Introduzione ai sistemi lineari

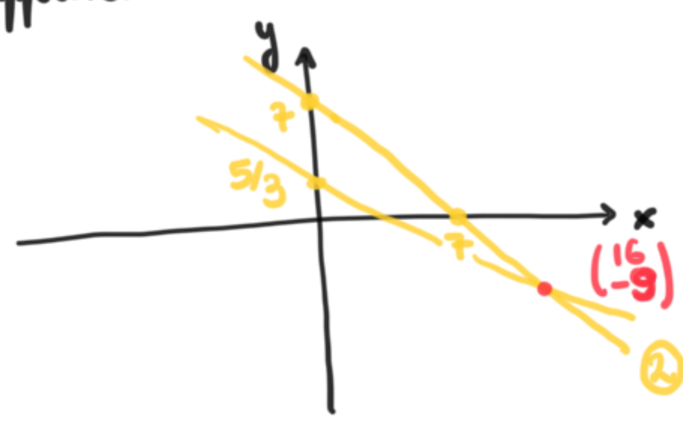
es. $2x=5$ ha un' unica soluzione $x=5/2$

$0x=5$ impossibile (zero soluzioni)

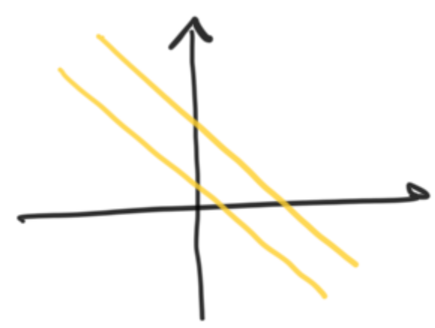
$0x=0$ $\forall x \in \mathbb{R}$ appartiene / per ogni (infinite soluzioni)

es. $\begin{cases} 2x+3y=5 & ① \\ x+y=7 & ② \end{cases}$ $y=-\frac{2}{3}x+\frac{5}{3}$ $\quad y=7-x$ $\quad 2x+3(7-x)=5 \iff \begin{cases} x=16 \\ y=-9 \end{cases}$

rappresentiamo le soluzioni nel piano cartesiano $\mathbb{R}^2$:



caso 2: zero sol.ni $\iff$ due rette parallele e distinte



es. $\begin{cases} x+y=3 \\ x+y=7 \end{cases}$ $\iff$ $-\sqrt{2}x-\sqrt{2}y=-3\sqrt{2}$

sistema incompatibile o impossibile

caso 3: infinite sol. : per es. due rette coincidenti

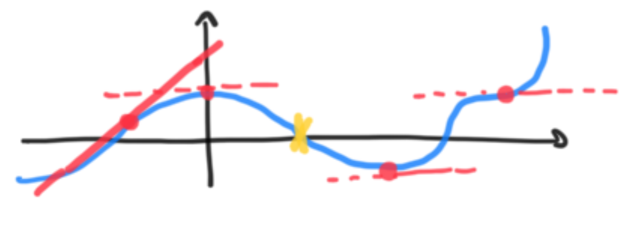
$\begin{cases} 3x+3y=21 \\ x+y=7 \end{cases}$ $\iff x+y=7$ lo spazio di soluzioni è una retta (ci sono ∞^1 soluzioni)

$\begin{cases} 0x+0y=0 \\ 0x+0y=0 \end{cases}$ $\quad \forall \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2$ (ci sono ∞^2 soluzioni)

definizione: una funzione lineare $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ è una funzione della forma

$f\binom{x}{y}=ax+by$ per qualche ~~scelta~~ scelta di coefficienti $a,b \in \mathbb{R}$

$\rightsquigarrow$ approssimazione di funzioni generali



es. $2x_1+7x_2-x_3=-5$ è un'eq. lineare in 3 variabili x_1,x_2,x_3

2, 7, -1 sono i coefficienti — termine noto

$2\pi^2 a+\sqrt{2}b=1$ è un'eq. lin. in due variabili a,b

non-esempi:

$x^2+2x+1=0$ NON è lineare

$\sin^2 x-\frac{\sqrt{3}}{2}=0$

def. un'equazione lineare è un'equazione in cui le variabili (incognite) hanno grado 1

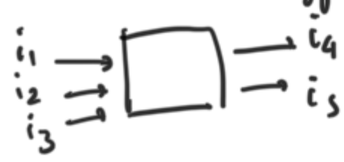
$$\circledast \quad a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + \dots + a_n \cdot x_n = b$$

dove $a_1 \dots a_n, b$ sono reali fissati
$x_1 \dots x_n$ sono variabili (incognite)

se $b=0$ l'equazione si dice omogenea

esempio: ① circuiti elettrici

I legge di Kirchoff



$$i_1 + i_2 + i_3 - i_4 - i_5 = 0$$

② reazioni chimiche:

$$CH_4 + 2O_2 \longleftrightarrow CO_2 + 2H_2O$$

$$\underset{\uparrow}{a}\, \underset{\uparrow}{A} + bB = cC + dD$$

concentrazione

Coeff. stechiometrici

def. una soluzione di un'eq. lin. $\circledast$ è una n-upla di numeri reali $s_1, \dots, s_n$ che soddisfi $\circledast$, ovvero t.c. $a_1 s_1 + a_2 s_2 + \dots + a_n s_n = b$

es. $2x_1 + 7x_2 - x_3 = -5$

Soluzioni sono $\begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 14 \end{pmatrix}$ oppure $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$

le soluzioni sono $S = \left\{ \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; s_3 = 2s_1 + 7s_2 + 5 \right\}$

per es. $s_1 = 1$
$s_2 = 0$
$\rightsquigarrow s_3 = 7$

es. $2a + 3b = 0$ lin. omog. nelle variabili a e b

una sol. è $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$

def. un sistema lineare di m equazioni in n incognite $x_1 \dots x_n$ è una collezione di m equazioni lin.

$$\circledast\circledast \quad \begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n = b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} x_n = b_m \end{cases}$$

una sol. è una n-upla $\begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix}$ di numeri reali che soddisfi simultaneamente tutte le m equ.

un sistema si dice compatibile se esiste una soluzione

def. $\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}}_{n \text{ volte}} = \left\{ \begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix} \;\middle|\; s_i \in \mathbb{R} \;\; \forall i = 1 \dots n \right\}$

gli elementi di $\mathbb{R}^n$ si chiamano <u>vettori</u>

oss. lo spazio di soluzioni di un sist. lin. in n incognite è un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$

def. dati due interi positivi $m, n \in \mathbb{Z}_{>0}$ una matrice $m \times n$ a coeff. reali è una tabella con m righe e n colonne riempita con numeri reali notazione: $M_{m\times n}(\mathbb{R})$

oss. dato un sistema (**) gli possiamo associare una matrice $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ (m = # equazioni, n = # incognite)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \vdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$ "matrice dei coefficienti" del sistema

$$\underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$ "vettore dei termini noti"

$$\rightsquigarrow (A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ & \vdots & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$ "matrice completa" associata al sistema (**)

in generale, data una matrice $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ denoto con a_{ij} (oppure a_i^j) l'entrata corrisp. a riga i, colonna j

A^j = colonna j-esima di A (oss. é un vettore in $\mathbb{R}^m$)

(A_i = riga i-esima (oss. é un vettore riga in $\mathbb{R}^{(n)} = \{(a_1 \dots a_n) \mid a_i \in \mathbb{R}\}$))

per es. $$A = \left(\begin{array}{cc|c} 5 & -6 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{array}\right) \in Mat_{2\times 3}(\mathbb{R})$$

$a_{23} = 1$ $\quad a_{12} = -6 \quad A^2 = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \end{pmatrix} \quad A_2 = (4 \ \ 3 \ \ 1)$

matrice completa di un sistema : $\begin{cases} 5x_1 - 6x_2 = 0 \\ 4x_1 + 3x_2 = 1 \end{cases}$

def. prodotto di una matrice $m\times n$ $A = (a_{ij})$ con un vettore di lunghezza n $x = (x_k)$

é un vettore di lunghezza m di coordinate

$$\boxed{(A.x)_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j} = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n$$

oss. il sistema (**) si puó scrivere in forma matriciale come

$$\underbrace{A}_{\text{mat. coeff.}} . \overset{\text{incognite}}{\underline{x}} = \underbrace{\underline{b}}_{\text{termini noti}}$$

es. prodotto matrice × vettore

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$A = \begin{pmatrix} \dots \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \underline{x} = \begin{pmatrix} \vdots \\ 2 \end{pmatrix}$

$$A \cdot \underline{x} = \begin{pmatrix} 1\cdot 0 + 0\cdot(-3) + 3\cdot 1 + (-1)\cdot 2 \\ 0\cdot 0 + (-2)\cdot(-3) + 2\cdot 1 + 1\cdot 2 \\ 1\cdot 0 + 0\cdot(-3) + (-1)\cdot 1 + 0\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \\ -1 \end{pmatrix}$$

def. una matrice è <u>a scala</u> se

1) eventuali righe <u>nulle</u> sono in fondo alla matrice
2) il primo coeff. $\neq 0$ di ogni riga si trova più a destra di quello della riga superiore

es. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ ← riga nulla NON è a scala

$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ è a scala

$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 7 & 9 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ NON è a scala

def. un sist. lineare è a scala se lo è la corrisp. matrice dei coefficienti (o equiv. mat. completa)

es. $\left[\begin{array}{cccc|c} 4 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$ è a scala, con A la parte a sinistra e $\underline{b}$ l'ultima colonna

$\longleftrightarrow$ sist. lineare: $A \cdot \underline{x} = \underline{b}$

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1 \\ x_2 - 2x_3 = 2 \\ x_3 - x_4 = 0 \\ x_4 = 1 \end{cases}$$

risolvo per sostituzione (all'indietro)

$$\begin{cases} x_4 = 1 \\ x_3 = x_4 = 1 \\ x_2 = 2x_3 + 2 = 4 \\ x_1 = \frac{1}{4}(1 - 2x_2 - 3x_3 - 4x_4) = -\frac{7}{2} \end{cases}$$

la soluzione è unica $S = \left\{ \begin{pmatrix} -7/2 \\ 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}^4$

es. $(A|\underline{b}) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 0 \end{array}\right) \longleftrightarrow \begin{cases} x_1 - \boxed{x_2} + x_3 - \boxed{x_4} = 1 \\ x_3 + \frac{1}{2}\boxed{x_4} = 0 \end{cases}$

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 + s_2 + 3/2\, s_4 \\ s_2 \\ -1/2\, s_4 \\ s_4 \end{pmatrix} \;\middle|\; s_2, s_4 \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathbb{R}^4$$

def sia A una matrice a scala $\in M_{m\times n}(\mathbb{R})$

si dice <u>pivot</u> di A il primo elem. non nullo di ogni riga

si dice <u>rango</u> di A il numero di pivot (notazione: $rg(A)$)

oss. $rg(A) = \#$ righe di A $-$ $\#$ righe nulle di A

$= m - \#$ righe nulle $\leq m$

A a scala $\Rightarrow$ ogni colonna contiene al più un pivot $\Rightarrow rg(A) \leq n$

<u>lemma</u> A a scala $\Rightarrow rg A \leq \min\{m, n\}$

<u>teorema</u> (Rouché - Capelli) dato un sistema <u>a scala</u> $A \cdot \underline{x} = \underline{b}$ in n incognite allora

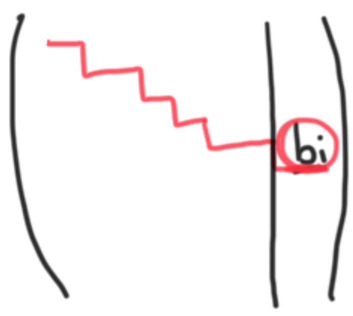
(i) il sistema ammette soluzioni se e solo se $rg(A) = rg(A|b)$

(ii) la soluzione è unica "sse" $rg(A) = rg(A|b) = n$

(iii) se $rg(A) = rg(A|b) < n$ allora ci sono ∞ soluzioni

dimostrazione:

(i) se $rg A \neq rg(A|b)$ allora è incompatibile

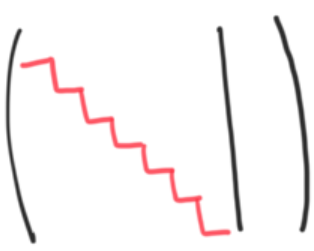


oss. $rg(A) \leq rg(A|b)$

oss. $rg A < rg(A|b) \iff (A|b)$ contiene un pivot nell'ultima colonna

la riga corrispondente è $0 \cdot x_1 + \ldots + 0 \cdot x_n = b_i \neq 0$ ← pivot

(ii)



c'è un pivot per ogni colonna di A:

ogni incognita è determinata dalla corrispondente eqz.

(iii) ci sono più colonne / incognite che pivot / equazioni non nulle

le incognite rimanenti (le cui colonne non contengono pivot)

sono variabili libere: qualunque valore assumano, esiste una

soluzione del sistema corrispondente $\square$