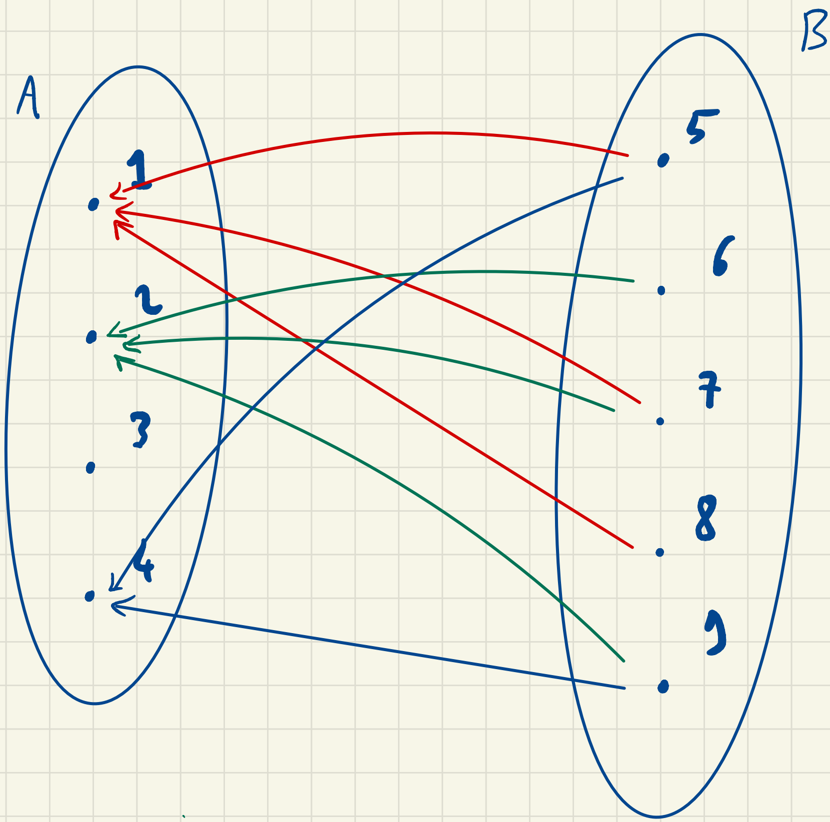
18 Settembre 2025

$$R^{-1} = \{ (5,1), (7,1), (8,1), (6,2), (7,2), (9,2), (5,4), (9,4) \}$$



DEF.: Una funzione da A a B è una relazione $\mathcal{R}$ fra A e B tale che:

$$\forall a \in A \,, \; \exists!\, b \in B : (a,b) \in \mathcal{R}$$

In generale, una funzione da A in B si indica:

$$f : A \longrightarrow B$$
$$a \longmapsto b$$

e si scrive $b = f(a)$

- __Funzioni__ : (corrispondenza, mappa)

$$f : A \longrightarrow B$$

Dominio di f

Codominio di f

$$x \xrightarrow{f} f(x)$$

legge di associazione ($\mathcal{R}$)

$$\forall x \in A, \quad \exists!\, b \in B : \quad f(x) = b$$

Dunque, una funzione è definita da una terna:

$$(A, B, f)$$

$x \xrightarrow{f} b$

$$f(x) = b$$

"b si dice IMMAGINE di x tramite f"

Due funzioni $f : A \longrightarrow B$, $g : A' \longrightarrow B'$

sono <u>uguali</u> se e solo se:

$$\begin{cases} A = A' \\ B = B' \\ f = f' \end{cases}$$

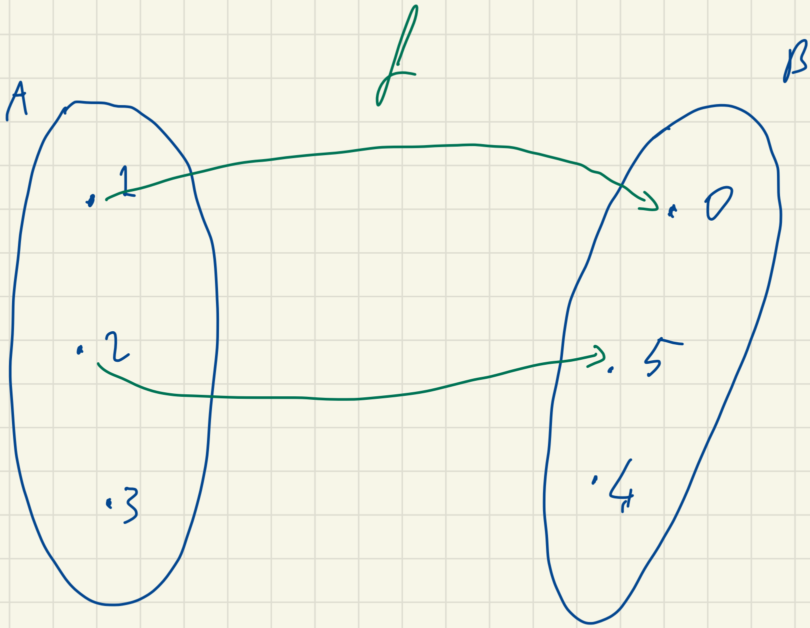
<u>Es.:</u>

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$f(x) = x^2$$

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$$
$$g(x) = x^2$$

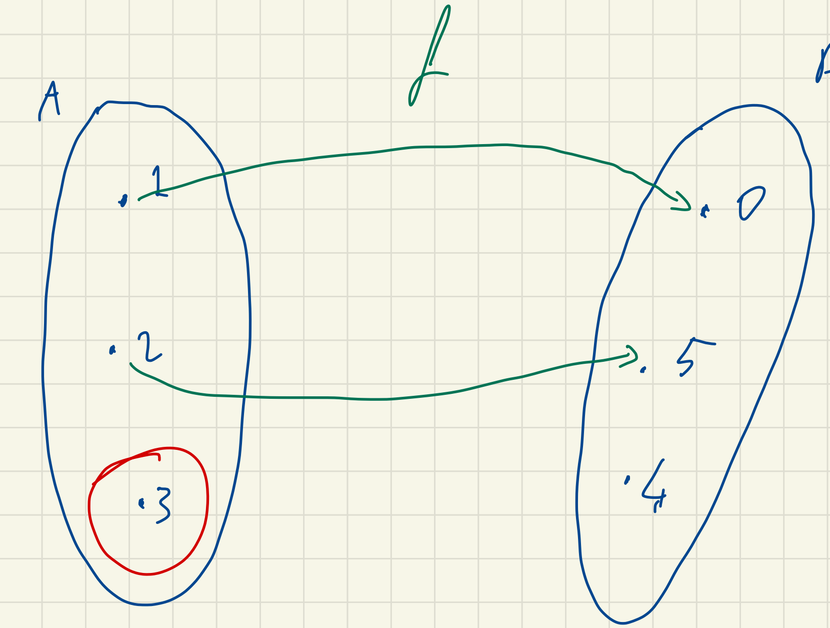
$$\begin{array}{ccccc} (\mathbb{R} & , & \mathbb{R} & , & x^2) \\ \| & & \nparallel & & \| \\ (\mathbb{R} & , & \mathbb{R}_+ & , & x^2) \end{array}$$

$\Longrightarrow$ f e g sono funzioni <u>diverse</u>



(A, B, f) è una funzione?

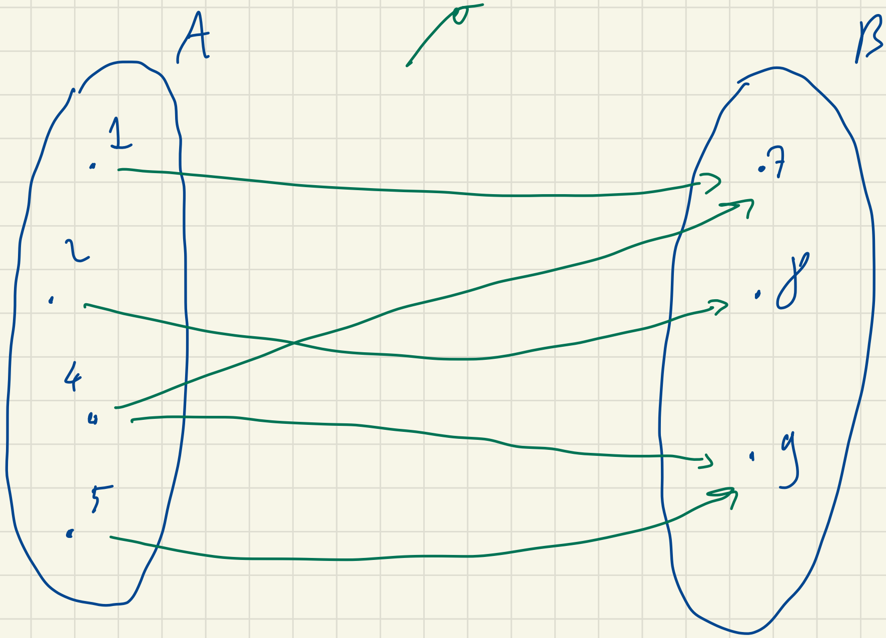
NO



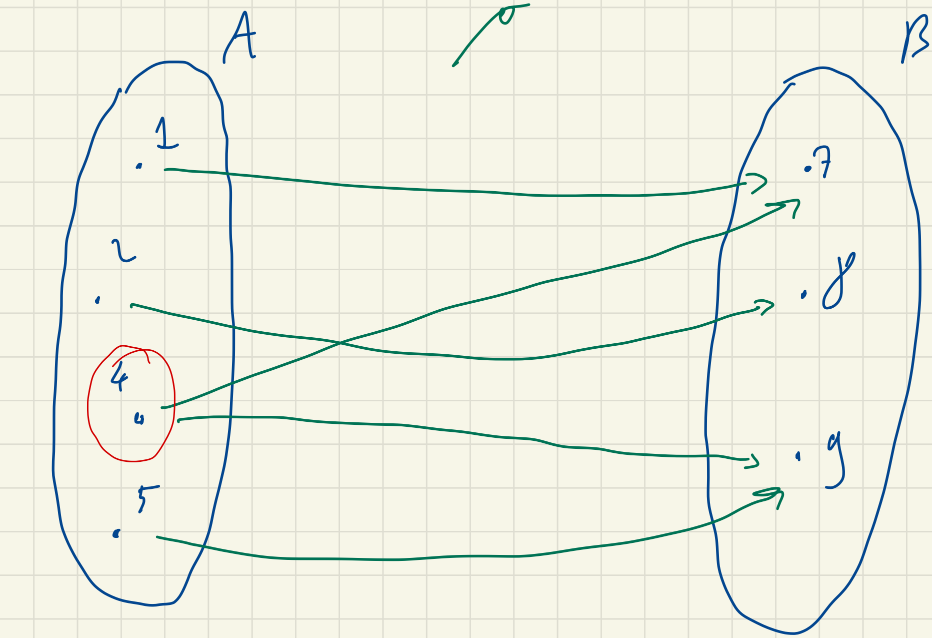
(A, B, f) è una funzione? **NO**

$\cancel{\forall} x \in A, \quad \exists!\, b \in B : \quad f(x) = b$

$f(3) = ?$



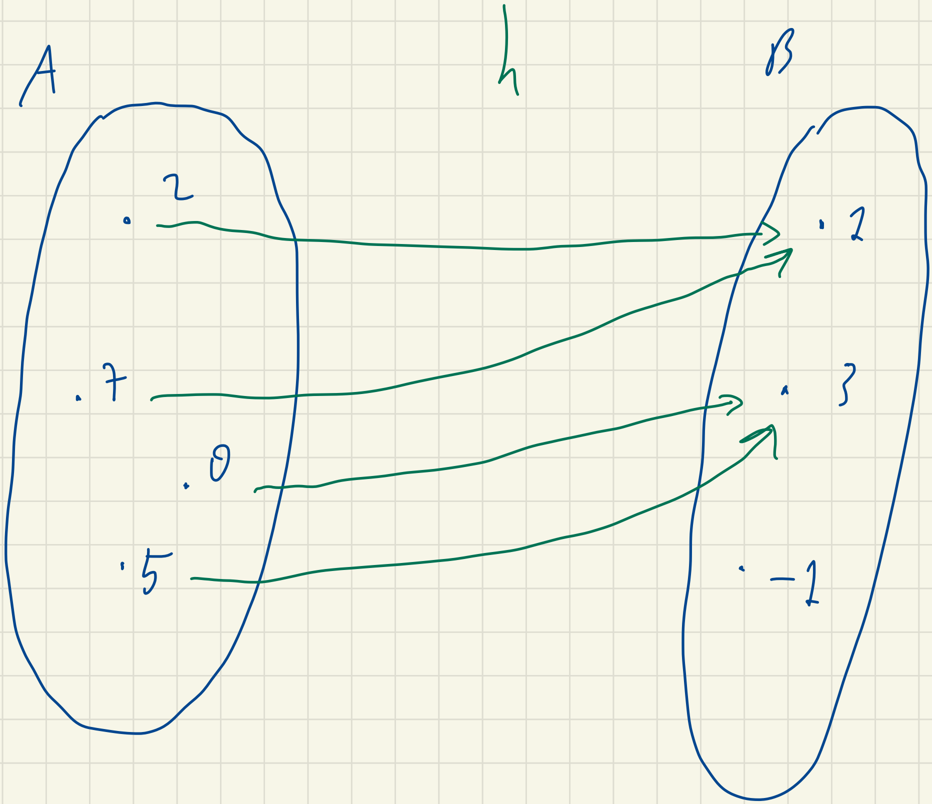
(A, B, ρ) è una funzione?



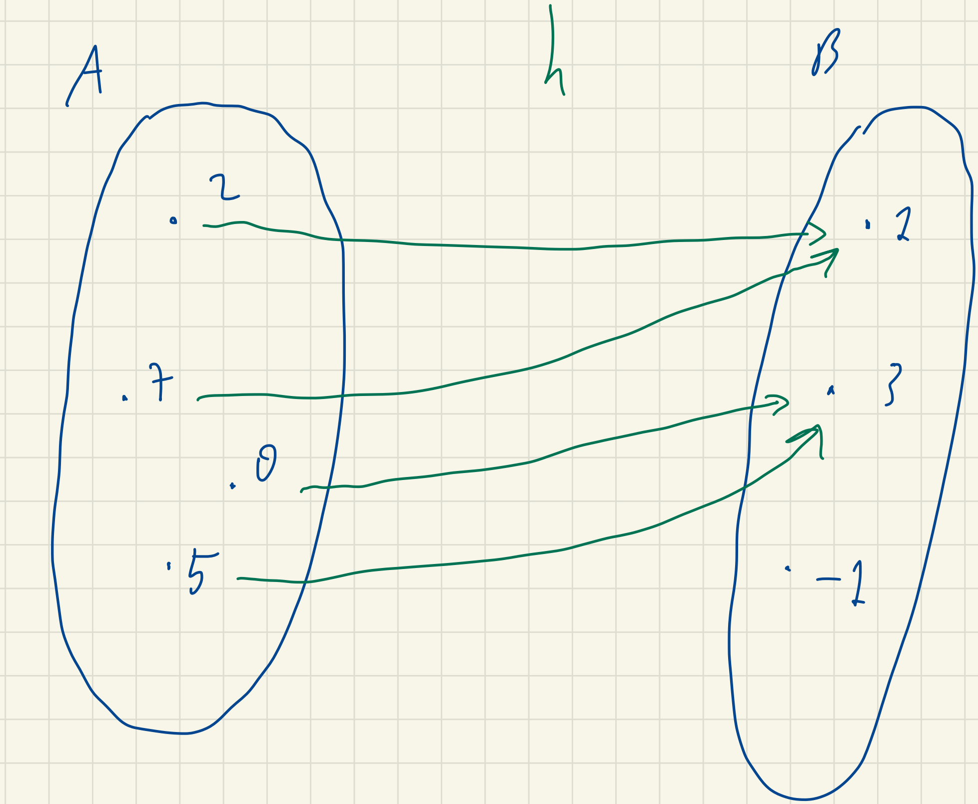
(A, B, f) è una funzione? **NO**

$\forall x \in A, \ \exists \cancel{!}\, b \in B : f(x) = b$

$$f(4) = \left\langle \begin{matrix} 7 \\ 9 \end{matrix} \right.$$



(A, B, h) è una funzione?

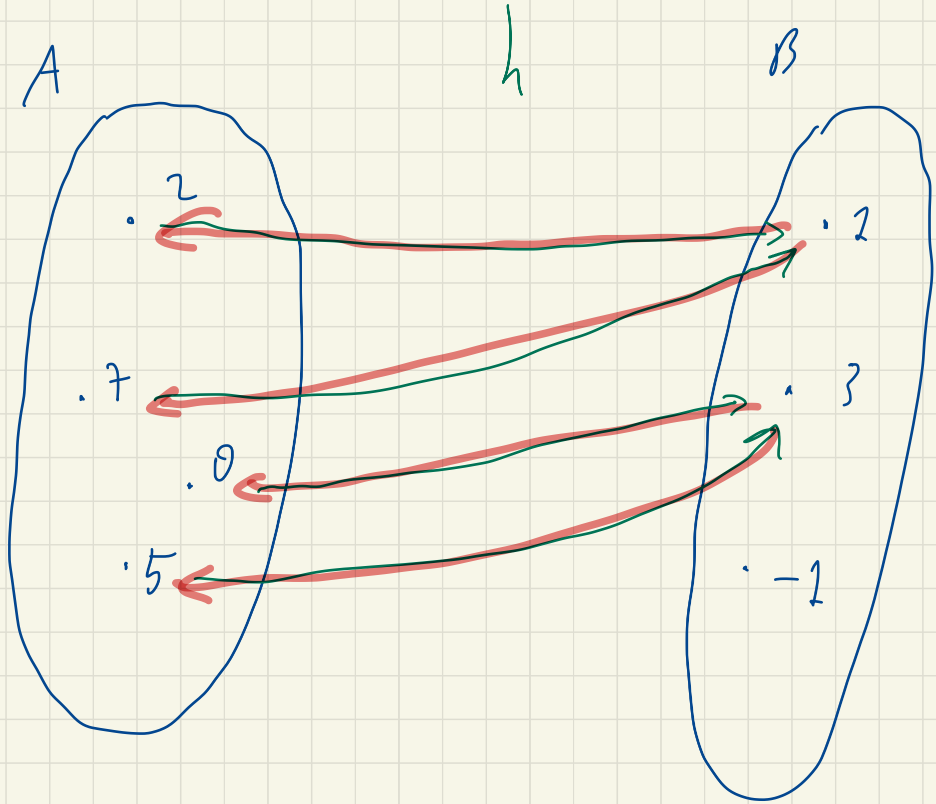


(A, B, h) è una funzione!

$\forall x \in A, \ \exists!\, b \in B : \ h(x) = b$

Domanda:

Quando la relazione inversa è una funzione?


A
h
B
2
7
0
5
1
3
-1

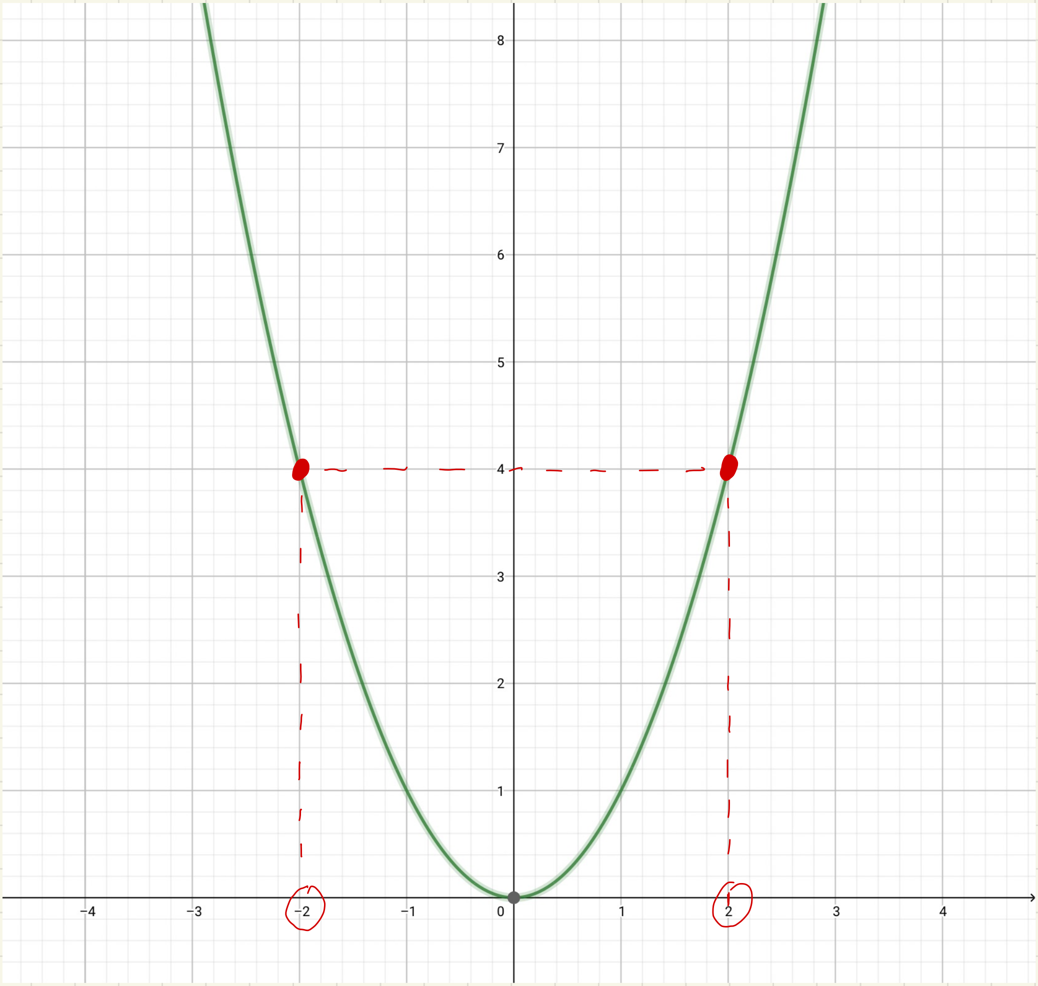
- $f : A \longrightarrow B$ si dice iniettiva (1-1)

se :

$$\forall\, a, a' \in A :$$
$$a \neq a' \implies f(a) \neq f(a')$$

(o, equivalentemente

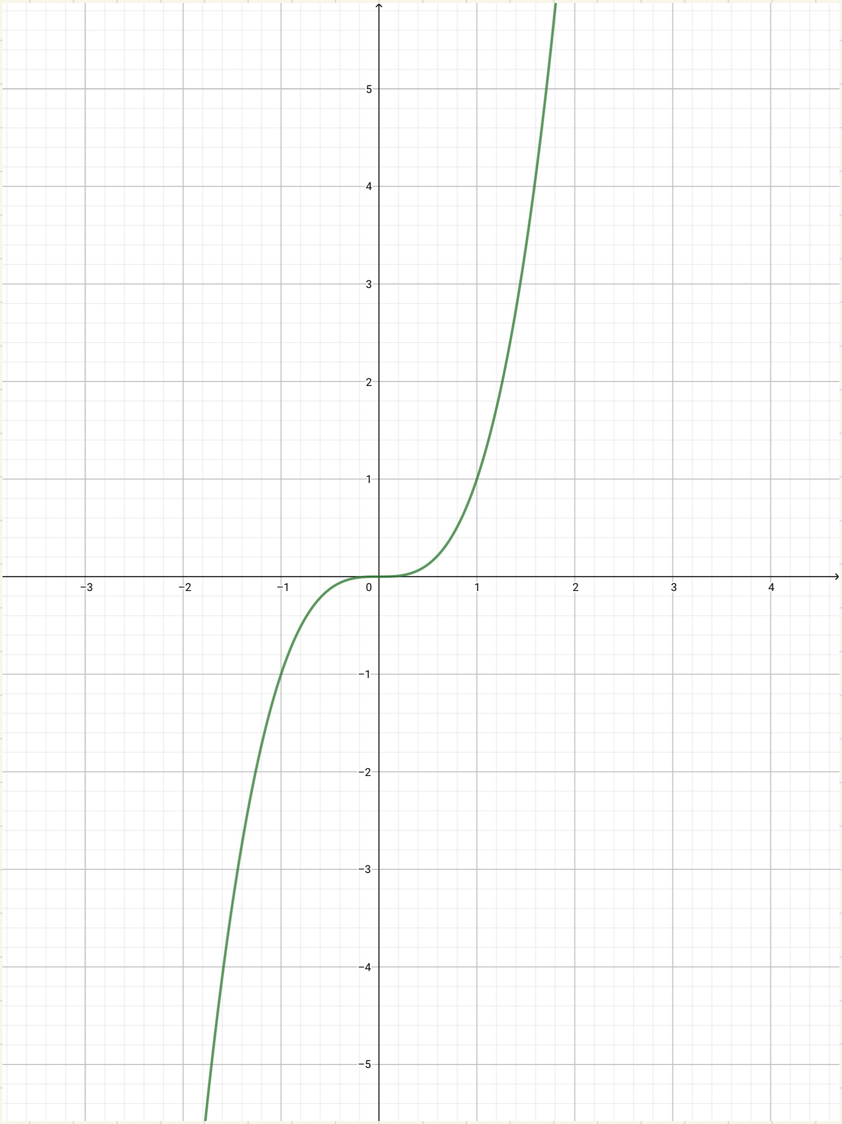
$$\forall\, a, a' \in A :$$
$$f(a) = f(a') \implies a = a' \quad)$$



$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad f(x) = x^2$

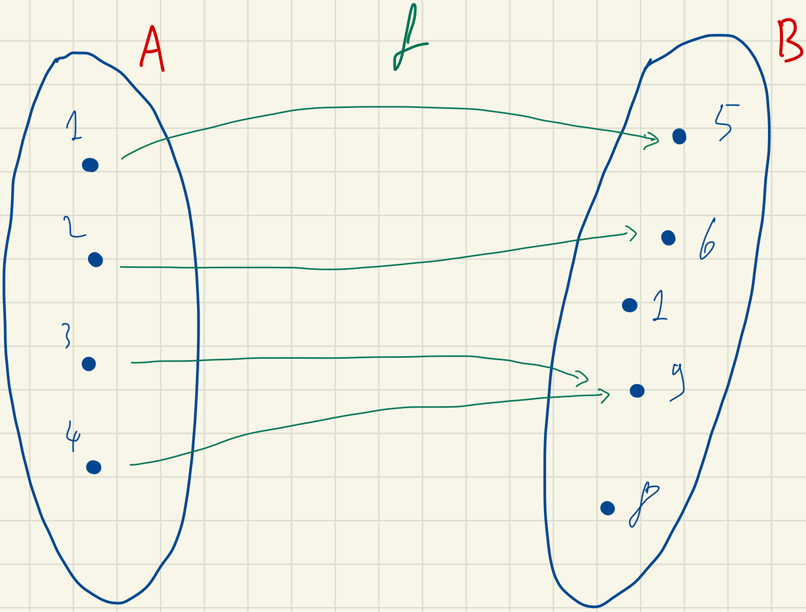
NON È 1-1 : ad esempio

$f(2) = 4 = f(-2)$

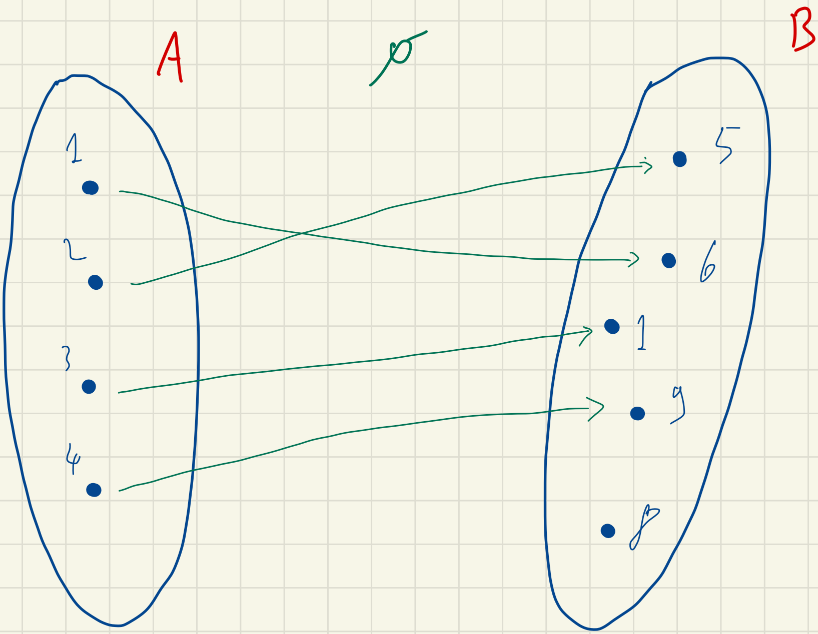


$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad f(x) = x^3$

$\bar{E}$ 1 - 1



non è 1-1



è 1-1

L'iniettività di una funzione dipende da come viene scelto il suo dominio.

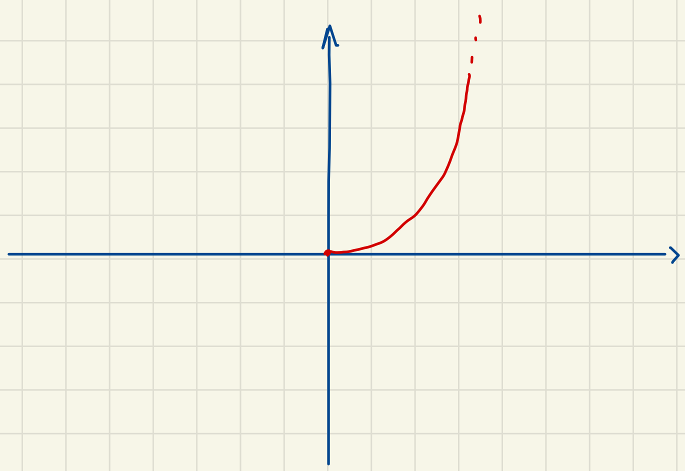
Es:

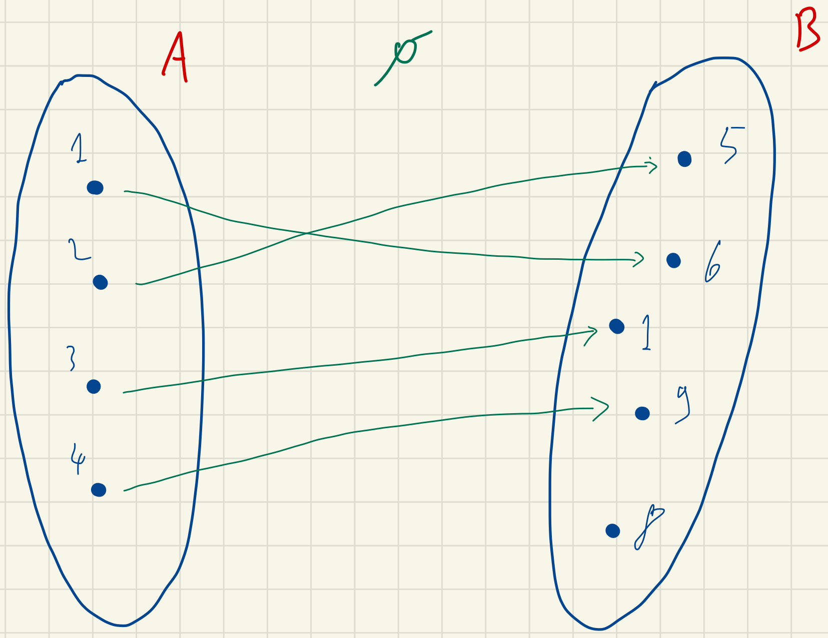
$$f_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto x^2$$

non è 1-1

$$f_2 : \mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto x^2$$

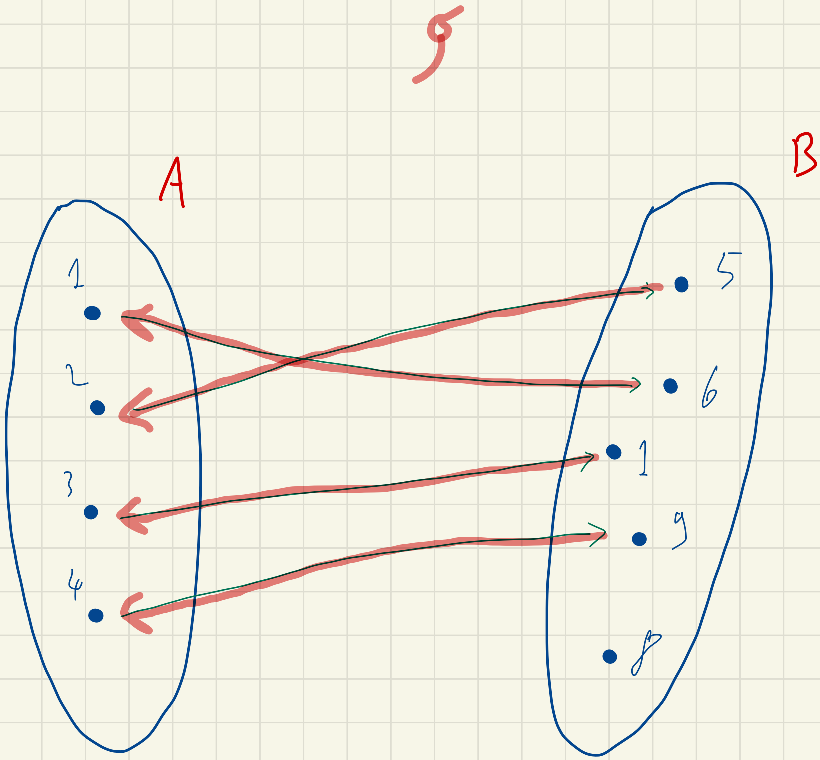
è 1-1





Consideriamo la

relazione inversa



La relazione inversa

NON è una funzione

- $f : A \to B$ è suriettiva (su)

se $\forall b \in B, \exists a \in A : f(a) = b$.

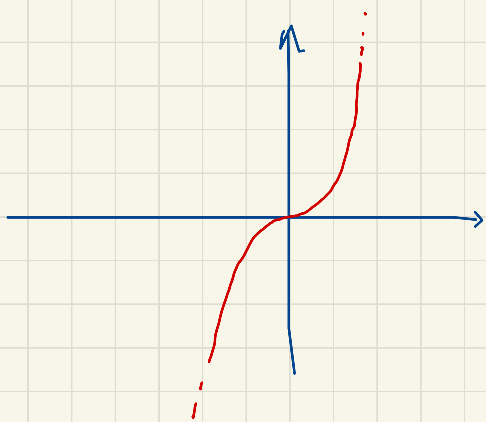
Esempi:

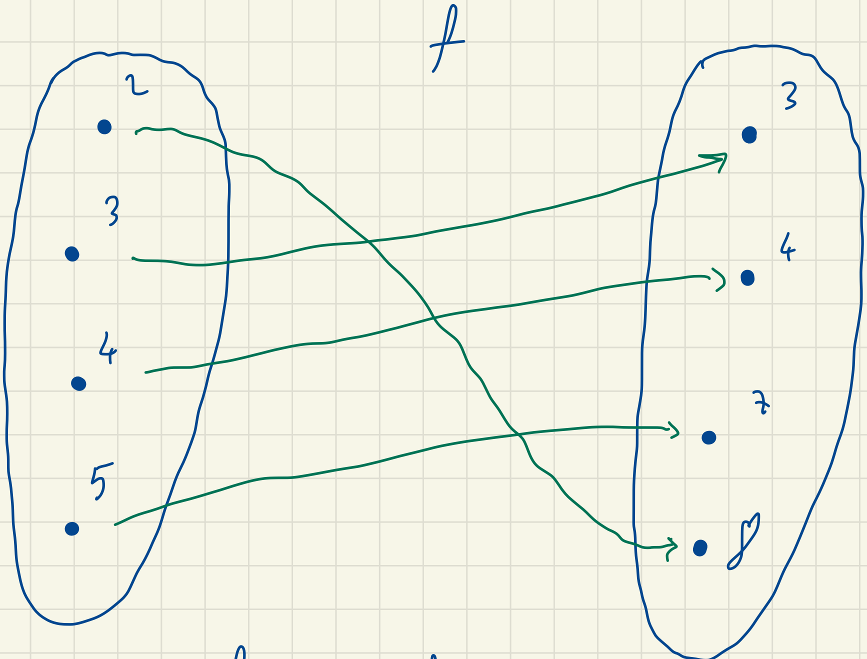
① $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto x^2$

f non è su, infatti $x^2 \geq 0 \ \forall x$
ad esempio $x^2 = -2$ è IMPOSS.

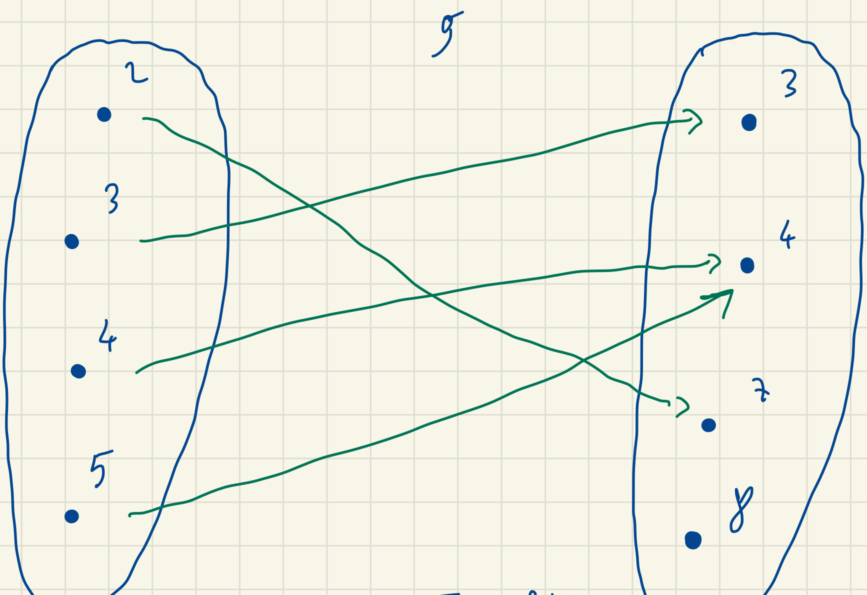
② $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto x^3$

g è su





f è SV

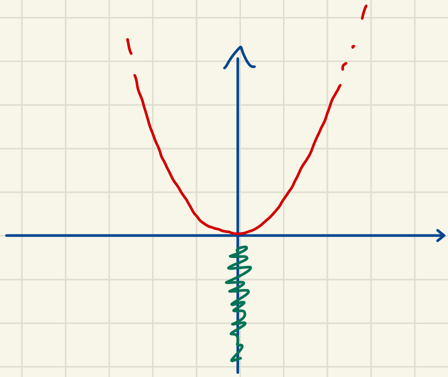


g non è SV

La notione di SURIETTIVITÀ dipende strettamente dal codominio di f

① $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

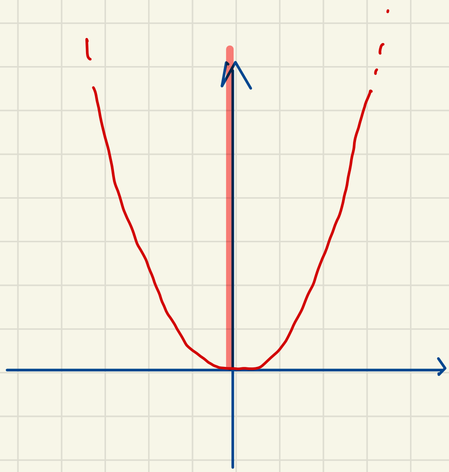
$x \longmapsto x^2$



f non è SV

② $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$

$x \longmapsto x^2$



h è SV.

$$\left(\mathbb{R}_+ = \{ x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0 \} \right)$$

$f : A \longrightarrow B$

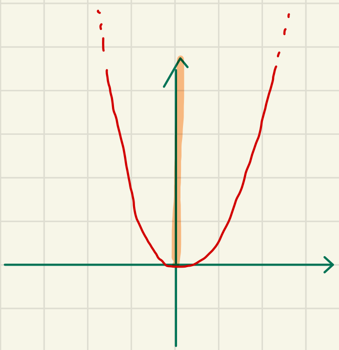
$\operatorname{Im} f = \{ b \in B \mid \exists a \in A : f(a) = b \}$

Immagine di f

$\operatorname{Im} f \subseteq B$

f è SURIETTIVA $\iff \operatorname{Im} f = B$

Esempio:



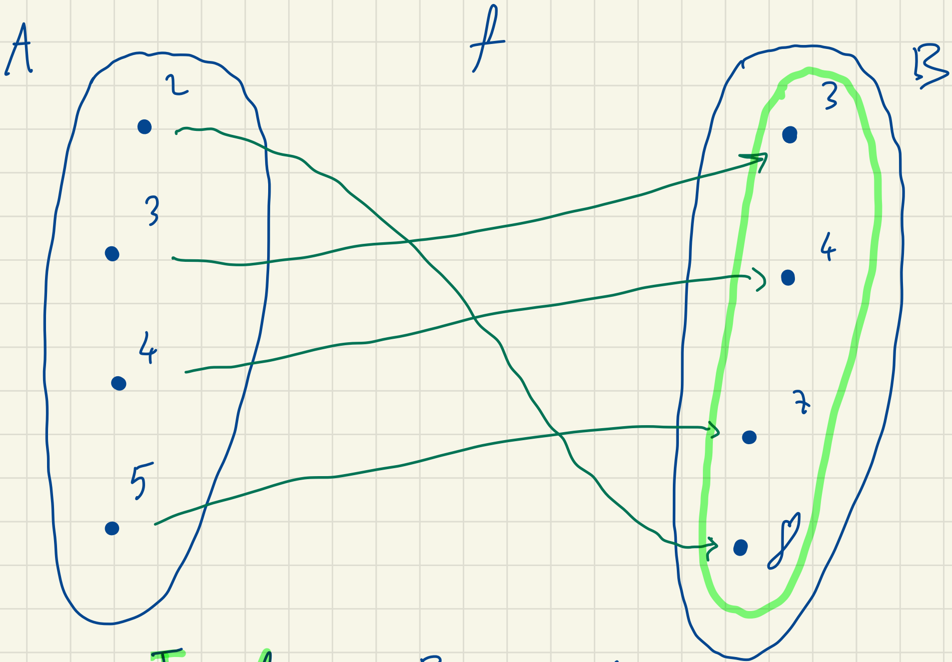
$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto x^2$

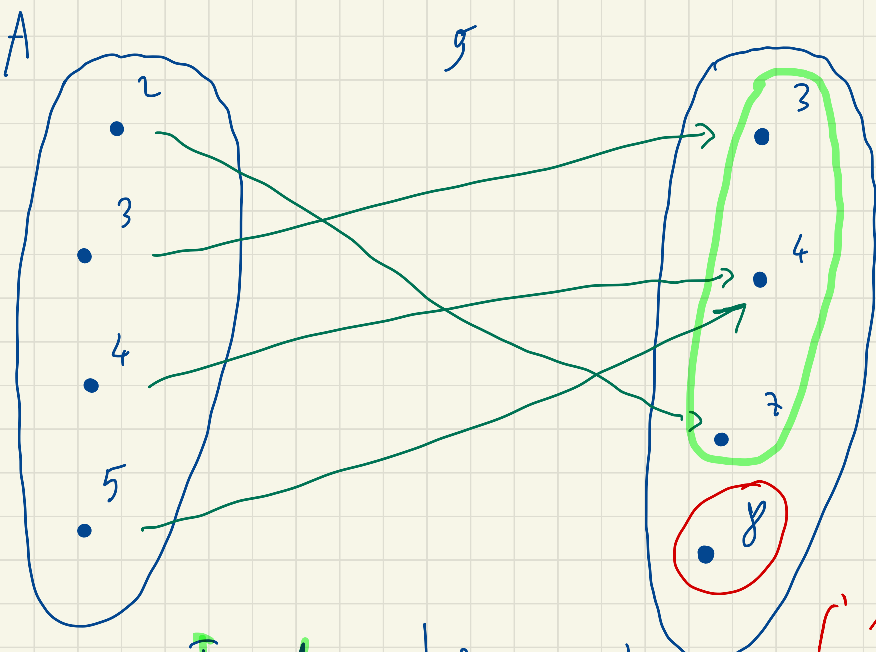
$\operatorname{Im} g = \mathbb{R}_+ \subsetneq \mathbb{R}$

codominio di g

g NON È SURIETTIVA



$\mathrm{Im}\, f = B \longrightarrow f$ è su

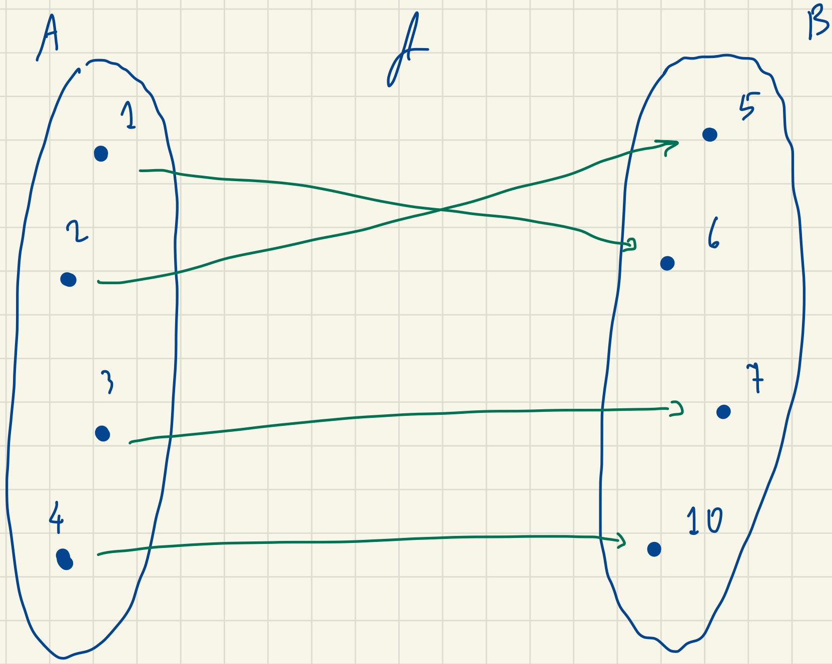


$\mathrm{Im}\, f = \{3, 4, 7\} \subsetneqq B$

f NON è SU

- Una funzione $f : A \to B$ si dice BIUNIVOCA (o BIETTIVA) se f è 1-1 e SU

Esempio:



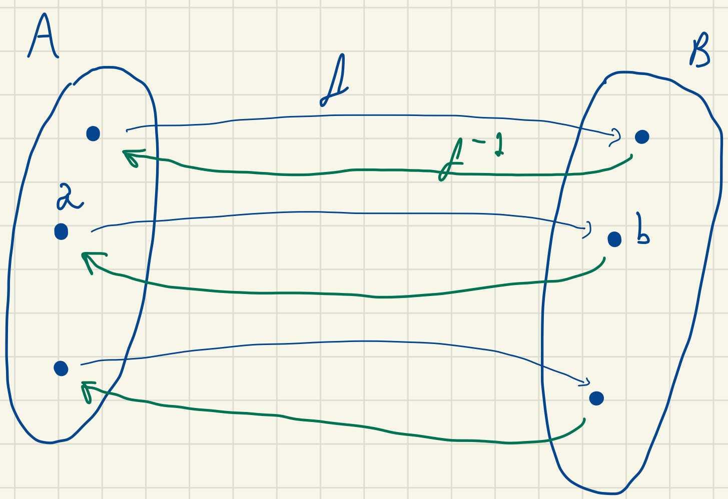
DEF.: (funzione invertibile)

$f: A \longrightarrow B$ si dice invertibile

se $\exists$ funzione $f^{-1}: B \longrightarrow A$ tale che:

$\forall a \in A: \quad f^{-1}(f(a)) = a$

$\forall b \in B: \quad f(f^{-1}(b)) = b$



In altri termini,

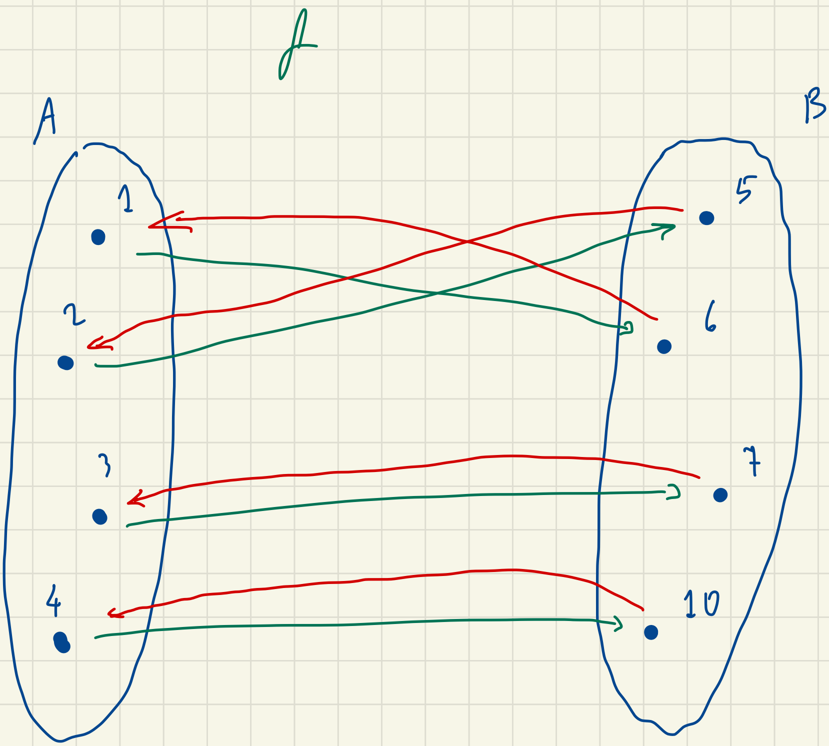
$f : A \to B$ è invertibile

se la relazione inversa

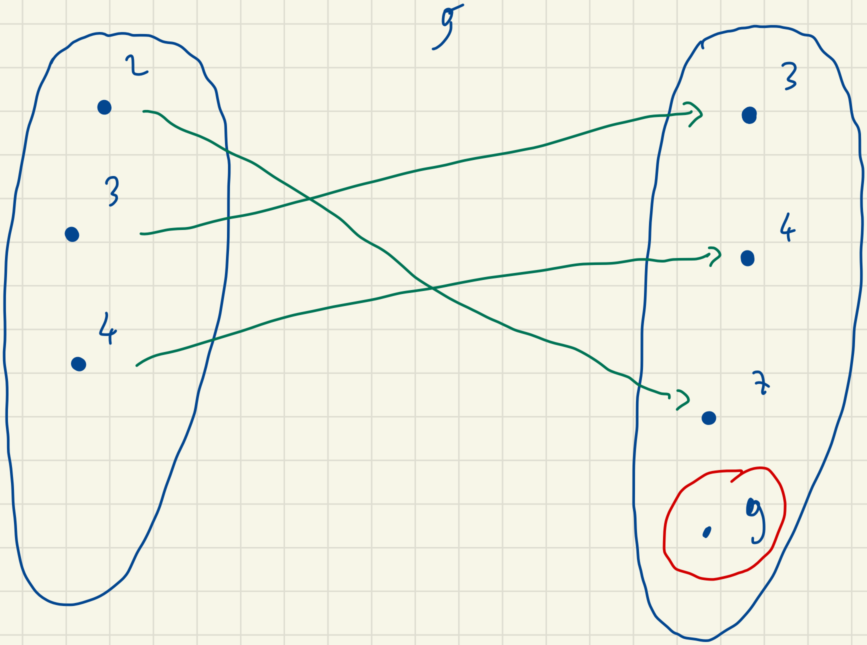
è una funzione.

OSSERVAZIONE:

f è invertibile $\Longleftrightarrow$ f è biunivoca



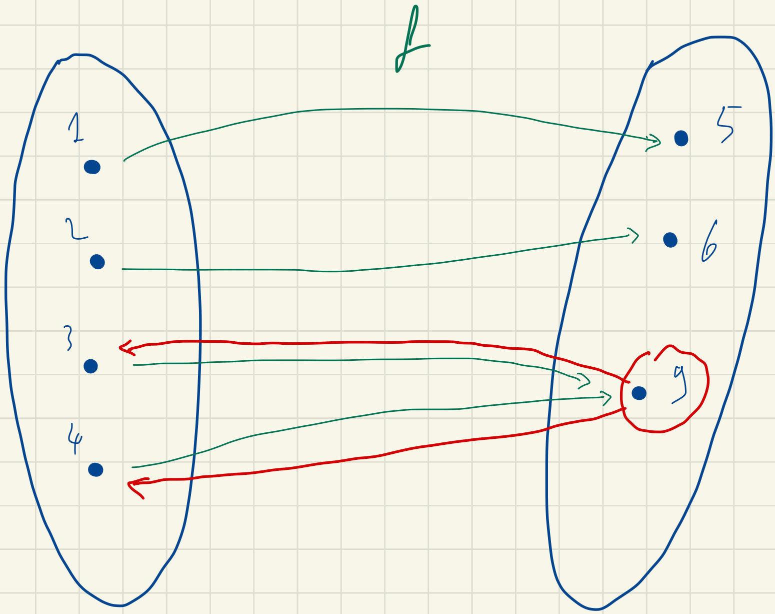
f^{-1} (è effettivamente una funzione)



g non è SU

g non è INVERTIBILE

("l'inversa non sarebbe una funzione")



f non è 1-1

f non è INVERTIBILE

(Infatti, la relazione inversa non è una funzione)

$\mathbb{N}$ insieme dei numeri naturali

$$\mathbb{N} = \{ 0, 1, 2, 3, 4, \dots \}$$

DEFINIZIONE DI INSIEME NUMERABILE:

DEF.

Se esiste una funzione

$$g : \mathbb{N} \longrightarrow B \quad \text{suriettiva}$$

$\Longrightarrow$ B si dice NUMERABILE

In sostanza, B è numerabile se "posso contare tutti" i suoi elementi.

B è numerabile

$\exists\ \varphi : \mathbb{N} \longrightarrow B$ suriettiva

$1 \longrightarrow \varphi(1) \in B$

$2 \longrightarrow \varphi(2) \in B$

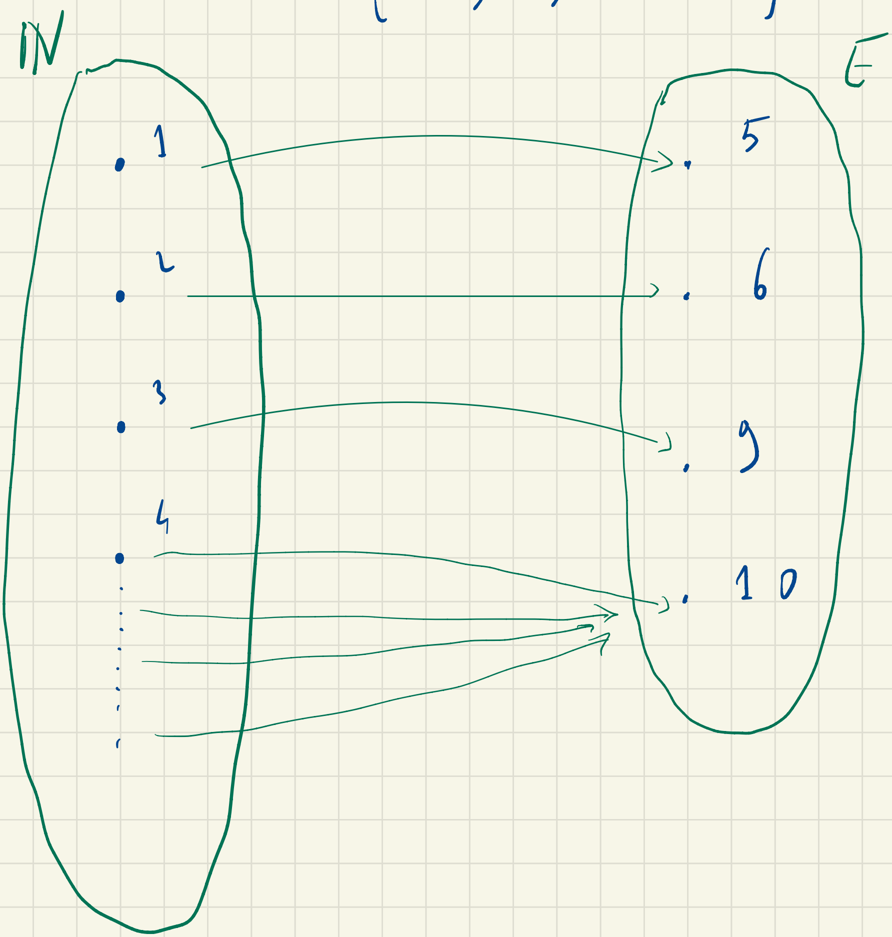
$3 \longrightarrow \varphi(3) \in B$

$\vdots$

<u>Oss.:</u> Ogni insieme finito è numerabile.

<u>Es.:</u>

$E = \{5, 6, 9, 10\}$



$\mathbb{N}$ è numerabile:

$$\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$$
$$n \longmapsto n$$

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

$\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$ sono infiniti

$$\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z}$$

<u>Domanda</u>:

$\mathbb{Z}$ è numerabile?

$f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$

$$f(n) = \begin{cases} n/2 & \text{se } n \text{ è pari} \\ -\dfrac{n+1}{2} & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$$

$f(0) = 0$ $\qquad$ $f(1) = -\dfrac{1+1}{2} = -1$

$f(2) = \dfrac{2}{2} = 1$ $\qquad$ $f(3) = -\dfrac{3+1}{2} = -2$

$f(4) = \dfrac{4}{2} = 2$ $\qquad$ $f(5) = -\dfrac{5+1}{2} = -3$

$f(6) = \dfrac{6}{2} = 3$ $\qquad$ $f(7) = -\dfrac{7+1}{2} = -4$

$\dots$ $\qquad$ $\dots$

f è suriettiva

$\Longrightarrow$ $\mathbb{Z}$ è numerabile

$\mathbb{Q}$ = insieme dei numeri rationali

$\mathbb{N} \subsetneqq \mathbb{Q}$

$\mathbb{Q}$ è numerabile ?

$f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Q}$ $\underline{SU}$

significa "contare"

gli elementi di $\mathbb{Q}$

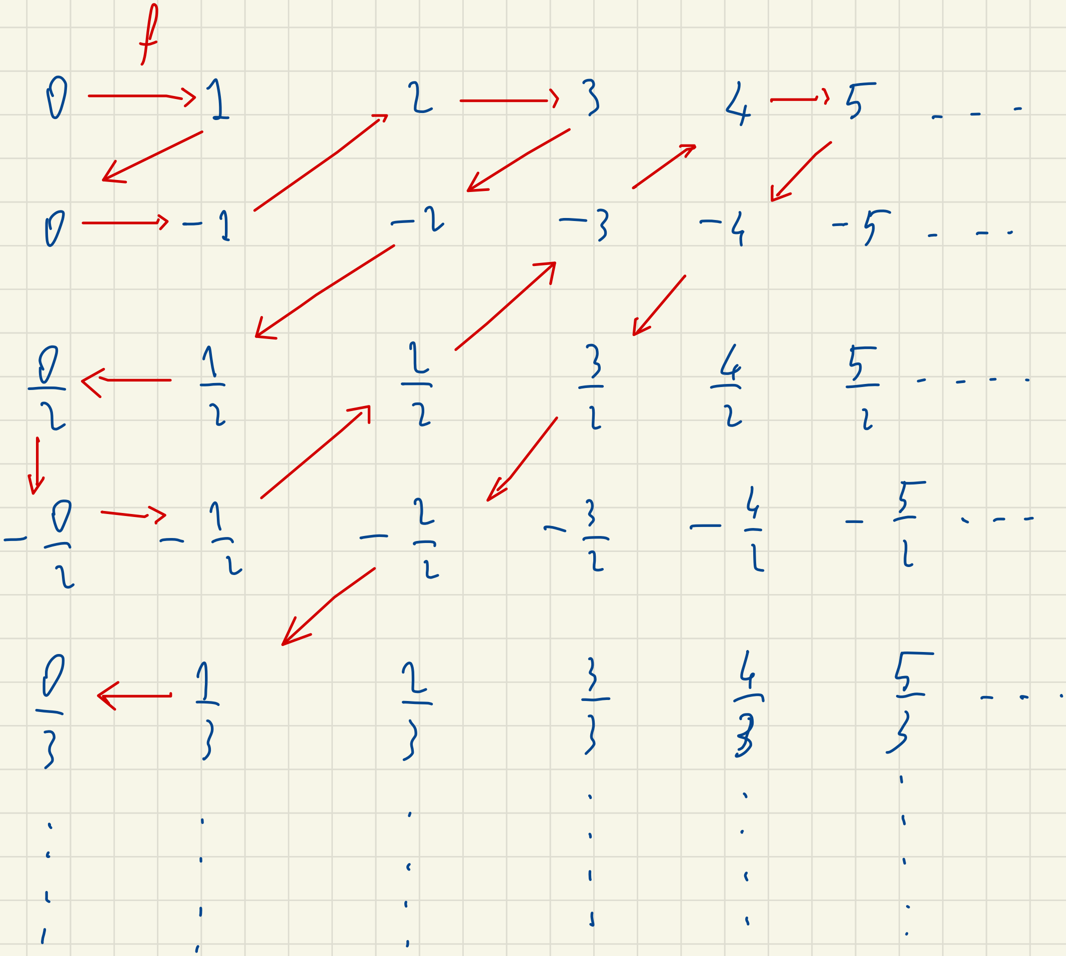
$$
\begin{aligned}
0 &\longrightarrow f(0) \in \mathbb{Q} \\
1 &\longrightarrow f(1) \in \mathbb{Q} \\
2 &\longrightarrow f(2) \in \mathbb{Q} \\
3 &\longrightarrow f(3) \in \mathbb{Q} \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Domanda:

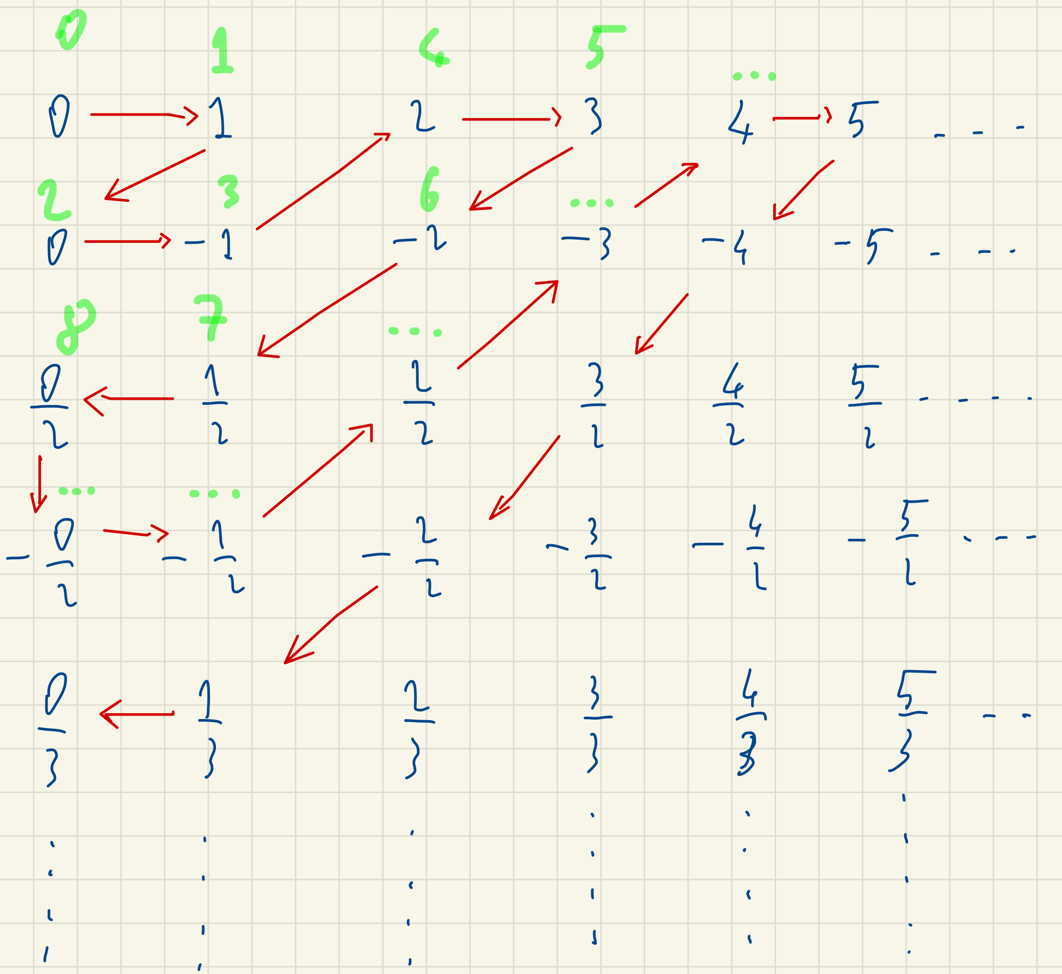
$$\exists\, f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Q} \;,\, \nu \;?$$

SI !

0	1	2	3	4	5	$\dots$
0	-1	-2	-3	-4	-5	$\dots$
$\frac{0}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\dots$
$-\frac{0}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{4}{2}$	$-\frac{5}{2}$	$\dots$
$\frac{0}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{3}$	$\dots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	



$f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Q}$ è su!



$$\mathbb{N} \xrightarrow[\text{su}]{} \mathbb{Q}$$

TEOREMA:

$\mathbb{Q}$ è numerabile!

Notazioni in $\mathbb{N}$ e cenni di calcolo combinatorio

Sommatoria:

$$\sum_{j=0}^{n} a_j = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{j=n}^{m} b_j = b_n + b_{n+1} + \dots + b_{m-1} + b_m \\ (n \leq m) \end{cases}$$

Esempio:

$$\sum_{j=1}^{4} \frac{1}{j} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$$

$$\sum_{j=2}^{5} j^2 = 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2$$

$$=$$

$$\sum_{l=2}^{5} l^2 = 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2$$

ELEMENTI DI CALCOLO COMBINATORIO:

Fattoriale di un numero:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 \ldots\}$$

$n \in \mathbb{N}$

$$n! := \begin{cases} 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n & \text{se } n \geq 1 \\ 1 & \text{se } n = 0 \end{cases}$$

Fattoriale di n (o n fattoriale)

Esempi:

$0! = 1 \qquad 1! = 1 \qquad 2! = 1 \cdot 2 = 2$

$3! = 6 \qquad 4! = 24$

$$n! = n \cdot (n-1)!$$

$$5! = 5 \cdot 4! = 5 \cdot 24 = 120$$

DOMANDA:

In quanti modi si possono disporre n elementi? (PERMUTAZIONI)

RISP.: $n!$

Esempio:

$A = \{a, b\}$

$a \ b$

$b \ a$

2 MODI

$2! = 2$

$B = \{a, b, c\}$

$$\left.\begin{array}{ccc} a\,b\,c & ; & a\,c\,b \\ b\,a\,c & ; & b\,c\,a \\ c\,a\,b & ; & c\,b\,a \end{array}\right\} \text{6 MODI}$$

$3! = 6$

COEFFICIENTE BINOMIALE:

$n \in \mathbb{N}, \quad m \in \mathbb{N} \quad : \quad m \leq n$

$$\binom{n}{m} := \frac{n!}{m!\,(n-m)!}$$

Quindi:

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!\,(n-0)!} = \frac{n!}{0! \cdot n!} = 1$$

$$\binom{n}{1} = \frac{n!}{(n-1)! \cdot 1!} = \frac{n \cdot \cancel{(n-1)!}}{\cancel{(n-1)!} \cdot 1!} = n$$

$$\binom{n}{n} = \frac{n!}{(n-n)!\, n!} = \frac{n!}{0!\, n!} = 1$$

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{(n-m)!\,m!} = \frac{n!}{(n-m)!} \cdot \frac{1}{m!}$$

$$= \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-m+1) \cdot \overbrace{(n-m) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1}^{=(n-m)!}}{(n-m)!} \cdot \frac{1}{m!}$$

$$= \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-m+1) \cdot \cancel{(n-m)!}}{\cancel{(n-m)!}} \cdot \frac{1}{m!}$$

$$= \underbrace{\overset{1^\circ}{n}\ \overset{2^\circ}{(n-1)} \cdot \ldots \cdot \overset{m^\circ}{(n-m+1)}}_{m \text{ fattori}} \cdot \frac{1}{m!}$$

$$= \frac{n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-m+1)}{m!}$$

$$\binom{3}{2} = \frac{3!}{(3-2)!\,2!} = \frac{3!}{2!} = \frac{6}{2} = 3$$

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{(5-3)!\,3!} = \frac{5!}{2!\cdot 3!} = \frac{5\cdot 4\cdot \cancel{3!}}{2\cdot \cancel{3!}} = 10$$

DOMANDA:

Siano $n, m \in \mathbb{N}: \ m \leq n$.
A partire da n elementi, quanti sottoinsiemi di m elementi si possono creare? (COMBINAZIONI)

RISP.: $\binom{n}{m}$

(Si ricordi che in un insieme l'ordine degli elementi è irrilevante)

$n = 3 \qquad m = 1$

$\downarrow$

$a, b, c \qquad \{a\}, \{b\}, \{c\}$ 3 INS.

$$\binom{3}{1} = \frac{3!}{2! \cdot 1!} = \frac{6}{2} = 3$$

$n = 4 \qquad m = 2$

a, b, c, d

$\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}$

$\{c, d\}$ 6 SOTTOINSIEMI

$$\binom{4}{2} = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = \frac{24}{4} = 6$$

PROPRIETÀ: $(k \leq n)$

1. $$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

2. $$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$$

DIM.:

Vediamo una prova algebrica di 1 e poi di 2

1 Prova algebrica:

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-(n-k))!\,(n-k)!} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

<u>Esempio:</u>

$$\binom{7}{2} = \frac{7!}{5!\cdot 2!}$$

$$=$$

$$\binom{7}{7-2} = \binom{7}{5} = \frac{7!}{2!\cdot 5!}$$

②

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} =$$

$$= \frac{n!}{(n-k+1)!\,(k-1)!} + \frac{n!}{(n-k)!\,k!} =$$

$$= \frac{n!}{(n-k+1)\cdot(n-k)!\,(k-1)!} + \frac{n!}{(n-k)!\,k\cdot(k-1)!} =$$

$$= \frac{n!}{(n-k)!\,(k-1)!}\left(\frac{1}{n-k+1} + \frac{1}{k}\right) =$$

$$= \frac{n!}{(n-k)!\,(k-1)!} \cdot \frac{\cancel{k} + n - \cancel{k} + 1}{(n-k+1)\cdot k} =$$

$$= \frac{n!\cdot(n+1)}{(n-k)!\,\underbrace{(n+1-k)}_{\substack{\| \\ (n-k+1)}}\cdot(k-1)!\cdot k} = \frac{(n+1)!}{((n+1)-k)!\cdot k!}$$

$$= \frac{(n+1)!}{((n+1)-k)! \cdot k!} = \binom{n+1}{k}$$

c. v. d. 2

Si è così provato che:

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$$

Esempio:

$$n = 4 \qquad k = 2$$

$$\binom{4}{2-1} + \binom{4}{2} =$$

$$= \binom{4}{1} + \binom{4}{2} = \frac{4!}{3! \cdot 1!} + \frac{4!}{2! \cdot 2!} =$$

$$= \frac{24}{6} + \frac{24}{4} = 4 + 6 = 10$$

$$=$$

$$\binom{4+1}{2} = \binom{5}{2} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = \frac{120}{12} = 10$$

PROPRIETÀ: $(k \leq n)$

① $$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

② $$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$$

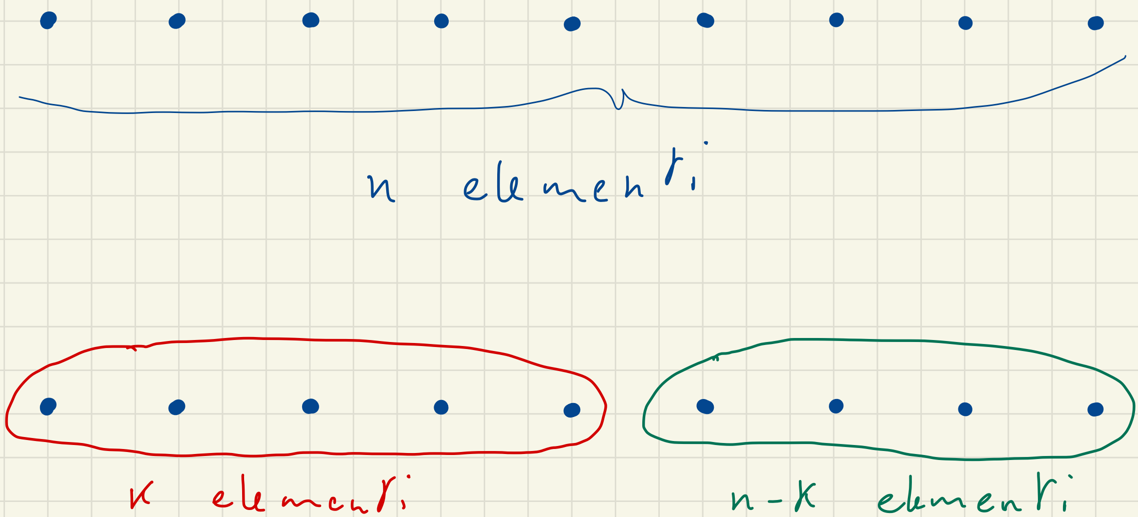
DIM.: (Prova combinatoria)

① Tale proprietà afferma un fatto banale:

il numero di sottoinsiemi di k elementi

è uguale al

numero di sottoinsiemi di $n-k$ elementi

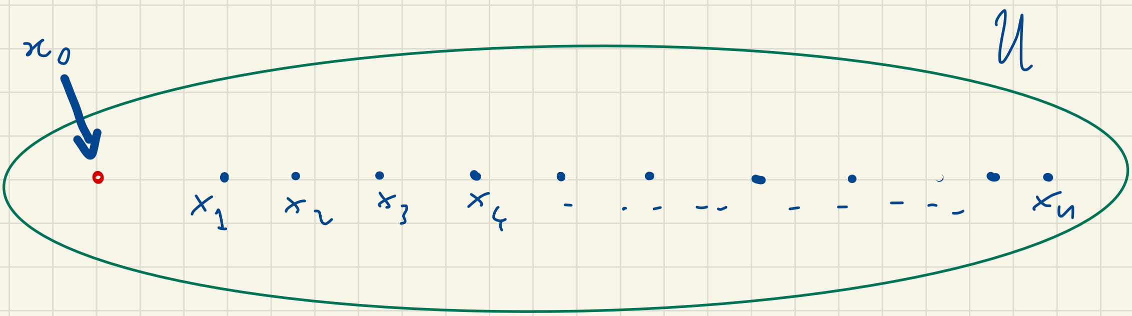


Ad ogni sottoinsieme di k elementi corrisponde un sottoinsieme di $n-k$ elementi, per cui il loro numero è uguale!

PROVA COMBINATORIA di 2

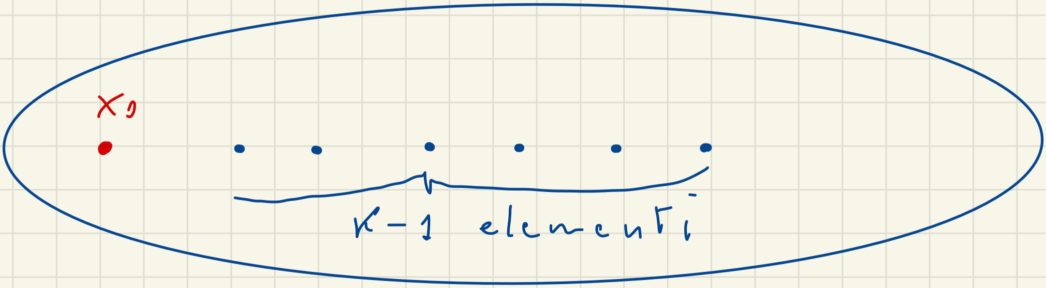
$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$$

numero di sottoinsiemi A di k elementi da un insieme U di $n+1$ elementi



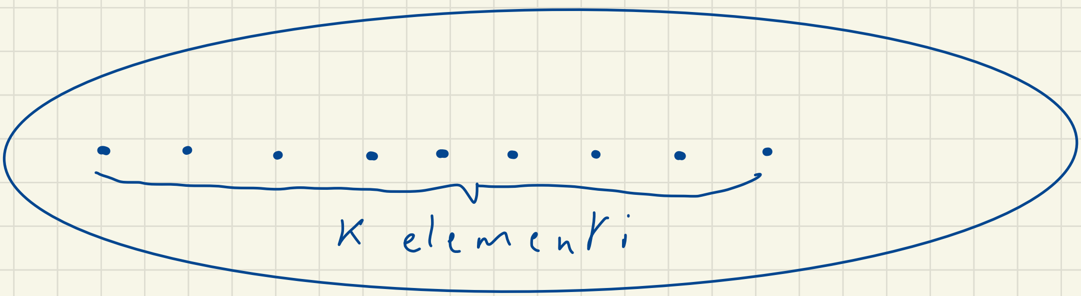
I sottoinsiemi A sono di due tipi:

I tipo: $x_0 \in A$



insiemi di I tipo: $\binom{n}{k-1}$

II tipo: $x_0 \notin A$



insiemi del II tipo: $\binom{n}{k}$

Donc que :

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$$

IL BINOMIO DI NEWTON

DAL PUNTO DI VISTA COMBINATORIO:

Come si calcola il binomio:

$$(a+b)^n = ?$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

$$(a+b)^5 = \ldots ? \ldots$$

Cerchiamo di ottenere la formula generale che esprime $(a+b)^n$ usando l'analisi combinatoria.

$(a+b)^n$ = somma di monomi di grado n

$$c \cdot a^k b^p$$

I OSS.:

$$k + p = n$$

II PASSO:

Capire quale sia il significato del coefficiente c in

In generale:

$$(a+b)^n = \ldots a^n \cdot b^0 + \ldots a^{n-1} \cdot b^1 + \ldots a^{n-2} \cdot b^2 +$$

$$+ \ldots a^{n-3} b^3 + \ldots + \ldots a^3 b^{n-3} +$$

$$+ \ldots a^2 b^{n-2} + \ldots a^1 b^{n-1} + \ldots a^0 b^n$$

È una somma di monomi:

$$c \cdot a^{n-k} \cdot b^k \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, n$$

Qual è il significato del coefficiente c?

$$(a+b)^2 = (a+b)\cdot(a+b) =$$

$$= a^2 + ab + ba + b^2$$

$$= a^2 + ab + ab + b^2$$

$$= a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = (a+b)(a+b)(a+b) =$$

$$= (a^2 + ab + ab + b^2)(a+b)$$

$$= a^3 + a^2b + a^2b + ab^2 + a^2b + ab^2 +$$

$$+ ab^2 + b^3$$

$$= 1 \cdot a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1 \cdot b^3$$

Il coefficiente di

$$\overset{?}{\dots}\ a^{n-k} \cdot b^{k}$$

rappresenta il numero di modi che si hanno per ottenere $a^{n-k} \cdot b^{k}$ in :

$$(a+b)^{n} = \underbrace{(a+b)\cdot(a+b)\cdot \ldots \cdot(a+b)}_{n \text{ fattori}}$$

studiamo il caso $n = 4$

$$\overset{1°}{} \quad \overset{2°}{} \quad \overset{3°}{} \quad \overset{4°}{}$$

$$(a+b)^4 = (a+b)\cdot(a+b)\cdot(a+b)\cdot(a+b)$$

Ad esempio:

in quanti modi posso realizzare $a b^3$?

Bisogna selezionare b da <u>tre</u> dei quattro fattori disponibili

$$\overset{1°}{} \quad \overset{2°}{} \quad \overset{3°}{} \quad \overset{4°}{}$$

$$(a+b)^4 = (a+b)\cdot(a+b)\cdot(a+b)\cdot(a+b)$$

$$b^3 \cdot a = a b^3$$

$$\{1°, 2°, 3°\}$$

$$\begin{array}{ccccc} & 1^\circ & 2^\circ & 3^\circ & 4^\circ \\ (a+b)^4 = & (a+b) \cdot & (a+b) \cdot & (a+b) \cdot & (a+b) \end{array}$$

$$b^2 a b = a b^3$$

$$\{1^\circ, 2^\circ, 4^\circ\}$$

$$\begin{array}{ccccc} & 1^\circ & 2^\circ & 3^\circ & 4^\circ \\ (a+b)^4 = & (a+b) \cdot & (a+b) \cdot & (a+b) \cdot & (a+b) \end{array}$$

$$b a b^2 = a b^3$$

$$\{1^\circ, 3^\circ, 4^\circ\}$$

$$\begin{array}{ccccc} & 1^\circ & 2^\circ & 3^\circ & 4^\circ \\ (a+b)^4 = & (a+b) \cdot & (a+b) \cdot & (a+b) \cdot & (a+b) \end{array}$$

$$a \cdot b^3 \qquad \{2^\circ, 3^\circ, 4^\circ\}$$

Dunque, il monomio ab^3 compare tante volte quanto sono i sottoinsiemi:

$$\{1^\circ, 2^\circ, 3^\circ\} \qquad \{1^\circ, 2^\circ, 4^\circ\}$$

$$\{1^\circ, 3^\circ, 4^\circ\} \qquad \{2^\circ, 3^\circ, 4^\circ\}$$

cioè, 4.

OSS.:

$$\{1°, 2°, 3°\} \qquad \{1°, 2°, 4°\}$$

$$\{1°, 3°, 4°\} \qquad \{2°, 3°, 4°\}$$

sono tutti i sottoinsiemi di 3 elementi ottenuti da

$$\{1°, 2°, 3°, 4°\}$$

I modi corrispondono al numero di sottoinsiemi di **3** elementi che si possono formare a partire da un insieme di **4** elementi:

cioè:

$$\binom{4}{3} = 4$$

$\Longrightarrow$

$$(a+b)^4 = ?\,a^4 b^0 + ?\,a^3 b^1 + ?\,a^2 b^2 +$$

$$+ 4\,a b^3 + ?\,a^0 b^4$$

$$\overset{1^\circ}{} \quad \overset{2^\circ}{} \quad \overset{3^\circ}{} \quad \overset{4^\circ}{}$$

$$(a+b)^4 = \underset{1^\circ}{(a+b)} \cdot \underset{2^\circ}{(a+b)} \cdot \underset{3^\circ}{(a+b)} \cdot \underset{4^\circ}{(a+b)}$$

Ad esempio:

in quanti modi posso realizzare $a^2 b^2$?

Bisogna selezionare b da due dei quattro fattori disponibili

$$\overset{1^\circ}{(a+b)}\cdot\overset{2^\circ}{(a+b)}\cdot\overset{3^\circ}{(a+b)}\cdot\overset{4^\circ}{(a+b)}$$

$$(a+b)^4 = (a+b)\cdot(a+b)\cdot(a+b)\cdot(a+b)$$

$$b^2\cdot a^2 = a^2 b^2 \qquad \{1^\circ, 2^\circ\}$$

$$\overset{1^\circ}{(a+b)}\cdot\overset{2^\circ}{(a+b)}\cdot\overset{3^\circ}{(a+b)}\cdot\overset{4^\circ}{(a+b)}$$

$$(a+b)^4 = (a+b)\cdot(a+b)\cdot(a+b)\cdot(a+b)$$

$$b\,a\,b\,a = a^2 b^2 \qquad \{1^\circ, 3^\circ\}$$

$$\overset{1^\circ}{(a+b)}\cdot\overset{2^\circ}{(a+b)}\cdot\overset{3^\circ}{(a+b)}\cdot\overset{4^\circ}{(a+b)}$$

$$(a+b)^4 = (a+b)\cdot(a+b)\cdot(a+b)\cdot(a+b)$$

$$b\,a^2\,b = a^2 b^2 \qquad \{1^\circ, 4^\circ\}$$

$$\begin{array}{ccccccc} & & 1^\circ & & 2^\circ & & 3^\circ & & 4^\circ \\ (a+b)^4 & = & (a+b) & \cdot & (a+b) & \cdot & (a+b) & \cdot & (a+b) \end{array}$$

$$a\,b^2 a = a^2 b^2 \qquad \{2^\circ, 3^\circ\}$$

$$\begin{array}{ccccccc} & & 1^\circ & & 2^\circ & & 3^\circ & & 4^\circ \\ (a+b)^4 & = & (a+b) & \cdot & (a+b) & \cdot & (a+b) & \cdot & (a+b) \end{array}$$

$$a\,b\,a\,b = a^2 b^2 \qquad \{2^\circ, 4^\circ\}$$

$$\begin{array}{ccccccc} & & 1^\circ & & 2^\circ & & 3^\circ & & 4^\circ \\ (a+b)^4 & = & (a+b) & \cdot & (a+b) & \cdot & (a+b) & \cdot & (a+b) \end{array}$$

$$a^2 b^2 \qquad \{3^\circ, 4^\circ\}$$

$1^\circ \qquad 2^\circ \qquad 3^\circ \qquad 4^\circ$

$$(a+b)^4 = (a+b)\cdot(a+b)\cdot(a+b)\cdot(a+b)$$

Dunque il monomio a^2b^{2} si ottiene una volta per ognuno dei seguenti sottoinsiemi:

$\{1^\circ, 2^\circ\} \quad \{1^\circ, 3^\circ\} \quad \{1^\circ, 4^\circ\}$

$\{2^\circ, 3^\circ\} \quad \{2^\circ, 4^\circ\} \quad \{3^\circ, 4^\circ\}$

Il coefficiente di $a^2 b^{2}$ corrisponde al numero di sottoinsiemi di **2** elementi che si possono formare a partire da un insieme di **4** elementi:

cioè:

$$\binom{4}{2} = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = \frac{24}{4} = 6$$

$\Longrightarrow$

$$(a+b)^4 = \overset{?}{\dots}\, a^4 b^0 + \overset{?}{\dots}\, a^3 b^1 + \mathbf{6}\, a^2 b^2 +$$

$$+ 4\, a^1 b^3 + \overset{1}{\dots}\, a^0 b^4$$

$$\overset{1°}{}\quad\overset{2°}{}\quad\overset{3°}{}\quad\overset{4°}{}$$

$$(a+b)^4 = (a+b)\cdot(a+b)\cdot(a+b)\cdot(a+b)$$

Ad esempio:

in quanti modi posso realizzare $b^4 = a^0 \cdot b^{4}$

Bisogna selezionare b da $\underline{4}$ dei quattro fattori disponibili

$$\{1°, 2°, 3°, 4°\}$$

$$(a+\underline{b})\cdot(a+\underline{b})\cdot(a+\underline{b})\cdot(a+\underline{b})$$

I modi corrispondono al numero di sottoinsiemi di 4 elementi che si possono formare a partire da un insieme di 4 elementi:

cioè:

$$\binom{4}{4} = \frac{4!}{4! \cdot 0!} = 1$$

$\Longrightarrow$

$$(a+b)^4 = \underset{\dots}{?}\, a^4 b^0 + \underset{\dots}{4}\, a^3 b^1 + 6\, a^2 b^2 +$$

$$+ \underset{\dots}{?}\, a^1 b^3 + \underset{\dots}{1}\, a^0 b^4$$

$$\overset{1°}{(a+b)}\ \ \overset{2°}{}\ \ \overset{3°}{}\ \ \overset{4°}{}$$

$$(a+b)^4 = (a+b)\cdot(a+b)\cdot(a+b)\cdot(a+b)$$

Ad esempio:

in quanti modi posso

realizzare $a^4 = a^4 b^0$

Bisogna selezionare b da

<u>0</u> dei quattro fattori disponibili

$\emptyset$ $$\binom{4}{0} = 1$$

$$(a+b)^4 = 1\,a^4 b^0 + \ldots a^3 b^1 + 6\,a^2 b^2 +$$

$$+ 4\,a^1 b^3 + 1\,a^0 b^4$$

$$(a+b)^4 = \overset{1°}{(a+b)} \cdot \overset{2°}{(a+b)} \cdot \overset{3°}{(a+b)} \cdot \overset{4°}{(a+b)}$$

Ad esempio:

in quanti modi posso realizzare $a^3 b^1$?

Bisogna selezionare b da <u>uno</u> dei quattro fattori disponibili

$$\{1°\} \quad \{2°\} \quad \{3°\} \quad \{4°\}$$

I modi corrispondono al numero di sottoinsiemi di 1 elemento che si possono formare a partire da un insieme di 4 elementi:

cioè:

$$\binom{4}{1} = 4$$

$\Longrightarrow$

$$(a+b)^4 = 1\,a^4 b^0 + 4\,a^3 b^1 + 6\,a^2 b^2 + 4\,a^1 b^3 + 1\,a^0 b^4$$

In conclusione:

$$(a+b)^4 = \binom{4}{0} a^4 \cdot b^0 + \binom{4}{1} a^3 b^1 +$$

$$+ \binom{4}{2} a^2 b^2 + \binom{4}{3} a b^3$$

$$+ \binom{4}{4} a^0 b^4$$

$$= a^4 + 4a^3 b + 6a^2 b^2 + 4ab^3$$

$$+ b^4$$

In generale:

$$(a+b)^n =$$

$$= \overset{1^\circ}{(a+b)} \cdot \overset{2^\circ}{(a+b)} \cdot \ldots \cdot \overset{n-1}{(a+b)} \cdot \overset{n}{(a+b)}$$

Fissato $K = 0, 1, \ldots, n$

in quanti modi di può formare: $a^{n-k} \, b^{k}$?

$$\binom{n}{k}$$

Quindi:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n \cdot b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} \cdot b^1 +$$

$$+ \binom{n}{2} a^{n-2} \cdot b^2 + \ldots +$$

$$+ \binom{n}{n-2} a^2 \cdot b^{n-2} + \binom{n}{n-1} a^1 \cdot b^{n-1} + \binom{n}{n} a^0 b^n$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} \cdot b^k$$