Capitolo 1

Funzioni di più variabili reali

1.1 $\mathbf{R}^n$ e la metrica euclidea

Ricordiamo che in [Analisi A] sezione 1.4 fu introdotta la nozione di coppia ordinata. Più in generale, dato $n \in \mathbf{N}$ e gli n oggetti x_1,..., x_n, introduciamo la nozione primitiva di $n-$pla ordinata $(x_1, ..., x_n)$. Richiediamo solo quanto segue: che due $n-$ple $x = (x_1, ..., x_n)$ e $y = (y_1, ..., y_n)$ coincidano se e solo se $x_1 = y_1$,..., $x_n = y_n$. Dati gli insiemi A_1,..., A_n, non necessariamente a due a due distinti, definiamo con $A_1 \times .... \times A_n$ il loro **prodotto cartesiano**:

Definizione 1.1.1 *Dati gli insiemi A_1, ...,A_n, poniamo*

$$A_1 \times ... \times ...A_n := \{(x_1, ..., x_n) : x_1 \in A_1, ..., x_n \in A_n\}.$$

Se A_1,...,A_n coincidono tutti con un certo insieme A, scriveremo A^n in alternativa a $A \times ... \times A$.

Ci interesserà in particolare il caso $A = \mathbf{R}$, ove $\mathbf{R}$ indica l'insieme dei numeri reali. Al lettore sarà probabilmente già noto il fatto che i numeri reali costituiscono un modello della retta, mentre l'insieme $\mathbf{R}^2$ delle coppie ordinate di numeri reali viene utilizzato come modello di piano. Nello stesso modo si può procedere con $\mathbf{R}^3$ nei confronti dello spazio tridimensionale: basta fissare un piano π e su questo adottare un sistema di coordinate cartesiane ortogonali (x_1, x_2). Si può poi introdurre un asse r perpendicolare al piano e su questo introdurre un sistema di ascisse (x_3). Assegnato un arbitrario punto P, questo è univocamente determinato da una tripla di numeri reali (x_1, x_2, x_3) ottenuta come segue: (x_1, x_2) sono le coordinate della proiezione ortogonale del punto su π, x_3 costituisce l'ascissa della proiezione di P sull'asse r vedi la figura 1.1).

Noi considereremo qui $\mathbf{R}^n$ per un fissato $n \in \mathbf{N}$. Dati $x = (x_1, ..., x_n)$ e $y = (y_1, ..., y_n)$ elementi di $\mathbf{R}^n$, definiamo la loro somma $x + y$ come segue

$$x + y := (x_1 + y_1, ..., x_n + y_n). \tag{1.1.1}$$

In dimensione 2 e 3, la somma definita in tal modo costitusce una generalizzazione della somma di vettori, che probabilmente sarà già familiare al lettore, almeno nel caso bidimensionale: è utile identificare x e y con i vettori applicati che hanno il primo estremo nell'origine $O = (0, ..., 0)$ e il secondo rispettivamente in $(x_1, ..., x_n)$ e $(y_1, ..., y)$ (figura 1.2). Trasliamo ora il secondo vettore in modo da trasferirne il primo estremo in $(x_1, ..., x_n)$. Il secondo estremo si troverà proprio in corrispondenza del punto di coordinate $(x_1 + y_1, ..., x_n + y_n)$.

Sia poi $\lambda \in \mathbf{R}$. Per $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbf{R}^n$, definiamo

$$\lambda x := (\lambda x_1, ..., \lambda x_n). \tag{1.1.2}$$

Anche questo "prodotto per uno scalare" ammette una semplice interpretazione geometrica: identifichiamo ancora x con il vettore applicato che ha il primo estremo in O e il secondo in $(x_1, ..., x_n)$ (si veda ancora la figura 1.2, con θ che indica l'angolo tra x e y)). Consideriamo la retta r che contiene il vettore (supposto di lunghezza positiva). λx sarà allora identificabile con il vettore applicato che ha il primo estremo in O, lunghezza pari alla distanta di $(x_1, ..., x_n)$ da O moltiolicata per $|\lambda|$ e verso coincidente con quello del vettore identificato con x se $\lambda > 0$, opposto a quello del vettore identificato con x se $\lambda < 0$.

Le seguenti proprietà di somma e prodotto per uno scalare sono di verifica immediata:

(ASV1) $\forall x, y \in \mathbf{R}^n$

$$y + x = x + y$$

(proprietà commutativa della somma);

(ASV2) $\forall x, y, z \in \mathbf{R}^n$

$$x + (y + z) = (x + y) + z$$

(proprietà associativa della somma);

(ASV3) posto $O := (0, ..., 0)$, $\forall x \in \mathbf{R}^n$

$$x + O = O + x = x$$

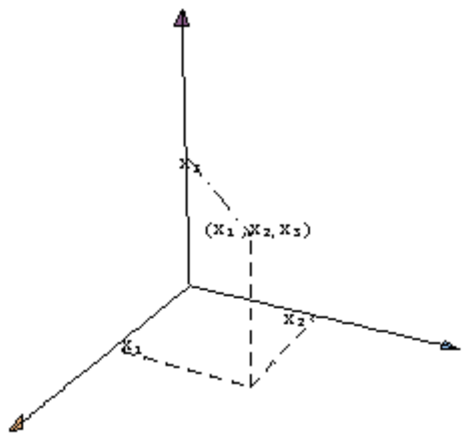

Figura 1.1

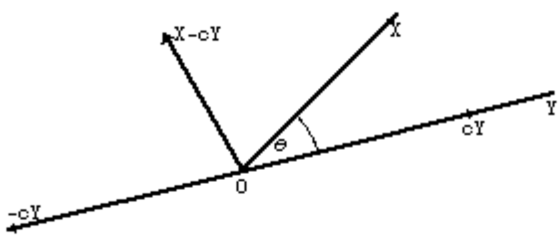

Figura 1.2

(esistenza di un elemento neutro per la somma);

(ASV4) dato $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbf{R}^n$*, indichiamo con* $-x$ *l'elemento* $(-x_1, ..., -x_n)$*. Allora*

$$x + (-x) = (-x) + x = O$$

(esistenza di un inversa additivo per ogni $x \in \mathbf{R}^n$*);*

(ASV5) $\forall \lambda,\ \mu \in \mathbf{R}$*,* $\forall x \in \mathbf{R}^n$

$$(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x;$$

(ASV6) $\forall \lambda \in \mathbf{R}$*,* $\forall x, y \in \mathbf{R}^n$

$$\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y;$$

(ASV7) $\forall \lambda,\ \mu \in \mathbf{R}$*,* $\forall x \in \mathbf{R}^n$

$$\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x;$$

(ASV8) $\forall x \in \mathbf{R}^n$

$$1x = x.$$

Si usa dire brevemente che $\mathbf{R}^n$ con le operazioni di somma (1.1.1) e prodotto per uno scalare (1.1.2) è uno **spazio vettoriale sul campo R** dei numeri reali.

Osservazione 1.1.1 In $(ASV6)$ e $(ASV7)$ abbiamo usato la solita convenzione che, qualora non compaiano parentesi, "i prodotti hanno la precedenza sulle somme". Così $\lambda x + \lambda y$ sta per $(\lambda x) + (\lambda y)$.

Veniamo ora a un altro prodotto tra elementi di $\mathbf{R}^n$, che ha però come risultato un elemento di $\mathbf{R}$.

Definizione 1.1.2 *Siano* $x = (x_1, ..., x_n)$ *e* $y = (y_1, ..., y_n)$ *elementi di* $\mathbf{R}^n$*. Definiamo come loro* **prodotto scalare** *e indichiamo col simbolo* $< x, y >$ *oppure* $x \cdot y$ *il numero reale*

$$< x, y >= x \cdot y = x_1 y_1 + ... + x_n y_n = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j.$$

Osservazione 1.1.2 Si potrebbe far vedere che, nei casi $n = 2$ e $n = 3$, il prodotto scalare ammette la seguente interpretazione geometrica : si considerino i due vettori applicati di estremi rispettivamente O e $(x_1, ..., x_n)$, e O e $(y_1, ..., y_n)$. Allora $x \cdot y$ coincide con il prodotto delle loro lunghezze moltiplicato per il coseno dell'angolo fra essi compreso. Così , se i due vettori sono ortogonali, il loro prodotto scalare vale 0. Ad esempio,

$$(1, 0) \cdot (0, 1) = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0.$$

Come vedremo, il prodotto scalare svolge una funzione ausiliaria assai importante. Cominciamo allora a enunciarne le proprietà fondamentali.

Teorema 1.1.1 *Siano* $\lambda \in \mathbf{R}$*,* x*,* y*,* z *elementi di* $\mathbf{R}^n$*. Allora*
(I) $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$*;*
(II) $(\lambda x) \cdot y = \lambda(x \cdot y)$*;*
(III) $y \cdot x = x \cdot y$*;*
(IV) $x \cdot x \geq 0$*;*
(V) $x \cdot x = 0$ *se e solo se* $x = O$*.*

Dimostrazione Lasciamo la dimostrazione, piuttosto banale, al lettore. Ci limitiamo a osservare che, se $x = (x_1, ..., x_n)$, allora

$$x \cdot x = x_1^2 + ... + x_n^2 \geq 0.$$

Inoltre quest'ultima somma è nulla se e solo se tutti gli addendi sono nulli, da cui segue (V). $\Box$

Osservazione 1.1.3 Dalle proprietà $(I)-(III)$ segue immediatamente che, per ogni $\lambda \in \mathbf{R}$ e per ogni x, y, z in $\mathbf{R}^n$, si ha

$$x \cdot (\lambda y) = \lambda(x \cdot y) \tag{1.1.3}$$

e

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z. \tag{1.1.4}$$

Introduciamo ora la norma euclidea di un elemento di $\mathbf{R}^n$.

Definizione 1.1.3 *Sia* $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbf{R}^n$. *Indichiamo con* $\|x\|$ *e chiamiamo* **norma euclidea** *di* x *il numero reale*

$$\|x\| := \sqrt{x \cdot x} = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} x_j^2}.$$

Osservazione 1.1.4 Qualora n sia chiaro dal contesto,indicheremo con $\|.\|$ la norma euclidea in $\mathbf{R}^n$. Se, viceversa, tratteremo contemporaneamente varie norme euclidee, useremo la notazione $\|.\|_n$.

Osservazione 1.1.5 Come è noto, nei casi $n = 2$ e $n = 3$ $\|x\|$ può essere pensato come la distanza del punto di coordinate $(x_1, ..., x_n)$ da O, oppure come la lunghezza del vettore applicato di estremi O e il punto suddetto. Osserviamo anche che, nel caso $n = 1$, si ha $\|x\| = |x|$.

Per esplorare le proprietà della norma $\|.\|$, è assai utile il seguente risultato:

Teorema 1.1.2 *(Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz) Siano* x *e* y *elementi di* $\mathbf{R}^n$. *Allora*

$$|x \cdot y| \leq \|x\|\|y\|.$$

Dimostrazione Sia, per $t \in \mathbf{R}$,

$$P(t) := (x + ty) \cdot (x + ty).$$

Applicando allora il teorema 1.1.1 e l'osservazione 1.1.3, si ottiene facilmente

$$P(t) = x \cdot x + 2t(x \cdot y) + t^2(y \cdot y).$$

Quindi P è una funzione polinomiale di secondo grado nella variabile t. Dal teorema 1.1.1 (IV) si ha che $P(t) \geq 0$ $\forall t \in \mathbf{R}$. Ne segue che il discriminante di P è non positivo, vale a dire,

$$(x \cdot y)^2 - (x \cdot x)(y \cdot y) \leq 0,$$

$$(x \cdot y)^2 \leq (x \cdot x)(y \cdot y),$$

da cui la conclusione estraendo la radice da ciascun termine. □

Vediamo ora le proprietà fondamentali della norma euclidea.

Teorema 1.1.3 *Siano* x *e* y *elementi di* $\mathbf{R}^n$, $\lambda \in \mathbf{R}$. *Allora:*

(I) $\|x\| \geq 0$;

(II) $\|x\| = 0$ *se e solo se* $x = O$;

(III) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$;

(IV) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$;

(V) $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$.

(VI) Se $x = (x_1, ..., x_k, ..., x_n)$, $|x_j| \leq \|x\|$ *per ogni* $j = 1, ..., n$.

Dimostrazione (I) è ovvia.

(II) segue immediatamente dal punto (V) del teorema 1.1.1.

(III) Si ha
$$\|\lambda x\|^2 = (\lambda x) \cdot (\lambda x) = \lambda^2 \|x\|^2.$$
Estraendo la radice quadrata, si ottiene la conclusione.

(IV) Si ha
$$\|x + y\|^2 = (x + y) \cdot (x + y) = \|x\|^2 + 2x \cdot y + \|y\|^2 \leq$$
$$\leq \|x\|^2 + 2|x \cdot y| + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2,$$
applicando la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz. Applicando ancora la radice quadrata, si ottiene la conclusione.

(V) Si ha
$$\|x\| = \|(x - y) + y\| \leq \|x - y\| + \|y\|,$$
applicando (IV). Segue
$$\|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|.$$
Invertendo i ruoli di x e y, si ottiene
$$\|y\| - \|x\| \leq \|y - x\| = \|x - y\|.$$
Poiché $|\|x\| - \|y\|| = \max\{\|x\| - \|y\|, \|y\| - \|x\|\}$, vale (V).

(VI) Per $j \in \{1, ..., n\}$ si ha
$$x_j^2 \leq x_1^2 + ... + x_j^2 + ... + x_n^2 = \|x\|^2,$$
da cui la conclusione prendendo le radici quadrate. $\square$

A questo punto, possiamo definire la metrica (o distanza) euclidea in $\mathbf{R}^n$.

Definizione 1.1.4 *Siano x e y elementi di $\mathbf{R}^n$. Poniamo*

$$d(x,y) := \|x-y\|.$$

Chiameremo d, che è una funzione da $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ a $\mathbf{R}$, la **metrica euclidea** *in $\mathbf{R}^n$.*

Le principali proprietà di d sono enunciate nel seguente

Teorema 1.1.4 *Siano x, y, z generici elementi di $\mathbf{R}^n$. Allora (I) $d(x,y) \geq 0$;*
(II) $d(y,x) = d(x,y)$;
(III) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$.

Dimostrazione (I) è immediato.
(II) Basta osservare che

$$d(y,x) = \|y-x\| = \|-(x-y)\| =$$

$$= \|x-y\| = d(x,y).$$

(III) Si ha

$$d(x,z) = \|x-z\| =$$

$$= \|(x-y)+(y-z)\| \leq \|x-y\| + \|y-z\| =$$

$$= d(x,y) + d(y,z).$$

□

Osservazione 1.1.6 La disuguaglianza (III) nel teorema 1.1.4 si chiama anche "disuguaglianza triangolare", in quanto costituisce una generalizzazione della proprietà geometrica elementare che in ogni triangolo la lunghezza di ciascun lato non supera la somma delle lunghezze degli altri due.

1.2 Insiemi aperti e chiusi, interno, frontiera

Cominciamo con la seguente definizione fondamentale:

Definizione 1.2.1 *Siano $x \in \mathbf{R}^n$ e $r > 0$. Poniamo*

$$B(x,r) := \{y \in \mathbf{R}^n : d(x,y) = \|x-y\| < r\}.$$

Chiameremo $B(x,r)$ **palla aperta** *di centro x e raggio r.*

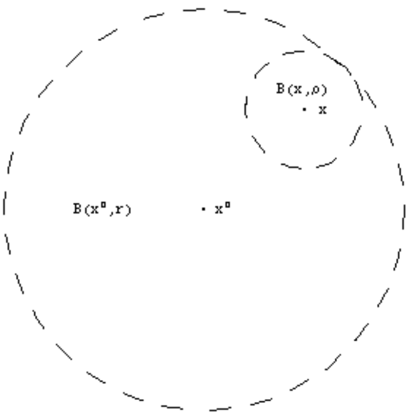

Figura 1.3

Osservazione 1.2.1 Se $n = 1$, $B(x, r)$ coincide con l'intorno circolare $I(x, r)$ (vedi [Analisi A] (2.2.1)).

Estendiamo ora al caso multidimensionale la definizione 3.4.1 in [Analisi A].

Definizione 1.2.2 *Siano $A \subseteq \mathbf{R}^n$, $x_0 \in \mathbf{R}^n$. Diremo che x_0 appartiene all'* **interno** *di A (e scriveremo $x_0 \in \mathring{A}$) se esiste una palla aperta $B(x_0, r)$, con $r > 0$, tale che $B(x_0, r) \subseteq A$.*

Definizione 1.2.3 *Sia $A \subseteq \mathbf{R}^n$. Diremo che A* è **aperto** *se $A = \mathring{A}$.*

Esempio 1.2.1 Siano $x_0 \in \mathbf{R}^n$ e $r > 0$. Proviamo che $B(x_0, r)$ è aperto. A tale scopo, si deve far vedere che, posto $A = B(x_0, r)$, si ha $\mathring{A} = A$ oppure che, per ogni $x \in B(x_0, r)$ esiste $\rho > 0$ tale che $B(x, \rho) \subseteq B(x_0, r)$. Sia $\rho > 0$. Se $y \in B(x, \rho)$, si ha

$$d(y, x_0) \leq d(y, x) + d(x, x_0) < \rho + d(x, x_0) \leq r$$

se $\rho \leq r - d(x, x_0)$. Perciò si può prendere $\rho = r - d(x, x_0)$ (figura 1.3).

Esempio 1.2.2 Siano $x^0 \in \mathbf{R}^n$ e $r > 0$. Poniamo

$$A := \{x \in \mathbf{R}^n : d(x, x^0) \leq r.$$

A è la palla "chiusa" di centro x^0 e raggio r. Proviamo che A non è aperto. Infatti, sia $x \in \mathbf{R}^n$ tale che $d(x, x^0) = r$ (per esempio, se $x^0 = (x_1^0, ..., x_n^0)$, si può prendere $x = (x_1^0 + r, ..., x_n^0)$). $x \in A$ ma $x \notin \mathring{A}$. Sia infatti $\rho > 0$ Dobbiamo trovare $y \in B(x, \rho)$ tale che $y \notin B(x_0, r)$. Cerchiamo y nella forma

$$y = x_0 + t(x - x_0),$$

con $t > 0$. Si ha $d(x_0, y) = t\|x - x_0\| = tr > r$ se prendiamo $t > 1$. In tal caso $d(x, y) = \|(t-1)(x - x_0)\| = (t-1)r < \rho$ se scegliamo

$$t < 1 + \frac{\rho}{r}.$$

Perciò , se $y = x_0 + (1 + \frac{\rho}{2r})(x - x_0)$,avremo che $y \in B(x, \rho)$, ma non appartiene a $B(x_0, r)$.

Generalizziamo ora al caso multidimensionale la definizione di frontiera (vedi [Analisi A],definizione 2.9.1).

Definizione 1.2.4 *Siano $A \subseteq \mathbf{R}^n$, $x_0 \in \mathbf{R}^n$. Diremo che x_0* **appartiene alla frontiera di** *A, e scriveremo $x_0 \in Fr(A)$, se ogni palla aperta $B(x_0, r)$, con $r > 0$, contiene sia elementi appartenenti ad A, sia elementi non appartenenti ad A.*

Esempio 1.2.3 Sia $A = B(x^0, r)$, con $x^0 \in \mathbf{R}^n$ e $r > 0$. Verifichiamo che $Fr(A) = \{x \in \mathbf{R}^n : d(x, x_0) = r\}$.

Sia infatti $x \in \mathbf{R}^n$. Proviamo che, se $x \in Fr(A)$, necessariamente $\|x - x_0\| = r$. In effetti, se $\|x - x_0\| < r$, per l'esempio 1.2.2 esiste $\rho > 0$ tale che $B(x, \rho) \subseteq A$. Segue che $x \notin Fr(A)$. Sia invece $\|x - x_0\| > r$. Sia poi $\rho > 0$ e $y \in B(x, \rho)$. Allora

$$\|x - x_0\| \leq \|x - y\| + \|y - x_0\| < \rho + \|y - x_0\|,$$

da cui

$$\|y - x_0\| > \|x - x_0\| - \rho \geq r$$

se

$$\rho \leq \|x - x_0\| - r.$$

Con tale scelta di ρ si ha che $B(x, \rho) \cap A = \emptyset$, da cui $x \notin Fr(A)$. Dunque, se $x \in Fr(A)$, deve essere necessariamente $d(x, x_0) = r$.

Sia, viceversa, $d(x, x_0) = r$. Verifichiamo che $x \in Fr(A)$. Sia $\rho > 0$. Dobbiamo far vedere che $B(x, \rho)$ contiene sia elementi appartenenti ad A, sia elementi non appartenenti ad A. Sia $y = x_0 + t(x - x_0)$. Si ha

$$d(x, y) = \|(1-t)(x - x_0)\| = |1-t|r < \rho$$

se $|1-t| < \frac{\rho}{r}$, che equivale a

$$1 - \frac{\rho}{r} < t < 1 + \frac{\rho}{r}.$$

Vale inoltre

$$d(x_0, y) = \|t(x - x_0)\| = |t|r.$$

Dunque $y \in A$ se $|t| < 1$, mentre $y \notin A$ se $|t| \geq 1$. Dunque, se $t = 1$, $y \in B(x, \rho)$ e $y \notin A$, se $t = \max\{1 - \frac{\rho}{2r}, \frac{1}{2}\}$ $y \in B(x, \rho) \cap A$.

Il seguente risultato costituisce una semplice caratterizzazione degli insiemi aperti:

Teorema 1.2.1 *Sia $A \subseteq \mathbf{R}^n$. Le seguenti condizioni sono equivalenti:*
(I) A è *aperto;*
(II) $A \cap Fr(A) = \emptyset$.

Dimostrazione Sia A aperto e sia $x \in A$. Allora $x \in \mathring{A}$. Dunque esiste $r > 0$ tale che $B(x, r) \subseteq A$. Ne segue che $x \notin Fr(A)$ e perciò $A \cap Fr(A) = \emptyset$.

Sia, viceversa, $A \cap Fr(A) = \emptyset$. Proviamo che A è aperto. Sia $x \in A$. Allora $x \notin Fr(A)$. Ne segue che esiste $r > 0$ tale che $B(x, r) \subseteq A$, oppure $B(x, r) \subseteq \mathbf{R}^n \setminus A$. La seconda condizione non si può verificare, perché $x \in A$. Concludiamo che ogni elemento di A appartiene anche a $\mathring{A}$, e quindi che A è aperto.
$\square$

La seguente definizione costituisce una generalizzazione della definizione 2.9.2 in [Analisi A]:

Definizione 1.2.5 *Sia $A \subseteq \mathbf{R}^n$. Diremo che A è* **chiuso** *se $Fr(A) \subseteq A$.*

Esempio 1.2.4 Sia, per $x^0 \in \mathbf{R}^n$ e $r \in \mathbf{R}^+$, $A := \{x \in \mathbf{R}^n : \|x - x^0\| \leq r\}$. Verifichiamo che A è chiuso. Basta provare che

$$Fr(A) = \{x \in \mathbf{R}^n : \|x - x^0\| = r\}.$$

Lasciamo questo compito come esercizio per il lettore (vedi 1.2.1).

Definizione 1.2.6 *Sia $A \subseteq \mathbf{R}^n$. Chiamiamo* **chiusura** *di A e indichiamo col simbolo $\overline{A}$, l'insieme*

$$\overline{A} := A \cup Fr(A).$$

Esempio 1.2.5 Dall'esempio 1.2.3 otteniamo subito che, per ogni $x^0 \in \mathbf{R}^n$, per ogni $r \in \mathbf{R}^+$,

$$\overline{B(x^0, r)} = \{x \in \mathbf{R}^n : \|x - x^0\| \le r\}.$$

Teorema 1.2.2 *Sia $A \subseteq \mathbf{R}^n$. Allora $Fr(A)$ e $\overline{A}$ sono sottoinsiemi chiusi di $\mathbf{R}^n$.*

Dimostrazione Cominciamo col provare che $Fr(A)$ è un chiuso. Sia $x^0 \in Fr(Fr(A))$. Dobbiamo far vedere che $x^0 \in Fr(A)$. Sia $r \in \mathbf{R}^+$. Allora esiste x^1 appartenente a $Fr(A) \cap B(x^0, r)$. Poiché $B(x^0, r)$ è un aperto, esiste $r_0 > 0$, tale che $B(x^1, r_0) \subseteq B(x^0, r)$. Essendo $x^1 \in Fr(A)$, $B(x^1, r_0)$ contiene sia elementi di A, sia elementi di $\mathbf{R}^n \setminus A$. Questi stessi elementi appartengono anche a $B(x^0, r)$. Dunque, per ogni $r > 0$, $B(x^0, r)$ contiene sia elementi di A, sia elementi di $\mathbf{R}^n \setminus A$. Concludiamo che $x^0 \in Fr(A)$.

Proviamo ora che $\overline{A}$ è un chiuso. Sia $x^0 \in Fr(\overline{A})$. Vogliamo far vedere che $x^0 \in \overline{A}$. Due casi sono possibili: $x^0 \in A$, oppure $x^0 \notin A$. Evidentemente, nel primo caso $x^0 \in \overline{A}$. Supponiamo invece che $x^0 \notin A$. Verifichiamo che, in questo caso, $x^0 \in Fr(A)$. Sia $r > 0$. Allora $B(x^0, r)$ contiene almeno un punto non appartenente ad A: x^0 stesso. Vogliamo far vedere che contiene anche qualche elemento di A. Poiché $x^0 \in Fr(\overline{A})$, esiste $x^1 \in \overline{A} \cap B(x^0, r)$. Se $x^1 \in A$, abbiamo trovato un elemento di A in $B(x^0, r)$. Viceversa, $x^1 \in Fr(A)$. Sia allora $\rho \in \mathbf{R}^+$, tale che $B(x^1, \rho) \subseteq B(x^0, r)$. Un ρ cosi̇̀ fatto esiste per quanto dimostrato nell'esempio 1.2.1. Poiché $x^1 \in Fr(A)$, $B(x^1, \rho)$ deve contenere qualche elemento x^2 appartenente ad A. Questo x^2 appartiene anche a $B(x^0, r)$. Ne concludiamo che, i ogni caso, $B(x^0, r)$ contiene qualche elemento di A. Dunque, se $x^0 \in Fr(\overline{A}) \setminus A$, $x^0 \in Fr(A)$ e quindi $x^0 \in \overline{A}$. Questo ragionamento conclude la dimostrazione.$\square$

Esercizio 1.2.1 Verificare che, $\forall x^0 \in \mathbf{R}^n$, $\forall r \in \mathbf{R}^+$, se $A := \{x \in \mathbf{R}^n : \|x - x^0\| \le r\}$, si ha

$$Fr(A) = \{x \in \mathbf{R}^n : \|x - x^0\| = r\}.$$

Esercizio 1.2.2 Dati i seguenti insiemi, dire se sono aperti o chiusi e determinarne frontiera e chiusura:

(I) $\{x \in \mathbf{R}^n : \|x - x^0\| = r\}$ $(x^0 \in \mathbf{R}^n,\, r \geq 0)$;
(II) $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 < 1, x_3 \geq 0\}$;
(III) $\{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 : 0 < x_1 \leq 1, 0 \leq x_2 \leq \min\{1, \ln(1/x_1)\}\}$;
(IV) $\{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 : x_2 = 0\}$;
(V) $\{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 : x_1 \geq 1, x_2 \geq x_1^2\}$;
(VI) $\{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 : x_1 \geq x_2 \geq x_1^2/2\} \setminus \{(0,0)\}$;
(VII) $\{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 : |x_1| < 1, |x_2| < 1\}$;
(VIII) $\{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 : x_1 > 0, x_2 \leq 1/x_1\}$;
(IX) $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 : x_3^2 > x_1^2 + x_2^2, x_3 \geq 1\}$;
(X) $\{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 : |x_1| < 1, x_2 = 0\}$.

1.3 Limiti

In questa sezione generalizziamo al caso di funzioni di più variabili reali alcuni risultati e definizioni già visti in [Analisi A].

Definizione 1.3.1 *Siano $A \subseteq \mathbf{R^n}$ e $x^0 \in \mathbf{R^n}$ $(n \in \mathbf{N})$. Diremo che x^0* è *un* **punto di accumulazione** *per A se $\forall r > 0$ $A \cap B(x^0, r)$ contiene qualche elemento distinto da x^0.*

Esempio 1.3.1 Sia, per $n \in \mathbf{N}$, $A := \mathbf{R}^n \setminus \{O\}$. Allora $O \in D(A)$. Infatti, per ogni $r \in \mathbf{R}^+$, $B(0, r)$ contiene l'elemento $(r/2, 0, ..., 0)$ di A, che è ovviamente distinto da O.

Passiamo ora alla definizione di limite. Indichiamo con $\|.\|_n$ e $\|.\|_m$ le norme euclidee in $\mathbf{R}^n$ e $\mathbf{R}^m$, con B_m e B_n palle aperte ancora in $\mathbf{R}^n$ e $\mathbf{R}^m$ rispettivamente.

Definizione 1.3.2 *Siano n e m numeri naturali,$A \subseteq \mathbf{R}^n$, $f : A \to \mathbf{R}^m$, $x^0 \in D(A)$, $l \in \mathbf{R}^m$. Scriveremo*

$$\lim_{x \to x^0} f(x) = l$$

se $\forall \epsilon > 0$ esiste $\delta(\epsilon) > 0$ tale che $\forall x \in A \cap B_n(x^0, \delta(\epsilon))$ con $x \neq x^0$ si ha

$$\|f(x) - l\|_m < \epsilon.$$

Osservazione 1.3.1 La condizione $\|f(x) - l\|_m < \epsilon$ è equivalente a $f(x) \in B_m(l, \epsilon)$.

Esempio 1.3.2 Siano $A := \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 : x_2 \neq 0\}$, $f : A \to \mathbf{R}$, $f(x_1, x_2) := \sin(x_1, x_2)/x_2$. Verifichiamo che si ha

$$\lim_{x \to O} f(x) = 0 \tag{1.3.1}$$

A tale scopo, osserviamo, innanzi tutto, che $O = (0, 0) \in D(A)$. Useremo poi il fatto che

$$|\sin(z)| \leq |z| \qquad \forall z \in \mathbf{R}. \tag{1.3.2}$$

(1.3.2) può essere facilmente verificata applicando il teorema del valor medio. In base a esso, se $z \in \mathbf{R}$, $z \neq 0$, esiste $c \in]0, z[$ se $z > 0$, oppure $c \in]z, 0[$ se $z < 0$, tale che

$$\sin(z) = \cos(c)z. \tag{1.3.3}$$

Ne segue che

$$|\sin(z)| = |\cos(c)||z| \leq |z|.$$

Da (1.3.2) segue subito, per $x = (x_1, x_2) \in A$,

$$|f(x_1, x_2)| \leq |x_1|. \tag{1.3.4}$$

Sia $\epsilon \in \mathbf{R}^+$. Se $x \in A \cap B(O, \epsilon)$, si ha, applicando il teorema 1.1.3 (VI),

$$|f(x)| \leq |x_1| \leq \|x\| < \epsilon.$$

Dunque, la definizione 1.3.2 è verificata con $\delta(\epsilon) = \epsilon$.

Come nel caso $n = m = 1$ (quello trattato in [Analisi A]), vale un teorema di unicità del limite. La dimostrazione è analoga a quella vista in [Analisi A].

Teorema 1.3.1 *Siano m e n naturali, $A \subseteq \mathbf{R}^n$, $f : A \to \mathbf{R}^m$, $x^0 \in D(A)$, $l, l' \in \mathbf{R}^m$. Supponiamo che valgano contemporaneamente $\lim_{x \to x^0} f(x) = l$ e $\lim_{x \to x^0} f(x) = l'$. Allora $l = l'$.*

Sia ancora $f : A \to \mathbf{R}^m$, con $A \subseteq \mathbf{R}^n$. Se indichiamo con $f_1(x), ..., f_m(x)$ le componenti di $f(x) \in \mathbf{R}^m$ otteniamo che f identifica univocamente m funzioni $f_1, ..., f_m$ di dominio A a valori reali. Ci chiediamo che legame c'è tra gli eventuali limiti di f e quelli delle componenti $f_1, ..., f_m$. Ebbene, vale il seguente

Teorema 1.3.2 *Siano* $A \subseteq \mathbf{R}^n$, $f : A \to \mathbf{R}^m$, $x^0 \in D(A)$, $f : A \to \mathbf{R}^m$, $f(x) = (f_1(x), ..., f_i(x), ..., f_m(x))$. *Sia poi* $l \in \mathbf{R}^m$, $l = (l_1, ..., l_i, ...l_m)$. *Allora le condizioni seguenti sono equivalenti:*

(I) si ha $\lim_{x \to x^0} f(x) = l$;

(II) per ogni $i \in \{1, ..., m\}$, *vale* $\lim_{x \to x^0} f_i(x) = l_i$.

Dimostrazione Proviamo che da (I) segue (II). Sia $\epsilon \in \mathbf{R}^+$. Allora esiste $\delta(\epsilon)$ in $\mathbf{R}^+$, tale che, se $x \in B(x^0, \delta(\epsilon)) \cap A$ e $x \neq x^0$, si ha

$$\|f(x) - l\|_m < \epsilon.$$

Dal teorema 1.1.3 (VI) segue, per $i = 1, ..., n$,

$$|f_i(x) - l_i| \leq \|f(x) - l\|_m < \epsilon.$$

Dunque, vale (II).

Supponiamo invece che valga (II). Siano ϵ e η elementi di $\mathbf{R}^+$. Allora, per ciascun $i \in \{1, ..., m\}$, esiste $\delta_i(\eta) > 0$, tale che, se $x \in B(x^0, \delta_i(\eta)) \cap A$ e $x \neq x^0$, si ha

$$|f_i(x) - l_i| < \eta.$$

Poniamo $\delta(\eta) := \min\{\delta_i(\eta) : 1 \leq i \leq m\}$. Allora se $x \in B(x^0, \delta_i(\eta)) \cap A$ e $x \neq x^0$,vale

$$\|f(x) - l\|_m = (\textstyle\sum_{i=1}^m (f_i(x) - l_i)^2)^{1/2} < (m\eta^2)^{1/2} = \sqrt{m}\eta.$$

Scegliendo $\eta := \epsilon/\sqrt{m}$, otteniamo

$$\|f(x) - l\|_m < \epsilon.$$

Quindi da (II) segue (I).

$\square$

I risultati seguenti sono analoghi pluridimensionali dei teoremi 2.2.2, 2.5.1 e 2.5.2 in [Analisi A], con simili dimostrazioni:

Teorema 1.3.3 *Siano* $A \subseteq \mathbf{R}^n$, $f, g : A \to \mathbf{R}^m$ $(m, n \in \mathbf{N})$, $x^0 \in D(A)$, $l, m \in \mathbf{R}^m$ *e valgono* $\lim_{x \to x^0} f(x) = l$ *e* $\lim_{x \to x^0} g(x) = l$. *Allora:*

(I) esiste $\lim_{x \to x^0} (f(x) + g(x))$ *e vale* $l + m$;

(II) se $m = 1$, *esiste* $\lim_{x \to x^0} f(x)g(x)$ *e vale* lm;

(III) supponiamo ancora $m = 1$ *e, in più , * $g(x) \neq 0$ $\forall x \in A$ *e* $m \neq 0$; *allora esiste* $\lim_{x \to x^0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ *e vale* $\frac{l}{m}$.

Teorema 1.3.4 *Siano A e B sottoinsiemi di $\mathbf{R}^n$, con $A \subseteq B$, $f : B \to \mathbf{R}^m$ e $l \in \mathbf{R}^m$. Allora:*

(I) se $x^0 \in D(A)$, si ha anche $x^0 \in D(B)$;

(II) sotto le ipotesi di (I), se vale $\lim_{x \to x^0} f(x) = l$, si ha anche $\lim_{x \to x^0} f_{|A}(x) = l$;

(III) se esiste $r > 0$ per cui si ha $(B(x^0, r) \cap B) \setminus \{x_0\} \subseteq A$ e vale $\lim_{x \to x^0} f_{|A}(x) = l$, si ha anche $\lim_{x \to x^0} f(x) = l$.

Osservazione 1.3.2 In virtù del teorema 1.3.4, data $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, l'esistenza del limite per x che tende a $(0,0)$ per f implica l'esistenza del limite per ogni restrizione di f a una qualsiasi retta per l'origine, con lo stesso valore. Supponiamo, viceversa, che esista il limite della restrizione a ogni retta per l'origine e che il limite non dipenda dalla retta scelta. Si può dire che esiste il limite di f per x che tende a $(0,0)$? La risposta è negativa. Si consideri il seguente controesempio: sia

$$\begin{cases} f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}, \\ f(x_1, x_2) = \begin{cases} 1 & \text{se } x_2 \geq x_1^2 \text{ oppure } x_2 \leq 0, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases} \end{cases} \tag{1.3.5}$$

Poniamo

$$A_1 := \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 : x_2 \geq x_1^2\}.$$

Allora $(0,0) \in D(A_1)$ e si ha, ovviamente, $\lim_{x \to (0,0)} f_{|A_1}(x) = 1$.

Sia invece

$$A_2 := \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 : 0 < x_2 < x_1^2\}$$

Ancora, $(0,0) \in D(A_2)$. Infatti, per ogni $r \in \mathbf{R}^+$, $B((0,0), r)$ contiene i punti della forma $(x_1, x_1^2/2)$ con $x_1 > 0$ e $x_1^2 + x_1^4/4 < r^2$, che appartengono ad A_2 e sono distinti da $(0,0)$. Si ha, ovviamente, $\lim_{x \to (0,0)} f_{|A_2}(x) = 0$. Quindi la f non amette limite per $x \to (0,0)$. Tuttavia, consideriamo la restrizione di f a una retta per l'origine. Per esempio, sia $m \in \mathbf{R}^+$. Poniamo

$$A_m := \{(x_1, mx_1) : x_1 \in \mathbf{R} \setminus \{0\}\}.$$

Allora $f(x_1, mx_1) = 1$ se $x_1 \in]-\infty, m[$ (si veda la figura 1.4, in cui abbiamo disegnato in grassetto $\{x \in A_m : f(x) = 1\}$). Osserviamo che, se $x = (x_1, x_2) \in A_m$ e $\|x\| < m$, necessariamente,

$$x_1 \leq |x_1| \leq \|x\| < m.$$

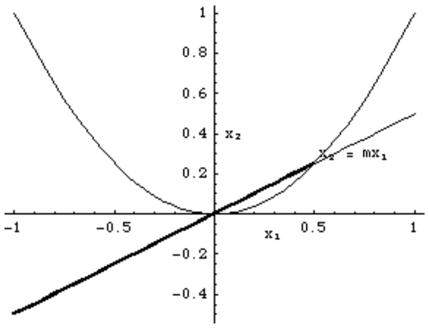

Figura 1.4

Quindi $f(x) = 1$. Concludiamo che

$$\lim_{x\to(0,0)} f_{|A_m}(x) = 1. \tag{1.3.6}$$

Gli insiemi della forma A_m non esauriscono le rette per l'origine. Invitiamo il lettore a verificare che, effettivamente, se A è una retta qualunque passante per l'origine, vale $\lim\limits_{x\to(0,0)} f_{|A}(x) = 1$ (esercizio 1.3.1).

Esercizio 1.3.1 Completare nei dettagli le argomentazioni dell'osservazione 1.3.2. Verificare, ad esempio, che se r è una retta per l'origine e $A := r \setminus \{(0,0)\}$, si ha $\lim\limits_{x\to(0,0)} f_{|A}(x) = 1$.

Esercizio 1.3.2 Studiare l'esistenza dei limiti seguenti(le funzioni vanno intese definite nei loro "domini naturali"):

(I) $\lim\limits_{(x_1,x_2)\to(0,0)} (x_1^2 + x_2)^4 \ln(x_1^2 + x_2^2)$;

(II) $\lim\limits_{(x_1,x_2)\to(0,0)} \frac{\arctan(x_1^2+x_1x_2)}{x_1+x_2}$ (sugg.: verificare preliminarmente che

$$|\arctan(z)| \le |z|$$

per ogni $z \in \mathbf{R}$);

(III) $\lim\limits_{(x_1,x_2)\to(0,0)} x_1x_2 \sin(\frac{1}{x_1+x_2})$;

(IV) $\lim\limits_{(x_1,x_2)\to(0,0)} \frac{x_1^2x_2}{x_1^2+x_2^2}$.

Esercizio 1.3.3 Siano $A \subseteq \mathbf{R}^n$, $x^0 \in D(A)$, $f : A \to \mathbf{R}$. Diremo che $\lim_{x \to x^0} f(x) = +\infty$ $(-\infty)$ se $\forall M \in \mathbf{R}$ esiste $\delta(M) \in \mathbf{R}^+$, tale che, se $x \in A \cap B(x^0, \delta(M))$ e $x \neq x^0$, $f(x) > M$ $(f(x) < M)$.

Verificare che:

(I) $\lim_{(x_1,x_2)\to(0,0)} \frac{2}{x_1^2+x_2^2} = +\infty$;

(II) $\lim_{(x_1,x_2)\to(0,0)} \frac{1}{3x_1^2+x_2^2} = +\infty$;

(III) $\lim_{(x_1,x_2)\to(0,0)} \frac{x_1^2+x_2^2-1}{x_1^2+x_2^2} = -\infty$.

1.4 Funzioni continue

Cominciamo con l'estendere al caso di funzioni di più variabili reali la nozione di continuità . La prossima definizione è un'estensione naturale della definizione 2.7.1 in [Analisi A]:

Definizione 1.4.1 *Siano $n, m \in \mathbf{N}$, $A \subseteq \mathbf{R}^n$, $x_0 \in A$, $f : A \to \mathbf{R}^m$. Diremo che f è* **continua in** *x_0 se $\forall \epsilon > 0$ esiste $\delta(\epsilon) > 0$ tale che $\forall x \in B_n(x_0, \delta(\epsilon)) \cap A$ si ha*

$$\|f(x) - f(x_0)\|_m < \epsilon.$$

Diremo che f è **continua in** *A se è continua in corrispondenza di ogni $x_0 \in A$.*

Il seguente risultato (con analoga dimostrazione, che lasciamo al lettore) è una generalizzazione del teorema 2.7.1 in [Analisi A]:

Teorema 1.4.1 *Siano $m, n \in \mathbf{N}$, $A \subseteq \mathbf{R}^n$, $x^0 \in A$, $f : A \to \mathbf{R}^m$. Allora:*

(I) se $x^0 \in A \setminus D(A)$, f è continua in x^0.

(II) se $x^0 \in A \cap D(A)$,f è continua in x^0 se e solo se esiste $\lim_{x\to x^0} f(x)$ e coincide con $f(x^0)$.

Utilizzando il teorema 1.4.1 e i teoremi 1.3.2 e 1.3.3, è ora abbastanza facile dimostrare il seguente risultato, che lasciamo ancora al lettore (esercizio 1.4.2):

Teorema 1.4.2 *Siano $m, n \in \mathbf{N}$, $A \subseteq \mathbf{R}^n$, $x^0 \in A$, $f, g : A \to \mathbf{R}^m$, $f(x) = (f_1(x), ..., f_m(x))$ $\forall x \in A$. Allora:*

(I) f è continua in x^0 se e solo se lo è ciascuna delle funzioni f_1,...,f_m;

Supponiamo ora che f e g siano continue in x^0. Allora:
(II) $f+g$ è continua in x^0;
(III) se $m=1$, fg è continua in x^0;
(IV) se $m=1$ e $g(x) \neq 0$ $\forall x \in A$, $\frac{f}{g}$ è continua in x^0.

É importante il fatto che la continuità è invariante per composizione, nel senso seguente:

Teorema 1.4.3 *Siano $l, m, n \in \mathbf{N}$, $A \subseteq \mathbf{R}^n$, $B \subseteq \mathbf{R}^m$,$f : A \to \mathbf{R}^m$ tale che $f(A) \subseteq B$, $g : B \to \mathbf{R}^l$. Allora:*
(I) sia $x^0 \in A$ tale che f è continua in x^0 e g è continua in $f(x^0)$. Allora $g \circ f$ è continua in x^0;
(II) se f e g sono continue, lo è anche $g \circ f$.

Dimostrazione (II) segue subito da (I).
Dimostriamo allora (I). Sia $\epsilon \in \mathbf{R}^+$. Poiché g è continua in $f(x^0)$, esiste $\delta_1(\epsilon)$ in $\mathbf{R}^+$ tale che, se $y \in B \cap B(f(x^0), \delta_1(\epsilon))$, si ha $\|g(y) - g(f(x^0)\|_l < \epsilon$. Poiché f è continua in x^0, esiste $\delta(\epsilon)$ in $\mathbf{R}^+$ tale che, se $x \in A \cap B(x^0, \delta(\epsilon))$, vale $\|f(x) - f(x^0)\|_m < \delta_1(\epsilon)$. Ciò implica che $f(x) \in B \cap B(f(x^0), \delta_1(\epsilon))$. Ne concludiamo che, se se $x \in A \cap B(x^0, \delta(\epsilon))$, si ha $\|g(f(x)) - g(f(x^0))\|_l < \epsilon$.
$\square$

Presentiamo ora alcuni importanti esempi di funzioni continue di più variabili reali.

Esempio 1.4.1 Sia $n \in \mathbf{N}$. Per $j \in \{1, ..., n\}$, poniamo

$$\left\{ \begin{array}{l} \pi_j : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}, \\ \pi_j(x_1, ..., x_j, ..., x_n) = x_j. \end{array} \right. \tag{1.4.1}$$

π_j associa a ogni elemento di $\mathbf{R}^n$ la sua $j-$esima componente. Verifichiamo che π_j è continua. Ciò segue immediatamente dal teorema 1.1.3 (VI). Infatti, se $x^0 = (x_1^0, ..., x_j^0, ..., x_n^0)$ e $x = (x_1, ..., x_j, ..., x_n)$ sono generici elementi di $\mathbf{R}^n$, si ha

$$|\pi_j(x) - \pi_j(x^0)| = |x_j - x_j^0| \leq \|x - x^0\|.$$

Perciò , $\forall \epsilon \in \mathbf{R}^+$, se $x \in B(x^0, \epsilon)$, si ha $|\pi_j(x) - \pi_j(x^0)| < \epsilon$.

Definiamo ora le funzioni polinomiali di n variabili reali. Una funzione polinomiale in $\mathbf{R}^n$ di grado non superiore a m ($m \in \mathbf{N}_0$) è una funzione $P : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ rappresentabile nella forma

$$P(x_1, ..., x_n) = \sum_{\alpha_1 + ... + \alpha_n \leq m} c_{\alpha_1, ... \alpha_n} x_1^{\alpha_1} \cdot ... \cdot x_n^{\alpha_n}, \tag{1.4.2}$$

con α_1,...,α_n interi non negativi. Qui adottiamo la convenzione che $O^0 := 1$.

Poiché somme e prodotti di funzioni continue danno sempre funzioni continue (teorema 1.4.2) dalla continuità delle funzioni π_j $(1 \leq j \leq n)$ e da quella delle funzioni costanti (esercizio 1.4.3) segue subito che tutte le funzioni polinomiali sono continue da $\mathbf{R}^n$ a $\mathbf{R}$.

Se poi P e Q sono funzioni polinomiali di n variabili, risulta continua (in virtù del risultato dell'esercizio 1.4.4) e del teorema 1.4.2(IV)) la funzione razionale

$$\begin{cases} f : \{x \in \mathbf{R}^n : Q(x) \neq 0\} \to \mathbf{R}, \\ f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}. \end{cases} \tag{1.4.3}$$

Ad esempio, la funzione

$$\begin{cases} f : \{x = (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 : |x_1| \neq |x_2|\} \to \mathbf{R}, \\ f(x) = \frac{x_1^2+x_2^2}{x_1^2-x_2^2} \end{cases} \tag{1.4.4}$$

è continua. Altre funzioni continue si possono costruire utilizzando il teorema 1.4.3. Per esempio, sia $A := \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 : |x_1| \neq |x_2|\}$. Poiché la funzione f definita in (1.4.4) è continua, la funzione

$$\begin{cases} g : A \to \mathbf{R}, \\ g(x_1, x_2) = \sin(f(x_1, x_2)) = \sin(\frac{x_1^2+x_2^2}{x_1^2-x_2^2}) \end{cases} \tag{1.4.5}$$

è continua.

Vogliamo adesso presentare una generalizzazione del teorema di Weierstrass (vedi [Analisi A], teorema 2.9.1). Cominciamo con la definizione di sottoinsieme limitato di $\mathbf{R}^n$.

Definizione 1.4.2 *Sia $A \subseteq \mathbf{R}^n$ $(n \in \mathbf{N})$. Diremo che A* è **limitato** *se esiste $M \geq 0$ tale che $\|x\| \leq M$ $\forall x \in A$.*

Osservazione 1.4.1 La definizione di sottoinsieme limitato di $\mathbf{R}$ data in [Analisi A] (A è limitato se e solo se è sia inferiormente, che superiormente limitato) non si può estendere direttamente a $\mathbf{R}^n$, in quanto dipende dalla relazione di ordine in $\mathbf{R}$. Tuttavia, nel caso $n = 1$, se A è limitato nel senso della definizione 1.4.2, A è sia inferiormente, che superiormente limitato, e viceversa. Infatti, se per un certo $M \geq 0$, si ha $|x| \leq M$ $\forall x \in A$, ogni elemento x di A verifica

$$-M \leq x \leq M,$$

per cui $-M$ è un minorante e M è un maggiorante di A. Viceversa, sia A sia inferiormente che superiormente limitato. Siano b e c, rispettivamente, un minorante e un maggiorante di A. Poniamo

$$M := \max\{0, c, -b\}.$$

Allora $M \geq 0$ e, $\forall x \in A$,

$$-M \leq b \leq x \leq c \leq M,$$

onde $|x| \leq M \ \forall x \in A$.

Possiamo ora enunciare e (molto) parzialmente dimostrare il seguente

Teorema 1.4.4 *(di Weierstrass) Siano $m, n \in \mathbf{N}$, $A \subseteq \mathbf{R}^n$ non vuoto, chiuso e limitato, $f : A \to \mathbf{R}^m$ continua. Allora:*
(I) $f(A)$ è chiuso e limitato in $\mathbf{R}^m$;
(II) se $m = 1$, f ammette minimo e massimo.

Dimostrazione parziale Non dimostriamo (I), che costituisce la parte veramente profonda del teorema. Ci limitiamo a provare (II) utilizzando (I). Verifichiamo, ad esempio, che $f(A)$ ammette minimo. Per (I), $f(A)$ è un sottoinsieme chiuso e limitato di $\mathbf{R}$. Per l'assioma dell'estremo superiore, possiede un estremo inferiore m. Si tratta di far vedere che $m \in f(A)$. Poiché $f(A)$ è chiuso, basta far vedere che $m \in Fr(f(A))$. Sia $r \in \mathbf{R}^+$. Allora $m - r/2 \in I(m, r)$ e non appartiene a $f(A)$. D'altra parte, per definizione di estremo inferiore, $m + r$ non è un minorante di $f(A)$. Quindi esiste $y \in f(A)$, con $y < m + r$. Poiché m è un minorante di $f(A)$, vale anche

$$m - r < m \leq y,$$

per cui $y \in f(A) \cap I(m, r)$. Perciò , ogni intorno circolare di m contiene sia elementi di $f(A)$, che elementi non appartenenti di $f(A)$. Concludiamo che $m \in Fr(f(A))$.
$\square$

Osservazione 1.4.2 Le funzioni continue non trasformano necessariamente chiusi in chiusi, né limitati in limitati. Per esempio, siano $A := [0, +\infty[$, $f : A \to \mathbf{R}$, $f(x) = \arctan(x)$. Allora A è chiuso, f è continua, ma $f(A) = [0, \pi/2[$, che non è chiuso.

Ancora, sia $B =]0, 1]$, $g : B \to \mathbf{R}$, $g(x) = 1/x$. Allora B è limitato, g è continua, ma $g(B) = [1, +\infty[$, che non è limitato.

Esercizio 1.4.1 Dimostrare nei dettagli il teorema 1.4.1.

Esercizio 1.4.2 Dimostrare nei dettagli il teorema 1.4.2.

Esercizio 1.4.3 Siano $m, n \in \mathbf{N}$, $c \in \mathbf{R}^m$, $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$, $f(x) = c \ \forall x \in \mathbf{R}^n$. Verificare che f è continua.

Esercizio 1.4.4 Siano $m, n \in \mathbf{N}$, $A \subseteq B \subseteq \mathbf{R}^n$, $f : B \to \mathbf{R}^m$ continua. Verificare che la restrizione $f_{|A}$ è continua.

Esercizio 1.4.5 Dimostrare che, per ogni $n \in \mathbf{N}$, la norma euclidea è una funzione continua da $\mathbf{R}^n$ a $\mathbf{R}$.

Esercizio 1.4.6 Tra gli insiemi dell'esercizio 1.2.2, dire quali sono limitati.

1.5 Una generalizzazione del teorema di Bolzano

Ricordiamo che il teorema di Bolzano (teorema 2.9.2 in [Analisi A]) afferma che le funzioni continue a valori reali trasformano intervalli in intervalli. In questa sezione vogliamo presentare una generalizzazione multidimensionale di questo fondamentale risultato. Cominciamo allora col presentare una generalizzazione della nozione di intervallo.

Definizione 1.5.1 *Sia $A \subseteq \mathbf{R}^n$ ($n \in \mathbf{N}$). Diremo che A è* **connesso per archi** *se, comunque si prendano x e y in A, esistono a e b reali con $a \leq b$ e $\phi : [a, b] \to \mathbf{R}^n$ continua, tali che:*
(I) $\phi(a) = x$, $\phi(b) = y$;
(II) $\phi([a, b]) \subseteq A$.

Osservazione 1.5.1 Come vedremo in seguito, una ϕ con le proprietà richieste è un cammino continuo con sostegno in A. Dunque, ciò che si chiede è che, comunque si prendano due punti x e y in A, deve esistere un cammino continuo con sostegno in A che abbia per estremi x e y.

Esempio 1.5.1 Siano x e y in $\mathbf{R}^n$. Poniamo

$$[x, y] := \{x + t(y - x) : t \in [0, 1]\}. \tag{1.5.1}$$

Chiameremo $[x, y]$ il **segmento con estremi x e y**. Per un confronto con la notazione $[x, y]$ usata in [Analisi A], si veda l'esercizio 1.5.1.

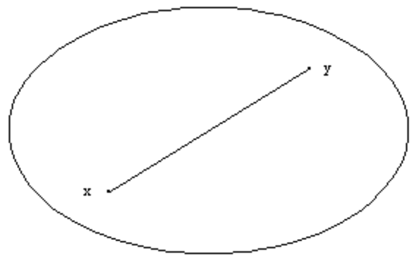

Figura 1.5

Dato $A \subseteq \mathbf{R}^n$, diremo che A è **convesso** se, comunque si prendano x e y in A, $[x, y] \subseteq A$ (figura 1.5).

E' facile verificare che, se A è convesso, allora A è connesso per archi. Infatti, se x e y sono punti arbitrari di A, si può prendere

$$\begin{cases} \phi : [0,1] \to \mathbf{R}^n, \\ \phi(t) = x + t(y - x). \end{cases} \tag{1.5.2}$$

ϕ descrive il segmento di estremi $[x, y]$ ed è continua in virtù del teorema 1.4.2(I).

E' facile vedere che le palle aperte sono insiemi convessi. Siano, infatti, $x^0 \in \mathbf{R}^n$ e $r > 0$. Allora se x e y appartengono a $B(x^0, r)$, si ha, $\forall t \in [0, 1]$,

$$\begin{aligned} d(x + t(y - x), x^0) &= \|x + t(y - x) - x^0\| \\ &= \|(1 - t)x + ty - (1 - t)x^0 - tx^0\| \\ &= \|(1 - t)(x - x^0) + t(y - x^0)\| \\ &\leq (1 - t)\|x - x^0\| + t\|y - x^0\| \\ &< (1 - t)r + tr = r. \end{aligned}$$

Dunque, $[x, y] \subseteq B(x^0, r)$. Naturalmente, non tutti i sottoinsiemi connessi per archi di $\mathbf{R}^n$ sono convessi. Consideriamo, ad esempio, per $n \geq 2$,

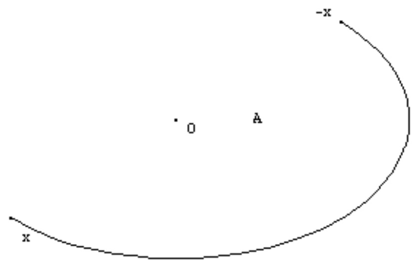

Figura 1.6

l'insieme $A := \mathbf{R}^n \setminus \{0\}$. Allora, non è difficile dimostrare che A è connesso per archi. Tuttavia, A non è convesso. Infatti, $\forall x \in A$, $0 \in [x, -x]$ (figura 1.6).

Verifichiamo ora che, nel caso $n = 1$, le tre nozioni di intervallo, connesso per archi e convesso identificano la stessa classe di insiemi.

Teorema 1.5.1 *Sia $A \subseteq \mathbf{R}$. Allora sono equivalenti:*
(I) A è un intervallo;
(II) A è convesso;
(III) A è connesso per archi.

Dimostrazione (I) implica (II). Supponiamo, infatti, che A sia un intervallo. Siano x e y in A, $t \in [0, 1]$. Se $x \leq y$, si ha, essendo $y - x \geq 0$,

$$x \leq x + t(y - x) \leq x + (y - x) = y.$$

Se invece $y - x < 0$,

$$y = x + (y - x) \leq x + t(y - x) \leq x.$$

Concludiamo che, poiché A è un intervallo, $x + t(y - x) \in A$ $\forall t \in [0, 1]$. Perciò , A è convesso.

(II) implica (III), perché tutti i convessi sono connessi per archi.

Resta da far vedere che (III) implica (I). Sia A connesso per archi e siano x e y in A, con $x \leq y$. Si tratta di provare che, se $x \leq z \leq y$, allora $z \in A$. Poiché A è connesso per archi, esistono a e b reali con $a \leq b$ e $\phi : [a, b] \to \mathbf{R}$ continua, tali che $\phi(a) = x$, $\phi(b) = y$, $\phi([a, b]) \subseteq A$. Per il teorema di Bolzano ([Analisi A],teorema 2.9.2), $z \in \phi([a, b]) \subseteq A$, da cui la conclusione.

□

Veniamo infine alla seguente naturale generalizzazione del teorema di Bolzano:

Teorema 1.5.2 *Siano m e n in $\mathbf{N}$, $A \subseteq \mathbf{R}^n$ connesso per archi, $f : A \to \mathbf{R}^m$ continua. Allora:*
(I) $f(A)$ è connesso per archi in $\mathbf{R}^m$;
(II) se $m = 1$, $f(A)$ è un intervallo.

Dimostrazione (II) segue immediatamente da (I) e dal teorema 1.5.1.

Proviamo allora (I). Siano v e w arbitrari elementi di $f(A)$. Sia $v = f(x)$ e $w = f(y)$, con x e y in A. Poiché A è connesso per archi, esistono a e b reali con $a \leq b$ e $\phi : [a, b] \to \mathbf{R}^n$ continua, tali che $\phi(a) = x$, $\phi(b) = y$, $\phi([a, b]) \subseteq A$. Poniamo

$$\begin{cases} \psi : [a, b] \to \mathbf{R}^m, \\ \psi(t) = f(\phi(t)), \quad t \in [a, b]. \end{cases}$$

ψ è continua per il teorema 1.4.3(II). Ovviamente, $\psi(t) \in f(A)$, $\forall t \in [a, b]$. Infine, $\psi(a) = f(\phi(a)) = f(x) = v$, $\psi(b) = f(\phi(b)) = f(y) = w$. Quindi, $f(A)$ è connesso per archi.

□

Esercizio 1.5.1 Siano x e y numeri reali. Nel caso $x \leq y$, la notazione $[x, y]$ è stata utilizzata in [Analisi A] per indicare $\{z \in \mathbf{R} : x \leq z \leq y$. In generale, senza necessariamente supporre $x \leq y$, poniamo provvisoriamente

$$s(x, y) := \{x + t(y - x) : t \in [0, 1]\}.$$

Verificare che

$$s(x, y) = [\min\{x, y\}, \max\{x, y\}].$$

Esercizio 1.5.2 Determinare i domini naturali delle seguenti funzioni, Dire se sono aperti, chiusi, limitati, connessi per archi. Determinare interno e frontiera.

(I) $\sqrt{x_1^2 = 5x_1x_2 + 4x_2^2}$;

(II) $\sqrt{\ln(\frac{x_1-x_2}{x_1x_2})}$;

(III) $\frac{\sin(\sqrt[4]{-x_1^2-x_1x_2-x_2^2+1})}{1-e^{(x_1-1)/(x_1^2+x_2^2+1)}}$;

(IV) $\sqrt{-\sin^2(x_1-x_2)}$;

(V) $\ln(\cos(x_1^2+x_2^2))$;

(VI) $\sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2+x_3^3-9}{x_1^2+x_2^2-1}}$.

Consideriamo, ad esempio, (III). Il dominio naturale coincide con

$$\begin{aligned} A &:= \{(x_1,x_2) \in \mathbf{R}^2 : -x_1^2 - x_1x_2 - x_2^2 + 1 \geq 0, e^{(x_1-1)/(x_1^2+x_2^2+1)} \neq 1\} \\ &= \{(x_1,x_2) \in \mathbf{R}^2 : x_2^2 + x_1x_2 + x_1^2 - 1 \leq 0, x_1 \neq 1\}. \end{aligned}$$

Dato $x_1 \in \mathbf{R}$, poniamo $P_{x_1}(x_2) := x_2^2 + x_1x_2 + x_1^2 - 1$. P_{x_1} è un polinomio di secondo grado nella variabile x_2, con discriminante

$$\Delta_{x_1} = x_1^2 - 4(x_1^2 - 1) = 4 - 3x_1^2.$$

Se $\Delta_{x_1} < 0$, si ha $P_{x_1}(x_2) > 0 \ \forall x_2 \in \mathbf{R}$. Dunque,

$$A \subseteq \{(x_1,x_2) \in \mathbf{R}^2 : \Delta_{x_1} \geq 0\} = \{(x_1,x_2) \in \mathbf{R}^2 : -2/\sqrt{3} \leq x_1 \leq 2/\sqrt{3}\}.$$

Se $-2/\sqrt{3} \leq x_1 \leq 2/\sqrt{3}$, si ha $P_{x_1}(x_2) \leq 0$ per

$$\frac{-x_1 - \sqrt{4-3x_1^2}}{2} \leq x_2 \leq \frac{-x_1 + \sqrt{4-3x_1^2}}{2}.$$

Concludiamo che A coincide con la parte di $\mathbf{R}^2$ compresa tra i grafici delle funzioni $g_\pm(x_1) = \frac{-x_1 \pm \sqrt{4-3x_1^2}}{2}$ (grafici compresi), esclusi i punti con $x_1 = 1$. Tali grafici possono essere determinati con i metodi visti in [Analisi A] (figura 1.7). Possiamo allora dire che:

(a) A non è aperto. Infatti, per esempio, il punto $(0,1)$, intersezione della retta $x_1 = 1$ con il grafico di g_+, appartiene ad A, ma non è interno;

(b) A non è chiuso. Infatti i punti del segmento di estremi P e Q non appartengono ad A, ma appartengono a $Fr(A)$;

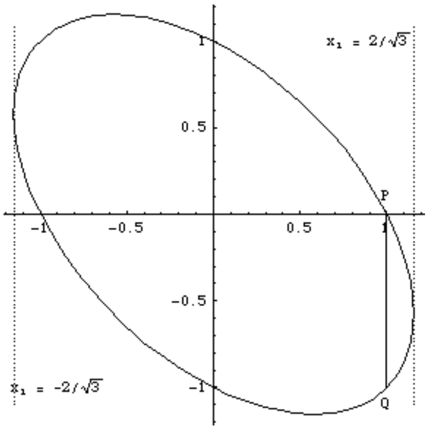

Figura 1.7

(c) A è limitato. Infatti, se $(x_1, x_2) \in A$, $|x_1| \leq 2/\sqrt{3}$. Inoltre, g_+ ammette massimo uguale a $2/\sqrt{3}$, g_- ammette minimo uguale a $-2/\sqrt{3}$. Dunque, $|x_2| \leq 2/\sqrt{3}$, e perciò

$$\|(x_1, x_2)\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \leq \sqrt{4/3 + 4/3} = \sqrt{8/3}.$$

(d) A non è connesso per archi, in quanto, se prendiamo $x \in A$, con $x_1 < 1$, $y \in A$, con $y_1 > 0$, $\alpha : [a, b] \to \mathbf{R}^2$ continua, con $\alpha(a) = x$, $\alpha(b) = y$, si ha $\alpha_1(a) < 1$, $\alpha_1(b) > 1$. Segue dal teorema di Bolzano che, per qualche $t \in [a, b]$, vale $\alpha_1(t) = 1$ e perciò $\alpha(t) \notin A$.

(e) Infine, si ha

$$\mathring{A} = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 : x_2^2 + x_1 x_2 + x_1^2 - 1 < 0, x_1 \neq 1\}$$

e

$$Fr(A) = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 : x_2^2 + x_1 x_2 + x_1^2 - 1 = 0\} \cup \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 : x_2^2 + x_1 x_2 + x_1^2 - 1 \leq 0, x_1 = 1\}.$$

Capitolo 2

Calcolo differenziale per funzioni di più variabili reali

2.1 Derivate rispetto a un vettore e derivate parziali

In questa sezione introduciamo le definizioni di base del calcolo differenziale.

Definizione 2.1.1 *Siano* $A \subseteq \mathbf{R}^n$ *(*$n \in \mathbf{N}$*),* $v \in \mathbf{R}^n$*,* $x^0 \in A$*. Poniamo*

$$A_{x^0,v} := \{t \in \mathbf{R} : x^0 + tv \in A\}. \tag{2.1.1}$$

Sia $f : A \to \mathbf{R}$*. Per* $t \in A_{x^0,v} \setminus \{0\}$*, poniamo*

$$r_{x^0,v}(t) := \frac{f(x^0 + tv) - f(x^0)}{t}. \tag{2.1.2}$$

e supponiamo che $0 \in D(A_{x^0,v})$*. Se esiste*

$$\lim_{t \to 0} r_{x^0,v}(t) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x^0 + tv) - f(x^0)}{t}, \tag{2.1.3}$$

lo chiameremo **derivata di** f **rispetto al vettore** v **in** x^0 *e lo indicheremo con la notazione* $\frac{\partial f}{\partial v}(x^0)$*.*

Esempio 2.1.1 Siano $A := \mathbf{R}^2$, $f : A \to \mathbf{R}$, $f(x_1, x_2) = x_1 x_2$, $x^0 = (1, 0)$, $v = (1, 1)$. Evidentemente, $A_{x^0,v} = \mathbf{R}$ e perciò $0 \in D(A_{x^0,v})$. Per $t \neq 0$, si ha

$$r_{x^0,v}(t) = \frac{f(1 + t, t)}{t} = 1 + t \to 1 \ (t \to 0).$$

Dunque, esiste $\frac{\partial f}{\partial v}(x^0)$ e vale 1.

Osservazione 2.1.1 Con riferimento alla definizione 2.1.1, si ha che il dominio di $r_{x^0,v}$ è l'insieme $A_{x^0,v} \setminus \{0\}$. Analogamente ad [Analisi A] (osservazione 3.1.1), osserviamo che $0 \in D(A_{x^0,v})$ se e solo se $0 \in D(A_{x^0,v} \setminus \{0\})$. Dunque, la condizione $0 \in D(A_{x^0,v})$ è proprio ciò che serve per dare un senso a (2.1.3).

È importante il fatto che, se $x^0 \in \mathring{A}$, la condizione $0 \in D(A_{x^0,v})$ è soddisfatta qualunque sia v in $\mathbf{R}^n$. Sia infatti $r \in \mathbf{R}^+$, tale che $B(x^0, r) \subseteq A$. Evidentemente, $A_{x^0,O} = \mathbf{R}$, e dunque $0 \in D(A_{x^0,O})$ (questo è vero supponendo semplicemente $x^0 \in A$). Se invece $v \neq 0$, $x^0 + tv \in A$ se

$$\|tv\| = d(x^0, x^0 + tv) < r.$$

Ora,

$$\|tv\| = |t|\|v\| < r$$

se $t \in]-r/\|v\|, r/\|v\|[$. Dunque,

$$]-r/\|v\|, r/\|v\|[\subseteq A_{x^0,v},$$

e questo implica $0 \in D(A_{x^0,v})$.

Consideriamo, invece, il caso $A = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 : x_2 = 0\}$, $x^0 = (0,0)$. Se $v^0 = (1,0)$, si ha

$$A_{x^0,v^0} = \mathbf{R},$$

per cui la condizione $0 \in D(A_{x^0,v^0})$ è soddisfatta. Invece, per $v^1 := (0,1)$, si ha

$$A_{x^0,v^1} = \{0\},$$

e quindi $0 \notin D(A_{x^0,v^1})$.

Nella prossima definizione, considereremo la così detta **base canonica** di $\mathbf{R}^n$. Ricordiamo che con tale espressione si intende la famiglia di vettori $\{e^1, ..., e^j, ..., e^n\}$, con

$$e^j = \begin{array}{ccccccc} (& 0, & ..., & 1, & ..., & 0 &), 1 \leq j \leq n. \\ & 1 & ... & j & ... & n & \end{array} \tag{2.1.4}$$

Definizione 2.1.2 *Siano $A \subseteq \mathbf{R}^n$ ($n \in \mathbf{N}$), $1 \leq j \leq n$, $x^0 \in A$, tale che $0 \in D(A_{x^0,e^j})$. Chiamiamo* **derivata parziale prima rispetto alla variabile** x_j **nel punto** x^0 *la derivata $\frac{\partial f}{\partial e^j}(x^0)$ (se esiste).*

Tale derivata sarà indicata con uno dei simboli

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x^0), \quad D_j f(x^0). \tag{2.1.5}$$

Osservazione 2.1.2 Siano $A \subseteq \mathbf{R}^n$, $1 \leq j \leq n$, $x^0 \in A$, tale che $0 \in D(A_{x^0,e^j})$, $f : A \to \mathbf{R}$. Se $x^0 = (x_1^0, ..., x_j^0, ..., x_n^0)$. Poniamo

$$B := \{y \in \mathbf{R} : (x_1^0, ..., y, ..., x_n^0) \in A\},$$

$$\begin{cases} g : B \to \mathbf{R}, \\ g(y) = f(x_1^0, ..., y, ..., x_n^0), \quad y \in B. \end{cases}$$

Allora, se $t \in A_{x^0,e^j} \setminus \{0\}$, $x_j^0 + te^j \in B$ e

$$\begin{aligned} \tfrac{f(x^0+te^j)-f(x^0)}{t} &= \tfrac{f(x_1^0,...,x_j^0+t,...,x_n^0)-f(x_1^0,...,x_j^0,...,x_n^0)}{t} \\ &= \tfrac{g(x_j^0+t)-g(x_j^0)}{t}. \end{aligned}$$

Perciò $D_j f(x^0)$ coincide (se esiste) con $g'(x_j^0)$. Nel processo di limite, la variabile x_k, con $k \neq j$, resta costantemente uguale a x_k^0. Perciò , il calcolo di $D_j f(x^0)$ segue regole analoghe al calcolo della derivata ordinaria in $\mathbf{R}$, assumendo x_j come unica variabile. Le altre variabili vanno trattate come costanti. Per esempio, siano

$$A := \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 : x_1 > 0\},$$

$$\begin{cases} f : A \to \mathbf{R}, \\ f(x) = f(x_1, x_2, x_3) = x_1^{x_2 x_3}, \quad x \in A. \end{cases}$$

Allora, $\forall x \in A$, si ha

$$D_1 f(x) = x_1^{x_2 x_3 - 1} x_2 x_3,$$

$$D_2 f(x) = x_1^{x_2 x_3} x_3 \ln(x_1),$$

$$D_3 f(x) = x_1^{x_2 x_3} x_2 \ln(x_1).$$

Osservazione 2.1.3 In [Analisi A] (teorema 3.2.1) abbiamo visto che, se $f : A \subseteq \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ è derivabile in x^0, con $x^0 \in A \cap D(A)$, f è automaticamente continua in A.

Per funzioni di più variabili, è abbastanza chiaro che l'esistenza di tutte le derivate parzaili prime finite in un punto non implica la continuità della funzione in quel punto. Si consideri, in proposito, il seguente esempio: sia

$$\begin{cases} f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}, \\ f(x) = f(x_1, x_2) = \begin{cases} 1 & \text{se } x_1 x_2 = 0, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases} \end{cases} \tag{2.1.6}$$

Allora, è facile verificare che esistono $D_1 f(0,0)$ e $D_2 f(0,0)$ e valgono entrambe 0. Tuttavia, f non è continua in $(0,0)$. Infatti, sia $\epsilon = 1/2$. Non esiste alcun δ in $\mathbf{R}^+$ tale che, $\forall x \in B((0,0),\delta)$, valga $|f(x) - f(0,0)| < 1/2$. Infatti, se poniamo

$$x^\delta := (\delta/(2\sqrt{2}), \delta/(2\sqrt{2})),$$

si ha $\|x^\delta\| = \delta/2 < \delta$, ma

$$|f(x^\delta) - f(0,0)| = 1 > 1/2.$$

È possibile presentare un esempio ancora più drastico di una funzione dotata in $(0,0)$ di tutte le derivate $\frac{\partial f}{\partial v}(0,0)$ finite qualunque sia v in $\mathbf{R}^2$, ma discontinua in $(0,0)$. Si consideri infatti la funzione definita in (1.3.5). Tale funzione f non è continua in $(0,0)$, in quanto non esiste $\lim\limits_{x \to (0,0)} f(x)$, come già visto nell'osservazione 1.3.2. Tuttavia, qualunque sia v in $\mathbf{R}^2$ e qualunque sia $t \in \mathbf{R}$, tv appartiene a una certa retta A passante per l'origine, dipendente da v. Abbiamo visto che , qualunque sia la retta A, esiste $\delta > 0$, tale che, se $x \in A$ e $\|x\| < \delta$, vale $f(x) = 1$. Perciò , qualunque sia $v \in \mathbf{R}^2$, esiste $\delta(v) \in \mathbf{R}^+$, tale che, comunque si prenda t in $]-\delta(v), \delta(v)[$, si ha $f(tv) = 1$. Ne segue che, se $t \in]-\delta(v), \delta(v)[\setminus\{0\}$,

$$\frac{f(tv) - f(0,0)}{t} = 0,$$

da cui $\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = 0$.

Esercizio 2.1.1 Verificare che la funzione definita in (2.1.6) ha le derivate parziali prime nulle in $(0,0)$.

Esercizio 2.1.2 Determinare il dominio naturale delle seguenti funzioni e calcolare, dove possibile, le derivate parziali prime:

(I) $f(x_1, x_2) = x_1^2 + 3x_1x_2$;
(II) $f(x_1, x_2) = \frac{x_1+x_2}{x_1-x_2}$;
(III) $f(x_1, x_2) = x_1^4 x_2^2 - 3x_1x_2 + 2x_2$;
(IV) $f(x_1, x_2) = \sin(x_1x_2)$;
(V) $f(x_1, x_2) = \ln(x_1 + x_2)$;
(VI) $f(x_1, x_2) = e^{-(x_1^2+x_2^2)}$;
(VII) $f(x_1, x_2) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$;
(VIII) $f(x_1, x_2) = x_1^2 x_2$;
(IX) $f(x_1, x_2) = \arctan(\frac{x_2}{x_1})$;

(X) $f(x_1, x_2) = x_2^{-x_1^2}$;
(XI) $f(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1^2+3x_1x_3+x_2^2}{x_3}$;
(XII) $f(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}}$;
(XIII) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2x_3$;
(XIV) $f(x) = \|x\|^2$ $(x \in \mathbf{R}^n)$;
(XV) $f(x) = \|x\|$ $(x \in \mathbf{R}^n)$;
(XVI) $f(x) = f(x_1, ..., x_n) = \prod_{i=1}^n x_i = x_1 \cdot ... \cdot x_n$.

Esercizio 2.1.3 Sia

$$\begin{cases} f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}, \\ f(x) = f(x_1, x_2) = \begin{cases} (\frac{x_1^2 x_2}{x_1^4+x_2^2})^2 & \text{se } (x_1, x_2) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se } (x_1, x_2) = (0,0). \end{cases} \end{cases}$$

Verificare che, $\forall v \in \mathbf{R}^2$, esiste finita $\frac{\partial f}{\partial v}(0,0)$. Verificare poi che f non è continua in $(0,0)$. A tale proposito, considerare $f(x_1, x_1^2)$ $(x_1 \in \mathbf{R})$.

Esercizio 2.1.4 Siano $A \subseteq \mathbf{R}^n$, $\nu \in \mathbf{R}^n$, $x^0 \in A$, tali che $0 \in D(A_{x^0,\nu})$, $f, g : A \to \mathbf{R}$, tali che esistono in $\mathbf{R}$ $\frac{\partial f}{\partial \nu}(x_0)$ e $\frac{\partial g}{\partial \nu}(x_0)$. Verificare che:
(I) esiste $\frac{\partial (f+g)}{\partial \nu}(x_0)$ e coincide con $\frac{\partial f}{\partial \nu}(x_0) + \frac{\partial g}{\partial \nu}(x_0)$;
(II) esiste $\frac{\partial (fg)}{\partial \nu}(x_0)$ e coincide con $\frac{\partial f}{\partial \nu}(x_0)g(x^0) + f(x^0)\frac{\partial g}{\partial \nu}(x_0)$;
(III) se $g(x) \neq 0$ $\forall x \in A$, esiste $\frac{\partial (\frac{f}{g})}{\partial \nu}(x_0)$ e coincide con

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial \nu}(x_0)g(x^0) - \frac{\partial g}{\partial \nu}(x_0)f(x^0)}{g(x^0)^2}.$$

2.2 Funzioni di classe C^1

La definizione di funzione di classe C^1 è simile a quella vista in [Analisi A]:

Definizione 2.2.1 *Siano $A \subseteq \mathbf{R}^n$ aperto, $f : A \to \mathbf{R}$. Diremo che f è di* **classe** C^1 *in A ($f \in C^1(A)$), se $\forall x \in A$, $\forall j \in \{1, ..., n\}$ esiste a valori reali $D_j f(x)$. Inoltre le funzioni f, $D_1 f$,...,$D_n f$ sono continue su A.*

Osservazione 2.2.1 Per quanto visto nell'osservazione 2.1.1, qualunque sia x in A,0 appartiene a $D(A_{x,e^j})$ per ciascun $j \in \{1, ..., n\}$.