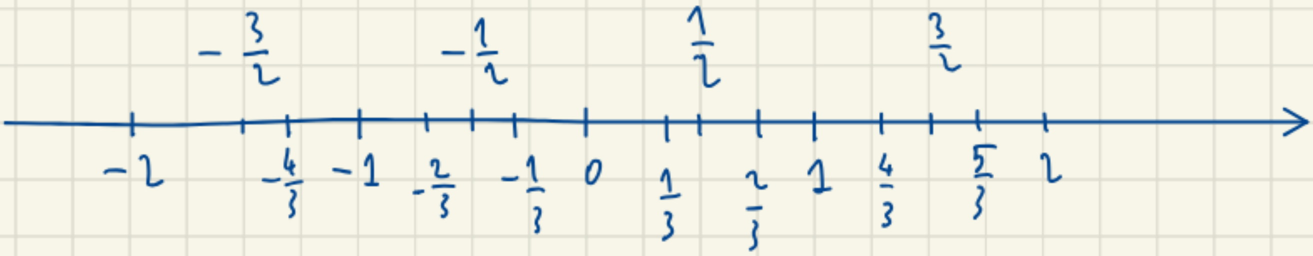
23 Settembre 2025

L' INSIEME DEI NUMERI RAZIONALI $\mathbb{Q}$:



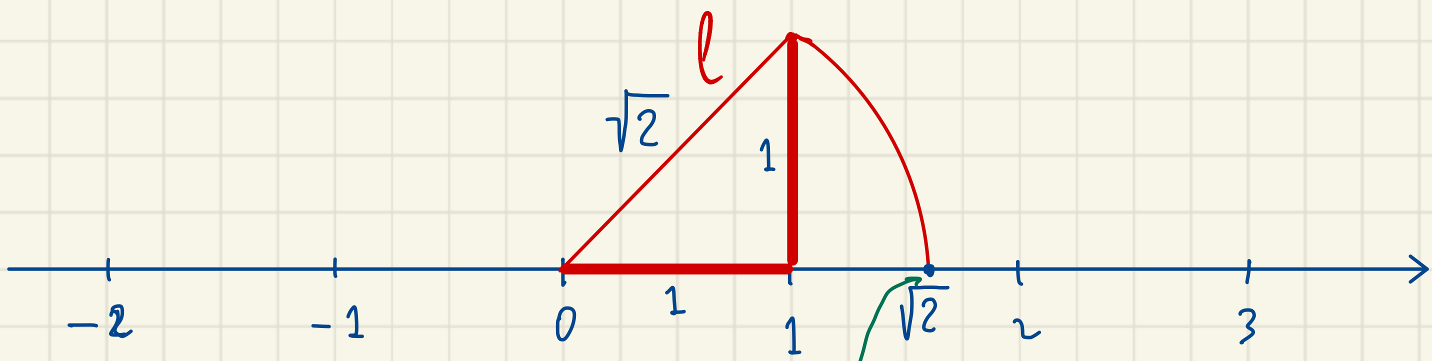
DOMANDA:

Esistono tanti numeri razionali quanti sono i punti della retta?

Equivalentemente, c'è una funzione biunivoca fra $\mathbb{Q}$ e i punti di una retta?

La risposta è NO!

$$\ell^2 = 1^2 + 1^2 = 2$$



questo punto corrisponde al numero $\sqrt{2}$

DOMANDA:

$$\sqrt{2} \in \mathbb{Q} \; ?$$

TEOREMA: $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

DIM. (PER ASSURDO)

Assumiamo che $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$.

Dunque: $\exists\ m, n \in \mathbb{N}$:

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n}$$

Possiamo supporre che la frazione $\frac{m}{n}$ sia ridotta ai minimi termini, cioè:

$$M.C.D.(m, n) = 1$$

$$\frac{m}{n} = \sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{m^2}{n^2} = 2$$

$$\Rightarrow \quad m^2 = 2n^2$$

$\Rightarrow \quad m^2$ è pari

(da ciò che si è visto in precedenza)

$\Rightarrow \quad m$ è pari

Quindi: $\quad \exists\, m_1 \in \mathbb{N} : \quad m = 2 \cdot m_1$

$$\Rightarrow \quad (2 \cdot m_1)^2 = 2 \cdot n^2$$

$$4 \cdot m_1^2 = 2 \cdot n^2$$

$$2 \cdot m_1^2 = n^2$$

$$n^2 = 2 \cdot m_1^2$$

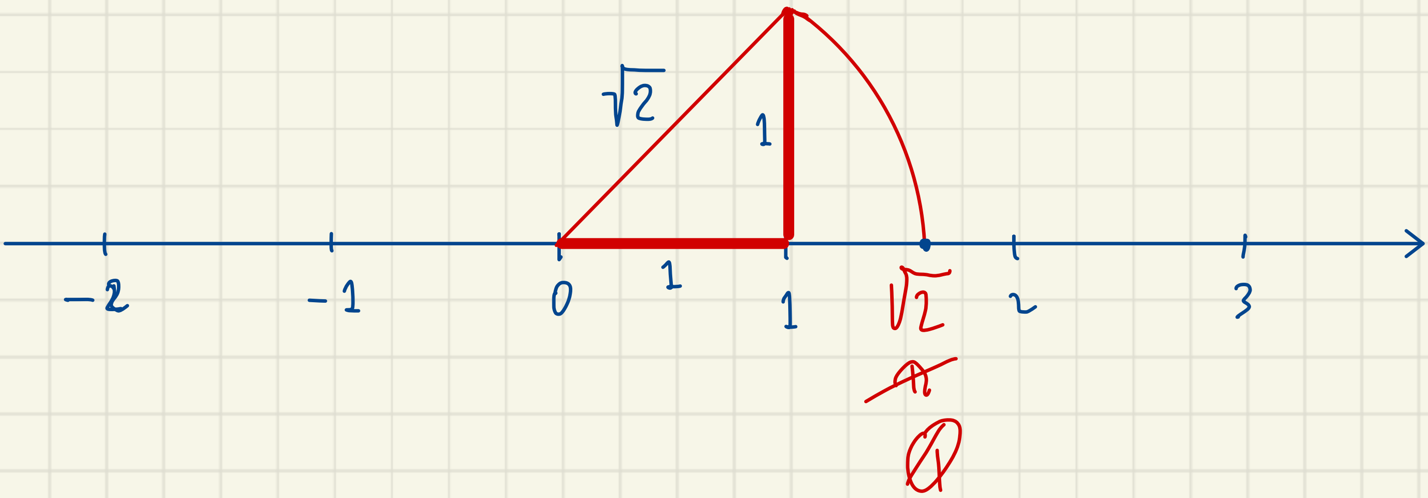
$\Longrightarrow$ n^2 è pari

$\Longrightarrow$ n è pari

Si è così provato che m, n sono pari

$\Longrightarrow$ 2 è un fattore comune di m e n

ASSURDO! $M.C.D.(m,n) = 1$



Ci sono altri "punti" che non corrispondono a numeri razionali!

TEOREMA:

Sia $p \in \mathbb{N}$ un numero primo

$\Longrightarrow \sqrt{p} \notin \mathbb{Q}$

La prova è simile alla precedente.

Per un generico numero primo p, si usa una osservazione che prescinde dai numeri pari/dispari.

Oss.:

Sia M un numero naturale.

I fattori primi che compongono M^2 sono i **medesimi** di quelli che compongono M.

$$M = p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{n_k} \qquad n_1, n_2, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$$

$$M^2 = p_1^{2n_1} \cdot p_2^{2n_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{2n_k}$$

Esempio:

$30 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \longrightarrow$ fattori 2, 3, 5

$30^2 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2$

$20 = 2^2 \cdot 5 \longrightarrow$ fattori 2, 5

$20^2 = 2^4 \cdot 5^2$

TEOREMA:

Sia $p \in \mathbb{N}$ un numero primo

$$\Longrightarrow \sqrt{p} \notin \mathbb{Q}$$

DIM.:

Per assurdo: $\longrightarrow$ supponiamo $\sqrt{p} \in \mathbb{Q}$

$\exists\, m, n \in \mathbb{N}$:

$$\sqrt{p} = \frac{m}{n}$$

$$M.C.D.\,(m, n) = 1$$

$$\sqrt{p} = \frac{m}{n} \implies p = \frac{m^2}{n^2}$$

$$n^2 \cdot p = m^2$$

p è un fattore primo di m^2

$\implies p$ è un fattore primo di m

$\implies \exists\, m_1 \in \mathbb{N} : \quad m = p \cdot m_1$

$$n^2 \cdot p = (p \cdot m_1)^2$$

$$n^2 \cdot \cancel{p} = p^{\cancel{2}} \cdot m_1^2$$

$$n^2 = p \cdot m_1^2$$

$\Longrightarrow$ p è un fattore primo di n^2

$\Longrightarrow$ p è un fattore primo di n

$\Longrightarrow$ p è un fattore comune a m e n

ASS.

Quindi:

$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$, $\sqrt{5} \notin \mathbb{Q}$

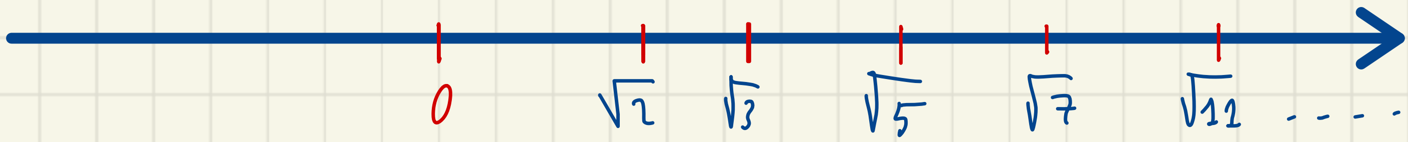
$\sqrt{7} \notin \mathbb{Q}$, ...

Quanti sono i numeri primi?

I numeri primi sono infiniti,

$\Longrightarrow \{ \sqrt{p} \mid p \text{ numero primo} \}$

è infinito e corrisponde a punti sulla retta che non corrispondono a nessun numero razionale



Esempio:

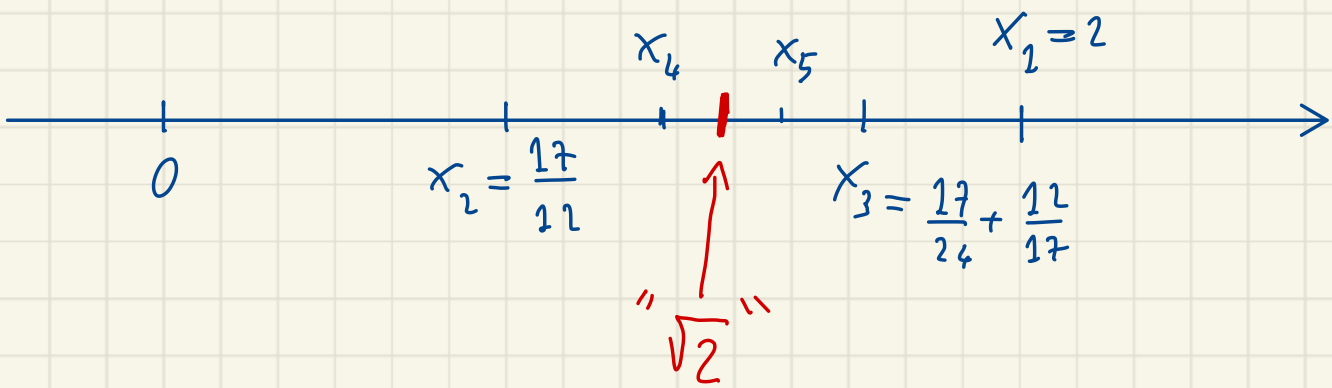
$$\begin{cases} x_n = \dfrac{x_{n-1}}{2} + \dfrac{1}{x_{n-1}} \\ x_1 = 2 \end{cases} \implies x_n \in \mathbb{Q}$$

$$2, \quad \underbrace{1 + \frac{1}{2}}_{\substack{\frac{3}{2} \\ \shortparallel \\ 1,5}}, \quad \underbrace{\frac{\frac{3}{2}}{2} + \frac{2}{3}}_{\shortparallel \; x_3}, \quad \underbrace{\frac{17}{24} + \frac{12}{17}}_{\shortparallel \; x_4}, \; \dots$$

$x_2 = \frac{3}{2} = 1,5$

$$\frac{3}{4} + \frac{2}{3} = \frac{17}{12} = 1,41\overline{7}$$

$x_4 = 1,414215\overline{68}$



$$x_n \longrightarrow \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$$

I NUMERI REALI $\mathbb{R}$:

Idea intuitiva :

" Se posizioniamo tutti i numeri razionali sulla retta e aggiungiamo a $\mathbb{Q}$ tutti i punti rimanenti otteniamo un insieme numerico più grande $\longrightarrow$ i numeri reali $\mathbb{R}$ ".

" I numeri reali sono in corrispondenza biunivoca con i punti della retta (cioè esauriscono tutti i punti della retta) "

" I numeri reali non presentano "" vuoti ""
(a differenza di $\mathbb{Q}$)
e $\mathbb{R}$ è così un insieme
continuo "

" La proprietà che possiede $\mathbb{R}$
(e manca a $\mathbb{Q}$) è
la continuità. "

PROBLEMA:

Come si formalizza matematicamente la proprietà di continuità in $\mathbb{R}$?

(Non si costruirà $\mathbb{R}$ esplicitam.)

A questo punto vi sono due approcci alternativi:

(I) COSTRUZIONE ESPLICITA dell'insieme dei numeri reali a partire da $\mathbb{Q}$ <u>NO</u>

(II) si assume l'esistenza dell'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali e si formalizza rigorosamente la proprietà di continuità che tale insieme possiede, a differenza di $\mathbb{Q}$.   SI

CONTINUITÀ DI $\mathbb{R}$:

Per chiarire tale nozione è necessario un certo lavoro preliminare, apparentemente scorrelato dagli argomenti precedenti.

Introduciamo alcune definizioni.

DEF.: $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$

1. $M \in \mathbb{R}$ si dice maggiorante di A se:
$$\forall a \in A: \quad a \leq M$$
Se A ammette un maggiorante A si dice superiormente limitato

2. $m \in \mathbb{R}$ si dice minorante di A se:
$$\forall a \in A: \quad m \leq a$$
Se A ammette un minorante A si dice inferiormente limitato

3. Se A ammette un minorante e un maggiorante A si dice limitato

Esempi:

- $A =]-\infty, 3[$

4 è un maggiorante di A
3 " " " " A
A è superiormente limitato
A non ammette minoranti

- $B = \mathbb{N}$

$\mathbb{N}$ non ammette maggioranti
-1 è un minorante di $\mathbb{N}$
$\mathbb{N}$ è inferiormente limitato

- $[1, 2]$ è limitato

DEF.: $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$

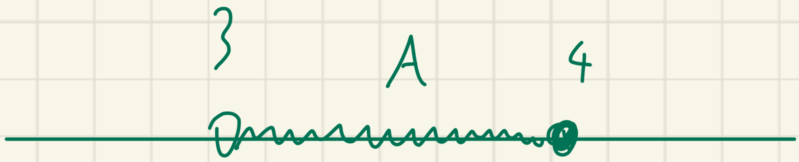
① $b \in A$ si dice minimo di A
se $\forall a \in A: \ b \leq a$

(si scrive $b =: \min A$)

② $c \in A$ si dice massimo di A
se $\forall a \in A: \ a \leq c$

(si scrive $c =: \max A$)

$$]3,4] = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 < x \leq 4\}$$

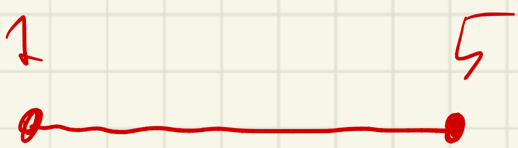


$4 = \max A$ (facile)

$\nexists \min A$

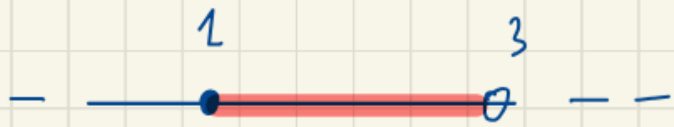
Oss.:

- il minimo di un insieme A (se esiste) è il più grande dei minoranti di A
- il massimo di un insieme B (se esiste) è il più piccolo dei maggioranti di B.



Esempi:

- $A = [1, 3[$



$\min A = 1 \qquad 1 \le a, \ \forall a \in A$

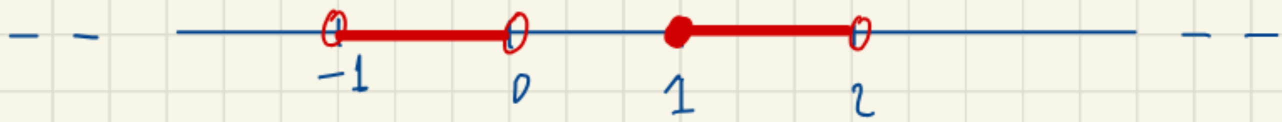
$\nexists \max A$

3 è un maggiorante di A

- $B =]1, 3[$

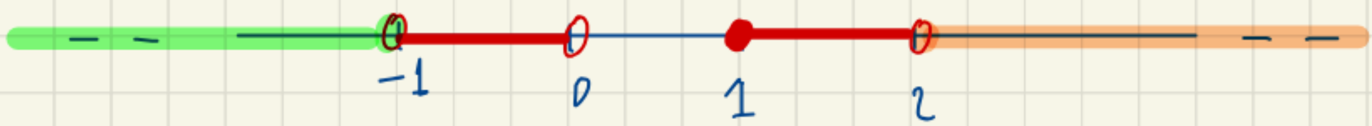
$\begin{cases} 1 \text{ minorante di } B \\ \nexists \min B \end{cases}$

$B = \,]-1, 0[\, \cup [1, 2[$



minoranti di $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -1\}$

maggioranti di $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 2\}$



$\nexists$ min B

$\nexists$ max B

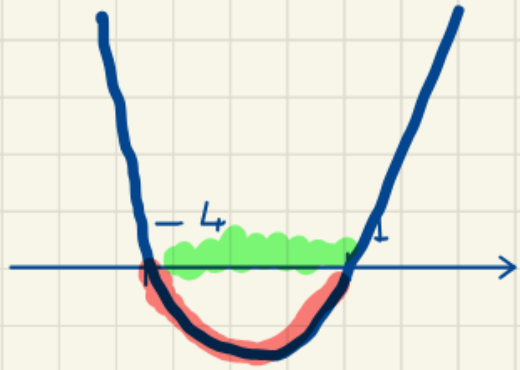
Esempio:

$$A = \{ x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 3x - 4 \leq 0 \}$$

Mostrare che A è limitato e calcolare gli insiemi

$$M_M(A) = \{ x \in \mathbb{R} \mid x \text{ è un maggiorante di } A \}$$

$$M_m(A) = \{ x \in \mathbb{R} \mid x \text{ è un minorante di } A \}$$



$$x^2 + 3x - 4 \leq 0$$

$$\Delta = 9 + 16 = 25$$

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm 5}{2} \begin{cases} -4 \\ 1 \end{cases}$$

$$x^2 + 3x - 4 = 0$$

$$-4 \leq x \leq 1$$

$$A = \{ x \in \mathbb{R} \mid -4 \leq x \leq 1 \}$$

$$\mathcal{M}_{g}(A) = \{ x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1 \}$$

$$\mathcal{M}_{n}(A) = \{ x \in \mathbb{R} \mid x \leq -4 \}$$

Esercizio:

$$A = \{ x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 3x + 2 \leq 0 \}$$

Calcolare gli insiemi:

$$M_g(A) = \{ x \in \mathbb{R} \mid x \text{ è un maggiorante di } A \}$$

$$M_n(A) = \{ x \in \mathbb{R} \mid x \text{ è un minorante di } A \}$$

Fare lo stesso per:

$$B = \{ x \in \mathbb{R} \mid 4x - 5 \geq 0 \}$$

PROPRIETÀ DI COMPLETEZZA DI $\mathbb{R}$:

$\forall \ \emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$:

1. Se A è superiormente limitato (cioè: $\mathcal{M}_{\not{o}}(A) \neq \emptyset$)

$$\Longrightarrow \ \exists \ \min \mathcal{M}_{\not{o}}(A) =: \sup A \in \mathbb{R}$$

estremo superiore di A

2. Se A è inferiormente limitato (cioè: $\mathcal{M}_{n}(A) \neq \emptyset$)

$$\Longrightarrow \ \exists \ \max \mathcal{M}_{n}(A) =: \inf A \in \mathbb{R}$$

estremo inferiore di A

DEF.:

Se A non è superiormente limitato, si scrive:

$$\sup A = +\infty$$

Se A non è inferiormente limitato, si scrive:

$$\inf A = -\infty$$

Importante:

La proprietà di completezza non vale in $\mathbb{Q}$ ed è ciò che distingue $\mathbb{R}$ da $\mathbb{Q}$!

Esempio:

$$A = \{ q \in \mathbb{Q} \mid q^2 < 2 \} \cup \{ q \in \mathbb{Q} \mid q \leq 0 \}$$

$$-\sqrt{2} < q < \sqrt{2}$$

$$\mathcal{M}_{\mathbb{Q}}(A) = \{ q \in \mathbb{Q} \mid q \geq \sqrt{2} \}$$

$\nexists \min \mathcal{M}_{\mathbb{Q}}(A)$ in $\mathbb{Q}$ $\left\{ \text{dato che } \sqrt{2} \notin \mathbb{Q} \right.$

Esempi :

$A = \left]-2, 5\right]$

$M_n(A) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -2\}$

$M_g(A) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 5\}$

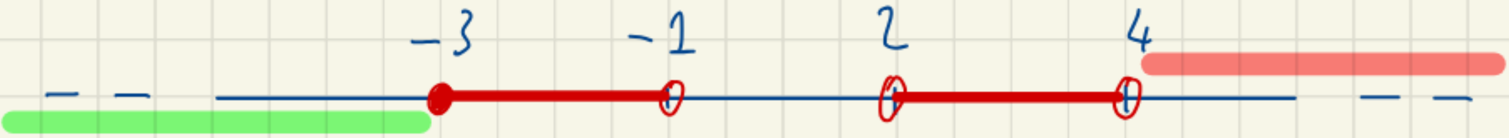
$\inf A = -2$

$\sup A = 5$

$\nexists \min A$

$\max A = 5 = \sup A$

$B = [-3, -1[\; \cup \;]2, 4[$



$M_p(B) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 4\}$

$M_n(B) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -3\}$

$\sup B = 4$

$\inf B = -3$

$\min B = -3$

$\nexists \max B$

Oss.:

- se esiste $\max A$ allora
$$\max A = \sup A$$

- se esiste $\min A$ allora
$$\min A = \inf A$$

Esercizi:

Calcolare $M_{o}(A)$, $M_{n}(A)$, $\inf A$, $\sup A$, $\max A$, $\min A$ (se esistono) di:

$A = [-2, 6]$ $\qquad$ $A = [2, 9]$

$A =]-\infty, 5]$ $\qquad$ $A =]7, +\infty[$

$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \leq 9\} \cup \{x \in \mathbb{R} \mid 6x + 5 < 0\}$

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; \frac{4}{x+2} \geq 3 - \frac{x}{x+1} \right\}$$

(Risp.: $A = \left]-2, -1\right[$)

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; 4x^4 - 9x^2 + 2 > 0 \right\}$$

{ Risp.: $A = \left]-\infty, -\sqrt{2}\right[\cup \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[\cup \left]\sqrt{2}, +\infty\right[$ }

Inf $A = -\infty$, sup $A = +\infty$

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; |x^2 - 9x + 7| < 7 \right\}$$

{ Risp.: $A = \left]0, 2\right[\cup \left]7, 9\right[$ }

inf $A = 0$ sup $A = 9$ $\nexists$ min A, max A

$$\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q}$$

$\uparrow$ $\uparrow$ $\uparrow$

insiemi numerabili

$\mathbb{R}$

(" $\mathbb{R}$ si ottiene completando $\mathbb{Q}$ con i punti mancanti sulla retta ")

Idea intuitiva:

I numeri razionali sono tutti e soli i numeri con rappresentazione decimale **periodica**.

Es.: $\frac{1}{3} = 0,\overline{3}$ $\qquad \frac{1}{5} = 0,200\ldots$

$$\frac{2}{7} = 0,\overline{285714}$$

$\frac{10}{3} = 3,\overline{3}$ $\qquad \frac{13}{11} = 1,\overline{18}$

Completare i numeri razionali (ottenendo così l'insieme dei numeri reali) significa aggiungere tutti i numeri decimali NON periodici.

$$\sqrt{2} = 1,41421356237309504\ldots$$

Questo "completamento" ha conseguenze inattese!

Si prova che $\mathbb{R}$ non è numerabile:

$\mathbb{R}$ è un infinito di ordine superiore a $\mathbb{N}$

Per provare che $\mathbb{R}$ non è numerabile, sarà sufficiente mostrare che:

$$[0,1[\text{ non è numerabile}$$

<u>**DIM.**</u> (Per assurdo)

Supponiamo per assurdo che esista:

$$f : \mathbb{N} \xrightarrow{su} [0,1[$$

quindi:

$$f(n) \in [0,1[$$

$$f(0) = 0,\ b_{00}\ b_{01}\ b_{02}\ b_{03}\ b_{04}\ b_{05}\ \ldots$$

$$f(1) = 0,\ b_{10}\ b_{11}\ b_{12}\ b_{13}\ b_{14}\ b_{15}\ \ldots$$

$$f(2) = 0,\ b_{20}\ b_{21}\ b_{22}\ b_{23}\ b_{24}\ b_{25}\ \ldots$$

$$f(3) = 0,\ b_{30}\ b_{31}\ b_{32}\ b_{33}\ b_{34}\ b_{35}\ \ldots$$

$$f(4) = 0,\ b_{40}\ b_{41}\ b_{42}\ b_{43}\ b_{44}\ b_{45}\ \ldots$$

$$\ldots = \ldots\ldots\ldots$$

$$f(n) = 0,\ b_{n0}\ b_{n1}\ b_{n2}\ b_{n3}\ b_{n4}\ b_{n5}\ \ldots$$

Mostriamo che esiste un numero reale $r \in [0,1[$ t.c.:

$$f(n) \neq r \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Costruiamo r usando un procedimento diagonale (dovuto al matematico Cantor):

$$r := 0, r_0\, r_1\, r_2\, r_3\, r_4 \, \dots$$

$$r_j = \begin{cases} 5 & \text{se } b_{jj} \neq 5 \\ 6 & \text{se } b_{jj} = 5 \end{cases} \qquad j \in \mathbb{N}$$

$\Longrightarrow$
- $r_j \neq b_{jj} \quad \forall j \in \mathbb{N}$
- $r \in [0, 1[$

Esempio

$$f(0) = 0,\overset{b_{00}}{\boxed{1}}\,3\,5\,4\ldots$$

$$f(1) = 0,2\overset{b_{11}}{\boxed{5}}\,2\,9\ldots$$

$$f(2) = 0,5\,1\overset{b_{22}}{\boxed{4}}\,7\ldots$$

$$f(3) = 0,9\,2\,3\overset{b_{33}}{\boxed{5}}\,1\ldots$$

$$r = 0,\overset{b_{00}}{\boxed{r_0}}\,\overset{b_{11}}{\boxed{r_1}}\,\overset{b_{22}}{\boxed{r_2}}\,\overset{b_{33}}{\boxed{r_3}}\,r_5\ldots$$

$$= 0,5\;6\;5\;6\ldots$$

$$
\begin{array}{lclllllll}
f(0) & = & 0, & \boxed{b_{00}} & b_{01} & b_{02} & b_{03} & b_{04} & b_{05} \; \dots \\
f(1) & = & 0, & b_{10} & \boxed{b_{11}} & b_{12} & b_{13} & b_{14} & b_{15} \; \dots \\
f(2) & = & 0, & b_{20} & b_{21} & \boxed{b_{22}} & b_{23} & b_{24} & b_{25} \; \dots \\
f(3) & = & 0, & b_{30} & b_{31} & b_{32} & \boxed{b_{33}} & b_{34} & b_{35} \; \dots \\
f(4) & = & 0, & b_{40} & b_{41} & b_{42} & b_{43} & \boxed{b_{44}} & b_{45} \; \dots \\
\dots & = & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \ddots \\
 & & & \neq & \neq & \neq & \neq & \neq & \\
r & = & 0, & r_0 & r_1 & r_2 & r_3 & r_4 & \dots
\end{array}
$$

$$\Longrightarrow \quad r \neq f(n) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Quindi $f : \mathbb{N} \longrightarrow [0, 1[$

non è suriettiva. ASSURDO!

- $r_j \neq b_{jj} \quad \forall j \in \mathbb{N}$

$$\Downarrow$$

$$r \neq f(j) \quad \forall j \in \mathbb{N}$$

Pertanto, $[0,1[$ non è numerabile.

$\Longrightarrow$ $\boxed{\mathbb{R} \text{ non è numerabile}}$

$\mathbb{R}$ è "molto più grande" di $\mathbb{Q}$!

<u>OSS.</u>: Completando $\mathbb{Q}$ si ottiene un insieme ($\mathbb{R}$) "assai più grande" dell'insieme da cui si è partiti!

Passando da $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$

è ora possibile

l'estrazione di radice.

TEOREMA: (Esistenza e unicità della radice n-esima)

$\forall a \in \mathbb{R}_+$, $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$,

$\exists!\, b \in \mathbb{R}_+ : b^n = a$

(b si dice radice aritmetica n-esima di a e si scrive

$\sqrt[n]{a} := b$, $\sqrt{a} := b$ se $n=2$)

OSS.: la radice aritmetica è un numero ≥ 0.

$\sqrt{4} = 2$ ($\sqrt{4}$ non è -2 !!)

$\sqrt{81} = 9$