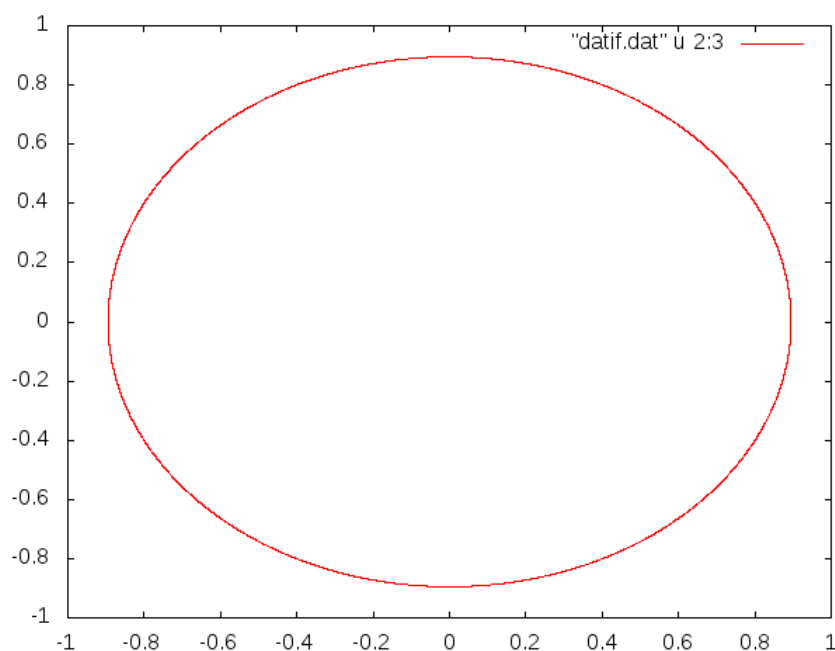


In questo problema è stato studiato il moto di un asteroide P intorno ad un Sole A di massa M_a ed un pianeta B di massa M_b , i quali orbitano su due orbite differenti intorno al loro centro di massa con stessa velocità angolare ω , mantenendo tra loro una distanza fissa R .

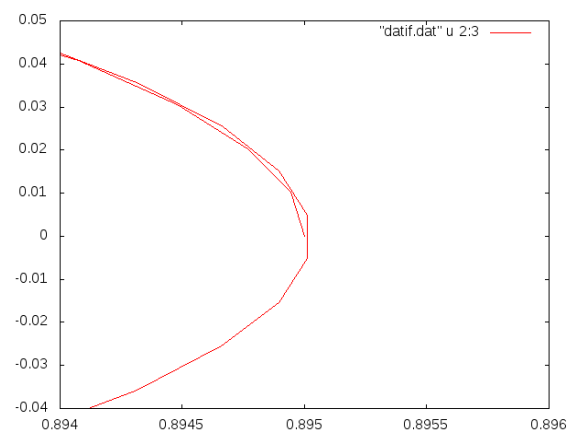
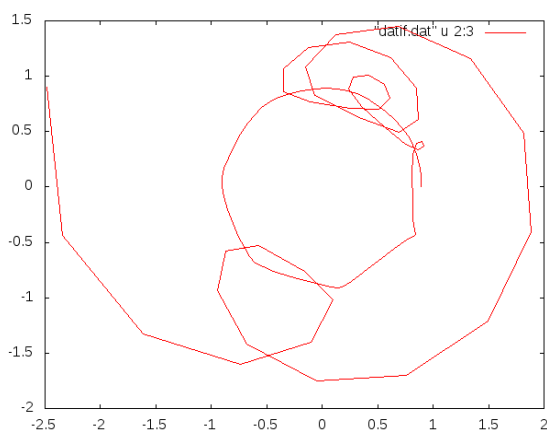
L'origine degli assi è stato posto nel centro di massa del sistema composto da A e B, il sistema di riferimento, caratterizzato dalle coordinate (x,y) , risulta essere non inerziale e co-rotante con il pianeta B.

Per lo svolgimento della prova è stato utilizzato il metodo di integrazione Runge-Kutta al secondo ordine, poiché risulta accurato e convergente.

Per iniziare è stata posta $M_b = 0$ e $M_a = 1$ (quindi $x_A = 0$) e sono state integrate le equazioni del moto con condizioni iniziali $x(0) = 0.895$, $y(0) = 0$, $v_x(0) = 0$, $v_y(0) = 1.018$, per un tempo di 10 unità temporali astronomiche, con un passo di integrazione dt pari a 0.001. Il moto osservato descrive una circonferenza (come prevedibile), come si può vedere dal grafico sottostante, poiché è presente solo il Sole al centro del sistema di riferimento senza il pianeta B che possa influire sul moto dell'asteroide. L'asteroide ritorna vicino alle condizioni iniziali dopo circa 6 unità astronomiche e si mantiene costantemente a distanza 0.895 dal Sole.

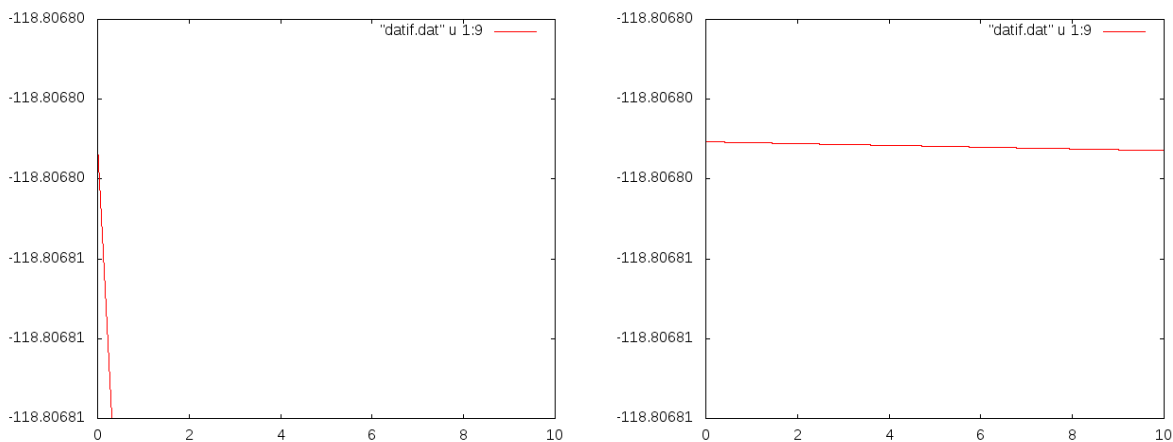


Per studiare il moto con queste condizioni iniziali è stato scelto un $dt=10^{-3}$, poiché con un dt più alto il metodo era instabile. Dai grafici seguenti si può vedere come con un $dt=0.1$ (in basso a sinistra) l'asteroide sembra seguire inizialmente un'orbita circolare, per poi allontanarsi anche di molto dalla circonferenza producendo un'orbita strana. Invece, per $dt=0.01$ (grafico in basso a destra), l'orbita descritta dall'asteroide somiglia molto più ad una circonferenza, ma con un ingrandimento vicino alla posizione iniziale da cui è stato fatto partire P, si nota che la traiettoria in alcuni punti tende ad assumere l'andamento di una spezzata.



Inoltre la quantità J che si dovrebbe conservare, con la scelta di $dt=0.01$, tende a diminuire molto più rapidamente con il passare del tempo di quanto non faccia con $dt=0.001$.

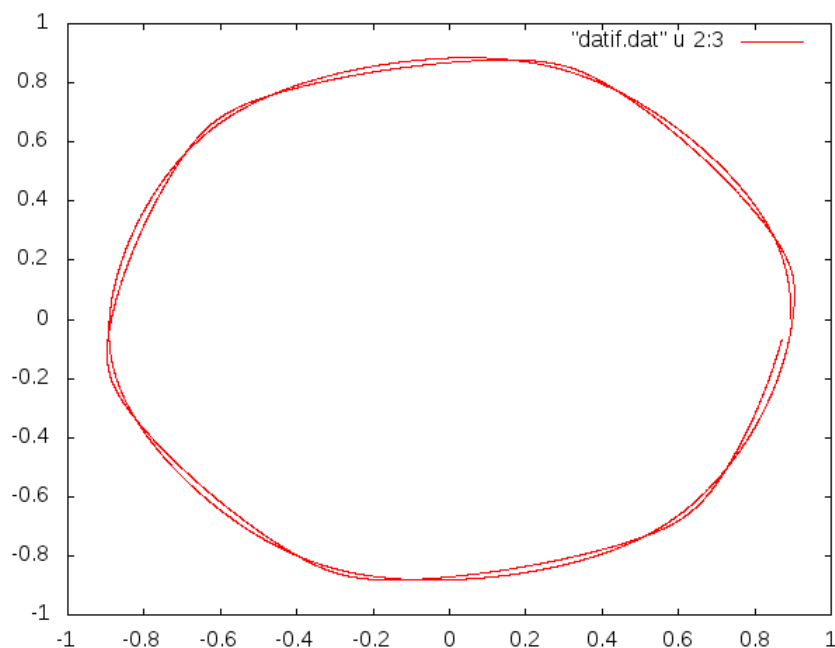
Qui sotto sono riportati i grafici di J in funzione del tempo: sulla sinistra per $dt=0.01$, sulla destra per $dt=0.001$. (Entrambi i grafici hanno lo stesso range, sia sulle x che sulle y .)



Si poteva scegliere un dt anche più piccolo (non troppo a causa della natura della macchina la quale sarebbe incorsa in problemi di approssimazione), anche se con $dt=0.001$ viene ben visualizzato il corretto moto dell'asteroide, senza stressare il calcolatore in lunghi calcoli producendo file di grandi dimensioni.

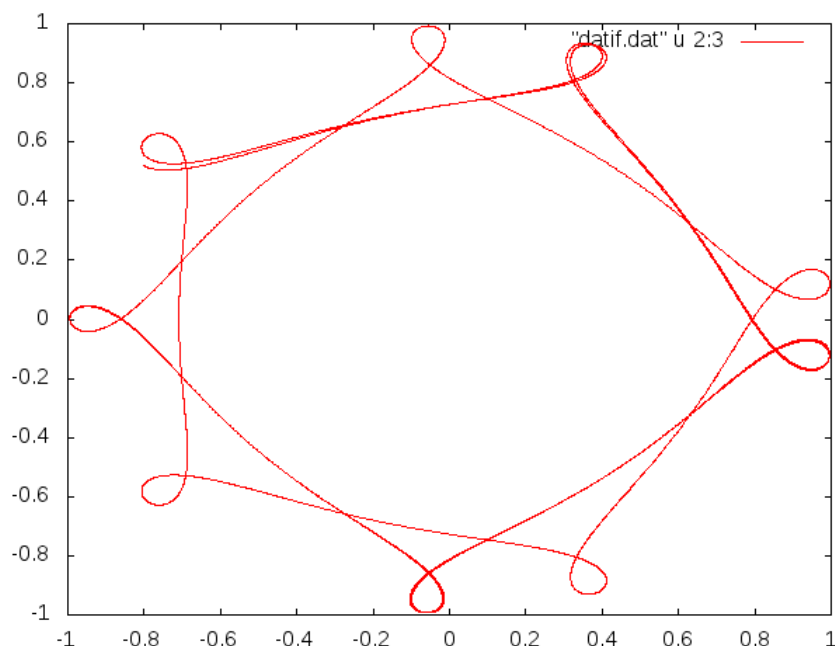
In seguito è stata posta $M_b=0.0001$ e, come sempre, $M_a=1-M_b$, ripetendo l'integrazione con le stesse condizioni iniziali del caso prima trattato. E' stato analizzato il moto per 10 unità astronomiche ed è stato visto come la presenza del pianeta B abbia influito sul moto dell'asteroide.

Di seguito è riportato il grafico della traiettoria di P.



Si può osservare come la traiettoria non descrive più una circonferenza come nel caso precedente, ma ha una forma più "spigolosa", quasi fosse una poligonale dagli angoli morbidi. Questo è dovuto alle perturbazioni provocate dalla presenza del pianeta B, il quale, nel suo moto circolare intorno al centro di massa, sviluppa una forza di attrazione più meno intensa sul corpo P a seconda di dove si trova rispetto a quest'ultimo. E' opportuno anche notare che il Sole A non rimane fermo nel centro del sistema, come nel caso precedente, ma ruota, partecipando anch'esso a perturbare il moto dell'asteroide, il quale devia dalla traiettoria circolare sopra vista.

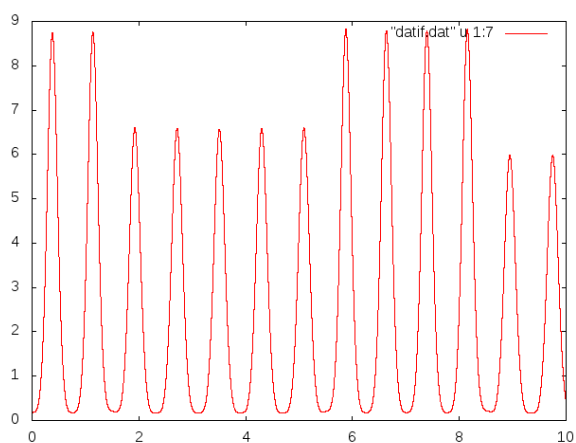
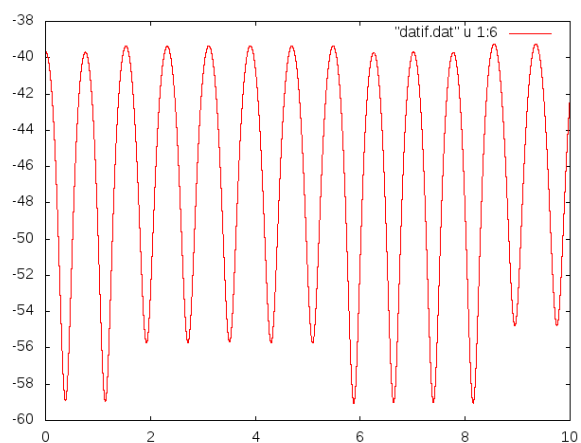
Successivamente sono state considerate le seguenti condizioni iniziali $x(0) = -0.995$, $y(0) = 0$, $v_x(0) = 0$, $v_y(0) = 0.6$ ed è stata posta $M_b = 0.0001$. E' stato analizzato il moto per 10 unità temporali.



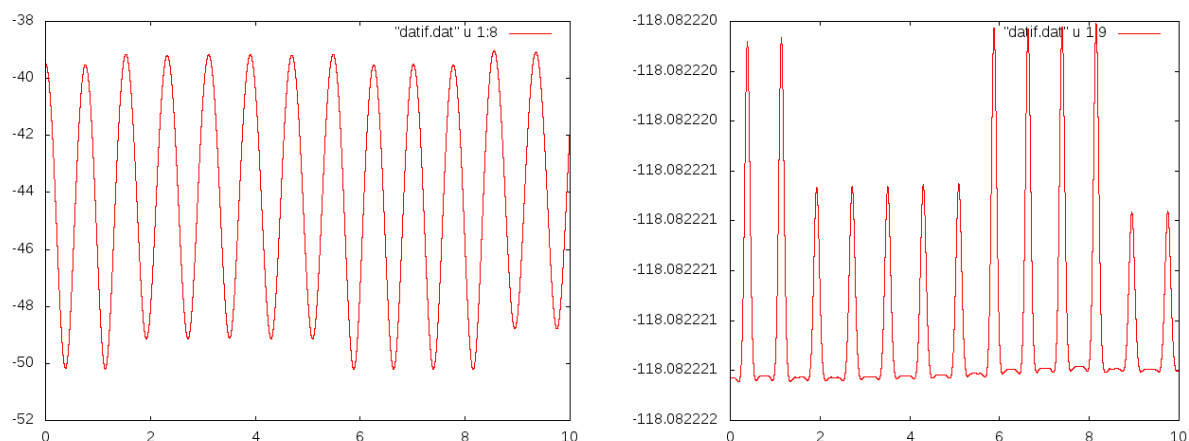
Dal grafico si può notare come la traiettoria in questo caso cambia radicalmente forma, infatti, la traiettoria (in sole 10 unità temporali il moto non sembra essere periodico) pare quasi formare dei "poligoni" ai cui angoli l'asteroide forma degli ep cicli. Questa apparentemente strana forma dell'orbita del corpo P è probabilmente dovuta al moto retrogrado, poiché l'asteroide ruota in senso contrario al verso di rotazione del sistema da cui è osservato, dal quale sembra seguire strane traiettorie.

Come ultimo studio è stato analizzato il moto di P con le stesse condizioni del moto indicate precedentemente, è stato controllato l'andamento dell'energia potenziale gravitazionale, dell'energia cinetica e della loro somma riguardanti l'asteroide ed è stato verificato che J risulta essere una costante del moto. Infine è stato studiato l'errore di integrazione ed è stato verificato che quest'ultimo seguisse l'andamento previsto per l'algoritmo di Runge-Kutta del secondo ordine.

A seguire i grafici a sinistra dell'Energia Potenziale in funzione del tempo, a destra dell'Energia Cinetica



A seguire i grafici a sinistra della somma dell'energia potenziale e di quella cinetica, a destra della quantità conservata J.



Come si può vedere dai grafici né l'energia cinetica, né l'energia potenziale, né tantomeno la loro somma si è conservata, ma tutte e tre oscillano tra valori abbastanza differenti tra loro. Questo è dovuto anche al fatto che il principio di conservazione dell'energia dei sistemi inerziali non è valido in quelli non inerziali, come in questo caso.

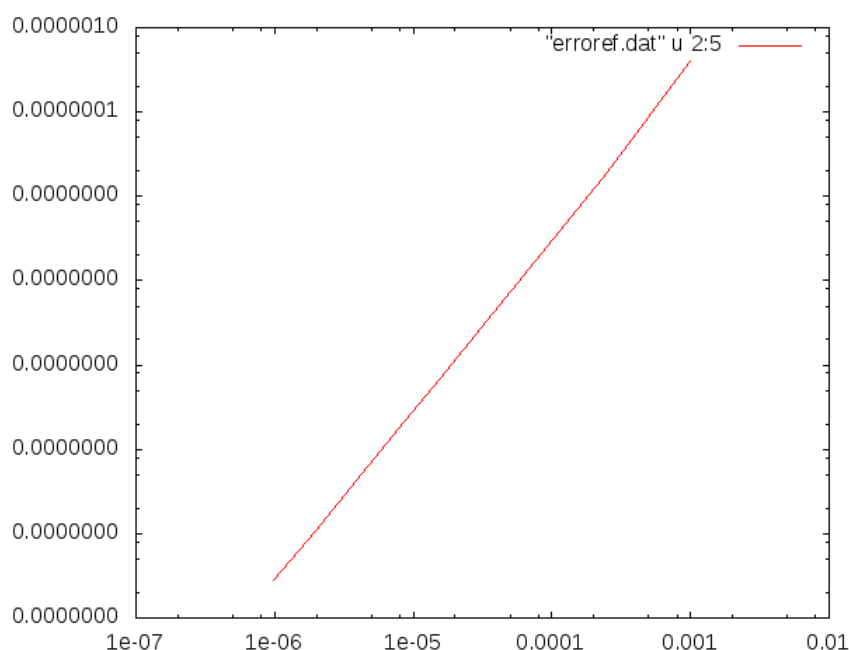
L'andamento di U e di K sembrano essere speculari.

Invece per quanto riguarda la quantità J, essa oscilla ma tra valori vicinissimi tra loro, quindi possiamo infine dire che J è una quantità conservata.

(N.B. lo studio sull'andamento dell'energia cinetica potenziale e della quantità J è stato fatto con $dt=0.0001$, per avere una maggiore precisione)

Infine riportiamo lo studio in scala doppiologaritmica dell'andamento di J in funzione di dt: sull'asse delle x è visualizzato il logaritmo di dt, mentre sull'asse delle y il logaritmo di $|(J-J_0)/J_0|$. Per fare ciò è stato dimezzato ogni volta dt (partendo da $dt=10^{-3}$ e arrivando a $dt=10^{-6}$) e per ogni dt è stata salvata la quantità J dopo 2 unità temporali, la quale è stata poi confrontata con J_0 , cioè la quantità J calcolata all'inizio del ciclo.

Come si può vedere dal grafico, dalla tabella dei dati e dal fit (sotto riportato), il coefficiente angolare della retta è 2.03535 ± 0.01027 , verificando l'andamento dell'errore previsto da questo metodo di integrazione.



t	dt	J	J0	(J-J0) / J0
2.000000	0.0010000000000000	-118.082174	-118.082221	0.00000040256080300606
2.000000	0.0005000000000000	-118.082211	-118.082221	0.00000008595560005967
2.000000	0.0002500000000000	-118.082219	-118.082221	0.00000001964950591958
2.000000	0.0001250000000000	-118.082221	-118.082221	0.00000000468218780032
2.000000	0.0000625000000000	-118.082221	-118.082221	0.00000000114175811490
2.000000	0.0000312500000000	-118.082221	-118.082221	0.00000000028183838199
2.000000	0.0000156250000000	-118.082221	-118.082221	0.00000000007000591696
2.000000	0.0000078125000000	-118.082221	-118.082221	0.00000000001744636026
2.000000	0.0000039062500000	-118.082221	-118.082221	0.00000000000434236461
2.000000	0.0000019531250000	-118.082221	-118.082221	0.00000000000108204091
2.000000	0.0000009765625000	-118.082221	-118.082221	0.00000000000028365815

Wed Nov 5 01:00:32 2014

FIT: data read from "erroref.dat" u (log(\$2)):(log(\$5))
format = x:z
#datapoints = 11
residuals are weighted equally (unit weight)

function used for fitting: f(x)
fitted parameters initialized with current variable values

Iteration 0
WSSR : 1791.78 delta(WSSR)/WSSR : 0
delta(WSSR) : 0 limit for stopping : 1e-05
lambda : 7.5304

initial set of free parameter values

a = 1
b = 1

After 5 iterations the fit converged.
final sum of squares of residuals : 0.0501261
rel. change during last iteration : -1.73239e-11

degrees of freedom (FIT_NDF) : 9
rms of residuals (FIT_STDFIT) = sqrt(WSSR/ndf) : 0.0746296
variance of residuals (reduced chisquare) = WSSR/ndf : 0.00556957

Final set of parameters Asymptotic Standard Error
=====

a	= -0.819063	+/- 0.1088	(13.29%)
b	= 2.03535	+/- 0.01027	(0.5044%)

correlation matrix of the fit parameters:

	a	b
a	1.000	
b	0.978	1.000