

# RELAZIONE FONDAMENTI DI AUTOMATICA

---

---

Michele Purrone mat. 201181  
A.A. 2021/2022

**a.** Si consideri un sistema lineare e stazionario a tempo continuo descritto dalla seguente risposta al gradino

$$y(t) = \left( 3/5 - \frac{15 e^{-3t}}{73} - \frac{3 e^{-t/3} (48 \cos(t) + 91 \sin(t))}{365} \right) 1(t)$$

Determinare:

1. la funzione di trasferimento del sistema ed i suoi poli e zeri;
2. i modi di evoluzione libera del sistema;
3. la risposta all'impulso del sistema;
4. il grafico della risposta al gradino;
5. la risposta alla rampa;
6. un possibile modello ARMA la cui funzione di trasferimento è quella ottenuta nel primo punto dell'esercizio;
7. tenendo conto del modello determinato al punto precedente valutare le condizioni iniziali in corrispondenza delle quali il transitorio della risposta al gradino è nullo.

**b.** Costruire, utilizzando Adobe Illustrator o programma equivalente ed argomentando tutti i passaggi, il Diagramma di Bode per la seguente funzione di trasferimento (Allegare file .ai o .eps)

$$G(s) = \frac{40 \left(1 - \frac{s}{30}\right)}{s \left(s^2 + \frac{s}{2} + 4\right)}$$

c. Si consideri il seguente schema a blocchi in retroazione algebrica ed unitaria

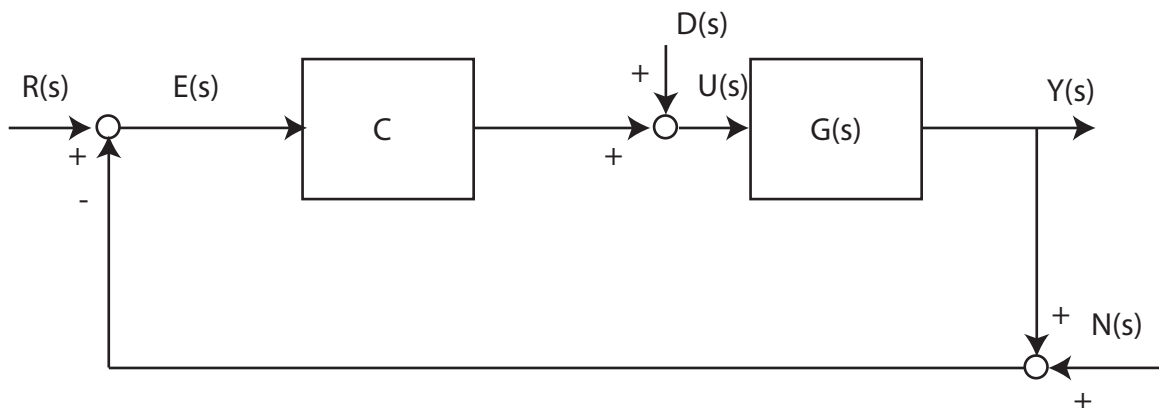


Figure 1: Schema a Blocchi in Retroazione Algebrica ed Unitaria

La funzione di trasferimento dell'impianto è

$$G(s) = \frac{1}{(s + 5)}$$

Determinare:

1. uno schema di controllo on-off scegliendo il livello del riferimento da asservire e discutendo l'andamento del segnale di controllo al variare della fascia di incertezza intorno alla quale far variare l'uscita asservita (utilizzare Simulink);
2. Si supponga che il regolatore abbia la seguente struttura lineare;

$$C(s) = \frac{K}{s(s + 1)}$$

Determinare, servendosi degli strumenti di CAD spiegati durante il corso (Maple, Matlab e Simulink),

- (a) il valore limite di K in corrispondenza del quale la stabilità in retroazione non è più garantita;
- (b) scelto a piacere un valore di K appartenente alla regione di stabilità rappresentare il diagramma dei moduli e delle fasi della funzione di sensitività e sensitività complementare;
- (c) sempre considerando il valore di K scelto in precedenza valutare, servendosi delle opportune risposte in frequenza, l'andamento dell'errore di inseguimento al riferimento  $r(t) = \sin\left(\frac{t}{15}\right) 1(t)$ . Quanto vale il più piccolo errore di inseguimento ottenibile dalla struttura di controllo così assegnata oltre il quale il sistema non è più stabile a ciclo chiuso?;
- (d) si consideri sempre il valore di K scelto nel secondo punto. Nell'ipotesi che il disturbo sia il seguente segnale

$$d(t) = \sin\left(\frac{t}{40}\right) 1(t)$$

e che il rumore di misura abbia la seguente espressione

$$n(t) = \sin(90t) 1(t)$$

quanto vale in configurazione *caso peggiore* l'ampiezza dell'errore sull'uscita regolata a regime? Argomentare sfruttando le risposte in frequenza dello schema retroazionato e le eventuali (se applicabili) approssimazioni in bassa e alta frequenza della funzione di anello.

d. Si consideri il seguente schema di controllo in retroazione algebrica ed unitaria.

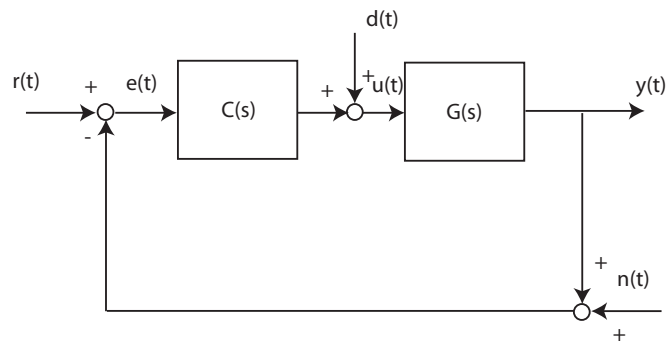


Figure 2:

dove  $G(s)$  rappresenta la f.d.t. del processo

$$G(s) = \frac{9}{(s+1)^2(s+9)}$$

Si chiede di determinare un regolatore  $C(s)$  di struttura semplice che garantisca il soddisfacimento delle seguenti specifiche:

1. errore di al gradino non superiore al 5 %;
2. Picco di Risonanza  $M_{r,dB} \leq 3 \text{ dB}$ , banda passante  $1 \leq \omega_{BW} \leq 4 \frac{\text{rad}}{\text{sec}}$ .

Ripuliamo l'area di lavoro e carichiamo i Toolbox essenziali:  
`restart :with(intrans) :with(DynamicSystems) :with(plots) :`

# PROGETTO FONDAMENTI DI AUTOMATICA

**Michele Purrone mat. 201181**

## Quesito A

Si consideri un sistema lineare e stazionario a tempo continuo descritto dalla seguente risposta al gradino:

$$y(t) := \left( \frac{3}{5} - \frac{15 \cdot e^{-3t}}{73} - \frac{\left( 3 \cdot e^{-\frac{t}{3}} \cdot (48 \cdot \cos(t) + 91 \cdot \sin(t)) \right)}{365} \right) \cdot \text{Heaviside}(t);$$
$$y := t \mapsto \left( \frac{3}{5} - \frac{15 e^{-3t}}{73} - \frac{3 e^{-\frac{t}{3}} (48 \cos(t) + 91 \sin(t))}{365} \right) \text{Heaviside}(t) \quad (1)$$

Determinare:

1. la funzione di trasferimento del sistema ed i suoi poli e zeri;
2. i modi di evoluzione libera del sistema;
3. la risposta all'impulso del sistema;
4. il grafico della risposta al gradino;
5. la risposta alla rampa;
6. un possibile modello ARMA la cui funzione di trasferimento è quella ottenuta nel primo punto dell'esercizio;
7. tenendo conto del modello determinato al punto precedente valutare le condizioni iniziali in corrispondenza delle quali il transitorio della risposta al gradino è nullo.

### ▼ 1. Funzione di trasferimento del sistema, poli e zeri

Nei modelli matematici dei sistemi dinamici, la funzione di trasferimento è una funzione che caratterizza il comportamento di un sistema dinamico tempo-invariante nel dominio della frequenza, mettendo in relazione l'ingresso e l'uscita. Consideriamo una funzione  $u(t): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  che rappresenta l'ingresso al variare del tempo  $t$  ed una funzione  $y(t): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$  che rappresenta l'uscita del sistema nel tempo. Dette  $U(s)$  e  $Y(s)$  le rispettive trasformate di Laplace di  $u(t)$  e  $y(t)$ , la funzione di trasferimento è la funzione  $G(s) = Y(s)/U(s)$ .

Procediamo, come richiesto dal punto **1.** del quesito, con il calcolo della funzione di trasferimento del sistema.

Come primo step, calcoliamo la trasformata di Laplace applicata alla risposta:

$$Y := s \rightarrow \text{laplace}(y(t), t, s) : \\ Y(s) = - \frac{9 (s - 2)}{s ((3 s + 1)^2 + 9) (s + 3)} \quad (1.1)$$

Proseguiamo calcolando la Trasformata di Laplace applicata all'ingresso (in questo caso la funzione gradino di Heaviside):

$$u(t) := \text{Heaviside}(t) : \\ U := s \rightarrow \text{laplace}(u(t), t, s) : \\ U(s) = \frac{1}{s} \quad (1.2)$$

Ricavati Y(s) e U(s) siamo in grado di calcolare la funzione di trasferimento G(s):

$$G(s) := \frac{Y(s)}{U(s)} : \\ G(s) = - \frac{9 (s - 2)}{((3 s + 1)^2 + 9) (s + 3)} \quad (1.3)$$

L'ordine di un sistema caratterizzato dalla sua funzione di trasferimento è dato dal grado del suo denominatore: eseguiamo il comando *simplify* per vederlo meglio

$$\text{simplify}(\text{denom}((1.3)), s) \\ 9 s^3 + 33 s^2 + 28 s + 30 \quad (1.4)$$

e notiamo che in questo caso siamo in presenza di un sistema di ordine 3.

Possiamo anche notare che il grado del numeratore è minore di quello del denominatore, perciò ci troviamo di fronte ad un sistema proprio.

Una volta ricavata la funzione di trasferimento, possiamo (come richiesto dalla traccia) determinare i poli e gli zeri della funzione di trasferimento G(s).

Per capire meglio, definita la funzione di trasferimento come

$$G(s) = \frac{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \dots + b_{n-1} s + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n}, \text{ è possibile riscriverla in forma fattorizzata } G(s) \\ = \frac{k \cdot (s - z_1) \cdot (s - z_2) \cdot \dots \cdot (s - z_n)}{(s - p_1) \cdot (s - p_2) \cdot \dots \cdot (s - p_n)}.$$

Gli zeri del sistema sono i valori di s che azzerano la funzione G(s) perché annullano i polinomi al numeratore.

Per determinare gli zeri del sistema basterà calcolare le radici del numeratore di G(s) con il comando *solve*:

$$zeri := solve(numer(G(s)) = 0, s)$$

$$zeri := 2 \quad (1.5)$$

I poli del sistema sono i valori di  $s$  che rendono infinita la funzione  $G(s)$  (ovvero tutti quei numeri  $p_i \in \mathbb{C}$  con  $1 \leq i \leq n$  tali che  $\lim_{s \rightarrow p_i} G(s) = \infty$ ) perché azzerano i polinomi al denominatore.

Per determinare i poli del sistema basterà calcolare le radici del denominatore di  $G(s)$  con il comando *solve*:

$$poli := solve(denom(G(s)) = 0, s)$$

$$poli := -3, -\frac{1}{3} + I, -\frac{1}{3} - I \quad (1.6)$$

Notiamo che i poli sono 3, un polo reale e una coppia di poli complessi e coniugati. Il numero di poli è direttamente legato all'ordine di un sistema: se, come avevamo ricavato al punto (1.4), il sistema è di ordine 3, ci si aspetta di ricavare 3 poli.

Analizziamo ora i poli del sistema per verificarne la proprietà di **BIBO-STABILITÀ**.

Per definizione, un sistema dinamico si dice *BIBO-stabile* se per ogni ingresso limitato la corrispondente uscita forzata è limitata.

La condizione necessaria e sufficiente affinché un sistema lineare e stazionario a tempo continuo sia *BIBO-stabile* è che tutti i poli della funzione di trasferimento  $G(s)$  abbiano parte reale strettamente negativa.

Detto ciò, i 3 poli ricavati hanno tutti parte reale strettamente negativa, possiamo perciò affermare che il sistema è **BIBO-STABILE**.

## 2. Modi di evoluzione libera del sistema

I modi di evoluzione libera del sistema sono funzioni right-sided che rappresentano il "contributo" che il sistema fornisce, in termini di proprie componenti interne, alla risposta. Il loro numero è pari all'ordine del sistema: nel nostro caso avremo perciò 3 modi di evoluzione libera.

Analizzando i poli dovremmo trovare:

- un **modo esponenziale** derivante dal polo reale
- due **modi pseudo-oscillatori** derivanti dai due poli complessi e coniugati.

Inoltre, tutti i poli hanno molteplicità algebrica  $j$  pari a 1.

$$j := 1$$

$$j := 1 \quad (2.1)$$

Per calcolarli procediamo in questo modo:

$$modo_1 := \frac{t^{(j-1)}}{(j-1)!} \cdot e^{poli[1] \cdot t} \cdot \text{Heaviside}(t)$$

$$modo_1 := e^{-3t} \text{Heaviside}(t) \quad (2.2)$$

$$modo_2 := \frac{t^{(j-1)}}{(j-1)!} \cdot e^{\text{Re}(poli[2]) \cdot t} \cdot \cos(t \cdot |\text{Im}(poli[2])|) \cdot \text{Heaviside}(t)$$

$$modo_2 := e^{-\frac{t}{3}} \cos(t) \text{Heaviside}(t) \quad (2.3)$$

$$modo_3 := \frac{t^{(j-1)}}{(j-1)!} \cdot e^{\operatorname{Re}(poli[3]) \cdot t} \cdot \sin(t \cdot |\operatorname{Im}(poli[3])|) \cdot \operatorname{Heaviside}(t)$$

$$modo_3 := e^{-\frac{t}{3}} \sin(t) \operatorname{Heaviside}(t) \quad (2.4)$$

Verifichiamo la correttezza dei calcoli appena svolti andando a calcolare la risposta transitoria del sistema. Ricordiamo che la nostra risposta  $y(t)$  è pari a:

$$y(t) = \left( \frac{3}{5} - \frac{15 e^{-3t}}{73} - \frac{3 e^{-\frac{t}{3}} (48 \cos(t) + 91 \sin(t))}{365} \right) \operatorname{Heaviside}(t) \quad (2.5)$$

Trascuriamo momentaneamente  $\operatorname{Heaviside}(t)$  per non rendere la notazione eccessivamente verbosa:

$$\operatorname{expand}(op(1, y(t)), \exp) = \frac{3}{5} - \frac{15 e^{-3t}}{73} - \frac{144 e^{-\frac{t}{3}} \cos(t)}{365} - \frac{273 e^{-\frac{t}{3}} \sin(t)}{365} \quad (2.6)$$

Procediamo separando la *risposta a regime* e la *risposta transitoria*.  
La risposta a regime è:

$$y_{ss} := t \rightarrow op(1, (2.6)) : y_{ss}(t) = \frac{3}{5} \quad (2.7)$$

Mentre la risposta transitoria è:

$$y_t := t \rightarrow (op(2, (2.6)) + op(3, (2.6)) + op(4, (2.6))) : y_t(t) = -\frac{15 e^{-3t}}{73} - \frac{144 e^{-\frac{t}{3}} \cos(t)}{365} - \frac{273 e^{-\frac{t}{3}} \sin(t)}{365} \quad (2.8)$$

Come possiamo osservare dalla (2.8), i modi ricavati ai punti (2.2), (2.3) e (2.4) sono corretti.

### 3. Risposta all'impulso del sistema

Nella teoria dei sistemi, la risposta impulsiva o risposta all'impulso di un sistema dinamico è la sua uscita quando è soggetto ad un ingresso particolare noto come "*impulso di Dirac*" (o funzione  $\delta$ ).

Se  $Y_f$  rappresenta la risposta forzata del sistema e  $G(s)$  rappresenta la risposta all'impulso si ha che:

$$Y_f = G(s) \cdot 1 = G(s) .$$

$G(s)$  è quindi la risposta all'impulso e coincide con la funzione di trasferimento del sistema.

Per ricavare la risposta all'impulso del sistema nel dominio del tempo  $g(t)$ , sarà perciò necessario calcolare l'antitrasformata di Laplace di  $G(s)$ :

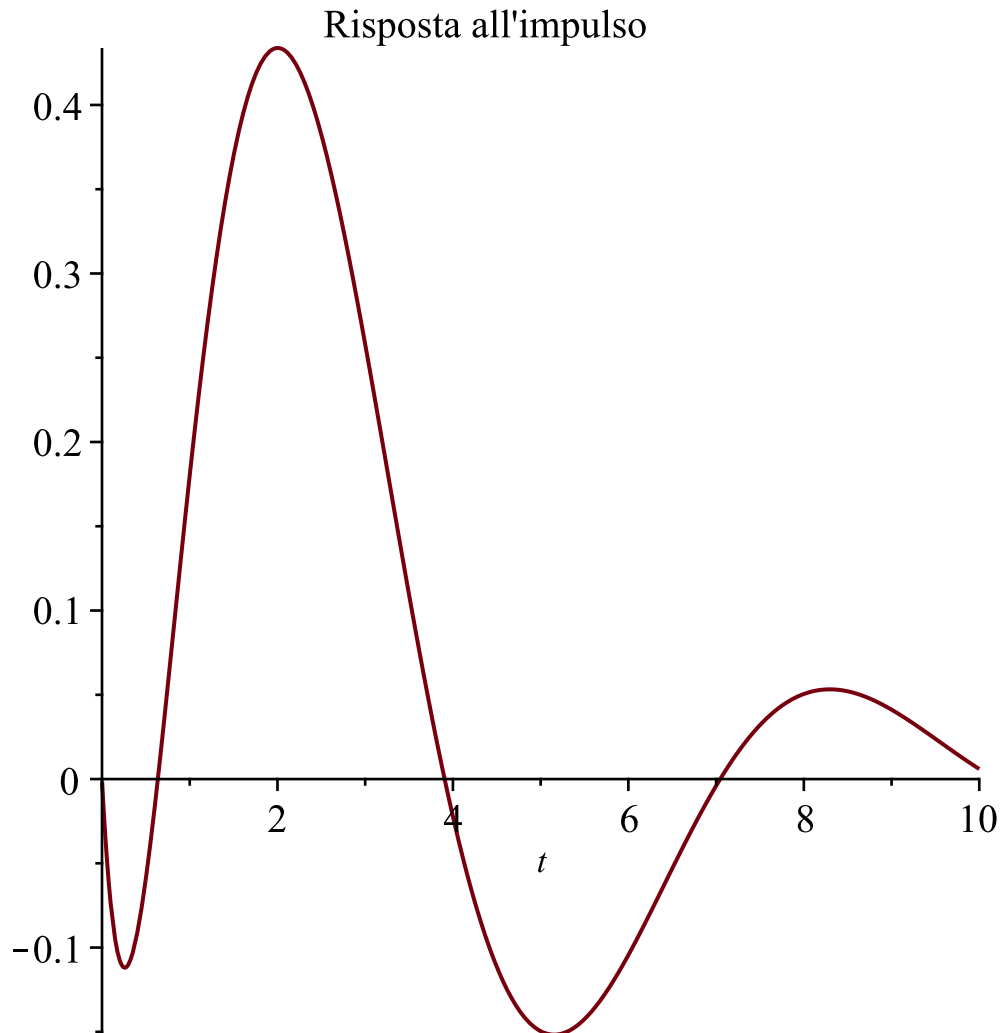


$g := t \rightarrow \text{invlaplace}(G(s), s, t) \cdot \text{Heaviside}(t) :$   
 $g(t)$

$$\left( \frac{45 e^{-3t}}{73} + \frac{(-45 \cos(t) + 47 \sin(t)) e^{-\frac{t}{3}}}{73} \right) \text{Heaviside}(t) \quad (3.1)$$

Rappresentiamo graficamente la risposta all'impulso del sistema:

$\text{plot}(g(t), t=0..10, \text{title} = \text{"Risposta all'impulso"})$



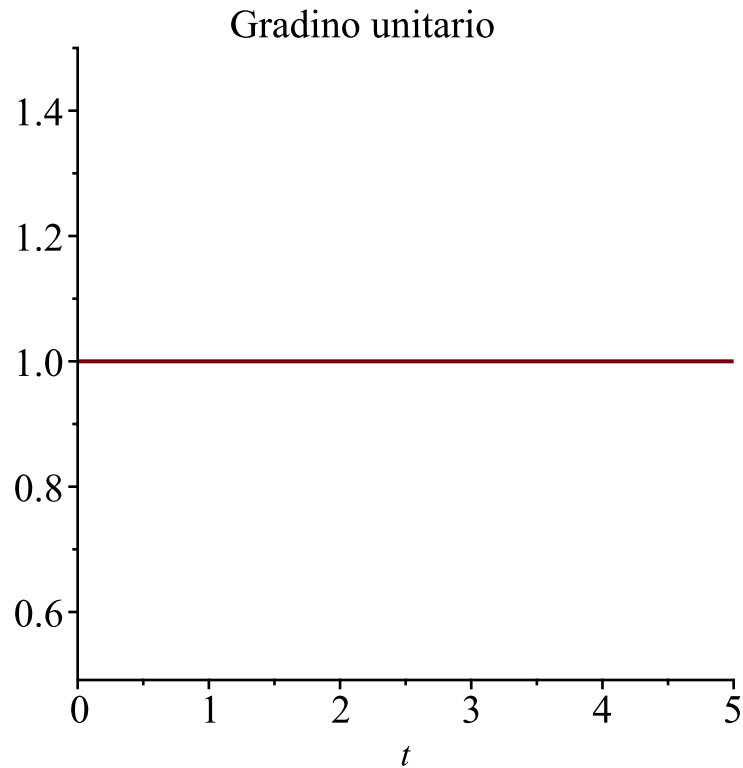
#### 4. Risposta al gradino

La funzione *gradino unitario* (o funzione di *Heaviside*) è un segnale right-sided così definito:

$$u_{\text{gradino}}(t) := \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} :$$

Rappresentato graficamente come:

```
plot(u_gradino(t), t=0..5, size=[300, 300], title="Gradino unitario")
```



La funzione è di classe L e quindi  $\mathcal{L}$ -trasformabile, in particolare la sua trasformata di Laplace (già precedentemente calcolata al punto 1.) è pari a:

$$U_{gradino}(s) := \text{laplace}(u_{gradino}(t), t, s) :$$

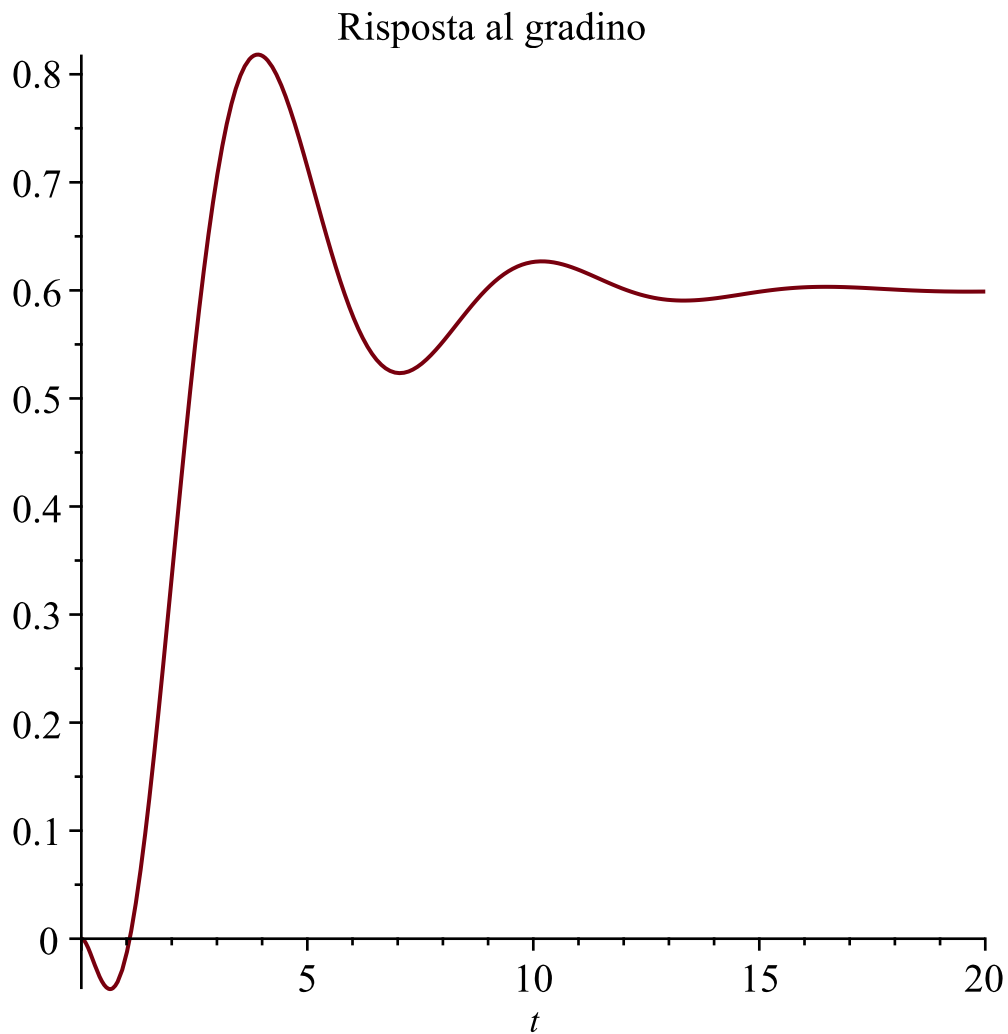
$$U_{gradino}(s)$$

$$\frac{1}{s}$$

**(4.1)**

Avendo assegnata già da traccia la risposta al gradino, possiamo rappresentarla:

```
plot(y(t), t=0..20, title="Risposta al gradino")
```



Evidenziamo ora la componente a regime della risposta al gradino:

$$y_{regime}(t) := \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) :$$

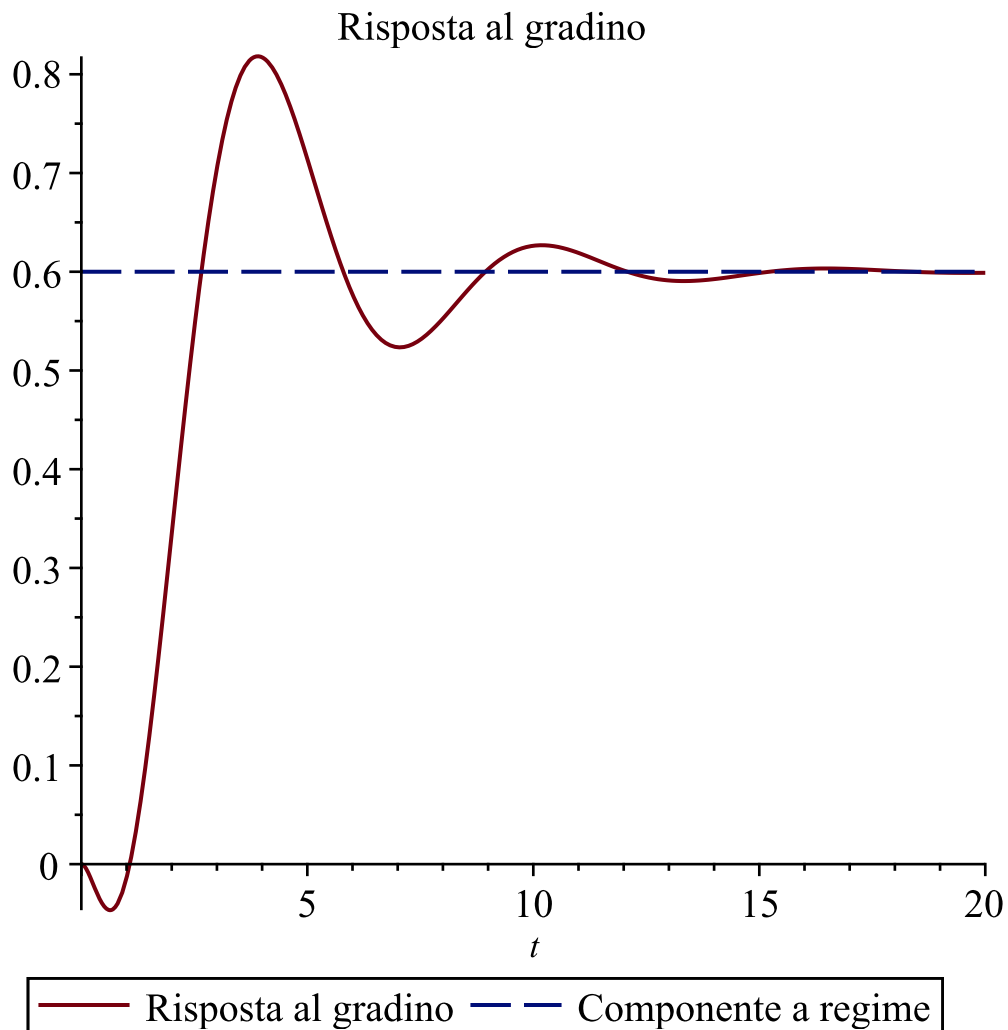
$$y_{regime}(t)$$

$$\frac{3}{5}$$

**(4.2)**

Analizziamo il comportamento della risposta al gradino in relazione alla componente a regime:

```
plot([y(t), y_regime(t)], t=0..20, title="Risposta al gradino", legend=["Risposta al gradino",
"Componente a regime"], 'linestyle'=[solid, dash])
```



A transitorio esaurito, la risposta forzata tende al valore di regime.

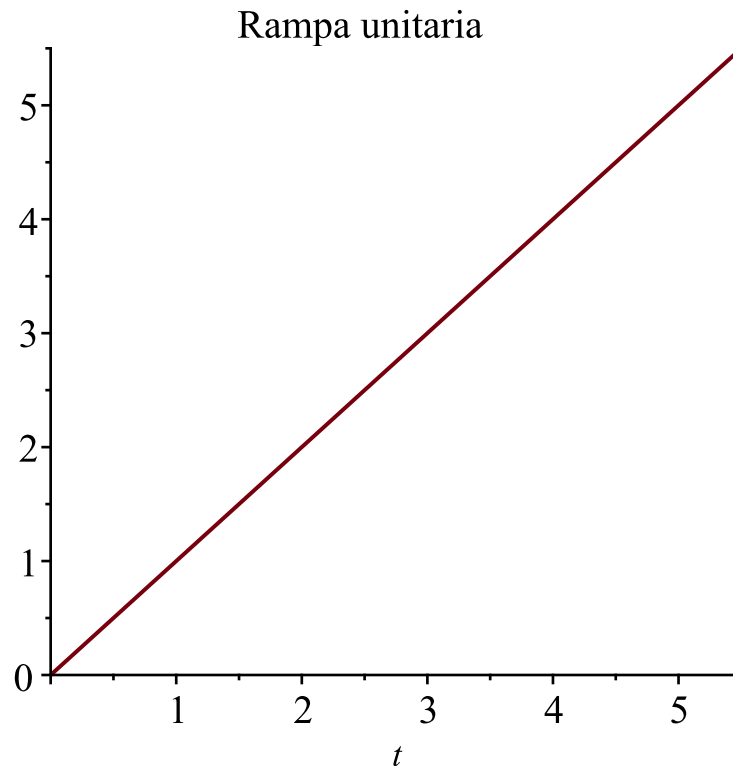
## 5. Risposta alla rampa

La *rampa unitaria* è una funzione right-sided così definita:

$$u_{rampa}(t) := \begin{cases} t & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

Rappresentiamola graficamente:

```
plot(u_rampa(t), t = 0 .. 5.5, size = [300, 300], title = "Rampa unitaria")
```



Anche questa funzione è di classe L e quindi  $\mathcal{L}$ -trasformabile, in particolare la sua Trasformata di Laplace vale:

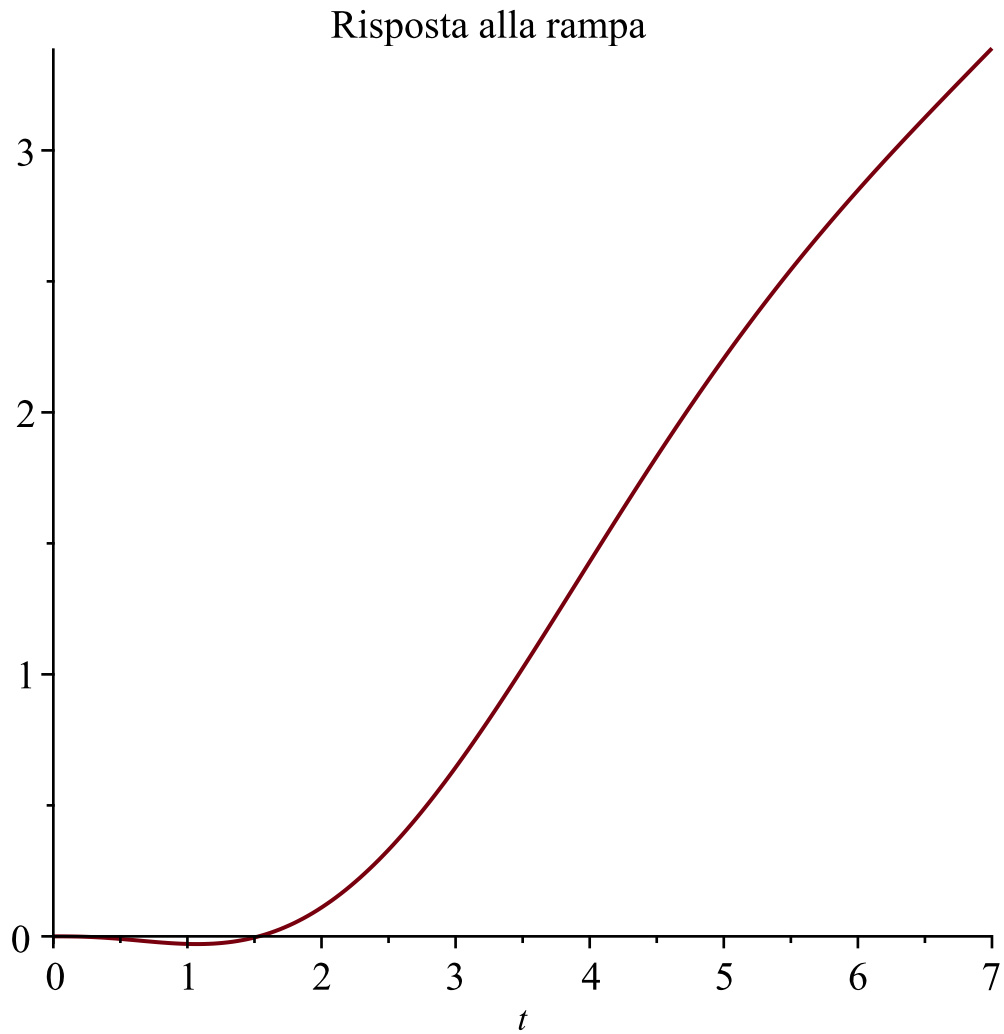
$$U_{rampa}(s) := \text{laplace}(u_{rampa}(t), t, s) : \\ U_{rampa}(s) = \frac{1}{s^2} \quad (5.1)$$

Data la funzione di trasferimento  $G(s)$ , per calcolare la risposta alla rampa (nel dominio del tempo) occorre calcolare l'antitrasformata della funzione  $Y_{rampa}(s) = G(s) \cdot U_{rampa}(s)$ .

$$y_{rampa}(t) := \text{invlaplace}(G(s) \cdot U_{rampa}(s), s, t) \cdot \text{Heaviside}(t) : \\ y_{rampa}(t) = \left( -\frac{43}{50} + \frac{5 e^{-3t}}{73} + \frac{3t}{5} + \frac{9 e^{-\frac{t}{3}} (321 \cos(t) - 53 \sin(t))}{3650} \right) \text{Heaviside}(t) \quad (5.2)$$

Vediamola graficamente:

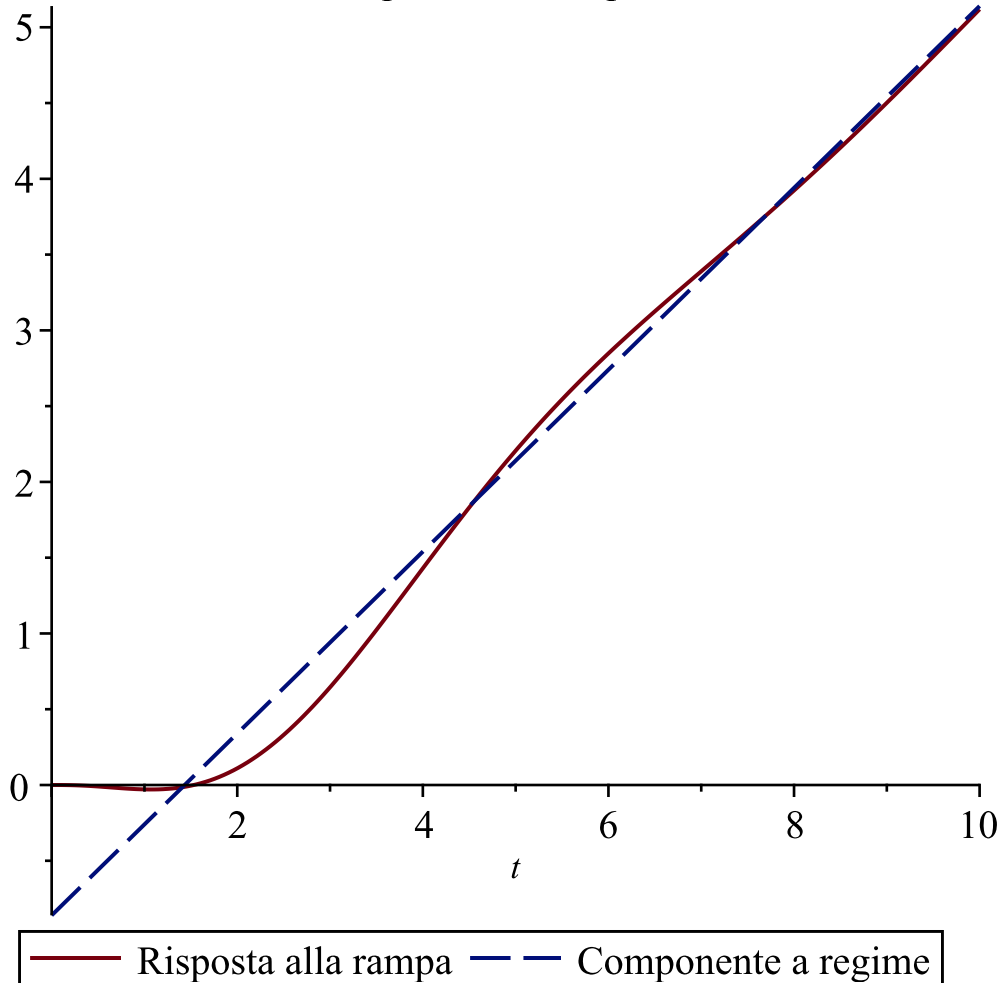
`plot( $y_{rampa}(t)$ ,  $t=0..7$ , title="Risposta alla rampa")`



Anche questa volta, analizziamo il comportamento della risposta alla rampa in relazione alla componente a regime:

```
plot([y_rampa(t), (-43/50 + 3/5 * t)], t=0..10, title="Risposta alla rampa", legend
= ["Risposta alla rampa", "Componente a regime"], 'linestyle'=[solid, dash])
```

Risposta alla rampa



## 6. Modello ARMA

Con il termine modello **ARMA** (**A**uto**R**egressive-**M**oving-**A**verage, in italiano *Modello autoregressivo a media mobile*) si intende una rappresentazione **I-U** (*Ingresso-Uscita*) ottenuta dalla relazione che lega, nel dominio delle trasformate, l'uscita alla funzione di trasferimento del sistema e all'ingresso:  $Y(s) = G(s) \cdot U(s)$ . Esso fornisce istante per istante un valore di uscita basandosi sui precedenti valori in entrata ed in uscita.

Scomponendo la funzione di trasferimento del sistema  $G(s)$  in un rapporto tra numeratore ( $n_G$ ) e

denominatore ( $d_G$ ) si può scrivere:  $Y(s) = \frac{n_G}{d_G} \cdot U(s)$  da cui si ricava una relazione del tipo:

$$d_G \cdot Y(s) = n_G \cdot U(s).$$

Proseguiamo scomponendo numeratore e denominatore della nostra funzione di trasferimento  $G(s)$  ricavata nel punto 1. dell'esercizio:

$$n_G := s \rightarrow (\text{numer}(\mathbf{(1.3)})) : n_G(s)$$

$$-9s + 18$$

**(6.1)**

$$d_G := s \rightarrow (\text{simplify}(\text{denom}(\mathbf{(1.3)}), s)) : d_G(s)$$

$$9 s^3 + 33 s^2 + 28 s + 30 \quad (6.2)$$

Come detto sopra, scriviamo la relazione che abbiamo ricavato:

$$d_G(s) \cdot Y_{ARMA}(s) = n_G(s) \cdot U_{ARMA}(s)$$

$$(9 s^3 + 33 s^2 + 28 s + 30) Y_{ARMA}(s) = (-9 s + 18) U_{ARMA}(s) \quad (6.3)$$

A questo punto abbiamo ricavato una forma  $I$ - $U$ , usiamo il comando *expand* per vederla meglio:

$$\text{expand}(\mathbf{(6.3)})$$

$$9 Y_{ARMA}(s) s^3 + 33 Y_{ARMA}(s) s^2 + 28 Y_{ARMA}(s) s + 30 Y_{ARMA}(s) = -9 U_{ARMA}(s) s + 18 U_{ARMA}(s) \quad (6.4)$$

La forma  $I$ - $U$  appena trovata si trova nel dominio di Laplace. Per trascriverla nel dominio del tempo sfruttiamo l'antitrasformata di Laplace:

$$\text{modello\_ARMA} := \text{invlaplace}(\mathbf{(6.4)}, s, t)$$

$$\text{modello\_ARMA} := 9 \text{invlaplace}(Y_{ARMA}(s) s^3, s, t) + 33 \text{invlaplace}(Y_{ARMA}(s) s^2, s, t) + 28 \text{invlaplace}(Y_{ARMA}(s) s, s, t) + 30 \text{invlaplace}(Y_{ARMA}(s), s, t) = -9 \text{invlaplace}(U_{ARMA}(s) s, s, t) + 18 \text{invlaplace}(U_{ARMA}(s), s, t) \quad (6.5)$$

Per alleggerire la notazione, effettuiamo delle sostituzioni sfruttando il comando *subs*:

$$\text{modello\_ARMA} := \text{subs}(\{ \text{invlaplace}(Y_{ARMA}(s) s^3, s, t) = y_{ARMA}'''(t), \text{invlaplace}(Y_{ARMA}(s) s^2, s, t) = y_{ARMA}''(t), \text{invlaplace}(Y_{ARMA}(s) s, s, t) = y_{ARMA}'(t), \text{invlaplace}(Y_{ARMA}(s), s, t) = y_{ARMA}(t), \text{invlaplace}(U_{ARMA}(s) s, s, t) = u_{ARMA}'(t), \text{invlaplace}(U_{ARMA}(s), s, t) = u_{ARMA}(t) \}, \mathbf{(6.5)})$$

$$\text{modello\_ARMA} := 9 D^{(3)}(y_{ARMA})(t) + 33 D^{(2)}(y_{ARMA})(t) + 28 D(y_{ARMA})(t) + 30 y_{ARMA}(t) = -9 D(u_{ARMA})(t) + 18 u_{ARMA}(t) \quad (6.6)$$

Abbiamo finalmente ottenuto un possibile modello ARMA a partire dalla funzione di trasferimento ottenuta nel primo esercizio.

## 7. Tenendo conto del modello determinato al punto precedente valutare le condizioni iniziali in corrispondenza delle quali il transitorio della risposta al gradino è nullo

Coma primo step, consideriamo il *modello ARMA* calcolato nel punto 6. dell'esercizio:

$$\text{modello\_ARMA}$$

$$9 D^{(3)}(y_{ARMA})(t) + 33 D^{(2)}(y_{ARMA})(t) + 28 D(y_{ARMA})(t) + 30 y_{ARMA}(t) = \quad (7.1)$$



$$-9 D(u_{ARMA})(t) + 18 u_{ARMA}(t)$$

Torniamo nel dominio della Trasformata di Laplace:

$$\begin{aligned} eq\_diff\_in\_s &:= laplace(modello\_ARMA, t, s) \\ eq\_diff\_in\_s &:= 9 s^3 laplace(y_{ARMA}(t), t, s) - 9 D^{(2)}(y_{ARMA})(0) - 9 s D(y_{ARMA})(0) \\ &\quad - 9 s^2 y_{ARMA}(0) + 33 s^2 laplace(y_{ARMA}(t), t, s) - 33 D(y_{ARMA})(0) - 33 s y_{ARMA}(0) \\ &\quad + 28 s laplace(y_{ARMA}(t), t, s) - 28 y_{ARMA}(0) + 30 laplace(y_{ARMA}(t), t, s) = \\ &\quad - 9 s laplace(u_{ARMA}(t), t, s) + 9 u_{ARMA}(0) + 18 laplace(u_{ARMA}(t), t, s) \end{aligned} \quad (7.2)$$

Come fatto nel punto precedente (6.), usiamo il comando *subs* per non appesantire troppo la notazione:

$$\begin{aligned} eq\_diff\_in\_s &:= subs(\{laplace(y_{ARMA}(t), t, s) = Y_{ARMA}(s), laplace(u_{ARMA}(t), t, s) = U_{ARMA}(s)\}, \\ &\quad (7.2)) \\ eq\_diff\_in\_s &:= 9 Y_{ARMA}(s) s^3 - 9 D^{(2)}(y_{ARMA})(0) - 9 s D(y_{ARMA})(0) - 9 s^2 y_{ARMA}(0) \\ &\quad + 33 Y_{ARMA}(s) s^2 - 33 D(y_{ARMA})(0) - 33 s y_{ARMA}(0) + 28 Y_{ARMA}(s) s - 28 y_{ARMA}(0) \\ &\quad + 30 Y_{ARMA}(s) = -9 U_{ARMA}(s) s + 9 u_{ARMA}(0) + 18 U_{ARMA}(s) \end{aligned} \quad (7.3)$$

Inoltre, consideriamo nulle le condizioni iniziali sull'ingresso (usiamo il comando *eval*):

$$\begin{aligned} eq\_diff\_in\_s &:= eval((7.3), u_{ARMA}(0) = 0) \\ eq\_diff\_in\_s &:= 9 Y_{ARMA}(s) s^3 - 9 D^{(2)}(y_{ARMA})(0) - 9 s D(y_{ARMA})(0) - 9 s^2 y_{ARMA}(0) \\ &\quad + 33 Y_{ARMA}(s) s^2 - 33 D(y_{ARMA})(0) - 33 s y_{ARMA}(0) + 28 Y_{ARMA}(s) s - 28 y_{ARMA}(0) \\ &\quad + 30 Y_{ARMA}(s) = -9 U_{ARMA}(s) s + 18 U_{ARMA}(s) \end{aligned} \quad (7.4)$$

Poniamo come incognita  $Y_{ARMA}(s)$ :

$$\begin{aligned} &solve(eq\_diff\_in\_s, Y_{ARMA}(s)) \\ &\frac{1}{9 s^3 + 33 s^2 + 28 s + 30} (9 s^2 y_{ARMA}(0) + 9 s D(y_{ARMA})(0) + 33 s y_{ARMA}(0) \\ &\quad - 9 U_{ARMA}(s) s + 9 D^{(2)}(y_{ARMA})(0) + 33 D(y_{ARMA})(0) + 28 y_{ARMA}(0) \\ &\quad + 18 U_{ARMA}(s)) \end{aligned} \quad (7.5)$$

Con quest'ultima operazione abbiamo risolto l'equazione differenziale nel dominio della variabile  $s$  rispetto all'incognita appena definita. Il risultato appena ottenuto è composto da due risposte: *risposta libera* e *risposta forzata*.

Per separarle utilizziamo il comando *collect*:

$$collect((7.5), U_{ARMA}(s))$$

$$\frac{(-9s + 18) U_{ARMA}(s)}{9s^3 + 33s^2 + 28s + 30} + \frac{1}{9s^3 + 33s^2 + 28s + 30} \left( 9s^2 y_{ARMA}(0) + 9s D(y_{ARMA})(0) + 33s y_{ARMA}(0) + 9D^{(2)}(y_{ARMA})(0) + 33D(y_{ARMA})(0) + 28y_{ARMA}(0) \right) \quad (7.6)$$

Notiamo quindi che il primo addendo è la risposta forzata e il secondo addendo è la risposta libera; estraiamole con il comando *op*:

$$resp\_forzata := op(1, (7.6))$$

$$resp\_forzata := \frac{(-9s + 18) U_{ARMA}(s)}{9s^3 + 33s^2 + 28s + 30} \quad (7.7)$$

$$resp\_libera := op(2, (7.6))$$

$$resp\_libera := \frac{1}{9s^3 + 33s^2 + 28s + 30} \left( 9s^2 y_{ARMA}(0) + 9s D(y_{ARMA})(0) + 33s y_{ARMA}(0) + 9D^{(2)}(y_{ARMA})(0) + 33D(y_{ARMA})(0) + 28y_{ARMA}(0) \right) \quad (7.8)$$

Non ci resta che ottenere la componente transitoria della risposta al gradino, la cui trasformata di Laplace è stata già ricavata al punto (1.1) ed è pari a:

$$Y(s) = \frac{9(s-2)}{s((3s+1)^2 + 9)(s+3)} \quad (7.9)$$

Per una migliore visualizzazione della componente transitoria, converto in fratti semplici con il comando *parfrac*:

$$convert(Y(s), parfrac)$$

$$-\frac{15}{73(s+3)} + \frac{3}{5s} + \frac{-1296s - 2889}{365(9s^2 + 6s + 10)} \quad (7.10)$$

Il termine  $\frac{3}{5s}$  è la componente di regime della risposta al gradino. Estraggo tutti gli altri termini:

$$comp\_regime := simplify\left(\frac{-1296s - 2889}{365(9s^2 + 6s + 10)} - \frac{15}{73(s+3)}\right)$$

$$comp\_regime := \frac{-27s^2 - 99s - 129}{45s^3 + 165s^2 + 140s + 150} \quad (7.11)$$

A questo punto sommo la risposta libera alla componente transitoria della risposta forzata:

$$simplify(resp\_libera + comp\_regime)$$

$$\frac{1}{45s^3 + 165s^2 + 140s + 150} \left( (45s^2 + 165s + 140) y_{ARMA}(0) + (45s + 165) D(y_{ARMA})(0) - 27s^2 - 99s + 45D^{(2)}(y_{ARMA})(0) - 129 \right) \quad (7.12)$$

Dunque, per trovare i valori per i quali il transitorio della risposta al gradino è nullo è sufficiente

trovare i valori che annullano questa frazione e quindi i valori che annullano il suo numeratore. Estraiamo il numeratore:

$$\begin{aligned} & \text{numer}((7.12)) \\ & 45 s^2 y_{ARMA}(0) + 45 s D(y_{ARMA})(0) + 165 s y_{ARMA}(0) - 27 s^2 + 45 D^{(2)}(y_{ARMA})(0) \\ & + 165 D(y_{ARMA})(0) + 140 y_{ARMA}(0) - 99 s - 129 \end{aligned} \quad (7.13)$$

Il numeratore della risposta transitoria è un polinomio ed è nullo quando sono nulli i suoi coefficienti.

Estraiamo i coefficienti del polinomio grazie al comando *coeff* che ha come argomenti il polinomio da cui estrarre i coefficienti, la variabile indeterminata (*s* nel nostro caso) e il grado del monomio da dove estraiamo i coefficienti.

$$1. c_1 := \text{coeff}((7.13), s, 0)$$

$$c_1 := 45 D^{(2)}(y_{ARMA})(0) + 165 D(y_{ARMA})(0) + 140 y_{ARMA}(0) - 129 \quad (7.14)$$

$$2. c_2 := \text{coeff}((7.13), s, 1)$$

$$c_2 := 45 D(y_{ARMA})(0) + 165 y_{ARMA}(0) - 99 \quad (7.15)$$

$$3. c_3 := \text{coeff}((7.13), s, 2)$$

$$c_3 := 45 y_{ARMA}(0) - 27 \quad (7.16)$$

I coefficienti precedenti devono essere nulli e siccome sono lineari ci forniscono un sistema di tre equazioni lineari nelle tre incognite  $y(0)$ ,  $y'(0)$  e  $y''(0)$ . Risolviamo:

$$\begin{aligned} & \text{soluzioni\_cond\_iniz} := \text{solve}(\{c_1, c_2, c_3\}, \{y_{ARMA}(0), y_{ARMA}'(0), y_{ARMA}''(0)\}) \\ & \text{soluzioni\_cond\_iniz} := \left\{ y_{ARMA}(0) = \frac{3}{5}, D(y_{ARMA})(0) = 0, D^{(2)}(y_{ARMA})(0) = 1 \right\} \end{aligned} \quad (7.17)$$

Mostriamo meglio ciò che abbiamo ottenuto.

$$y_{ARMA}(0) = \frac{3}{5}$$

$$y_{ARMA}(0) = \frac{3}{5} \quad (7.18)$$

$$D(y_{ARMA})(0) = 0$$

$$D(y_{ARMA})(0) = 0 \quad (7.19)$$

$$D^{(2)}(y_{ARMA})(0) = 1$$

$$D^{(2)}(y_{ARMA})(0) = 1 \quad (7.20)$$

Ripuliamo l'area di lavoro e carichiamo i Toolbox essenziali:  
`restart :with(intrans) :with(DynamicSystems) : with(plots) :`

# PROGETTO FONDAMENTI DI AUTOMATICA

Michele Purrone mat. 201181

## Quesito B

Costruire, utilizzando Adobe Illustrator o programma equivalente ed argomentando tutti i passaggi, il Diagramma di Bode per la seguente funzione di trasferimento (Allegare file .ai o .eps):

$$G(s) := \frac{40 \cdot \left(1 - \frac{s}{30}\right)}{s \cdot \left(s^2 + \frac{s}{2} + 4\right)};$$

$$G := s \mapsto \frac{40 - \frac{4s}{3}}{s \left(s^2 + \frac{1}{2}s + 4\right)} \quad (1)$$

## ▼ Diagramma di Bode

Il **Diagramma di Bode** è una rappresentazione grafica della *risposta in frequenza* di un sistema lineare tempo-invariante (**LTI**) che consiste in due diagrammi che rappresentano rispettivamente l'ampiezza (o anche modulo) ( $|G(j\omega)|$ ) e la fase ( $\angle G(j\omega)$ ) della funzione complessa di risposta in frequenza.

Possiamo perciò ricavare due diagrammi distinti: il diagramma dei *moduli* ed il diagramma delle *fasi*.

- Il primo è un diagramma che rappresenta in ascissa la pulsazione  $\omega$  come variabile indipendente ed in ordinata il modulo della risposta in frequenza  $|G(j\omega)|_{dB}$ ;
- Il secondo è un diagramma che rappresenta in ascissa la pulsazione  $\omega$  come variabile indipendente ed in ordinata la fase della risposta in frequenza  $\angle G(j\omega)$ .

Da un punto di vista ingegneristico conviene rappresentare le pulsazioni utilizzando una scala *logaritmica* (con unità di misura la *decade*): rappresenteremo infatti l'ordine di grandezza delle pulsazioni e non la pulsazione vera e propria. I vantaggi di questo approccio sono principalmente due:

- *comprimere le alte frequenze;*
- *espandere le basse frequenze.*

## Forma di Bode

Come primo step, per poter tracciare il Diagramma di Bode dobbiamo manipolare la funzione di trasferimento in modo tale da esprimerla nella cosiddetta **forma di Bode**.

La forma di Bode di una generica funzione di trasferimento  $G(s)$  è definita come:

$$G(s) = \frac{k_b \cdot \prod_{i=1}^{m_1} (1 \pm T_i \cdot s) \cdot \prod_{i=1}^{m_2} \left( 1 \pm \frac{2\zeta_i}{\Omega_i} \cdot s + \frac{s^2}{\Omega_i^2} \right)}{(j\omega)^{n_0} \cdot \prod_{i=1}^{n_1} (1 \pm \tau_i \cdot s) \cdot \prod_{i=1}^{n_2} \left( 1 \pm \frac{2\delta_i}{\omega_i} \cdot s + \frac{s^2}{\omega_i^2} \right)}$$

Andiamo ad analizzare cosa rappresentano i termini della definizione:

- $k_b$  il **guadagno di Bode** della funzione di trasferimento  $G(s)$ ;
- $\frac{1}{(j\omega)^{n_0}}$  i **poli nell'origine**;
- $T_i = \frac{1}{|z_i|}$  con  $i = 1, \dots, m_1$  le **costanti di tempo degli zeri reali** (indipendentemente dal loro segno);
- $\tau_i = \frac{1}{|p_i|}$  con  $i = 1, \dots, n_1$  le **costanti di tempo dei poli reali** (indipendentemente dal loro segno);
- $(\zeta_i, \Omega_i)$  con  $i = 1, \dots, m_2$  la coppia di **smorzamento/pulsazione naturale degli zeri complessi e coniugati** (indipendentemente dal segno della loro parte reale);
- $(\delta_i, \omega_i)$  con  $i = 1, \dots, n_2$  la coppia di **smorzamento/pulsazione naturale dei poli complessi e coniugati** (indipendentemente dal segno della loro parte reale).

Valutando la funzione di trasferimento sull'asse immaginario, otteniamo la **risposta in frequenza**:

$$G(j\omega) = \frac{k_b \cdot \prod_{i=1}^{m_1} (\pm 1 + j\omega T_i) \cdot \prod_{i=1}^{m_2} \left( 1 - \frac{\omega^2}{\Omega_i^2} \pm \frac{j2\zeta_i\omega}{\Omega_i} \right)}{(j\omega)^{n_0} \cdot \prod_{i=1}^{n_1} (\pm 1 + j\omega \tau_i) \cdot \prod_{i=1}^{n_2} \left( 1 - \frac{\omega^2}{\omega_i^2} \pm \frac{j \cdot 2 \cdot \delta_i \cdot \omega}{\omega_i} \right)}$$

Per ricavare la forma di Bode (e quindi costruire i diagrammi) è necessario individuare i termini della definizione appena esaminata.

## ▼ Analisi zeri e poli

Come primo passo ricaviamo gli zeri e i poli per analizzarli:

$$zeri_G := solve(numer(G(s)), s)$$

$$zeri_G := 30 \quad (1.2.1)$$

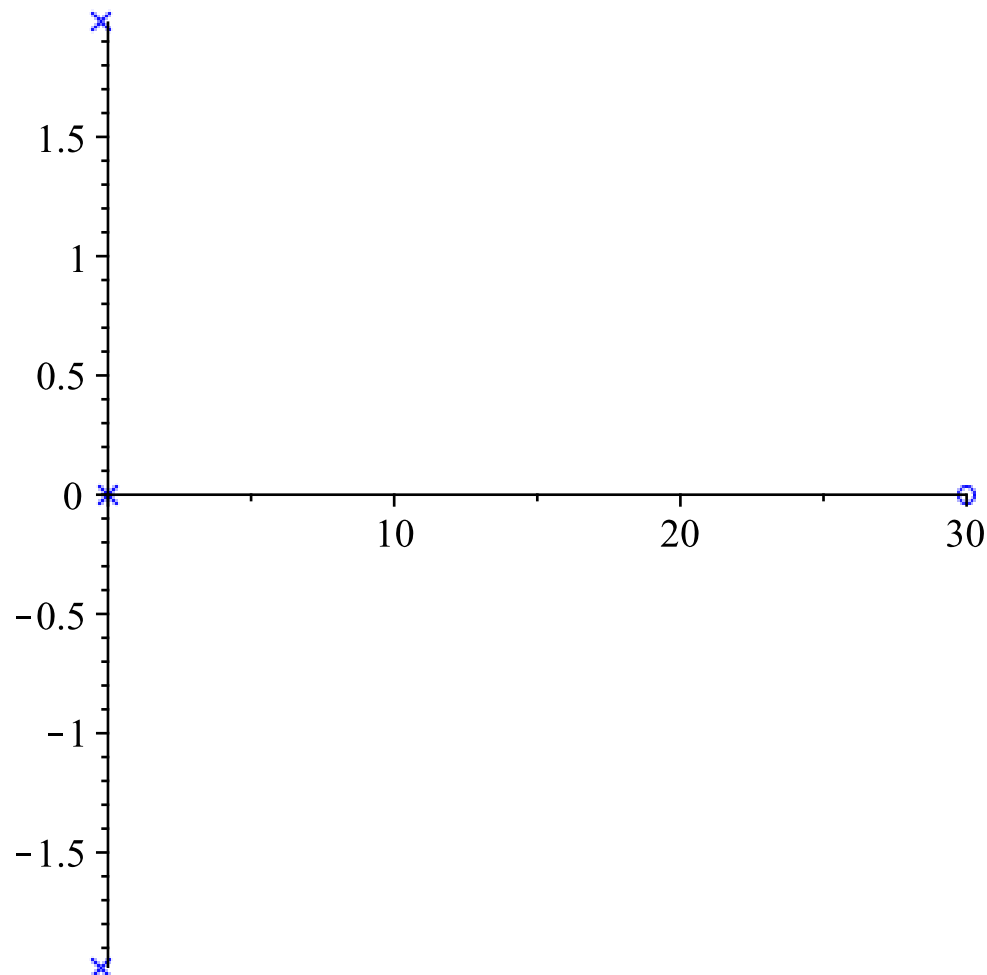
$$poli_G := solve(denom(G(s)), s)$$

$$poli_G := 0, -\frac{1}{4} + \frac{3I\sqrt{7}}{4}, -\frac{1}{4} - \frac{3I\sqrt{7}}{4} \quad (1.2.2)$$

Rappresentiamoli con il comando *ZeroPolePlot* (notiamo che i poli sono visualizzati con delle crocette e lo zero con un cerchietto):

*ZeroPolePlot(TransferFunction(G(s)), color = [blue], title = "Zeri e poli di G(s)")*

Zeri e poli di G(s)



Abbiamo quindi uno zero a **fase non minima** (poiché ha  $\Re > 0$ ), una coppia di poli complessi e coniugati con parte reale strettamente negativa (detti **poli stabili** o **a basso smorzamento**) e un

└ polo nell'origine (detto **polo integrale**) che rende il sistema ***non* BIBO-STABILE**).

## ▼ Guadagno di Bode $k_b$

Ricaviamo ora il *guadagno di Bode* ( $k_b$ ), che ricordiamo essere definito come il guadagno statico della funzione di trasferimento nell'ipotesi di rimuovere dal denominatore della stessa il monomio  $s^v$  (con  $v$  molteplicità algebrica, chiamata anche *effetto integrale*) le cui radici coincidono con l'origine.

Contiamo con il comando *numboccur* la molteplicità del polo nell'origine:

$$v := \text{numboccur}([poli_G], 0) \qquad v := 1 \qquad (1.3.1)$$

Il **guadagno di Bode**  $k_b$  è dato da:

$$k_b := \lim_{s \rightarrow 0} s^v \cdot G(s) \qquad k_b := 10 \qquad (1.3.2)$$

Se il contributo è costante, allora il suo diagramma sui moduli sarà una retta parallela all'asse delle ascisse e di slittamento pari a  $|k_b|_{dB}$ .

Esaminando  $|k_b|$  avremo due casi:

- **Amplificazione**, avremo uno slittamento positivo ( $|k_b| > 1$ );
- **Attenuazione**, avremo uno slittamento negativo ( $|k_b| < 1$ );

In questo caso,  $|k_b| > 1$ , lo slittamento è positivo e possiamo calcolarlo come:

$$|k_b|_{dB} := \text{evalf}(20 \log_{10}(|k_b|)) \qquad |k_b|_{dB} := 20. \qquad (1.3.3)$$

## ▼ Pulsazioni di taglio degli zeri $\Omega_t$ e dei poli $\omega_t$

Andiamo adesso a determinare la *pulsazione di taglio*  $\Omega_t$  o  $\omega_t$  (rispettivamente pulsazione di taglio degli zeri e pulsazione di taglio dei poli) che, sul diagramma dei moduli approssimato, rappresentano quella pulsazione in corrispondenza della quale il diagramma cambia pendenza. Dal punto di vista quantitativo, tale pulsazione descrive il massimo scostamento tra il diagramma reale e quello approssimato.

**Pulsazione di taglio degli zeri:**

$$\Omega_t := \text{abs}(\text{zeri}_G) \qquad \Omega_t := 30 \qquad (1.4.1)$$

**Pulsazione di taglio dei poli:**

Escludiamo il polo nell'origine:

$$\omega_t := \text{abs}\left(\left[-\frac{1}{4} + \frac{3I\sqrt{7}}{4}, -\frac{1}{4} - \frac{3I\sqrt{7}}{4}\right]\right)$$

$$\omega_t := [2, 2] \quad (1.4.2)$$

Notiamo immediatamente che le due pulsazioni di taglio dei due poli complessi e coniugati sono identiche, in quanto il modulo di un numero complesso è pari al modulo del suo coniugato.

## ▼ Pulsazione naturale $\omega_n$ e smorzamento $\delta$

Procediamo ora con il determinare la **pulsazione naturale**  $\omega_n$  e lo **smorzamento**  $\delta$  attraverso una serie di passaggi.

Per prima cosa ricordiamo cosa rappresentano:

- La pulsazione naturale  $\omega_n$  di un polo complesso e coniugato è la distanza tra l'origine dell'asse immaginario e tale polo (coincide dunque con il modulo dei due numeri nonché con la loro pulsazione di taglio).
- Lo smorzamento  $\delta$  di un polo complesso e coniugato, invece, sarebbe il coseno dell'angolo compreso tra il semiasse negativo Reale del piano complesso e la retta passante per l'origine e per il polo.

Definiamo ora il *trinomio campione*  $s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2$  indicando con  $\omega_n > 0$  la *pulsazione naturale* della coppia di radici del trinomio e con  $\delta$  lo *smorzamento* della coppia di radici del trinomio.

Il trinomio  $s^2 + \frac{1}{2}s + 4$  al denominatore di  $G(s)$  è *non scomponibile* poiché presenta un

discriminante  $\text{discrim}\left(s^2 + \frac{1}{2}s + 4, s\right) = -\frac{63}{4}$  negativo.

Sfruttando il principio di identità dei polinomi, associamo il trinomio *non scomponibile* al *trinomio campione* e ricaviamo smorzamento e pulsazione naturale dalla soluzione del seguente sistema

simmetrico elementare: 
$$\begin{cases} 2\delta\omega_n = \frac{1}{2} \\ \omega_n^2 = 4 \end{cases}$$

$$\text{trinomio} := \text{solve}\left(\left\{\omega_n^2 = 4, 2\delta\omega_n = \frac{1}{2}\right\}, \left\{\delta, \omega_n\right\}\right)$$

$$\text{trinomio} := \left\{\delta = \frac{1}{8}, \omega_n = 2\right\}, \left\{\delta = -\frac{1}{8}, \omega_n = -2\right\} \quad (1.5.1)$$

Consideriamo soltanto la prima soluzione ottenuta (occorre rispettare le condizioni  $\omega_n > 0$  e  $0 < \delta < 1$ ).

A questo punto è possibile assegnare le variabili:

$$\delta := \frac{1}{8} :$$



$$\omega_n := 2 :$$

$\delta$  è una quantità adimensionale,  $\omega_n$  si misura in rad/sec.

Facciamo una considerazione:

Dato che  $\delta$  appartiene all'intervallo (0,0.707) (detto anche *intervallo di risonanza*) possiamo affermare che tale coppia di poli complessi e coniugati genererà un *fenomeno di risonanza*.

Il fenomeno della risonanza non rende il diagramma dei moduli monotono decrescente poiché in corrispondenza di un punto, detto *picco di risonanza*  $M_r$ , presenterà un massimo.

Andiamo a ricavare tale valore:

Calcoliamo la *pulsazione di risonanza*  $\omega_r$  dalla relazione:

$$\omega_r := \omega_n \cdot \sqrt{1 - 2 \cdot \delta}$$

$$\omega_r := \sqrt{3} \quad (1.5.2)$$

Picco di risonanza:

$$M_r := \frac{1}{2 \cdot \delta \cdot \sqrt{1 - \delta^2}} = \frac{32}{21} \sqrt{7}$$

Il suo modulo in dB:

$$M_{r, dB} := \text{evalf}(20 \cdot \log_{10}(|M_r|)) = 12.10959408$$

## Diagramma dei moduli

Gli zeri e i poli del sistema aggiungono dei contributi in *Bassa Frequenza* (**BF**) e *Alta Frequenza* (**AF**) ai diagrammi di Bode.

In *Bassa Frequenza*:

- la presenza di un polo nell'origine darà un contributo pari ad una retta di pendenza  $-20 \cdot v$  [dB/decade] (con  $v$  molteplicità algebrica del polo) che passa per l'origine degli esponenti. Nel nostro caso (con  $v$  pari a 1) avremo una retta di pendenza  $-20$  dB/decade e slittamento pari a  $|k_b|_{dB} = 20$ .

In *Alta Frequenza*:

- i vari contributi dati dagli zeri e dai poli genereranno una retta di pendenza  $20 \cdot (nz - v - np)$  [dB/decade] con  $nz$  numero di zeri,  $v$  molteplicità algebrica del polo nell'origine e  $np$  numero dei poli della funzione di trasferimento. Nel nostro caso avremo una retta di pendenza  $20 \cdot (1 - 1 - 2)$  dB/decade, pari a  $-40$  dB/decade.

## Regioni di Bassa e Alta Frequenza

La regione di *Bassa Frequenza* comprende tutte quelle pulsazioni  $\frac{\omega}{\Omega_t} \ll 1$  (tutte quelle

pulsazioni a partire dalla continua fino alla pulsazione di taglio più piccola).

Nel nostro caso è identificata dalla pulsazione:

$$BF_m := \min(\min(\Omega_t), \min(\omega_n))$$

$$BF_m := 2 \quad (1.6.1)$$

la regione di BF è quindi quella regione di pulsazioni  $\omega$  inferiori alla pulsazione di taglio e cioè  $\omega < 2 \text{ rad/sec}$ .

La regione di *Alta Frequenza*, invece, comprende tutte quelle pulsazioni  $\frac{\omega}{\Omega_t} \gg 1$  (tutte quelle pulsazioni a partire dalla pulsazione di taglio più grande fino all'infinito).

$$AF_m := \max(\max(\Omega_t), \max(\omega_n))$$

$$AF_m := 30 \quad (1.6.2)$$

la regione di AF è quindi quella regione di pulsazioni  $\omega$  maggiori della pulsazione di taglio e quindi tali che  $\omega > 30 \text{ rad/sec}$ .

Definiamo adesso due funzioni: la prima calcola un'approssimazione asintotica (delle spezzate che andranno raccordate in base alle pulsazioni di taglio e che avranno una pendenza specificata) del diagramma dei moduli; la seconda calcola il diagramma esatto:

$$f_{appr} := (\omega, \omega_c) \rightarrow \begin{cases} 0 & \frac{\omega}{\omega_c} < 1 \\ 20 \cdot \log_{10} \left( \frac{\omega}{\omega_c} \right) & \frac{\omega}{\omega_c} \geq 1 \end{cases} :$$

$$f := (\omega, \omega_c) \rightarrow 20 \cdot \log_{10} \left( \sqrt{1 + \left( \frac{\omega}{\omega_c} \right)^2} \right) :$$

Definiamo anche una funzione per il polo nell'origine:

$$f_0 := \omega \rightarrow 20 \cdot \log_{10}(\omega) :$$

Definiamo una ulteriore funzione che tiene conto dei contributi sui moduli dati dal termine trinomio:

$$f_{tr} := (\omega, \omega_n, \delta) \rightarrow 20 \cdot \log_{10} \left( \sqrt{\left( 1 - \left( \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 \right)^2 + \left( \frac{2 \cdot \delta \cdot \omega}{\omega_n} \right)^2} \right) :$$

Adesso componiamo la funzione modulo che tiene conto dei vari contributi ed approssima le pulsazioni di taglio dei poli complessi e coniugati alla pulsazione naturale  $\omega_n = 2$ :

$$f_{G_{appr}} := \omega \rightarrow |k_b|_{dB} + f_{appr}(\omega, \Omega_t) - v \cdot f_0(\omega) - 2 \cdot f_{appr}(\omega, \omega_n) :$$

Ed ora una sua versione che tiene conto del vero contributo dato dai poli complessi e coniugati:

$$f_{G_{appr\_trin}} := \omega \rightarrow |k_b|_{dB} + f_{appr}(\omega, \Omega_t) - v \cdot f_0(\omega) - f_{tr}(\omega, \omega_n, \delta) :$$

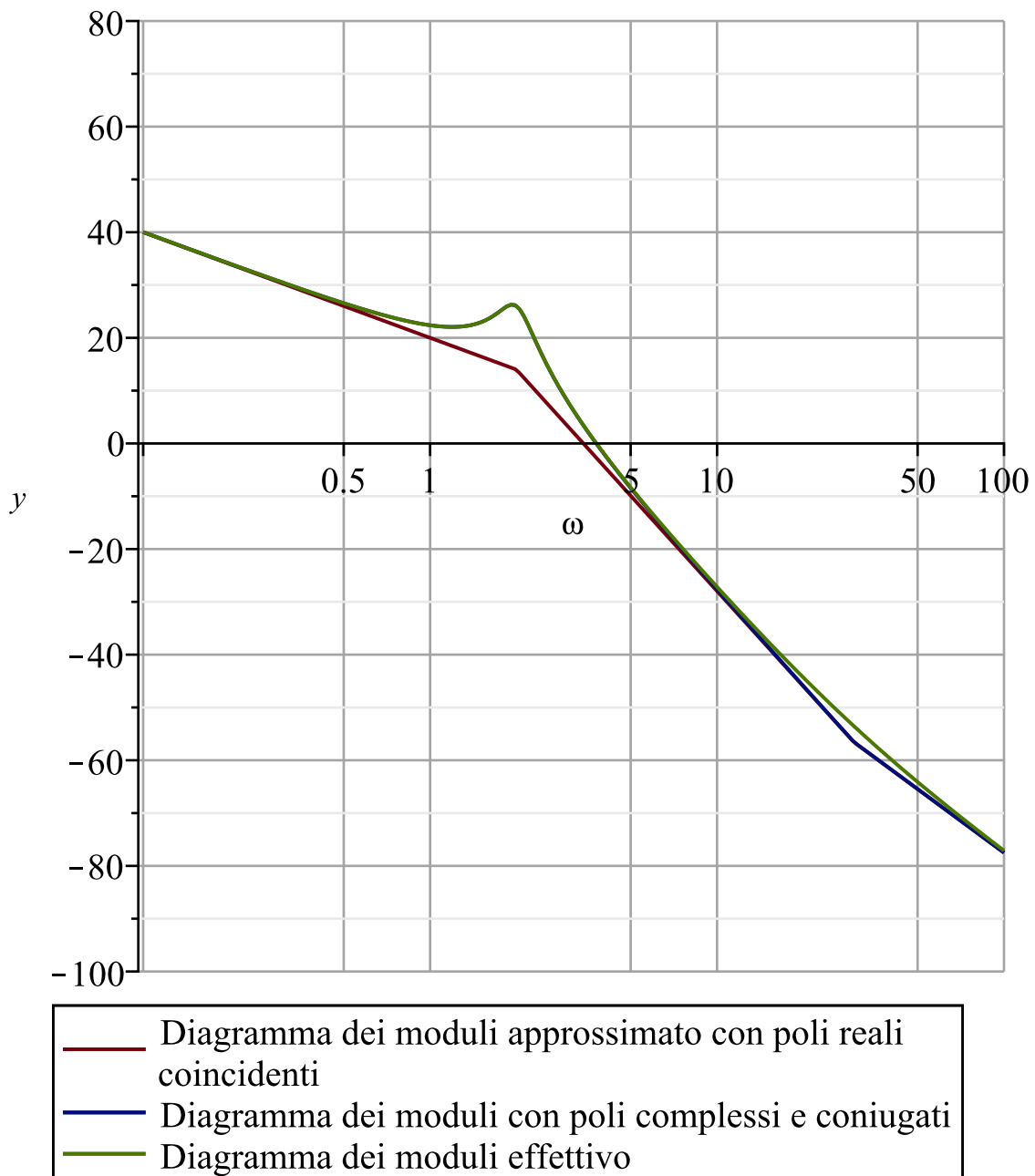
Ed infine una funzione che traccia il diagramma dei moduli effettivo:

$$f_G := \omega \rightarrow |k_b|_{dB} + f(\omega, \Omega_t) - v \cdot f_0(\omega) - f_{tr}(\omega, \omega_n, \delta) :$$

Possiamo finalmente tracciare il diagramma dei moduli.

Rappresentiamo sullo stesso grafico sia il diagramma asintotico generato da due poli reali coincidenti in  $\omega_n$ , sia quello che considera il reale contributo dei poli complessi e coniugati e sia il diagramma dei moduli effettivo:

```
semilogplot([f_{G_{appr}}(\omega), f_{G_{appr\_trin}}(\omega), f_G(\omega)], \omega = 0.1 .. 100, y = -100 .. 80, axis = [gridlines],
    legend = ["Diagramma dei moduli approssimato con poli reali coincidenti",
    "Diagramma dei moduli con poli complessi e coniugati", "Diagramma dei moduli effettivo"])
```



## Diagramma delle fasi

Anche nel diagramma delle fasi, come nel diagramma dei moduli, gli zeri e i poli aggiungono dei contributi al diagramma.

In *Fase Iniziale*:

- il guadagno di Bode  $k_b$  è positivo, perciò il suo contributo al diagramma delle fasi è nullo;
- il polo nell'origine darà un contributo pari a  $-\nu \cdot \frac{\pi}{2}$  (con  $\nu$  molteplicità algebrica del polo), nel nostro caso (con  $\nu$  pari a 1) porterà uno sfasamento in ritardo di  $-\frac{\pi}{2}$ .

In *Fase Finale* dovremo analizzare gli zeri e i poli (rispettivamente *a fase minima* e non *e stabili* ed *instabili*), il guadagno di Bode e la quantità dei poli nell'origine:

- $zeri_{non\_min} := numboccur(select(x \rightarrow Re(x) > 0, [zeri_G]), zeri_G) = 1$
- $zeri_{min} := numboccur(select(x \rightarrow Re(x) < 0, [zeri_G]), zeri_G) = 0$
- $poli_{inst} := numboccur(select(x \rightarrow Re(x) > 0, [poli_G]), [poli_G]) = 0$
- $poli_{stab} := numboccur(select(x \rightarrow Re(x) < 0, [poli_G]), [poli_G]) = 2$

Ed avremo quindi:

$$\arg(k_b) - v \cdot \frac{\pi}{2} + zeri_{min} \cdot \frac{\pi}{2} - zeri_{non\_min} \cdot \frac{\pi}{2} - poli_{stab} \cdot \frac{\pi}{2} + poli_{inst} \cdot \frac{\pi}{2} = -2\pi$$

### ***Regioni di Bassa e Alta Frequenza***

La regione di *Bassa Frequenza* comprende tutte quelle pulsazioni  $\frac{\omega}{\Omega_t} \ll 0.1$  (tutte quelle pulsazioni a partire dalla continua fino alla pulsazione situata una decade prima rispetto alla pulsazione di taglio più bassa).

Nel nostro caso è identificata dalla pulsazione:

$$BF_f := \min\left(\frac{1}{10} \cdot \min(\Omega_r, \omega_n)\right)$$

$$BF_f := \frac{1}{5} \quad (1.7.1)$$

la regione di BF è quindi quella regione di pulsazioni  $\omega$  che si trovano una decade prima della pulsazione di taglio, quindi per  $\omega < 0.2$ .

La regione di *Alta Frequenza*, invece, comprende tutte quelle pulsazioni  $\frac{\omega}{\Omega_t} \gg 10$  (tutte quelle pulsazioni a partire dalla pulsazione situata una decade dopo rispetto alla pulsazione di taglio più alta).

$$AF_f := \max(10 \cdot \max(\Omega_r, \omega_n))$$

$$AF_f := 300 \quad (1.7.2)$$

la regione di AF è quindi quella regione di pulsazioni  $\omega$  che si trovano una decade dopo la pulsazione di taglio, quindi per  $\omega > 300$ .

Il diagramma delle fasi inizia quindi "piatto" per  $\omega < 0.2$  e termina "piatto" per  $\omega > 300$ .

Per tracciare il diagramma, come abbiamo fatto per il diagramma dei moduli, definiamo una funzione che calcola l'*approssimazione asintotica* del diagramma che stavolta sarà divisa in tre parti: Bassa Frequenza, Media Frequenza ed Alta Frequenza:

$$g_{appr} := (\omega, \omega_c) \rightarrow \begin{cases} 0 & \frac{\omega}{\omega_c} < \frac{1}{10} \\ \frac{\pi}{4} \cdot \log_{10} \left( \frac{\omega}{\left( \frac{\omega_c}{10} \right)} \right) & \frac{1}{10} \leq \frac{\omega}{\omega_c} < 10 \\ \frac{\pi}{2} & \frac{\omega}{\omega_c} \geq 10 \end{cases} :$$

Definiamo, come prima, una funzione che tiene conto del vero contributo dato dai poli complessi e coniugati:

$$g_{appr\_tr} := (\omega, \omega_n, \delta) \rightarrow \arg \left( \left( 1 - \left( \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 \right) + \frac{2 \cdot I \cdot \delta \cdot \omega}{\omega_n} \right) :$$

Ed infine una funzione che traccia il diagramma dei moduli effettivo:

$$g := (\omega, \omega_c) \rightarrow \arg \left( 1 + I \cdot \left( \frac{\omega}{\omega_c} \right) \right) :$$

Adesso componiamo la funzione fase che tiene conto dei vari contributi ed approssima le pulsazioni di taglio dei poli complessi e coniugati alla pulsazione naturale  $\omega_n = 2$  e che genera il diagramma delle fasi approssimato:

$$g_{G_{appr}} := \omega \rightarrow \arg(k_b) + \text{signum}(-zeri_G) \cdot g_{appr}(\omega, \Omega_t) - v \cdot \frac{\pi}{2} - 2 \cdot g_{appr}(\omega, \omega_n) :$$

Ed ora una sua versione che tiene conto anche del vero contributo dato dai poli complessi e coniugati:

$$g_{G_{appr\_trin}} := \omega \rightarrow \arg(k_b) + \text{signum}(-zeri_G) \cdot g_{appr}(\omega, \Omega_t) - v \cdot \frac{\pi}{2} - g_{appr\_tr}(\omega, \omega_n, \delta) :$$

Ed infine una funzione che traccia il diagramma delle fasi effettivo:

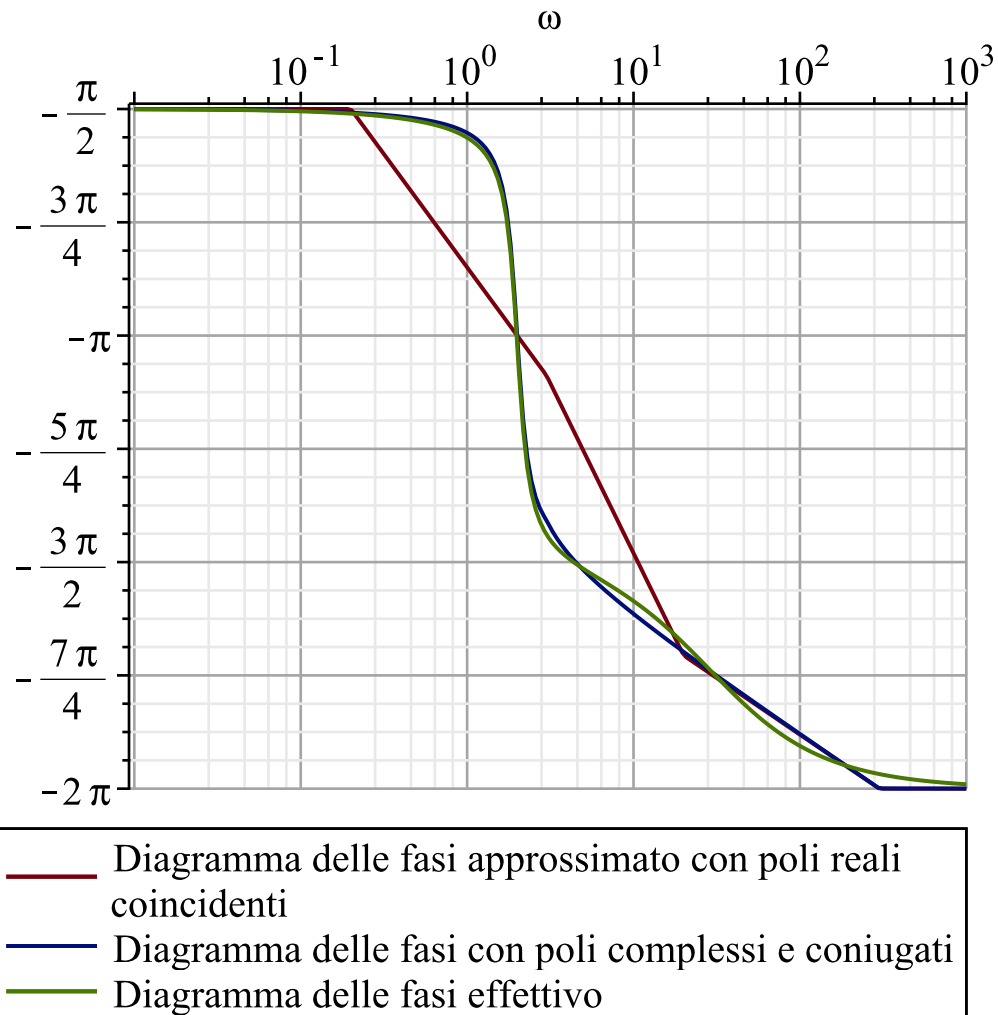
$$g_G := \omega \rightarrow \arg(k_b) + \text{signum}(-zeri_G) \cdot g(\omega, \Omega_t) - v \cdot \frac{\pi}{2} - g_{appr\_tr}(\omega, \omega_n, \delta) :$$

Possiamo finalmente tracciare il diagramma delle fasi.

Rappresentiamo sullo stesso grafico sia il diagramma asintotico generato da due poli reali coincidenti in  $\omega_n$ , sia quello che considera il reale contributo dei poli complessi e coniugati e sia il diagramma delle fasi effettivo:

$$\text{semilogplot} \left( \left[ g_{G_{appr}}(\omega), g_{G_{appr\_trin}}(\omega), g_G(\omega) \right], \omega = 0.01 \dots 1000, \text{axis} = [\text{gridlines}], \text{legend} \right)$$

= ["Diagramma delle fasi approssimato con poli reali coincidenti",  
 "Diagramma delle fasi con poli complessi e coniugati", "Diagramma delle fasi effettivo"],  
 tickmarks = [default, piticks])



## Comando *BodePlot*

Per fare un confronto, ricaviamo la *forma di Bode* di  $G(s)$ :

$$G_{Bode}(s) := k_b \cdot \frac{\left(1 + \text{sign}(-\text{zeri}) \cdot \frac{s}{\Omega_t}\right)}{s^v \cdot \left(\frac{s^2}{\omega_n^2} + 2 \cdot \delta \cdot \frac{s}{\omega_n} + 1\right)} :$$

$$G_{Bode}(s)$$

$$\frac{10 \left(1 - \frac{s}{30}\right)}{s \left(\frac{1}{4} s^2 + \frac{1}{8} s + 1\right)}$$

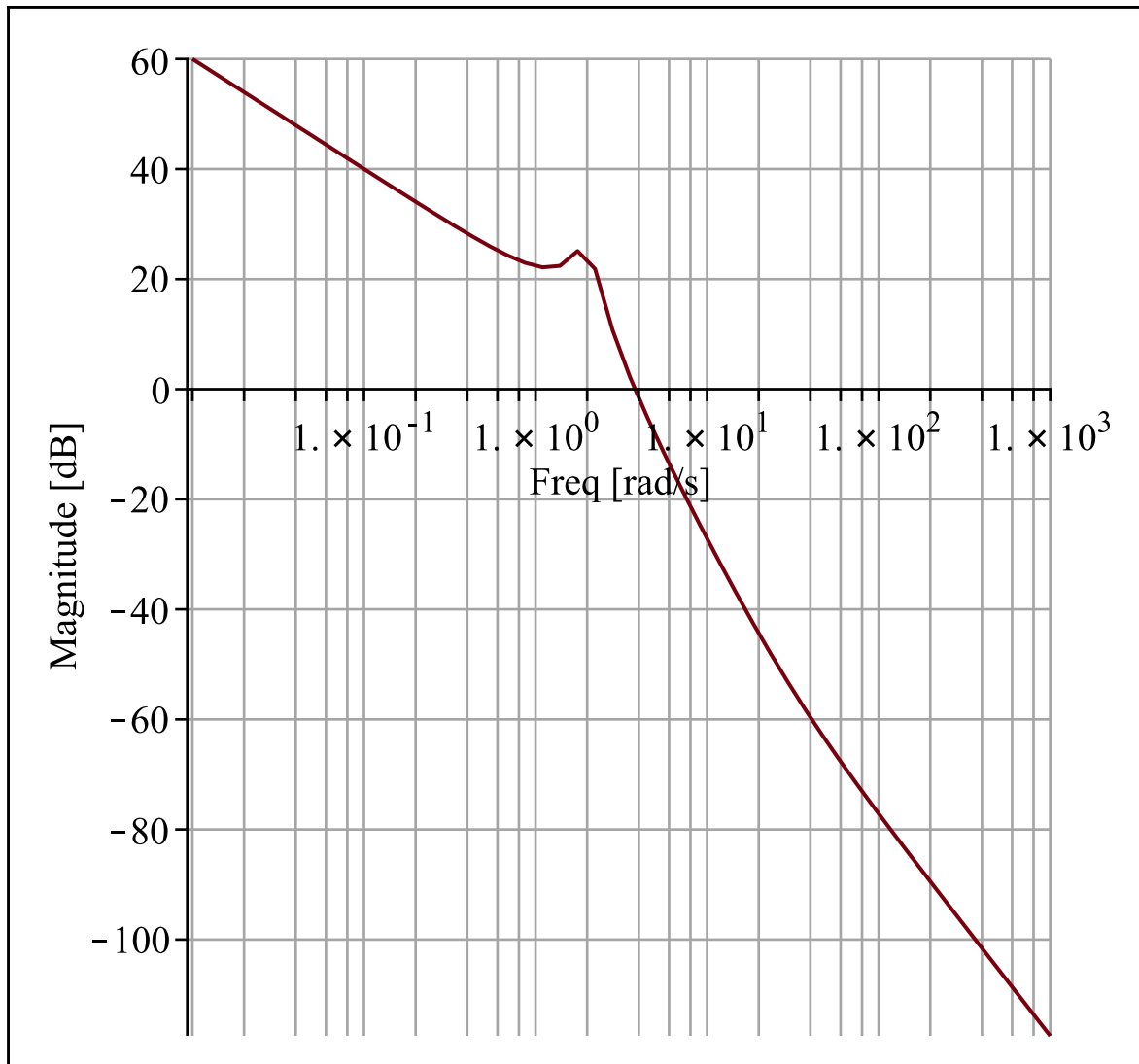
(1.8.1)

$$G_{Bode}(j \cdot \omega)$$

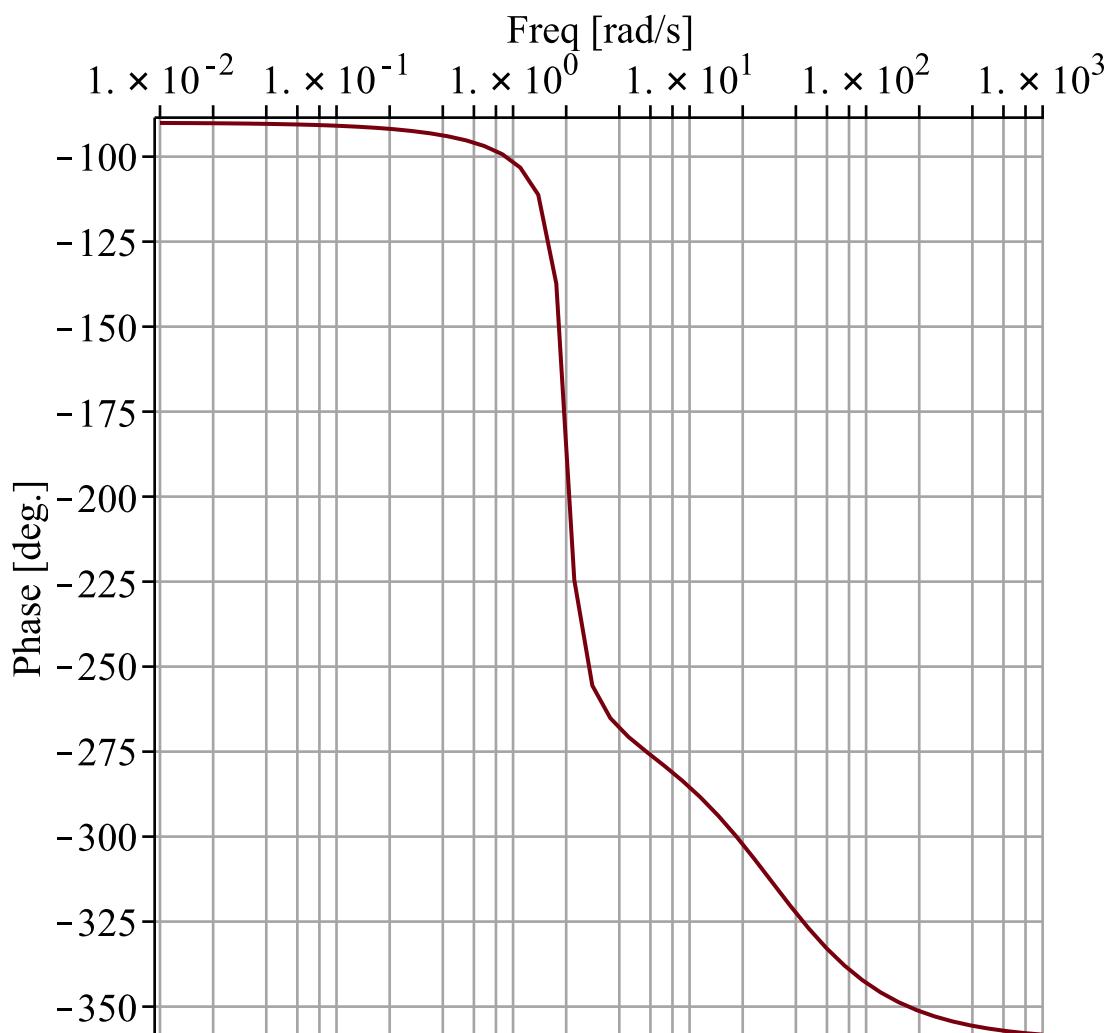
$$\frac{10 \left( 1 - \frac{j \omega}{30} \right)}{j \omega \left( \frac{1}{4} j^2 \omega^2 + \frac{1}{8} j \omega + 1 \right)} \quad (1.8.2)$$

Con il comando *BodePlot* è possibile rappresentare i diagrammi di Bode:

*BodePlot(TransferFunction( $G_{Bode}(s)$ ))*







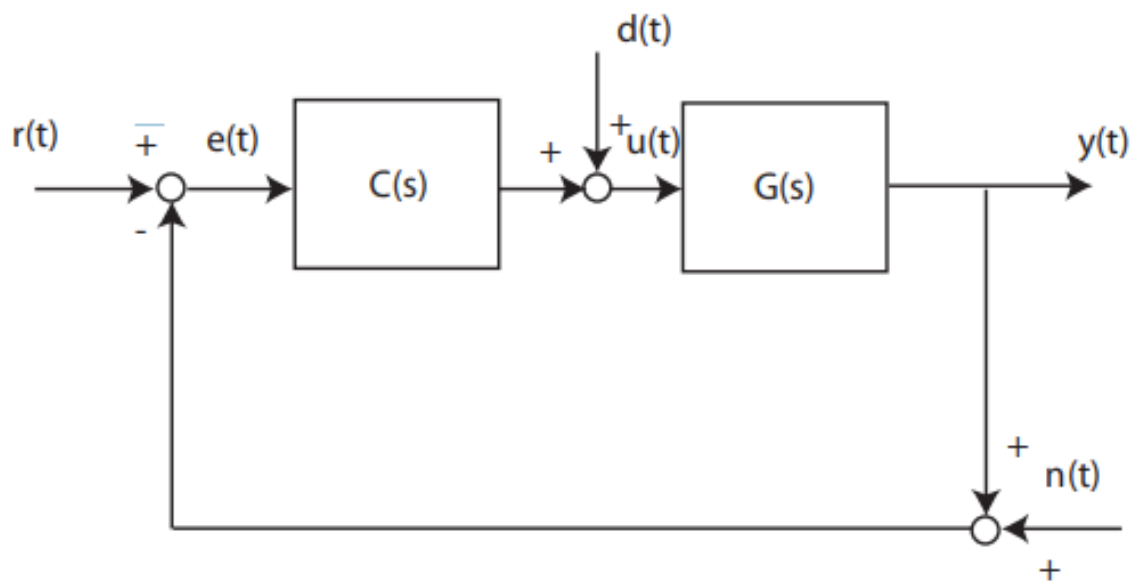
Ripuliamo l'area di lavoro e carichiamo i Toolbox essenziali:  
`restart ; with(intrans) ; with(DynamicSystems) ; with(plots) ;`

# PROGETTO FONDAMENTI DI AUTOMATICA

Michele Purrone mat. 201181

## Quesito D

Si consideri il seguente schema di controllo in retroazione algebrica ed unitaria:



dove  $G(s)$  rappresenta la F.d.T. del processo:

$$G(s) := \frac{9}{(s+1)^2 \cdot (s+9)}$$

$$G := s \mapsto \frac{9}{(s+1)^2 (s+9)} \quad (1)$$

Si chiede di determinare un regolatore  $C(s)$  di struttura semplice che garantisca il soddisfacimento delle seguenti specifiche:

1. errore di inseguimento al gradino non superiore al 5%;
2. Picco di Risonanza  $M_{r, dB} \leq 3 \text{ dB}$ , banda passante  $1 \leq \omega_{BW} \leq \frac{4 \text{ rad}}{\text{sec}}$ ;

Il quesito sarà svolto in due parti: nel punto 1. verrà utilizzato Maple, nel punto 2. MATLAB.

## ▼ 1. Errore di inseguimento al gradino non superiore al 5%

Come primo step, andiamo ad analizzare la nostra Funzione di Trasferimento  $G(s)$ :

$$\begin{aligned} \text{zeri}_G &:= \text{solve}(\text{numer}(G(s))) \\ \text{zeri}_G &:= ( ) \end{aligned} \quad (1.1)$$

Notiamo che il sistema assegnato non ammette zeri.

$$\begin{aligned} \text{poli}_G &:= \text{solve}(\text{denom}(G(s))) \\ \text{poli}_G &:= -9, -1, -1 \end{aligned} \quad (1.2)$$

Il sistema presenta 3 poli reali: essi sono tutti strettamente negativi; possiamo perciò affermare che il sistema è **BIBO-STABILE**.

Questo tipo di richiesta (1.) è classificabile come un problema di asservimento di posizione, legato alla precisione statica ed ha come obiettivo quello di fare in modo che, avendo in ingresso un gradino di ampiezza  $R$ , il livello dell'uscita regolata  $y(t)$  a transitorio esaurito sia prossima ad  $R$ , in formula:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) \approx R.$$

Uno schema di controllo che deve rispettare questo requisito è tanto più preciso tanto quanto il limite è prossimo ad  $R$ .

Definiti i dettagli del problema su cui stiamo lavorando, per soddisfare la richiesta e avere così un errore di inseguimento al gradino non superiore al 5% è sufficiente che la  $G(s)$  sia di tipo 0, ovvero con assenza di effetti integrali.

Per quanto detto sopra, notiamo che la nostra funzione di trasferimento non presenta alcun effetto integrale (non ha poli nell'origine); siamo perciò in grado di considerare un controllore del tipo:

$$C(s) := K :$$

Il valore di  $K$  ci consente di rispettare il vincolo percentuale modulando il valore numerico dell'errore di inseguimento: esso è un elemento di guadagno posto in cascata (serie) rispetto alla funzione di trasferimento.

La componente di errore del sistema, nel dominio delle trasformate di Laplace, è legata alla

Sensitività  $\left( S(s) = \frac{1}{1 + L(s)} \right)$  ed alla trasformata di Laplace del riferimento  $\left( R(s) = \frac{R}{s} \right)$  dalla relazione:  $E(s) = S(s) \cdot R(s)$  (in assenza di eventuali disturbi e rumori).

Dovendo rispettare un vincolo percentuale nel dominio del tempo, dobbiamo calcolare il valore di  $K$  mediante la relazione:  $e_\infty = \lim_{t \rightarrow +\infty} e(t)$  che, nel dominio di Laplace (dopo aver applicato il *Teorema*

del valore finale) sarà:

$$\begin{aligned} e_{\infty} &= \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot E(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot (S(s) \cdot E(s)) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{1}{1 + L(s)} \cdot \frac{R}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1 + L(s)} \cdot R = S(0) \cdot R \\ &= \frac{R}{1 + \lim_{s \rightarrow 0} L(s)} = \frac{R}{1 + K_p} \end{aligned}$$

$K_p$  prende il nome di *costante di posizione*.

Consideriamo ora un gradino di ampiezza unitaria e quindi poniamo  $R=1$ .

Calcoliamo la funzione di anello:

$$L := s \rightarrow C(s) \cdot G(s) :$$

$$L(s) = \frac{9K}{(s+1)^2(s+9)}$$

$$e_p := \frac{1}{1 + \lim_{s \rightarrow 0} L(s)} = \frac{1}{1 + K}$$

Dato che, come richiesto dalla specifica **1.**, deve valere

$e_p < 5\% \Rightarrow \frac{1}{1+K} < \frac{1}{20} \Rightarrow 1+K > 20 \Rightarrow K > 19$ . Scegliamo  $K=19.5$  e, per quanto detto sopra, il controllore relativo alla specifica statica richiesta avrà forma:

$$C(s) = 19.5$$

```

clear; close all;
%Ripuliamo l'area di lavoro;

%{
PROGETTO FONDAMENTI DI AUTOMATICA
Michele Purrone mat. 201181
%}

%{
Quesito D
Si chiede di determinare un regolatore  $C(s)$  di struttura semplice che
garantisca il soddisfacimento delle seguenti specifiche:
1. errore di inseguimento al gradino non superiore al 5%;
2. Picco di Risonanza  $M_r, dB \leq 3$  dB, banda passante  $1 \leq \omega_{bw} \leq 4$ 
rad/s;
%}

%{
Dopo aver svolto il punto 1. su Maple, abbiamo trovato una F. D. T.
del controllore  $C(s)$  compatibile con la prima specifica
ovvero  $C(s) = K$ , con  $K > 19$ : abbiamo posto  $C(s) = 19.5$ .
%}

%{
Generiamo la funzione di trasferimento  $G(s)$  dell'impianto usando il
comando di
MATLAB "zpk":
%}

s = zpk('s');
G = 9/((s + 1)^2*(s + 9))

%Il controllore sarà:

C = 19.5;

%{
Tramite il comando di MATLAB "series" possiamo generare la cascata
fra
impianto e controllore andando così a generare la funzione di anello
 $L(s)$ :
%}

L = series(C, G)

```

```
%{
```

Come richiesto dalla traccia, dobbiamo modellare il sistema mediante una rete correttrice posta in cascata alla funzione di anello che ci faccia ottenere un picco di risonanza in dB inferiore a 3 dB ed una pulsazione di banda passante compresa fra 1 e 4 rad/sec.

Questo tipo di problema è legato alla precisione dinamica e per risolverlo

ragiono, almeno per il momento, in una logica EX-ANTE, ovvero prima di chiudere l'anello

in retroazione.

```
%}
```

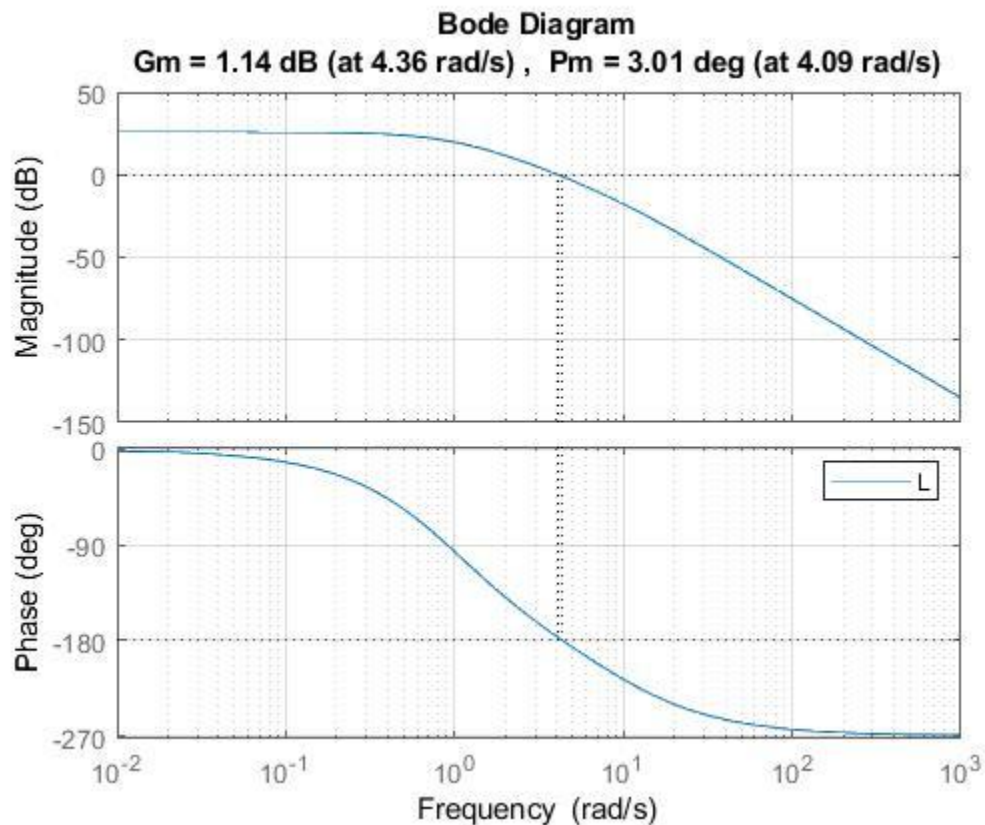
%Come primo step andiamo ad analizzare il margine di fase della funzione di anello:

```
figure(1);
```

```
margin(L);
```

```
grid;
```

```
legend;
```



```
%{  
La funzione di anello ha margine di fase positivo ( $3.01^\circ$ ) e quindi è  
BIBO  
stabile; otteniamo, inoltre, una pulsazione di attraversamento  $\omega_c$   
pari a 4.36 rad/sec.
```

```
Per quanto riguarda il requisito sul picco di risonanza, va  
innanzitutto  
individuato lo smorzamento critico  $\delta_{cr}$  che risponde ad un picco  
di  
risonanza pari a 3 dB. Utilizziamo la funzione fornitaci "smorz_Mr":  
%}
```

```
 $\delta_{cr} = \text{smorz\_Mr}(3)$ 
```

```
%{  
Otteniamo un  $\delta_{cr} = 0.38$ . Sappiamo inoltre dalla teoria che il  
picco di risonanza  
e lo smorzamento sono inversamente proporzionali:  
se il primo aumenta allora il secondo diminuisce.
```

```
Per rispettare questa specifica dovremo scegliere uno smorzamento di  
progetto maggiore di  $\delta_{cr}$ .  
Trovandoci, come detto precedentemente, in una logica EX-ANTE  
traduciamo questo nuovo vincolo in un  
requisito sul margine di fase utilizzando la relazione:
```

```
 $\phi_m \geq 100 \cdot \delta_{cr} \Rightarrow 100 \cdot 0.38 = 38^\circ \Rightarrow \phi_m \geq 38^\circ$ 
```

```
Per lo stesso motivo possiamo tradurre il vincolo sulla pulsazione di  
banda  
passante in un requisito sulla pulsazione di attraversamento: siamo  
in grado di farlo  
poiché la pulsazione di attraversamento è un minorante della  
pulsazione di  
banda passante ( $\omega_{bw} > \omega_c$ ).
```

```
Alla fine, quindi, otteniamo due nuove specifiche (di progetto)  
da verificare successivamente a sistema retroazionato:
```

1.  $\phi_m \geq 38^\circ$
2.  $1 \leq \omega_c \leq 4$  rad/sec

```
Scegliamo un margine di fase di progetto pari a  $42^\circ$  e la pulsazione  
di  
attraversamento di progetto:  
%}
```

```

wc_new = 2;

%{
Valutiamo adesso la funzione di anello non compensata in
corrispondenza di questa
nuova pulsazione di attraversamento.
Salviamo poi in due variabili il modulo e la fase della funzione di
anello.
Rappresentiamo il diagramma di Bode usando il comando "bode" di
MATLAB:
%}

[modulo, fase] = bode(L,wc_new)

phi_m_iniz = 180 - abs(fase)

%{
Calcoliamo, a partire dalla fase ottenuta, il margine di fase
iniziale (distanza goniometrica):
%}

theta = 42 - (phi_m_iniz)

%{
Otteniamo un modulo maggiore dell'unità e theta minore del margine di
fase di
progetto richiesto che è 42°.

Abbiamo perciò bisogno di una rete che ATTENUI sui moduli e che
ANTICIPI sulle fasi:
questa particolare rete è nota come rete a SELLA (o rete ANTICIPO-
ATTENUAZIONE).
Essa è formata da una componente di attenuazione ed una di anticipo:


$$C_d(s) = \underbrace{\frac{1 + s\alpha T_1}{1 + sT_1}}_{\text{ATTENUAZIONE}} * \underbrace{\frac{1 + sT_2}{1 + s\alpha T_2}}_{\text{ANTICIPO}}, \quad T_1, T_2 > 0 \text{ e } 0 < \alpha < 1$$


.T1 e T2 positivi poiché la rete deve essere comunque BIBO-STABILE.
%}

```



```

%{
Iniziamo a progettare la rete partendo dal calcolo del reciproco del
modulo
della funzione di anello non compensata valutata in corrispondenza
della
pulsazione di attraversamento wc_new: ci servirà per valutare
l'attenuazione necessaria. Procediamo:
%}

m = 1/modulo;

%{
Tramite la funzione fornitaci "sella" andiamo a generare i parametri
della rete:
alpha, T1 e T2
%}

K = 30;
[alpha, T1, T2] = sella(wc_new, m, theta, K)

%{
Come prova, prima di verificare graficamente che la rete proposta sia
efficace, assicuriamoci che la pulsazione di attraversamento di
progetto
scelta vada a ricadere tra 1/T2 ed 1/(alpha*T2) in modo da ottenere
un
effetto di anticipo ed attenuazione:
%}

if (1/T2 < wc_new < 1/(alpha*T2))
    disp ('La pulsazione wc_new ricade nell''intervallo proposto');
end;

%Costruiamo quindi la rete:

C_d = ((1 + s*alpha*T1)/(1 + s*T1))*((1 + s*T2)/(1 + s*alpha*T2))

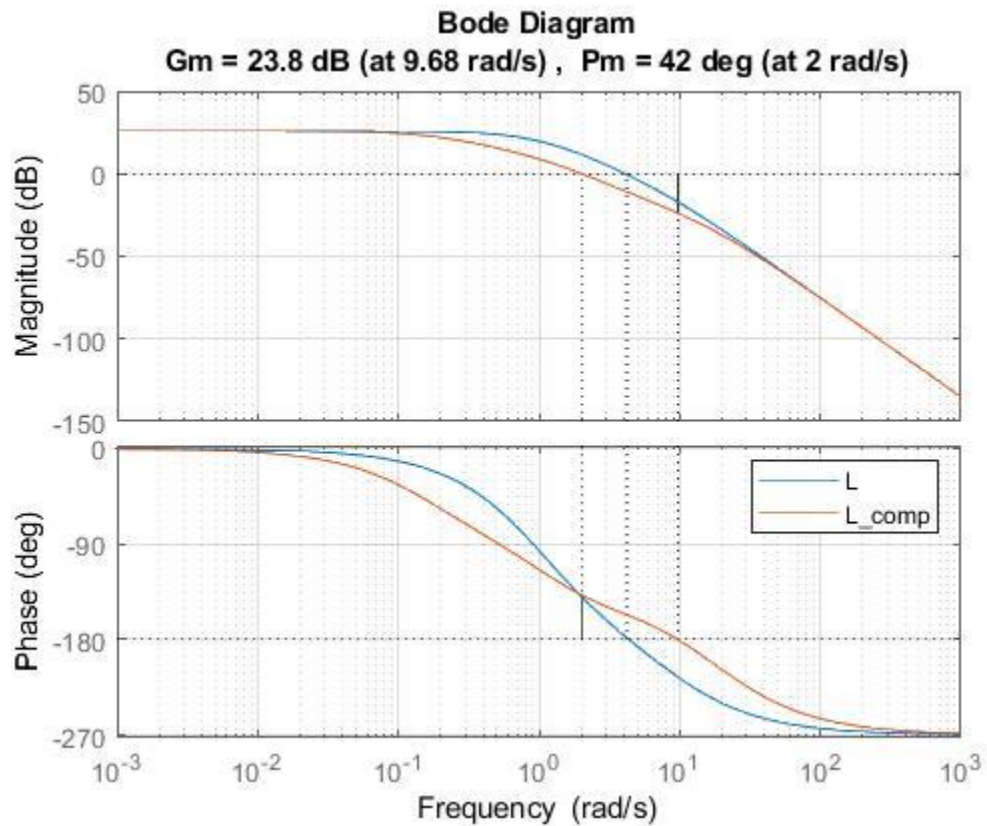
%{
A questo punto possiamo generare la funzione di anello compensata
inserendo
la rete a sella in cascata alla funzione di anello. Fatto ciò potremo
effettuare un'analisi in una logica EX-POST e verificare i requisiti
richiesti
dal quesito:
%}

```

```
L_comp = series(series(C, G), C_d)
```

```
%{
Rappresentiamo graficamente la funzione di anello non compensata e
quella
compensata per vedere le differenze:
%}
```

```
figure(2);
margin(L);
hold on;
margin(L_comp);
grid;
legend;
```

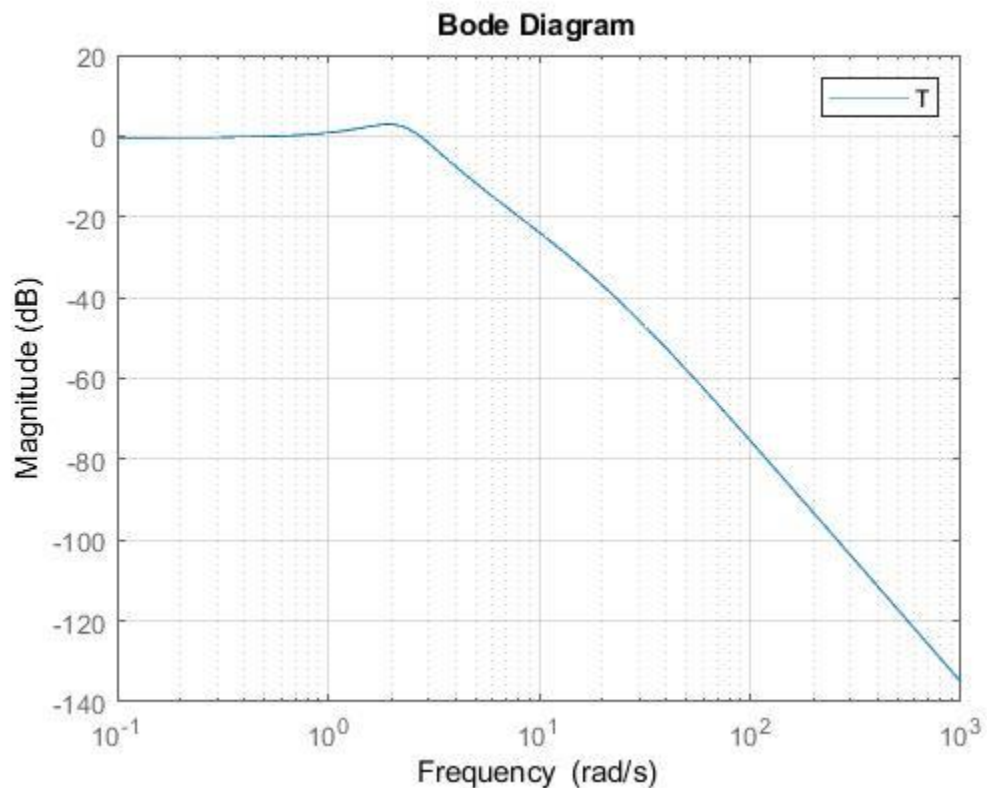


```
%{
A questo punto generiamo la funzione di trasferimento del sistema
retroazionato per verificarne i parametri:
%}
```

```
T = feedback(L_comp, 1)
```

```
%Disegniamo il diagramma di Bode (moduli):
```

```
figure(3);
bodemag(T);
grid;
legend;
```



```
%{
Otteniamo così un picco di risonanza pari a 2.9083 dB ed una
pulsazione di
banda passante pari a 3.2633 rad/sec.
Ciò è verificabile anche tramite delle funzioni di MATLAB ("mag2db",
"getPeakGain" ecc.):
%}
```

```
M_r = mag2db(getPeakGain(T))
```

```
w_bw = bandwidth(T)
```