richiami

def. prodotto di una matrice $A \in M_{m\times n}$ per un vettore $x \in \mathbb{R}^n$: é un vettore in $\mathbb{R}^m$

la cui coordinata i-esima é $(A\cdot x)_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n$

appl. il sist. lin.

$$(*)\quad \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

é equiv. all'equazione $A.\underline{x} = \underline{b}$ in $\mathbb{R}^m$

es.1 calcolare il prodotto

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 5 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\cdot 1 + 3\cdot 0 + (-1)\cdot 3 + 1\cdot(-1) \\ 2\cdot 1 + 0\cdot 0 + 5\cdot 3 + 7\cdot(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \end{pmatrix}$$

es.2 risolvere il sistema lineare con matrice completa

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

il sistema ha un'unica soluzione $\underline{s} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_3 + x_4 = -2 \\ 3x_2 - x_4 = 1 \\ x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

per sostituzione (all'indietro)

$x_4 = 2$

$x_3 = x_4 = 2$

$x_2 = \frac{1}{3}(1 + x_4) = 1$

$x_4 = 2$

$x_1 = \frac{1}{2}(-2 - x_3 - x_4) = -3$

def. un sistema lin si dice a scala se lo è la matrice completa associata:

- righe nulle solo in fondo
- $\forall$ riga, il primo el. $\neq 0$ ("pivot") sta più a destra del pivot precedente

def. $\operatorname{rg} A = \#\,\text{pivot} = \#\,\text{righe non nulle} \leq m$

oss. ogni colonna contiene ≤ 1 pivot $\Rightarrow \operatorname{rg} A \leq n$

$\Big\}\ \operatorname{rg} A \leq \min\{m, n\}$

oss. le colonne di A corrispondono alle variabili del sist. lin.

def. variabile libera: una la cui colonna non contiene un pivot

(vincolata: —"— contiene un pivot)

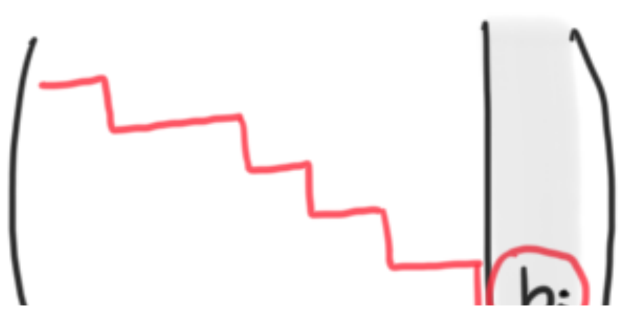
teo [Rouché-Capelli] sia $AX = b$ un sis. lin. in n variabili e a scala; allora

(i) $\operatorname{rg} A < \operatorname{rg}(A|b)$ il sist. è incompatibile

(ii) $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}(A|b) = n$ il sist. ammette un'unica soluzione

(iii) $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}(A|b) < n$ —"— ∞^{ℓ} soluzioni dove $\ell = \#\,\text{variabili libere} = n - \operatorname{rg} A$

(i)



oss. $\operatorname{rg} A \leq \operatorname{rg}(A|b)$

$<$ se e solo se (sse) $\exists$ pivot nella colonna dei termini noti

$\leftarrow$ riga i-esima : $0 \cdot x_1 + \dots + 0 \cdot x_n = b_i \neq 0$ impossibile

(iii) es. $\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 5 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 8 \end{array}\right)$

variabili libere x_2, x_4

sol. $s_1 = -\frac{1}{3}(5s_2 + s_3 + s_4) = -\frac{1}{3}(5s_2 + \frac{1}{2}s_4 + 2)$

$s_3 = 2 - \frac{1}{2}s_4$

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{1}{3}(5s_2 + \frac{1}{2}s_4 + 2) \\ s_2 \\ 2 - \frac{1}{2}s_4 \\ s_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{pmatrix} s_2 \\ s_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

per es. scelgo $\begin{pmatrix} s_2 \\ s_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ottengo la corrisp. soluzione $\begin{pmatrix} -7/3 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

(verificare che è una soluzione)

scelgo $\begin{pmatrix} s_2 \\ s_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ottengo $\begin{pmatrix} -5/6 \\ 0 \\ 3/2 \\ 1 \end{pmatrix}$

§ algoritmo / eliminazione di Gauss

es. $\begin{cases} 2x_1 + x_3 + x_4 = -2 \\ x_1 + 3x_2 + \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = -3 \\ 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} 2x + 3y = 7 & \text{(I)} \\ 3x + 2y = 5 \end{cases} \xrightarrow{\cdot 1/2} y = \frac{5}{2} - \frac{3}{2}x \quad \text{(II')}$

$\text{(I')} \to \text{(I)} - 3\,\text{(II')}$

$2x + \cancel{3y} - \cancel{3y} = 7 - \frac{15}{2} + \frac{9}{2}x$

$\text{(I')} \quad \frac{5}{2}x = \frac{1}{2}$

$\begin{cases} \text{(I')} \\ \text{(II')} \end{cases} \iff \begin{cases} \text{(I)} \\ \text{(II)} \end{cases}$

def. due sistemi in n variabili si dicono ... ammettono le stesse soluzioni equivalenti se ammettono ... e a scala

def. un'operazione di riga è una delle seguenti:

Sistema: $\begin{cases} E_1 = \text{eqz. I} \\ E_2 = \text{eqz. II} \end{cases}$

Ⓐ $E_1 \to kE_1$, con $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

(posso "invertirla": $E_1 \to \frac{1}{k} E_1$)

Ⓑ $\begin{cases} E_1 \\ E_2 \end{cases} \to \begin{cases} E_1 + kE_2 \\ E_2 \end{cases}$, con $k \in \mathbb{R}$

$\begin{cases} E_1 : a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ E_2 : a_{21}x_1 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \end{cases}$

Ⓐ $E_1 \to kE_1$:
$ka_{11} x_1 + \ldots + ka_{1n} x_n = kb_2$

Ⓒ $\begin{cases} E_1 \\ E_2 \end{cases} \to \begin{cases} E_2 \\ E_1 \end{cases}$

lemma due sis. lin. ottenuti l'uno dall'altro tramite una sequenza di operazioni di riga sono equivalenti

Ⓑ $E_1 \to E_1 + kE_2 : (a_{11} + ka_{21})x_1 + \ldots + (a_{1n} + ka_{2n})x_n = b_1 + kb_2$

dim. se $\begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix}$ è una sol. di $\begin{cases} E_1 \\ E_2 \end{cases} \iff \begin{cases} a_{11}s_1 + \ldots + a_{1n}s_n = b_1 \\ a_{21}s_1 + \ldots + a_{2n}s_n = b_2 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} E_1 + kE_2 \\ E_2 \end{cases}$: $(a_{11} + ka_{21})s_1 + \ldots + (a_{1n} + ka_{2n})s_n = b_1 + kb_2$ ✓

$\parallel$

$(a_{11}s_1 + \ldots + a_{1n}s_n) + k(a_{21}s_1 + \ldots + a_{2n}s_n) = b_1 + kb_2$

inoltre posso "invertire" Ⓑ $\begin{cases} E_1 \\ E_2 \end{cases} \to \begin{cases} E_1 - kE_2 \\ E_2 \end{cases}$

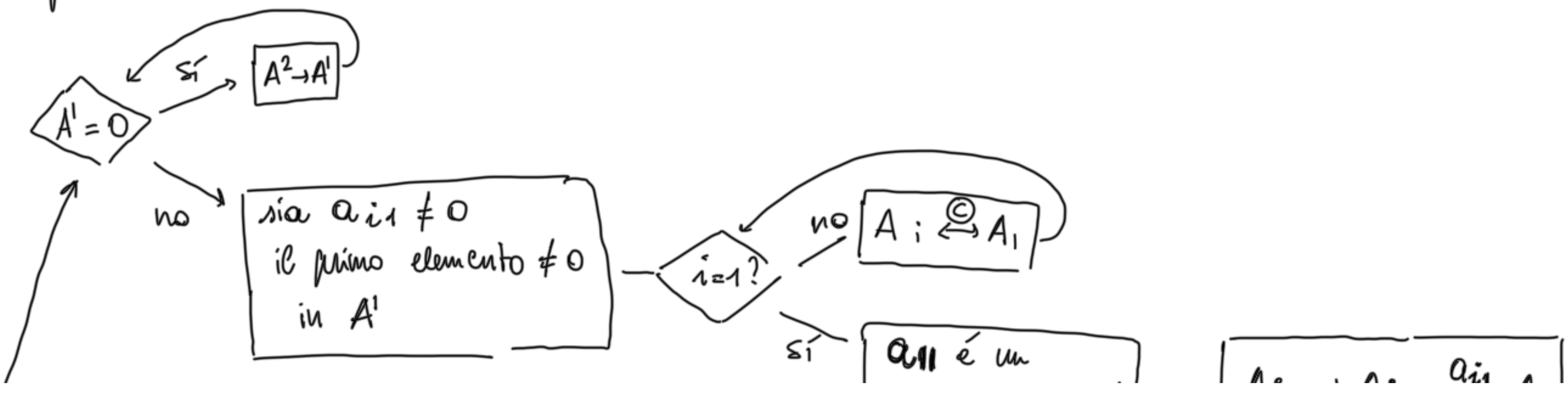
prop (eliminazione di Gauss) ogni sistema é equivalente a uno in forma a scala tramite una seq. di operazioni di riga

es. sistema associato a

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 1/2 & -1/2 & 0 \\ 2 & -3 & 2 & 1 & -3 \\ 4 & 6 & 3 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} E_1 \xrightarrow{(A)} \frac{1}{2} E_1 \\ (B) \\ E_2 \to E_2 - E_1' \\ E_3 \to E_3 - 2E_1' \\ E_4 \to E_4 - 4E_1' \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1/2 & 1/2 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 6 & 1 & -2 & 4 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{l} E_3 \to E_3 + E_2 \\ E_4 \to E_4 - 2E_2 \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1/2 & 1/2 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & 0 & 2 \end{array}\right) \quad E_4 \to E_4 - E_3 \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1/2 & 1/2 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 & 2 \end{array}\right)$$

dim. (algoritmo di Gauss) per induzione su $n = \#$ colonne:



candidato pivot $\longrightarrow$ $A_i \to A_i - \frac{\dots}{a_{11}} A_1$ $\quad \forall i = 2 \dots m$

(ora la prima colonna è $\begin{pmatrix} a_{11} \neq 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$)

mi dimentico riga 1 e colonna 1 e $A \to A_{>1,>1}$

principio di induzione: sia P una proposizione che dipende da un numero naturale n

allora $\left(P(0),\ P(n) \Rightarrow P(n+1) \right) \Longrightarrow P(n),\ \forall n \in \mathbb{N}$

per es. $P(n)$: $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} = \binom{n+1}{2}$

$$\sum_{i=0}^{n} i = 1 + 2 + 3 + \dots + n$$

verifichiamo $P(0)$: $\displaystyle\sum_{i=0}^{0} i = 0 = \frac{0 \cdot 1}{2} = 0$ ✓

$P(n) \Rightarrow P(n+1)$: $\displaystyle\sum_{i=0}^{n+1} i = \left(\sum_{i=0}^{n} i \right) + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = (n+1)\left[\frac{n}{2} + 1 \right] = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$ ✓