def. uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ è un insieme V con due operazioni

$+ : V \times V \longrightarrow V$ $\qquad\qquad$ $\cdot : \mathbb{R} \times V \longrightarrow V$

$(v_1, v_2) \mapsto v_1 + v_2$ $\qquad\qquad$ $(k, v) \mapsto k \cdot v$

che soddisfano

S1) assoc. $(v_1 + v_2) + v_3 = v_1 + (v_2 + v_3)$ $\quad \forall v_1, v_2, v_3 \in V$

S2) comm. $v_1 + v_2 = v_2 + v_1$ $\quad$ — " —

S3) $\exists\, 0_V \in V : \ 0_V + v_1 = v_1$ $\quad$ — " —

S4) $\forall v \in V \ \exists\, w : \ v + w = 0_V$

P1) assoc. $h \cdot (k \cdot v) = (h \cdot k) \cdot v$ $\quad \forall h, k \in \mathbb{R},\ v \in V$

P2) $1 \cdot v = v$ $\quad \forall v \in V$

D) $k \cdot (v_1 + v_2) = (k \cdot v_1) + k \cdot v_2$ $\quad \forall h, k \in \mathbb{R}$

$(h + k) \cdot v_1 = (h \cdot v_1) + (k \cdot v_1)$ $\quad \forall v_1, v_2 \in V$

esempi: vettori geometrici nel piano, $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^{(n)}$, $Mat_{m \times n}(\mathbb{R})$

<u>proprietà degli spazi vettoriali</u>

1) se V è uno spazio vettoriale allora $V \neq \emptyset$ $\quad \Leftarrow (S3)$

2) il vettore 0_V è unico

dim. supponiamo che esistono 0_V e $0_V'$

$$0_V \underset{S3 \text{ per } 0_V'}{=} 0_V + 0_V' \overset{S3 \text{ per } 0_V}{=} 0_V'$$

3) cancellazione : $u + v = u + w \Rightarrow v = w$

S4 per u : $\exists\, u'$ t.c. $u + u' = 0_V \underset{(S2)}{=} u' + u$

sommo u' a $u + v = u + w$:

$$u' + (u+v) = u' + (u+w)$$

$$v \underset{S3}{=} 0_V + v \underset{S4}{=} (u'+u) + v \overset{S1}{=} u'+(u+v) = u'+(u+w) \overset{S1}{=} (u'+u) + w = 0_V + w \underset{S3}{=} w$$

4) unicità dell'inverso (S4) : dato $v \in V$ $\exists\, w$ t.c. $v + w = 0_V$

se w' è un'altro inverso di v avremmo $v + w = 0_V = v + w'$

$\underset{\text{canc.}}{\Rightarrow} w = w'$

notazione : denoteremo l'inverso di v con $-v$: $v + (-v) = -v + v = 0_V$

5) $0 \cdot v = 0_V \quad \forall v \in V$

dim. $v + 0 \cdot v \underset{P2}{=} 1 \cdot v + 0 \cdot v \underset{D}{=} (1+0) \cdot v = 1 \cdot v \underset{P2}{=} v \underset{S3}{=} v + 0_V$

$\Rightarrow 0 \cdot v = 0_V$

cancellazione

6) $(-1)\cdot v = -v \quad \forall v \in V$

dim. per unicitá dell'opposto, ci basta dimostrare che $v + (-1)\cdot v = 0_V$

$$v + (-1)\cdot v \underset{P2}{=} 1\cdot v + (-1) v \underset{D}{=} (1-1)\cdot v = 0 \cdot v = 0_V$$

7) $k \cdot 0_V = 0_V \quad \forall k \in \mathbb{R}$

dim. $$k \cdot 0_V \underset{\text{proprietá 5}}{=} k\cdot (0 \cdot 0_V) \underset{P1}{=} (k\cdot 0)\cdot 0_V = 0 \cdot 0_V \underset{\text{propr. 5}}{=} 0_V$$

8) se $k \cdot v = 0_V$ allora o $k = 0$, o $v = 0_V$

dim. se $k \neq 0$ allora $\exists \frac{1}{k} \in \mathbb{R} : k \cdot \frac{1}{k} = 1$

$$v \underset{P2}{=} 1 \cdot v = \left(\frac{1}{k}\cdot k\right)\cdot v \underset{P1}{=} \frac{1}{k}\cdot (k \cdot v) = \frac{1}{k}\cdot 0_V \underset{\text{propr. 7}}{=} 0_V$$

9) se $0_V \neq v \in V$ e $k_1 \neq k_2$ allora $k_1 \cdot v \neq k_2 \cdot v$

dim. se per assurdo $k_1 \cdot v = k_2 \cdot v \underset{\text{Sommando } -k_2 v}{\Longleftrightarrow} (k_1 - k_2)\cdot v = 0_V \underset{\text{propr. 8}}{\Longleftrightarrow}$ o $v = 0_V$ o $k_1 = k_2$ $\lightning$

in particolare, se $\exists\, 0_V \neq v \in V$ allora $i_v : \mathbb{R} \longrightarrow V$, $k \longmapsto k \cdot v$

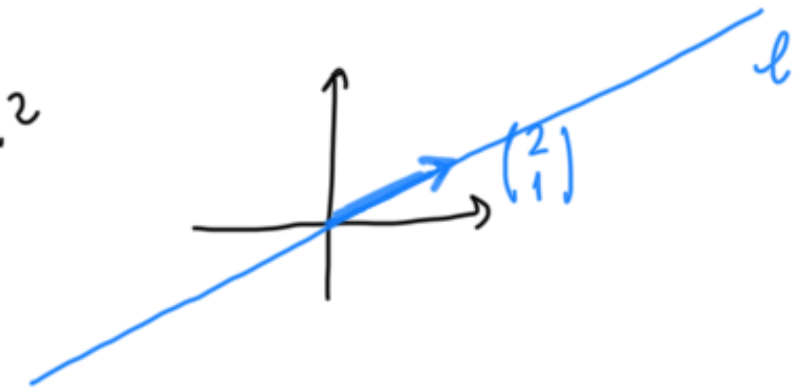
per la proprietá 9, i_v é iniettiva

oss. $V = \{0\}$ é uno spazio vettoriale

$+ : V \times V \to V$
$(0,0) \mapsto 0$

$\cdot : \mathbb{R} \times V \to V$
$(k,0) \mapsto 0$

es. $V = \mathbb{R}^2$



$\ell = im(i_v)$

Sottospazi vettoriali

def. sia V uno spazio vettoriale reale, un sottoinsieme non vuoto $\emptyset \neq W \subseteq V$ si dice un sottospazio vettoriale se é "chiuso" per somma e molt. scalare

$\forall k \in \mathbb{R},\ w_1, w_2 \in W$ si ha $w_1 + w_2 \in W$ e $k \cdot w_1 \in W$

oss. $\{0\}$ e V sono sottospazi vettoriali

se $\exists\ 0 \neq w \in W$ allora $k \cdot w \in W \quad \forall k \in \mathbb{R}$

in effetti $Span(w) := \{ k \cdot w \mid k \in \mathbb{R} \} \subset V$ é un sottospazio vettoriale

infatti : dati $w_1 = k_1 \cdot w$, $w_2 = k_2 \cdot w \Rightarrow w_1 + w_2 \underset{D}{=} (k_1 + k_2) \cdot w$

$h \in \mathbb{R} \Rightarrow h \cdot (k_1 w) \underset{P1}{=} (h \cdot k_1) \cdot w$

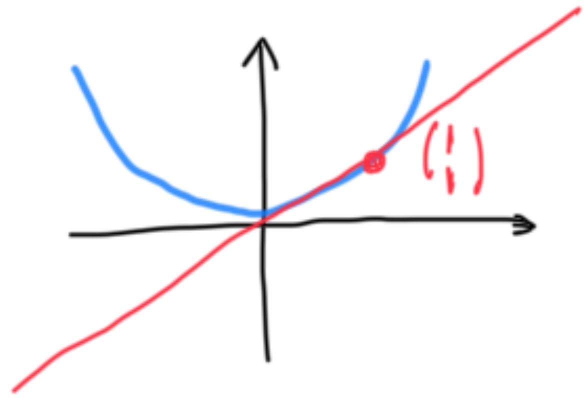
def. $Span(w) = \{ kw \mid k \in \mathbb{R} \}$ é il sottospazio vettoriale generato da w

notazioni: denoto l'inclusione di un sottospazio vettoriale con $\leq$ (o $<$)

$$W \leq V$$

oss. $\mathrm{Span}(w) = \mathrm{im}(i_w)$

non-esempi: la parabola $P = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; y = x^2 \right\}$



NON é un ssp. vett.

per es $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in P$ ma $2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \notin P$

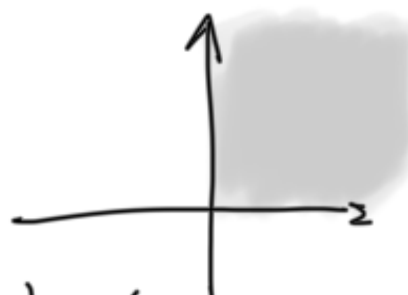
$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \in P$ ma $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \notin P$

oss. sia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, consideriamo il grafico $G_f = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R} \;\middle|\; y = f(x) \right\}$

G_f é un sottospazio se e solo se f é lineare cioé $\exists\, a \in \mathbb{R}$ t.c. $f(x) = ax$

altri non esempi: • insieme finito $\neq \{0\}$ $\quad S \subset V$

• $Q = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x \geq 0,\ y \geq 0 \right\}$



non é chiuso per moltiplic. per -1

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in Q$ ma $(-1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \notin Q$

oss. $W \leq V$ ssp vett é uno spazio vettoriale con le operazioni ristrette da V:

$+: V \times V \to V$

richiamo: data $f: D \to C$ funzione e un

$+|_{W\times W} : W \times W \longrightarrow W$ sottoinsieme $E \subseteq D$ la funzione $f|_E : E \to C$, $e \mapsto f(e)$

$\bullet : \mathbb{R} \times V \longrightarrow V$ si chiama la restrizione di f a E

$\bullet|_{\mathbb{R}\times W} \quad \mathbb{R}\times W \longrightarrow W$

le restrizioni di $+$ e $\cdot$ a W soddisfano ancora S1 -- S4, P1, P2, D

quindi W é uno sp. vett.

__lemma__ sia $a_1x_1 + \dots + a_nx_n = 0$ un'eq. __lineare__ __omogenea__ nelle variabili $x_1 \dots x_n$

l'insieme delle soluzioni $S = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \sum a_i x_i = 0 \right\}$ é un ssp. vett. di $\mathbb{R}^n$

__dim.__ siano $\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ e $\underline{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in S$, $k \in \mathbb{R}$

allora verifichiamo che $\underline{x}+\underline{y} \in S$: $\underline{x}+\underline{y} = \begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \\ \vdots \\ x_n+y_n \end{pmatrix} \in S \iff$

$$a_1(x_1+y_1) + a_2(x_2+y_2) + \dots + a_n(x_n+y_n) = 0$$

$$\underset{\uparrow}{=} (a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n) + (a_1y_1 + \dots + a_ny_n) = 0 + 0 \quad \checkmark$$

distributiva, comm., associatività di $+$ e $\cdot$ di numeri reali

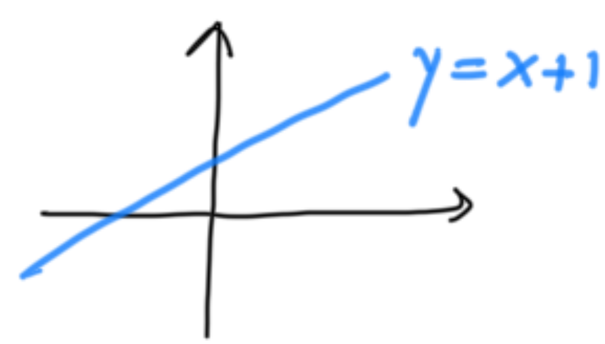
$$k \cdot \underline{x} = \begin{pmatrix} kx_1 \\ \vdots \end{pmatrix} \in S \iff a_1(kx_1) + a_2(kx_2) + \dots + a_n(kx_n) = 0$$

kx_n)

$$ka_1x_1 + ka_2x_2 + \dots + ka_nx_n$$

$$= k(a_1x_1 + \dots + a_nx_n) = k \cdot 0 \quad \checkmark$$

non-esempio : retta affine $\left\{ \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \mid y = ax + b,\ b \neq 0 \right\}$



oss. i sottospazi vettoriali contengono sempre 0_V

$$\emptyset \neq W \subseteq V \Rightarrow \exists w \in W \Rightarrow 0 \cdot w = 0_V \in W$$

$0_V \in W$ e

lem $\emptyset \neq W \subseteq V$ é un ssp vett $\iff \forall w_1, w_2 \in W,\ k \in \mathbb{R}$ ho $w_1 + k w_2 \in W$

dim. "$\Rightarrow$" ovvia $\quad k \cdot w_2 \in W,\quad w_1 + k \cdot w_2 \in W$

chiusura per $\cdot$ $\quad$ chiusura per $+$

"$\Leftarrow$" chiusura per $+$: si ottiene con $k = 1$

chiusura per $\cdot$: con $w_1 = 0_V$

esercizio: i sottospazi di $\mathbb{R}^2$ sono tutti e soli i seguenti

$$\{0\}, \quad \mathrm{Span}(w),\ 0 \neq w \in \mathbb{R}^2, \quad \mathbb{R}^2$$