomeno di diffusione delle opinioni, sia simmetrica e appartenga allo spazio $\mathcal{M}_{2+\alpha}$ per qualche $\alpha > 0$. Inoltre, per semplicità, assumiamo che si ottenga da una variabile aleatoria Y con media zero e varianza unitaria, appartenete a $\mathcal{M}_{2+\alpha}$, cioè Θ è la densità di σY e possiamo esprimere la dipendenza di σ dai momenti di Θ. Infatti, per ogni $p > 0$ tale per cui il momento p-esimo di Y esiste:

$$\int_{\mathbb{R}} |\eta|^p \Theta(\eta) \, d\eta = E[|\sigma Y|^p] = \sigma^p E[|Y|^p]$$

Definiamo la forma debole del problema per l'evoluzione di $f \in C^1([0,T];\mathcal{M}_0(\overline{\Omega}))$ con $T > 0$ nell'equazione (1.25), cioè per $(t,x) \in [0,T] \times \Omega$, per ogni $\varphi \in \mathcal{F}_p(\overline{\Omega})$:

$$\begin{aligned}\int_\Omega \varphi(x) f_t(t,x)\, dx &= \langle Q(f,f),\varphi\rangle \\ &:= \iint_{\mathcal{B}^2} \iint_{\Omega^2} B(\eta_1,\eta_2)\Big[\varphi(x') - \varphi(x)\Big] f(t,x) f(t,y)\, dx\, dy\, d\eta_1\, d\eta_2\end{aligned} \tag{3.3}$$

con distribuzione di probabilità iniziale $f(0,x) = f^{in}(x) \in \mathcal{M}_0(\overline{\Omega})$ e tale che

$$\lim_{t\to 0} \int_\Omega \varphi(x) f(t,x)\, dx = \int_\Omega \varphi(x) f^{in}(x)\, dx \tag{3.4}$$

Osservazione. In modo simile a quanto visto nell'equazione (1.18), possiamo sfruttare la simmetria del nucleo di interazione e considerare la seguente forma alternativa per Q:

$$\begin{aligned}\langle Q(f,f),\varphi\rangle = \frac{1}{2} \iint_{\mathcal{B}^2} \iint_{\Omega^2} & B(\eta_1,\eta_2)\Big[\varphi(x') + \varphi(y') - \varphi(x) - \varphi(y)\Big] \\ & f(t,x) f(t,y)\, dx\, dy\, d\eta_1\, d\eta_2\end{aligned} \tag{3.5}$$

3.2 Principali proprietà matematiche

In questo paragrafo tratteremo le principali proprietà matematiche delle equazioni per la dinamica delle opinioni, derivate dal modello di Toscani, e cercheremo di caratterizzare l'evoluzione della distribuzione delle opinioni, studiando il comportamento dei momenti statistici della distribuzione delle opinioni.

Proposizione 3.1. *Sia $f = f(t,x)$ soluzione debole di (3.3) o equivalentemente di (3.5), con condizione iniziale $f^{in} \in \mathcal{M}_0(\overline{\Omega})$. Allora l'opinione totale nella popolazione si conserva, cioè*

$$\int_\Omega f(t,x)\, dx = \int_\Omega f^{in}(x)\, dx \qquad \forall t > 0$$

Dimostrazione. La tesi segue immediatamente sostituendo $\varphi \equiv 1$ nell'equazione (3.3) □

Ispirati dall'approccio usato per dimostrare la conservazione dell'opinione totale, possiamo trovare un espressione per l'evoluzione dei momenti.

Proposizione 3.2. *Sia $f = f(t,x)$ soluzione debole di (3.3). Allora l'evoluzione nel tempo dell'opinione media è regolata dalla seguente equazione non chiusa:*

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega x f(t,x)\, dx = \gamma \int_\Omega P(|x|) f(t,x)\, dx \int_\Omega x f(t,x)\, dx - \gamma \int_\Omega x P(|x|) f(t,x) dx$$

Dimostrazione. Fissato $\varphi(x) = x$ e sostituendo nella (3.3), ricordando la regola di interazione (1.24), si trova

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_\Omega x f(t,x)\, dx &= \iint_{\mathcal{B}^2} \iint_{\Omega^2} B(\eta_1,\eta_2)(x' - x) f(t,x) f(t,y)\, dx\, dy\, d\eta_1\, d\eta_2 \\ &= \iint_{\mathcal{B}^2} \iint_{\Omega^2} B(\eta_1,\eta_2)\Big[\gamma P(|x|)(y-x) + \eta_1 D(|x|)\Big] f(t,x) f(t,y)\, dx\, dy\, d\eta_1\, d\eta_2 \\ &= \iint_{\Omega^2} \gamma P(|x|)(y-x) f(t,x) f(t,y)\, dx\, dy\end{aligned} \tag{3.6}$$

da cui la tesi è immediata riordinando i termini. Osserviamo inoltre che nell'ultima uguaglianza abbiamo sfruttato il fatto che

$$\begin{aligned}
&\iint_{\mathcal{B}^2}\iint_{\Omega^2} B(\eta_1,\eta_2)\eta_1 D(|x|)f(t,x)f(t,y)\,dx\,dy\,d\eta_1\,d\eta_2 \\
&\quad = \iint_{\mathcal{B}^2}\iint_{\Omega^2} \Theta(\eta_1)\Theta(\eta_2)\eta_1 D(|x|)f(t,x)f(t,y)\,dx\,dy\,d\eta_1\,d\eta_2 = 0
\end{aligned}$$

poiché il valore medio della densità Θ è zero. □

In particolare, si osservi che per $P(|x|)$ costante, si ha che l'opinione media si conserva:

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega x f(t,x)\,dx = 0$$

Proposizione 3.3. *Sia $f = f(t,x)$ soluzione debole di (3.3). Allora l'evoluzione nel tempo del momento secondo è regolata dalla seguente equazione:*

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\int_\Omega x^2 f(t,x)\,dx = \\
&\quad = \frac{1}{2}\iint_{\mathcal{B}^2}\iint_{\Omega^2} \Theta(\eta_1)\Theta(\eta_2)(x'^2+y'^2-x^2-y^2)f(t,x)f(t,y)\,dx\,dy\,d\eta_1\,d\eta_2 \\
&\quad = \gamma^2\iint_{\Omega^2} P(|x|)^2(x-y)^2 f(t,x)f(t,y)\,dx\,dy \\
&\qquad - 2\gamma\iint_{\Omega^2} P(|x|)x(x-y)f(t,x)f(t,y)\,dx\,dy \\
&\qquad + \sigma^2\int_\Omega D(|x|)^2 f(t,x)\,dx
\end{aligned}$$

Dimostrazione. La tesi segue fissando $\varphi(x) = x^2$ nell'equazione (3.3), ricordando che la densità Θ ha media zero e varianza σ^2 e procedendo con calcoli simili a quelli usati nella dimostrazione della Proposizione 3.2. □

In particolare, si osservi che per $P(|x|)$ costante, abbiamo verificato che l'opinione media si conserva, cioè posta

$$m = \int_\Omega x f(t,x)\,dx$$

si ha che m è costante e si trova la seguente equazione semplificata per il momento secondo:

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega x^2 f(t,x)\,dx = -2\gamma(1-\gamma)\left[\int_\Omega x^2 f(t,x)\,dx - m^2\right] + \sigma^2\int_\Omega D(|x|)^2 f(t,x)\,dx$$

Osservazione. Essendo $|x| \le 1$, si ha che tutti i momenti sono limitati. Pertanto per il teorema di Prokhorov [9], ogni successione $\{f(t,x)\}_{t\ge 0}$ contiene infinite sottosuccessioni che convergono debolmente a una certa misura di probabilità f_∞

3.3 Analisi del limite quasi-invariante

Come emerge dai risultati trovati nel Paragrafo 3.2, lo studio del comportamento asintotico della distribuzione delle opinioni per grandi intervalli temporali può risultare complesso.

In particolare, se si considera una regola di interazione generale, è opportuno tenere in considerazione la variazione nel tempo dell'opinione media, tuttavia ispirandoci alla teoria cinetica possiamo inizialmente considerare un modello semplificato e assumere che $P(|x|) = 1$, così che valga sia la conservazione dell'opinione totale, sia quella del momento primo e in questo modo possiamo caratterizzare il limite quasi-invariante, che, in linea con le definizioni della teoria cinetica, descrive la situazione in cui la maggior parte delle interazioni produce una piccola variazione delle opinioni.

Ricordando la regola di interazione (1.24), si trova

$$E[x_1' + x_2'] = x_1 + x_2 \tag{3.7}$$
$$E[x_1' - x_2'] = (1 - 2\gamma)(x_1 - x_2) \tag{3.8}$$

da cui osserviamo che la (3.7) descrive la proprietà di conservazione della media, mentre la (3.8) richiama la tendenza al compromesso esplorata nell'Esempio 1.2, secondo cui le interazioni tra gli individui portano le opinioni ad avvicinarsi.

Consideriamo il limite quasi-invariante per $\gamma \to 0$, mantenendo inalterate le proprietà (3.7), (3.8), cioè supponiamo che:

$$\iint_{\Omega^2} (x + y) f(t, x) f(t, y)\, dx\, dy = 2 \int_\Omega x f(t, x)\, dx = 2m$$

sia costante rispetto al tempo, mentre

$$\frac{1}{2} \iint_{\Omega^2} (x - y)^2 f(t, x) f(t, y)\, dx\, dy = \int_\Omega x^2 f(t, x)\, dx - m^2 = C_f(t)$$

vari rispetto al tempo e decada a zero in assenza di effetti diffusivi, cioè per $\sigma = 0$.

Si osservi che sfruttando i risultati della Proposizione 3.2 per $P(|x|) = 1$, abbiamo che l'opinione media si conserva, mentre dalla Proposizione 3.3 ricaviamo una legge per la variazione di $C_f(t)$:

$$\frac{dC_f(t)}{dt} = -2\gamma(1 - \gamma)C_f(t) + \sigma^2 \int_\Omega D(|x|)^2 f(t, x)\, dx$$

Definiamo quindi $g(\tau, x) = f(t, x)$, con $\tau = \gamma t$, e osservando che $g(0, x) = f(0, x) = f^{in}(x)$, sostituiamo nell'equazione precedente e troviamo che:

$$\frac{dC_g(\tau)}{d\tau} = -2(1 - \gamma)C_g(\tau) + \frac{\sigma^2}{\gamma} \int_\Omega D(|x|)^2 f(t, x)\, dx$$

da cui osserviamo che per preservare l'effetto delle interazioni microscopiche nell'asintoto, è importante lo studio del rapporto $\frac{\sigma^2}{\gamma}$. Considerando il limite per $\gamma, \sigma \to 0$ in modo che $\sigma^2 = \lambda\gamma$, otteniamo:

$$\frac{dC_g(\tau)}{d\tau} = -2C_g(\tau) + \lambda \int_\Omega D(|x|)^2 f(t, x)\, dx$$

con cui possiamo descrivere il comportamento di $f(t,x)$ per $t = \frac{\tau}{\gamma} \to +\infty$, infatti essendo $f(t,x) = g(\tau,x)$ abbiamo che il comportamento asintotico di f si avvicina a quello di g.

In linea di principio è possibile considerare limiti del rapporto $\frac{\sigma^2}{\gamma}$ diversi, come ad esempio il caso in cui $\frac{\sigma^2}{\gamma} \to +\infty$, cioè con termine diffusivo dominante, o il caso in cui $\frac{\sigma^2}{\gamma} \to 0$ per cui è il compromesso a dominare. Nello specifico il primo equilibrio è collegato alla formazione di profili asintotici della distribuzione dell'opinione, come mostrato in [1], e risulta di particolare interesse. Ispirati dalle precedenti osservazioni possiamo quindi enunciare il seguente teorema.

Teorema 3.4. *Sia $f^{in} \in \mathcal{M}_0(\overline{\Omega})$ la densità di probabilità iniziale delle opinioni nella popolazione, sia Y la variabile aleatoria simmetrica avente densità in $\mathcal{M}_{2+\alpha}$ con $\alpha > \delta$, che caratterizza il nucleo di interazione. Allora, per $\gamma, \sigma \to 0$ in modo che $\sigma^2 = \lambda\gamma$, la soluzione debole dell'equazione di Boltzmann per la densità scalata $g_\lambda(\tau,x) = f(t,x)$ con $\tau = \gamma t$ converge, per estrazione di una sottosuccessione, a una densità di probabilità $g(\tau,x)$ tale che conserva l'opinione media ed è soluzione debole dell'equazione di Fokker-Planck:*

$$\partial_\tau g = \frac{\lambda}{2}\,\partial_x^2\Big(D(|x|)^2 g\Big) + \partial_x\Big((x-m)g\Big) \tag{3.9}$$

Dimostrazione. Consideriamo la densità scalata $g(\tau,x) = f(t,x)$, con $\tau = \gamma t$, e osserviamo che, dato $0 < \delta \le \alpha$ per $\varphi \in \mathcal{F}_{2+\delta}(\overline{\Omega})$, soddisfa l'equazione in forma debole:

$$\frac{d}{d\tau}\int_\Omega \varphi(x)g(\tau,x)\,dx = \frac{1}{\gamma}\iint_{\mathcal{B}^2}\iint_{\Omega^2}\Theta(\eta_1)\Theta(\eta_2)\Big[\varphi(x') - \varphi(x)\Big]g(\tau,x)g(\tau,y)\,dx\,dy\,d\eta_1\,d\eta_2$$

Ricordando la regola di interazione (1.24), possiamo calcolare lo sviluppo in serie di Taylor di φ con resto di Lagrange intorno a x, in particolare per qualche $0 \le \theta \le 1$, posto $\tilde{x} = \theta x' + (1-\theta)x$, si ha che:

$$\varphi(x') = \varphi(x) + \Big[\gamma(y-x) + \eta_1 D(|x|)\Big]\varphi'(x) + \frac{1}{2}\Big[\gamma(y-x) + \eta_1 D(|x|)\Big]^2\varphi''(\tilde{x})$$

e sostituendo nell'equazione in forma debole per l'evoluzione di g otteniamo

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\tau}\int_\Omega \varphi(x)g(\tau,x)\,dx = \frac{1}{\gamma}\iint_{\mathcal{B}^2}\iint_{\Omega^2}&\Theta(\eta_1)\Theta(\eta_2)\Big[\Big[\gamma(y-x) + \eta_1 D(|x|)\Big]\varphi'(x)\\ &+ \frac{1}{2}\Big[\gamma(y-x) + \eta_1 D(|x|)\Big]^2\varphi''(x)\Big]g(\tau,x)g(\tau,y)\,dx\,dy\,d\eta_1\,d\eta_2\\ &+ R(\gamma,\sigma)\end{aligned} \tag{3.10}$$

dove abbiamo posto

$$\begin{aligned}R(\gamma,\sigma) = \frac{1}{2\gamma}\iint_{\mathcal{B}^2}\iint_{\Omega^2}&\Theta(\eta_1)\Theta(\eta_2)\Big[\gamma(y-x) + \eta_1 D(|x|)\Big]^2\\ &\Big[\varphi''(\tilde{x}) - \varphi''(x)\Big]g(\tau,x)g(\tau,y)\,dx\,dy\,d\eta_1\,d\eta_2\end{aligned}$$

Dal momento che $\varphi \in \mathcal{F}_{2+\delta}(\overline{\Omega})$ e $|\tilde{x} - x| = \theta |x' - x|$, osserviamo che:

$$|\varphi''(\tilde{x}) - \varphi''(x)| \leq \|\varphi''\|_\delta |\tilde{x} - x|^\delta \leq \|\varphi''\|_\delta |x' - x|^\delta = \|\varphi''\|_\delta |\gamma(y - x) + \eta_1 D(|x|)|^\delta$$

inoltre, vale la disuguaglianza:

$$|\gamma(y-x) + \eta_1 D(|x|)|^{2+\delta} \leq 2^{1+\delta}(|\gamma(y-x)|^{2+\delta} + |\eta_1 D(|x|)|^{2+\delta}) \leq 2^{3+2\delta}\gamma^{2+\delta} + 2^{1+\delta}|\eta_1|^{2+\delta}$$

pertanto si trova che R è limitato come segue:

$$|R(\gamma, \sigma)| \leq 2^{1+\delta} \|\varphi''\|_\delta \left(2^{2+\delta}\gamma^{2+\delta} + \frac{1}{2\gamma} \int_{\mathcal{B}} \Theta(\eta_1)|\eta_1|^{2+\delta} \, d\eta_1 \right) \tag{3.11}$$

Inoltre, essendo Θ una densità di probabilità con media zero e varianza $\sigma^2 = \lambda\gamma$ appartenente a $\mathcal{M}_{2+\alpha}$ per $\alpha > \delta$ osserviamo che

$$\int_{\mathcal{B}} \Theta(\eta_1)|\eta_1|^{2+\delta} \, d\eta_1 = E\left[|\sqrt{\lambda\gamma} Y|^{2+\delta} \right] = (\lambda\gamma)^{1+\frac{\delta}{2}} E\left[|Y|^{2+\delta} \right]$$

dove il valore atteso $E\left[|Y|^{2+\delta}\right]$ è limitato. Dunque considerando l'espressione (3.11) per il resto di Lagrange, troviamo che $R(\gamma, \sigma) \to 0$ per $\gamma, \sigma \to 0$ in modo che $\sigma^2 = \lambda\gamma$.

Sfruttando tale risultato, possiamo quindi valutare il limite per $\gamma, \sigma \to 0$ in modo che $\sigma^2 = \lambda\gamma$ dell'equazione (3.10):

$$\begin{aligned}
&\lim_{\gamma,\sigma\to 0} \frac{d}{d\tau} \int_\Omega \varphi(x) g(\tau, x) \, dx \\
&\quad = \lim_{\gamma,\sigma\to 0} \frac{1}{\gamma} \iint_{\mathcal{B}^2} \iint_{\Omega^2} \Theta(\eta_1)\Theta(\eta_2) \Big[\Big[\gamma(y-x) + \eta_1 D(|x|) \Big] \varphi'(x) \\
&\qquad + \frac{1}{2} \Big[\gamma(y-x) + \eta_1 D(|x|) \Big]^2 \varphi''(x) \Big] g(\tau, x) g(\tau, y) \, dx \, dy \, d\eta_1 \, d\eta_2 \\
&\quad = \int_\Omega \Big[(m - x)\varphi'(x) + \frac{\lambda}{2} D(|x|)^2 \varphi''(x) \Big] g(t, x) \, dx
\end{aligned}$$

che si rivela essere la forma debole dell'equazione di Fokker-Planck (3.9), ricordando che $\varphi \in \mathcal{F}_s(\overline{\Omega})$ e integrando per parti.

Infine, dal momento che la soluzione del modello cinetico conserva l'opinione totale e il momento primo, mentre il momento secondo è uniformemente limitato nel tempo, le conservazioni dell'opinione totale e dell'opinione media passano al limite. □

Osservazione. Nella dimostrazione del Teorema 3.4, con g intendiamo la densità scalata indicata nell'enunciato come g_λ, indicizzata attraverso il rapporto $\lambda = \frac{\sigma^2}{\gamma}$ supposto costante nel limite $\gamma, \sigma \to 0$. Inoltre si osservi che nel passaggio al limite mostriamo l'esistenza del limite debole di g_λ, cioè si verifica l'esistenza di una sottosuccessione che converge a una densità g che sia soluzione debole dell'equazione di Fokker-Planck, come suggerito dall'Osservazione di pagina 27.

Come accennato all'inizio del paragrafo, il Teorema 3.4 può essere generalizzato considerando una funzione $P(|x|)$ non necessariamente costante nella regola di interazione (1.24). In questo caso, ricordando che $g(\tau, x) = f(t, x)$, con $\tau = \gamma t$, possiamo definire l'opinione media al tempo $\tau \geq 0$

$$m(\tau) = \int_\Omega x g(\tau, x)\, dx = \int_\Omega x f(t, x)\, dx$$

inoltre, sfruttando la Proposizione 3.2 troviamo che l'evoluzione di $m(\tau)$ è regolata dall'equazione seguente:

$$\frac{dm(\tau)}{d\tau} = m(\tau) \int_\Omega P(|x|) g(\tau, x)\, dx - \int_\Omega x P(|x|) g(\tau, x)\, dx$$

Ripercorrendo i passi della dimostrazione del Teorema 3.4 troviamo che la principale differenza si riconduce alla trattazione del termine del primo ordine nell'equazione (3.10). In particolare, dal momento che il valore medio della densità Θ è zero, si ha

$$\iint_{\Omega^2} P(|x|)(y - x)\varphi'(x) g(\tau, x) g(\tau, y)\, dx\, dy = \int_\Omega P(|x|)\Big(m(\tau) - x\Big)\varphi'(x) g(\tau, x)\, dx$$

e, similmente, considerando il limite per $\gamma, \sigma \to 0$, in modo che $\sigma^2 = \lambda\gamma$, otteniamo che $g(\tau, x)$ soddisfa l'equazione di Fokker-Planck:

$$\partial_\tau g = \frac{\lambda}{2}\, \partial_x^2\Big(D(|x|)^2 g\Big) + \partial_x\Big(P(|x|)(x - m) g\Big)$$

Abbiamo visto che il limite per $\gamma, \sigma \to 0$, per cui $\sigma^2 = \lambda\gamma$, consente lo studio di configurazioni asintotiche in cui concorrono sia gli effetti diffusivi che quelli legati alle interazioni. Tuttavia è possibile ricondurci a situazioni in cui uno dei due effetti prevale sull'altro nel lungo periodo, come mostrato in [14].

Nel caso dominato dalla diffusione, cioè per cui $\frac{\sigma^2}{\gamma} \to +\infty$, possiamo supporre che:

$$\frac{\sigma^2}{\gamma^\alpha} \to \lambda, \qquad \alpha < 1$$

dunque definendo $g(\tau, x) = f(t, x)$, con $\tau = \gamma^\alpha t$, abbiamo che:

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\tau} \int_\Omega \varphi(x) g(\tau, x)\, dx = \frac{1}{\gamma^\alpha} \iint_{\mathcal{B}^2} \iint_{\Omega^2} \Theta(\eta_1)\Theta(\eta_2)\Big[\Big[\gamma(y - x) + \eta_1 D(|x|)\Big]\varphi'(x) \\ + \frac{1}{2}\Big[\gamma(y - x) + \eta_1 D(|x|)\Big]^2 \varphi''(x)\Big] g(\tau, x) g(\tau, y)\, dx\, dy\, d\eta_1\, d\eta_2 \\ + R(\gamma, \sigma)\end{aligned}$$

da cui osserviamo che, nel limite considerato, risultano rilevanti solo i termini del secondo ordine nello sviluppo di Taylor e g soddisfa l'equazione di diffusione:

$$\partial_\tau g = \frac{\lambda}{2}\, \partial_x^2\Big(D(|x|)^2 g\Big)$$

Nel caso dominato dal compromesso, cioè per cui $\frac{\sigma^2}{\gamma} \to 0$, possiamo definire $g(\tau, x) = f(t, x)$, con $\tau = \gamma^\alpha t$, supponendo che:

$$\frac{\sigma^2}{\gamma^\alpha} \to \lambda, \qquad \alpha > 1$$

Procedendo in modo simile, osserviamo che nel limite il termine diffusivo scompare e si ottiene l'equazione di puro trasporto conservativo:

$$\partial_\tau g = \partial_x \Big(P(|x|)(x - m) g \Big)$$

Capitolo 4

Modello di Boudin-Salvarani

4.1 Presentazione del modello

Il modello di Boudin-Salvarani descritto in [2] propone una raffigurazione della dinamica delle opinioni in una popolazione, in cui il self-thinking si traduce in una diffusione lineare, separata dall'effetto delle interazioni tra gli agenti.

Sia $\Omega = (-1, +1)$ un intervallo aperto, definiamo $\overline{\Omega}$ lo spazio delle possibili opinioni e $f = f(t, x)$ la distribuzione delle opinioni. Differentemente dal modello di Toscani [16], identifichiamo le interazioni binarie tra gli individui con scambi di opinioni rispetto al valore medio precedente alla collisione, per la cui rappresentazione ci serviamo della regola di interazione (1.8) introdotta nell'Esempio 1.1. Procedendo come illustrato nel Paragrafo 1.2, poste x', y' funzioni di x, y secondo (1.8), definiamo la forma debole del nucleo di interazione:

$$\langle Q(f, f), \varphi \rangle = \beta \iint_{\Omega^2} \Big[\varphi(x') - \varphi(x)\Big] f(t, x) f(t, y) \, dx \, dy \tag{4.1}$$

dove $\varphi = \varphi(x)$ è una funzione test regolare, mentre $\beta > 0$ è un parametro costante, che regola la probabilità dell'interazione, pertanto assumiamo che la probabilità di interazione tra gli individui sia indipendente dalle opinioni stesse. Il termine di guadagno Q^+ dipende dalla forma della regola di interazione (1.8), attraverso l'argomento della funzione test, che quindi dipende in modo intricato da x, y:

$$\langle Q^+(f, f), \varphi \rangle = \beta \iint_{\Omega^2} \varphi(x') f(t, x) f(t, y) \, dx \, dy \tag{4.2}$$

tuttavia, definendo

$$D_\eta = \left\{ (x, x') \in \mathbb{R} \times \overline{\Omega} \;\middle|\; \frac{x' - 1}{2} + \eta(x') \frac{x' + 1}{2} \leq x \leq \frac{x' + 1}{2} + \eta(x') \frac{x' - 1}{2} \right\}$$

$$K_\eta(x, x') = \frac{2\beta}{1 - \eta(x')} \chi\left((x, x') \in D_\eta\right) \qquad \forall x, x' \in \overline{\Omega}$$

con χ funzione caratteristica e $D_\eta \subseteq \overline{\Omega}^2$, essendo η una funzione di attrazione ammissibile, possiamo esprimere il termine di guadagno, sfruttando il cambio di variabile , in particolare dalla regola di interazione (1.8) troviamo:

$$y = \frac{2x' - x - \eta(x)x}{1-\eta(x)} \qquad \text{e} \qquad dy = \frac{2}{1-\eta(x)} dx'$$

Dunque permutando x, x' otteniamo una nuova forma debole per il termine di guadagno:

$$\langle Q^+(f,f), \varphi \rangle = \iint_{\Omega^2} K_\eta(x,x')\varphi(x)f(t,x)f\left(t, \frac{2x - x' - \eta(x')x'}{1-\eta(x')}\right) dx\, dx' \tag{4.3}$$

In definitiva, la forma debole dell'operatore di interazione per il modello di Boudin-Salvarani si definisce come segue:

$$\langle Q(f,f), \varphi \rangle = \langle Q^+(f,f), \varphi \rangle - \beta \iint_{\Omega^2} \varphi(x) f(t,x) f(t,x')\, dx\, dx' \tag{4.4}$$

ed è immediato dimostrare il seguente lemma.

Lemma 4.1. *Sia $f(t,\cdot) \in L^1(\Omega)$. Allora $Q(f,f)(t,\cdot)$, $Q^+(f,f)(t,\cdot)$ sono entrambi di classe $L^1(\Omega)$ e per q.o. t si ha che:*

$$\|Q(f,f)(t,\cdot)\|_{L^1(\Omega)} \le \left(\frac{2}{1-\max\eta} + 1\right) \beta \|f(t,\cdot)\|^2_{L^1(\Omega)}$$

$$\|Q^+(f,f)(t,\cdot)\|_{L^1(\Omega)} \le \frac{2\beta}{1-\max\eta} \|f(t,\cdot)\|^2_{L^1(\Omega)}$$

L'effetto del self-thinking è definito attraverso un operatore di diffusione lineare che segue una legge di Fourier non uniforme con termine di Fourier $\alpha = \alpha(x)$, che si sovrappone all'effetto medio delle interazioni, come descritto nel Paragrafo 1.3.

Combinando i due fenomeni, si giunge quindi a un'equazione integro-differenziale di tipo Boltzmann per l'evoluzione della distribuzione delle opinioni, ben definita dall'equazione (1.22), con il particolare operatore di interazione definito nella (4.3):

$$\int_\Omega \varphi(x) f_t(t,x)\, dx = \int_\Omega \Big[\alpha(x)\varphi_x(x)\Big]_x f(t,x)\, dx + \langle Q(f,f), \varphi \rangle \tag{4.5}$$

per ogni $\varphi \in C^2(\overline{\Omega})$, per $(t,x) \in [0,T] \times \Omega$ con $T > 0$, a cui si affianca un'eventuale condizione iniziale $f(0,x) = f^{in}(x)$ per ogni $x \in \overline{\Omega}$.

L'evoluzione temporale del sistema è influenzata dalla forma delle funzioni di attrazione e di Fourier, tuttavia non è possibile dedurre da principi matematici delle espressioni esatte ed è opportuno sfruttare esperimenti e studi sociologici per delinearne le caratteristiche. Inoltre specifichiamo che la dinamica delle opinioni una popolazione potrebbe non essere indipendente dalla popolazione stessa, in effetti è sufficiente pensare a come sistemi educativi e regole sociali diverse influiscano drasticamente nelle interazioni tra gli individui. Per questi motivi e per garantire sufficiente flessibilità al modello, abbiamo considerato delle ipotesi piuttosto deboli sui vincoli matematici, in questo modo è possibile adattare il modello alle necessità rappresentative di diverse popolazioni.

Nonostante ciò, per permettere una trattazione dal punto di vista matematico, si sono introdotte delle ipotesi semplificative che ne riducono l'applicabilità e fissano dei limiti di validità. In particolare, sfruttando degli strumenti statistici, è necessario supporre che la popolazione sia sufficientemente grande, inoltre abbiamo ipotizzato che la probabilità delle interazioni binarie tra gli agenti sia costante, ma in una comunità reale gli individui sono inseriti in una rete sociale e le interazioni ne sono profondamente influenzate. Tuttavia esprimere i tali rapporti in funzione di tempo e opinione risulterebbe complesso e comunque riduttivo, pertanto nel seguito trascureremo questo effetto, ma un passo successivo per dettagliare ulteriormente il modello potrebbe essere l'introduzione di ulteriori variabili indipendenti e la costruzione di una rete sociale di interazioni.

4.2 Principali proprietà matematiche

Nel seguito studieremo alcune proprietà matematiche delle equazioni trovate per la dinamica delle opinioni e in particolare mostreremo l'esistenza di soluzioni deboli per (4.5). Per procedere ci serviamo di alcuni risultati preliminari.

Proposizione 4.2. *Sia $f = f(t,x)$ soluzione debole non negativa di (4.5), con condizione iniziale $f^{in} \in L^1(\Omega)$ non negativa. Allora si ha che*

$$\|f(t,\cdot)\|_{L^1(\Omega)} = \|f^{in}\|_{L^1(\Omega)} \qquad \textit{per q.o. } t \geq 0$$

Dimostrazione. Osserviamo che dalla definizione dell'operatore di interazione (4.1) si ha che $\langle Q(f,f),1\rangle = 0$. Considerando la (4.5) per $\varphi \equiv 1$ troviamo che $\|f(t,\cdot)\|_{L^1(\Omega)}$ è costante rispetto alla variabile t, quindi in particolare si ha la tesi per $t = 0$ $\square$

Questo risultato è noto nell'ambito della teoria cinetica come conservazione della massa totale, tuttavia è realistico per brevi intervalli temporali, infatti a lungo termine si dovrebbero tenere in considerazione gli effetti dei processi di nascita e morte, che determinano oscillazioni sul numero totale di individui. Tipicamente le previsioni estratte dalla dinamica delle opinioni, ad esempio nel caso di referendum o elezioni, si applicano sfruttando dati iniziali recenti e si possono trascurare tali fluttuazioni.

Sotto le ipotesi della Proposizione 4.2, osservando che $|x| \leq 1$ per definizione dello spazio delle opinioni, si ha che i momenti di f sono limitati:

$$\int_\Omega x^n f(t,x)\,dx \leq \|f^{in}\|_{L^1(\Omega)} \qquad \textit{per q.o. } t \geq 0 \tag{4.6}$$

Proposizione 4.3. *Consideriamo il seguente problema ai valori iniziali e al contorno, rispetto all'incognita $v = v(t,x)$ per $x \in \Omega$, $t \in [0,T]$, con $T > 0$:*

$$\begin{cases} v_t - [\alpha(x)v_x]_x + \mu v = g & \textit{in } [0,T]\times\Omega \quad (4.7a) \\ v(0,x) = v^{in}(x) & \textit{per } x \in \Omega \quad (4.7b) \\ \lim\limits_{x\to\pm1} \alpha(x)v_x(t,x) = 0 & \textit{per q.o. } t \in [0,T] \quad (4.7c) \end{cases}$$

dove $\mu \geq 0$ costante, $g \in C^0([0,T];L^1(\Omega))$, $v^{in} \in L^1(\Omega)$ sono funzioni non negative. Allora il problema ammette un'unica soluzione $v \in C^0([0,T];L^1(\Omega))$ e inoltre v è non negativa

Dimostrazione. Sia $u = u(t,x)$ soluzione del problema ai valori iniziali e al contorno:

$$\begin{cases} u_t - [\alpha(x)u_x]_x = 0 & \text{in } [0,T] \times \Omega \\ u(0,x) = v^{in}(x) & \text{per } x \in \Omega \\ \lim\limits_{x \to \pm 1} \alpha(x) u_x(t,x) = 0 & \text{per q.o. } t \in [0,T] \end{cases}$$

Osserviamo che esistenza e unicità della soluzione sono il principale risultato di [10], inoltre si dimostra che $u \in C^0([0,T]; L^1(\Omega))$ ed è non negativa. In particolare possiamo considerare $y(t,x) = u(t,x)\exp(-\mu t)$ e si ha che y risolve (4.7a) con valori iniziali e al bordo dati da (4.7b), (4.7c), per $g \equiv 0$

Sfruttando il principio di Duhamel, consideriamo $w = w(t,x;s)$, per $(t,x) \in [0,T] \times \Omega$, $s \leq t$, soluzione del seguente:

$$\begin{cases} w_t(t,x;s) - [\alpha(x)w_x(t,x;s)]_x + \mu w(t,x;s) = 0 & \text{per } (t,x) \in [0,T] \times \Omega,\ s \leq t \\ w(s,x;s) = g(s,x) & \text{per } x \in \Omega \\ \lim\limits_{x \to \pm 1} \alpha(x) w_x(t,x;s) = 0 & \text{per q.o. } t \in [0,T] \end{cases}$$

allora si ha che

$$z(t,x) = \int_0^t w(t,x;s)\, ds$$

risolve (4.7a), con condizione iniziale che si annulla e valori al bordo dati da (4.7c). Per linearità, si ha che $v(t,x) = y(t,x) + z(t,x)$ risolve (4.7a) con valori iniziali e al bordo dati da (4.7b), (4.7c). La regolarità e l'unicità della soluzione seguono immediatamente. $\square$

Sfruttando i risultati precedenti possiamo quindi enunciare il seguente teorema di esistenza.

Teorema 4.4. *Consideriamo il problema (4.5) che ha senso in $\mathcal{D}'(-T,T)$, con condizione iniziale $f(0,x) = f^{in}(x)$ per ogni $x \in \Omega$. Se $f^{in} \in L^1(\Omega)$ è una funzione non negativa. Allora esiste $f \in L^\infty((0,T); L^1(\Omega))$ soluzione debole non negativa*

Dimostrazione. Definiamo

$$\rho = \int_\Omega f^{in}(x)\, dx$$

e consideriamo la successione $(f^n)_{n \in \mathbb{N}}$ definita per induzione, con $f^0 \equiv 0$ e tale che:

$$\begin{cases} \int_\Omega \varphi f_t^{n+1}\, dx - \int_\Omega (\alpha \varphi_x)_x f^{n+1}\, dx + \beta\rho \int_\Omega \varphi f^{n+1}\, dx = \langle Q^+(f^n, f^n), \varphi \rangle & (4.8a) \\ f^n(0,x) = f^{in}(x) \qquad \text{per } x \in \Omega,\ n \geq 1 & (4.8b) \\ \lim\limits_{x \to \pm 1} \alpha(x) f_x^n(t,x) = 0 \qquad \text{per q.o. } t \geq 0,\ n \geq 1 & (4.8c) \end{cases}$$

Per il Lemma 4.1, osserviamo che è possibile applicare la Proposizione 4.3 al problema definito e deduciamo che $f^n \in C^0([0,T]; L^1(\Omega))$ esiste ed è non negativa.

Osserviamo (f^n) è una successione non decrescente, infatti possiamo dimostrarlo per induzione. In particolare, sottraendo le equazioni (4.8a) per f^n e per f^{n+1}, per $n \geq 1$, otteniamo:

$$\int_\Omega \varphi (f^{n+1} - f^n)_t \, dx - \int_\Omega (\alpha \varphi_x)_x (f^{n+1} - f^n) \, dx$$
$$= \langle Q^+(f^n, f^n), \varphi \rangle - \langle Q^+(f^{n-1}, f^{n-1}), \varphi \rangle - \beta\rho \int_\Omega \varphi (f^{n+1} - f^n) \, dx$$

cioè $(f^{n+1} - f^n)$ soddisfa le ipotesi della Proposizione 4.3, poiché risolve un'equazione della forma (4.7a), con condizioni iniziali date da $(f^{n+1} - f^n)(0, x) = 0$ per $x \in \Omega$ e condizioni al contorno $\lim_{x \to \pm 1} \alpha(x)(f^{n+1} - f^n)_x(t, x) = 0$ per q.o. t. Dunque, sapendo che $f^0 \equiv 0$, si ha che $f^1 \geq 0$. Supponendo che $f^n \leq f^{n+1}$, il secondo membro dell'equazione precedente è non negativo, quindi la Proposizione 4.3 implica che $(f^{n+1} - f^n) \geq 0$, cioè $f^n \leq f^{n+1}$.

Inoltre si dimostra che:

$$\int_\Omega f^n \, dx \leq \rho, \qquad n \geq 0$$

infatti, se consideriamo $\varphi \equiv 1$ nell'equazione (4.8a), ricordando la forma dell'operatore di interazione (4.4) e che $\langle Q(f, f), 1 \rangle = 0$, si ha

$$\frac{d}{dt} \int_\Omega f^{n+1} \, dx + \beta\rho \int_\Omega f^{n+1} \, dx = \beta \left(\int_\Omega f^n \, dx \right)^2$$

e possiamo procedere per induzione. Osservando che per $n = 0$ la tesi è immediata, supponiamo che valga per $n \geq 0$ e troviamo che

$$\frac{d}{dt} \int_\Omega f^{n+1} \, dx + \beta\rho \int_\Omega f^{n+1} \, dx \leq \beta\rho^2$$

da cui si verifica il passo induttivo.

Pertanto, per il teorema di convergenza monotona, esiste $f \in L^\infty((0, T); L^1(\Omega))$ tale che (f^n) converge a f quasi ovunque in $L^\infty((0, T); L^1(\Omega))$.

La funzione f trovata soddisfa la condizione iniziale, cioè $f(0, x) = f^{in}(x)$ per ogni $x \in \Omega$. Mostriamo quindi che f risolve l'equazione (4.5) in senso distribuzionale. Osserviamo che per il teorema di convergenza dominata si ha che per ogni $\varphi \in C^2(\overline{\Omega})$, $\psi \in \mathcal{D}(-T, T)$:

$$\int_0^T \int_\Omega \varphi(x)\psi(t) f^{n+1}(t, x) \, dx \, dt + \int_\Omega \varphi(x)\psi(0) f^{n+1}(0, x) \, dx$$
$$\xrightarrow{n \to \infty} \int_0^T \int_\Omega \varphi(x)\psi(t) f(t, x) \, dx \, dt + \int_\Omega \varphi(x)\psi(0) f^{in}(0, x) \, dx$$

$$\int_0^T \int_\Omega \Big[\alpha(x)\varphi_x(x)\Big]_x \psi(t) f^{n+1}(t, x) \, dx \, dt \xrightarrow{n \to \infty} \int_0^T \int_\Omega \Big[\alpha(x)\varphi_x(x)\Big]_x \psi(t) f(t, x) \, dx \, dt$$

Inoltre per il termine di perdita dell'operatore di interazione, possiamo sfruttare la conservazione della massa verificata nella Proposizione (4.2), quindi per ogni $\varphi \in C^2(\overline{\Omega})$, $\psi \in \mathcal{D}(-T, T)$:

$$\beta\rho \int_0^T \int_\Omega \varphi(x)\psi(t) f^{n+1}(t, x) \, dx \, dt \xrightarrow{n \to \infty} \beta \int_0^T \iint_{\Omega^2} \varphi(x)\psi(t) f(t, x) f(t, y) \, dx \, dy \, dt$$

Infine, consideriamo il termine di guadagno nella forma data dall'equazione (4.2):

$$\beta \int_0^T \iint_{\Omega^2} \varphi(x')\psi(t) f^n(t,x) f^n(t,y)\, dx\, dy\, dt$$

per ogni $\varphi \in C^2(\overline{\Omega})$, $\psi \in \mathcal{D}(-T,T)$, inoltre per semplicità assumiamo che $\|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)} = 1$, allora abbiamo che

$$\begin{aligned}
&\iint_{\Omega^2} |\varphi(x')||f^n(t,x)f^n(t,y) - f(t,x)f(t,y)|\, dx\, dy \\
&\qquad \le \iint_{\Omega^2} |f^n(t,x)f^n(t,y) - f(t,x)f^n(t,y) + f(t,x)f^n(t,y) - f(t,x)f(t,y)|\, dx\, dy \\
&\qquad \le \iint_{\Omega^2} |f^n(t,x) - f(t,x)||f^n(t,y)|\, dx\, dy + \iint_{\Omega^2} |f^n(t,y) - f(t,y)||f(t,x)|\, dx\, dy \\
&\qquad \le 2\rho \, \|f^n(t,\cdot) - f(t,\cdot)\|_{L^\infty(\Omega)} \xrightarrow{n\to\infty} 0
\end{aligned}$$

In definitiva considerando i risultati ottenuti per i limiti di $n \to \infty$, deduciamo che f soddisfa (4.5) $\square$

Il teorema garantisce l'esistenza della soluzione per il problema (4.5) con dato iniziale $f^{in} \in L^1(\Omega)$ non negativo, tuttavia non assicura l'unicità né fornisce una caratterizzazione della soluzione in funzione dei dati al contorno, infatti la costruzione della teoria su $L^1(\Omega)$ non garantisce che il significato della traccia della soluzione sul bordo sia ben definito. Tuttavia supponendo che $f \in C^1([0,T]; C^2(\overline{\Omega}))$, si ha che $\lim_{x\to\pm 1} \alpha(x) f_x^n(t,x) = 0$, quindi le soluzioni soddisfano in modo naturale le condizioni al bordo di Neumann.

Conclusioni

I modelli per la formazione delle opinioni discussi permettono di descrivere gli effetti di interazioni e self-thinking e grazie ai deboli vincoli matematici imposti, si prestano a rappresentare svariati contesti sociologici con opportune modifiche, sebbene sia opportuno considerare una popolazione sufficientemente grande per poter sfruttare gli strumenti della meccanica statistica. La teoria cinetica offre quindi un approccio flessibile nell'ambito dei sistemi multi-agente e consente di delineare una conoscenza multiscala, caratterizzando le interazioni tra i singoli individui e le relazioni con il comportamento su larga scala dei sistemi. Tuttavia gli aspetti esplorati nella dinamica delle opinioni rappresentano solo un primo passo rispetto ad una descrizione accurata di un sistema reale e un passo successivo può essere intrapreso tenendo in considerazione la rete sociale che la popolazione sottende e dettagliando con leggi più precise le possibili interazioni.

Bibliografia

[1] E. Ben-Naim. Opinion dynamics: rise and fall of political parties. *Europhysics Letters*, 69:671–677, 2005.

[2] L. Boudin and F. Salvarani. A kinetic approach to the study of opinion formation. *Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 43(4):507–522, 2009.

[3] A. Bressan. Notes on the Boltzmann equation, 2005. Lecture notes for a summer course given at SISSA, Trieste (Italy).

[4] R. Illner C. Cercignani and M. Pulvirenti. *The Mathematical Theory of Dilute Gases*. Springer, 1994.

[5] M. Fraia and A. Tosin. The Boltzmann legacy revisited: kinetic models of social interactions. *Matematica, Cultura e Società – Rivista dell'Unione Matematica Italiana*, 5(2):93–109, 2020.

[6] S. Galam. Rational group decision making. a random field ising model at t=0. *Physica A*, 238:66–80, 1997.

[7] S. Galam and S. Moscovici. Towards a theory of collective phenomena: Consensus and attitude changes in groups. *European Journal of Social Psychology*, 21(1):49–74, 1991.

[8] E. Ising. Beitrag zur theorie des ferromagnetismus. *Zeitschrift für Physik*, 31:253–258, 1925.

[9] R. G. Laha and V. K. Rohatgi. *Probability Theory*. John Wiley and Sons, 1979.

[10] G. Metafune M. Campiti and D. Pallara. Degenerate self-adjoint evolution equations on the unit interval. *Semigroup Forum*, 57:1–36, 1998.

[11] R. Ochrombel. Simulation of Sznajd sociophysics model with convincing single opinions. *International Journal of Modern Physics C*, 12(7):1091, 2001.

[12] L. Pareschi and G. Toscani. *Interacting Multiagent Systems: Kinetic equations and Monte Carlo methods*. Oxford University Press, 2013.

[13] Y. Gefen S. Galam and Y Shapir. Sociophysics: A new approach of sociological collective behaviour: I. mean-behaviour description of a strike. *Journal of Mathematical Sociology*, 9(1):1–13, 1982.

[14] F. Slanina and H. Lavicka. Analytical results for the Sznajd model of opinion formation. *European Physical Journal*, 35:279–288, 2003.

[15] K. Sznajd-Weron and J. Sznajd. Opinion evolution in closed community. *International Journal of Modern Physics C*, 11(6):1157–1165, 2000.

[16] G. Toscani. Kinetic models of opinion formation. *Communications in Mathematical Sciences*, 4(3):481–496, 2006.