25. Settembre. 2025

SUCCESSIONI

E

SERIE NUMERICHE

SUCCESSIONI NUMERICHE:

DEF.: (Successione di numeri)

Una successione di numeri reali è una funzione:

$$f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$n \longmapsto f(n) =: a_n$$

$f(0) = a_0$ I elemento

$f(1) = a_1$ II elemento

$f(2) = a_2$ III elemento

$\vdots$ $\vdots$

Una successione si denota:

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, \quad (a_n)_n, \quad (a_n)$$

Talvolta, può essere conveniente escludere $n=0$ dai valori del dominio: $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$

Esempi:

$$a_n = \frac{n}{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$\begin{array}{lcccccccc} & 0, & \frac{1}{2}, & \frac{2}{3}, & \frac{3}{4}, & \frac{4}{5}, & \frac{5}{6}, & \dots \\ & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \\ \text{posiz.} & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \end{array}$$

$$b_n = \frac{(-1)^n}{n}, \quad n \in \mathbb{N}^*$$

$$\begin{array}{lcccccc} & -1, & \frac{1}{2}, & -\frac{1}{3}, & \frac{1}{4}, & -\frac{1}{5}, & \dots \\ & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \\ \text{posiz.} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \end{array}$$

Non si deve confondere la successione $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$

$$f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$n \longmapsto f(n) = a_n$$

con l'insieme degli elementi che compongono:

$$\operatorname{Im} f = \{ a_n \mid n \in \mathbb{N} \}$$
$$\overset{\shortparallel}{f(\mathbb{N})}$$

Nella successione è prescritto l'ordine in cui compaiono gli elementi.

<u>Es.:</u>

$$a_n = \frac{1}{n}$$

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \longrightarrow$ c'è un ordine

$\left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots \right\}$ NON c'è un ordine!

DEF.:

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \quad \text{successione}$$

$$A = \{ a_n \mid n \in \mathbb{N} \}$$

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ si dice:

- SUPERIORMENTE LIMITATA se A è sup. limitato
- INFERIORMENTE LIMITATA se A è inf. limitato
- LIMITATA se A è limitato.

Esempi:

(1)

$$a_n = \frac{1}{n} \qquad n \in \mathbb{N}^+$$

$$0 < \frac{1}{n} \leq 1 \qquad \forall n$$

$\Rightarrow \quad (a_n)_n$ è LIMITATA

(2)

$$a_n = n^2 \quad , \quad n \in \mathbb{N}$$

$$n^2 \geq 0 \qquad \forall n$$

$(a_n)_n$ è INF. LIMITATA,
ma non SUP. LIMITATA

(3)

$$a_n = (-1)^n \cdot n$$

$(a_n)_n$ non è né INF. né
sup. limitata

LA NOZIONE DI LIMITE:

$$a_n = \frac{n-1}{n} \qquad n \in \mathbb{N}^*$$

$$0, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{2}{3}, \quad \frac{3}{4}, \quad \frac{4}{5}, \quad \frac{5}{6}$$

$$\frac{1}{2} = 0{,}5 \qquad \frac{2}{3} = 0{,}\overline{6} \qquad \frac{3}{4} = 0{,}75 \qquad \frac{4}{5} = 0{,}8 \qquad \frac{5}{6} = 0{,}8\overline{3}$$

$$\frac{6}{7}, \quad \frac{7}{8}, \quad \frac{8}{9}, \quad \ldots, \quad \frac{20}{21}, \quad \ldots$$

$$\frac{6}{7} = 0{,}857 \qquad \frac{7}{8} = 0{,}875 \qquad \frac{8}{9} = 0{,}\overline{8} \qquad \frac{20}{21} = 0{,}952\ldots$$

$$\ldots, \quad \frac{100}{101}, \quad \ldots, \quad \frac{1000}{1001}, \quad \ldots, \quad \frac{10'000}{10'001}$$

$$\frac{100}{101} = 0{,}990 \qquad \frac{1000}{1001} = 0{,}9990 \qquad \frac{10'000}{10'001} = 0{,}99990\ldots$$

$$a_n = \frac{n}{n+1} \xrightarrow[n]{} 1$$

Come si formalizza il fatto che "a_n si avvicina indefinitamente a 1 ?"

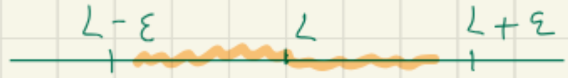
DEF.: (limite finito)

$(a_n)_n$, $L \in \mathbb{R}$

Si dice che $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = L$ se

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \;:\; \forall\, n > \delta \;:$

$|a_n - L| < \varepsilon \quad (L-\varepsilon < a_n < L+\varepsilon)$



$(a_n)_n$ si dice CONVERGENTE

Si scrive anche $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} L$

$\forall \varepsilon > 0$

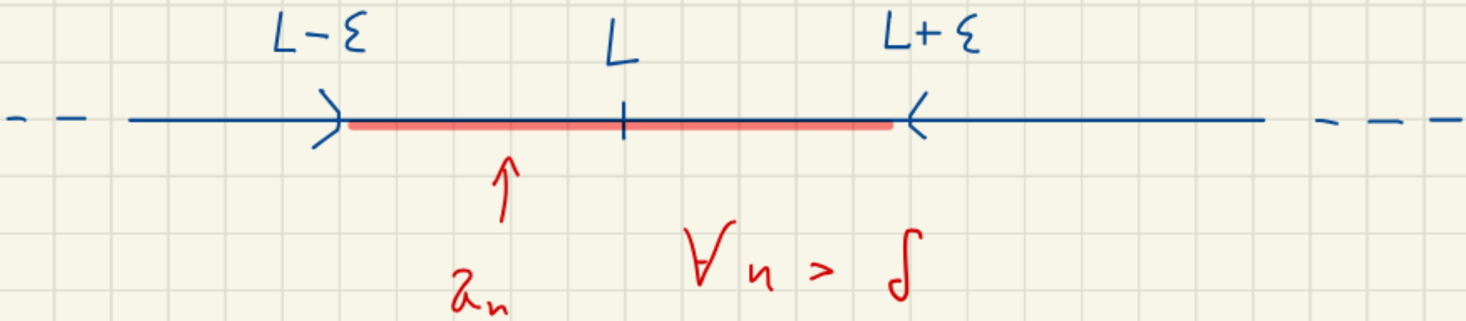
$$|a_n - L| < \varepsilon$$

$$\Updownarrow$$

$$-\varepsilon < a_n - L < \varepsilon$$

$$\Updownarrow$$

$$L - \varepsilon < a_n < L + \varepsilon$$



Vediamo l'esempio di prima:

$$a_n = \frac{n-1}{n} \qquad l = 1$$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{n-1}{n} \overset{?}{=} 1$$

Fissato un $\varepsilon > 0$ arbitrario, posso trovare un $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ in modo che: $\forall n > \delta$

$$\left| \frac{n-1}{n} - 1 \right| < \varepsilon \quad ?$$

(Idea: più si desidera che $a_n = \frac{n}{n-1}$ sia vicino a 1 [ε piccolo] e più sarà necessario considerare le "posizioni alte" degli a_n [cioè, δ dovrà essere grande]).

$$\left|\frac{n-1}{n}-1\right|<\varepsilon \qquad ?$$

n

$$\left|\frac{n-1-n}{n}\right| = \left|\frac{-1}{n}\right| = \frac{1}{n}$$

$$\frac{1}{n}<\varepsilon$$

Passando ai reciproci ($n>0$):

$$n > \frac{1}{\varepsilon} =: \delta$$

Si è così provato che:

$$\forall n\in\mathbb{N}: \quad n>\frac{1}{\varepsilon} \Longrightarrow \left|\frac{n-1}{n}-1\right|<\varepsilon$$

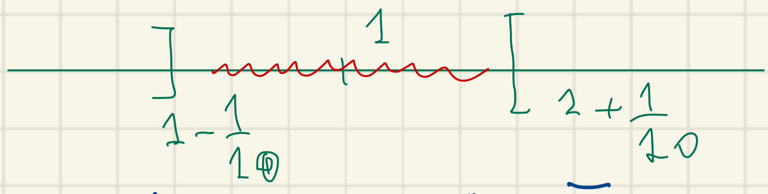
Di è così provato che

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{n-1}{n} = 1$$

Ma come funziona "operativamente" la suddetta definizione?

$$\varepsilon = 0,1 = \frac{1}{10} \longrightarrow \delta = \frac{1}{\varepsilon} = \frac{1}{\frac{1}{10}} = 10$$

$$n > 10 \implies \left| \frac{n-1}{n} - 1 \right| < \frac{1}{10}$$



Ad esempio:

$n = 12$ $\qquad a_{12} = \frac{11}{12} = 0,91\overline{6}$

$$\left| \frac{11}{12} - 1 \right| = 0,08\overline{3} < \frac{1}{10} = 0,1$$

$$\boxed{\varepsilon = 0{,}01 = \frac{1}{100}} \longrightarrow \delta = \frac{1}{\left(\frac{1}{100}\right)} = 100$$

$$n > 100 \implies \left| \frac{n-1}{n} - 1 \right| < \frac{1}{100}$$

<u>Esempio</u>:

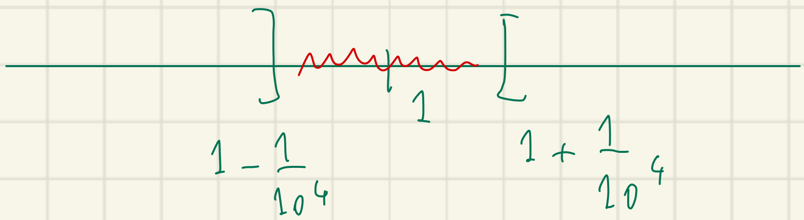
$$n = 106 \qquad a_{106} = \frac{105}{106} \cong 0{,}9907$$

$$\left| \frac{105}{106} - 1 \right| \cong 0{,}0094 < 0{,}01 = \frac{1}{100}$$

$$\varepsilon = 0{,}0001 = \frac{1}{10^4} \longrightarrow \delta = 10^4$$

$$n > 10^4 \Longrightarrow \left| \frac{n-1}{n} - 1 \right| < \frac{1}{10^4}$$

Ejemplo:



$$n = 10{\cdot}005$$

$$a_{10\cdot005} = \frac{10{\cdot}004}{10{\cdot}005} = 0{,}99990005$$

$$\left| \frac{10{\cdot}004}{10{\cdot}005} - 1 \right| = 0{,}00009995 < 0{,}0001$$

. . . .

Esercizi:

Dimostrare che:

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$$ (~~u~~ uguale a prima)

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n^2} = 0$$

Oss.: (versione semplificata)

Si dice che $\lim_{n \to +\infty} a_n = L$ se

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$: $\forall n > \delta$:

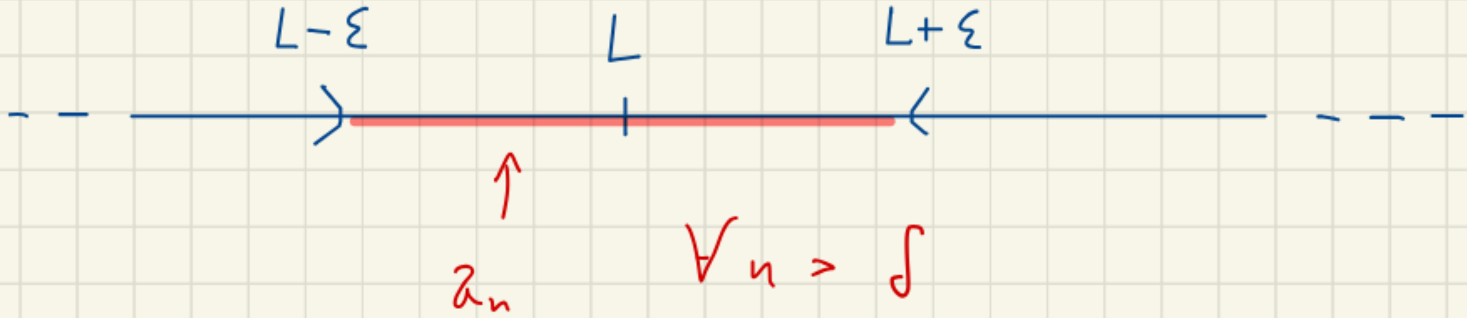
$|a_n - L| < \varepsilon$

Oss.:

Ogni successione convergente è limitata.

Infatti: se $\lim_n a_n = L$:

$\forall \varepsilon > 0$: $L - \varepsilon < a_n < L + \varepsilon$ $\forall n > \delta$



Quindi tutti gli a_n con indice $n > \delta$ sono contenuti in $]L-\varepsilon, L+\varepsilon[$, I rimanenti termini

(cioè: gli a_n con $n < \delta$)

sono in numero <u>finito</u>,

dunque limitati!

Dunque:

$$(a_n)_n \text{ convergente } \Longrightarrow (a_n)_n \text{ limitata}$$

$$\not\Longleftarrow$$

<u>Es.:</u>

$$a_n = (-1)^n$$

$$1, -1, 1, -1, 1, -1, \dots$$

DEF.: (limite infinito)

$(a_n)_n$

- Si dice che $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$ se

$\forall K \in \mathbb{R}$, $\exists\, \delta = \delta(K) > 0 : \forall n > \delta :$

$$a_n \geq K$$

- Si dice che $\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty$ se

$\forall K \in \mathbb{R}$, $\exists\, \delta = \delta(K) > 0 : \forall n > \delta :$

$$a_n \leq K$$

In entrambi i casi si dirà che $(a_n)_n$ è DIVERGENTE

$$a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty \quad , \quad b_n \xrightarrow[n]{} -\infty$$

DEF.: (versione semplificata)

$(a_n)_n$

- Si dice che $\lim_{n \to +\infty} a_n = +\infty$ se
$\forall K \in \mathbb{R}, \exists \delta > 0 : \forall n > \delta :$
$a_n \geq K$

- Si dice che $\lim_{n \to +\infty} a_n = -\infty$ se
$\forall K \in \mathbb{R}, \exists \delta > 0 : \forall n > \delta :$
$a_n \leq K$

In entrambi i casi si dirà che $(a_n)_n$ è DIVERGENTE

$a_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$, $b_n \xrightarrow[n]{} -\infty$

OSS:

Nella definizione precedente

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = +\infty$$

$\forall K \in \mathbb{R}, \exists \delta > 0 : \forall n > \delta :$

$$a_n \geq K$$

è sufficiente limitarsi

a $K > 0$

$\forall K > 0, \exists \delta > 0 : \forall n > \delta :$

$$a_n \geq K$$

OSS:

Nella definizione precedente

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = -\infty$$

$\forall K \in \mathbb{R}, \exists \delta > 0 : \forall n > \delta :$

$$a_n \leq K$$

è sufficiente limitarsi

a $K < 0$

$\forall K < 0, \exists \delta > 0 : \forall n > \delta :$

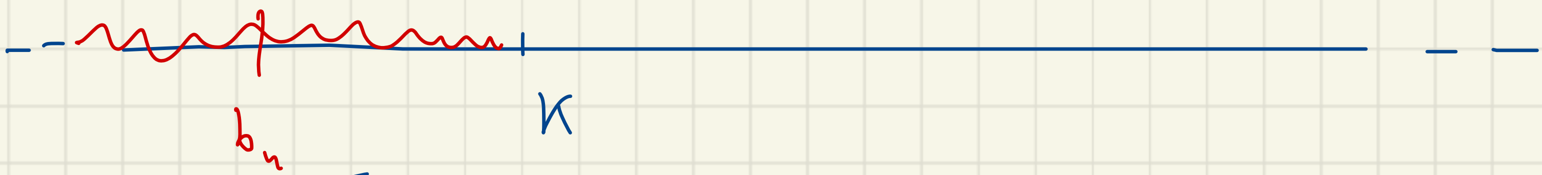
$$a_n \leq K$$

$\forall K \in \mathbb{R}$

se $n > \delta$

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = +\infty$$

$\forall K \in \mathbb{R}$



se $n > \delta$

$$\lim_{n \to +\infty} b_n = -\infty$$

Esempio:

$$\lim_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$$

(Prova:

$K > 0$: $\quad n^2 > K \iff$ $\cancel{n < -\sqrt{K}}$ oppure $n > \sqrt{K}$

scegliamo $\delta = \sqrt{K}$

Allora:

$$n > \sqrt{K} \Longrightarrow n^2 > K$$)

OSS.:

Se esiste il limite di una successione, esso è unico!

(Si dimostra usando la definizione di limite:
si suppone che $\exists\ l_1, l_2 \in \mathbb{R}$:

$$a_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} l_1, \quad a_n \to l_2 \implies l_1 = l_2$$
)

OSS.:

Ci sono successioni che non hanno limite (cioè non sono né convergenti né divergenti)

- $a_n = (-1)^n$

$a_0 = 1 \quad a_1 = -1 \quad a_2 = 1 \quad a_3 = -1 \quad \dots$

La successione è limitata ma non si avvicina a nessun numero, in quanto oscilla.

$0, -1, 2, -3, 4, -5,$

- $a_n = (-1)^n \cdot n$

Non è limitata, ma non tende né a $+\infty$ né a $-\infty$.

TEOREMA ("Algebra" dei limiti)

$(a_n)_n$, $(b_n)_n$ successioni

$a_n \longrightarrow \ell_1$, $b_n \longrightarrow \ell_2$

dove $\ell_1, \ell_2 \in$ "$\mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$"

Allora:

$$a_n + b_n \longrightarrow \begin{cases} \ell_1 + \ell_2 & \text{se } \ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R} \\ +\infty & \text{se } \ell_1 = +\infty, \ \ell_2 \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \\ & (\ell_1 \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}, \ \ell_2 = +\infty) \\ -\infty & \text{se } \ell_1 = -\infty, \ \ell_2 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \\ & (\ell_1 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}, \ \ell_2 = -\infty) \end{cases}$$

$+\infty - \infty$ = forma indeterminata

$-\infty + \infty$

$$a_n \cdot b_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \begin{cases} \ell_1 \cdot \ell_2 & \text{se } \ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R} \\ +\infty & \text{se } \ell_1 = +\infty \\ & \text{e } \underset{\neq 0}{\ell_2} \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\} \\ +\infty & \text{se } \ell_1 = -\infty \\ & \text{e } \underset{\neq 0}{\ell_2} \in \mathbb{R}_- \cup \{-\infty\} \\ -\infty & \text{se } \ell_1 = +\infty \\ & \text{e } \underset{\neq 0}{\ell_2} \in \mathbb{R}_- \cup \{-\infty\} \\ -\infty & \text{se } \ell_1 = -\infty \\ & \text{e } \underset{\neq 0}{\ell_2} \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\} \\ & \text{Stessi risultati se si} \\ & \text{scambiano } \ell_1 \text{ e } \ell_2 \end{cases}$$

$(\pm\infty) \cdot 0$

$0 \cdot (\pm\infty)$ forma indeterminata

Se $b_n \neq 0 \quad \forall n$:

$$\frac{a_n}{b_n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{l_1}{l_2} \quad \text{se } l_1, l_2 \in \mathbb{R}, \quad l_2 \neq 0$$

$+\infty$ se $l_1 = +\infty$, $l_2 > 0$ | $l_1 = -\infty$, $l_2 < 0$

$-\infty$ se $l_1 = -\infty$, $l_2 > 0$ | $l_1 = +\infty$, $l_2 < 0$

0 se $l_1 \in \mathbb{R}$, e $l_2 = \pm\infty$

$\frac{l}{0}$ forma indeterminata

$\frac{+\infty}{-\infty}$, $\frac{-\infty}{-\infty}$, $\frac{+\infty}{+\infty}$, $\frac{-\infty}{+\infty}$

Esempi:

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{7n^4 + 2n^3}{n^2} =$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{7n^4}{n^2} + \frac{2n^3}{n^2}$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \underset{\substack{\downarrow \\ +\infty}}{7n^2} + \underset{\substack{\downarrow \\ +\infty}}{2n} = +\infty$$

$$\lim_{n \to +\infty} \underset{\substack{\downarrow \\ +\infty}}{3n^3} + \underset{\substack{\downarrow \\ +\infty}}{n} = +\infty$$

Nota:

le espressioni che coinvolgono i simboli $+\infty$ o $-\infty$ sono solo espressioni formali.
Non hanno un valore matematico!
Ad es.: $+\infty+\infty$, $0\cdot+\infty$, $1\cdot+\infty$...

Le espressioni del tipo ($+\infty-\infty$, $-\infty+\infty$, $0\cdot(+\infty)$, $0\cdot(-\infty)$, ...) si dicono forme indeterminate perché corrispondono a situazioni non univoche, ossia situazioni il cui risultato deve essere studiato caso per caso.

Esempio:

la forma indeterminata $0 \cdot (+\infty)$

① $a_n = \frac{1}{n} \longrightarrow 0$, $b_n = n^2 \longrightarrow +\infty$

$$\boxed{a_n \cdot b_n} = \frac{1}{n} \cdot n^2 = n \longrightarrow \boxed{+\infty}$$

② $a_n = \frac{1}{n^2} \longrightarrow 0$, $b_n = n \longrightarrow +\infty$

$$\boxed{a_n \cdot b_n} = \frac{1}{n^2} \cdot n = \frac{1}{n} \longrightarrow \boxed{0}$$

③ $a_n = \frac{1}{n} \longrightarrow 0$, $b_n = 2n \longrightarrow +\infty$

$$\boxed{a_n \cdot b_n} = \frac{1}{n} \cdot 2n = 2 \longrightarrow \boxed{2}$$

4 $\quad a_n = \dfrac{(-1)^n}{n^2} \longrightarrow 0 \quad , \quad b_n = n^2 \longrightarrow +\infty$

$$a_n \cdot b_n = \frac{(-1)^n}{n^2} \cdot n^2 = (-1)^n \quad \not\longrightarrow$$

non ha limite!

$$1 \, , \, -1 \, , \, 1 \, , \, -1 \, , \, 1 \, , \, \ldots$$

Esempi:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{c}{n} = \lim_{n\to+\infty} c \cdot \frac{1}{n} = 0$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = \lim_{n\to+\infty} \underbrace{\frac{1}{n}}_{\downarrow\, 0} \cdot \underbrace{\frac{1}{n}}_{\downarrow\, 0} = 0$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^3} = \lim_{n\to+\infty} \underbrace{\frac{1}{n^2}}_{\downarrow\, 0} \cdot \underbrace{\frac{1}{n}}_{\downarrow\, 0} = 0$$

$$\lim_{n\to+\infty} n^3 = \lim_{n\to+\infty} \underbrace{n^2}_{\downarrow\, +\infty} \cdot \underbrace{n}_{\downarrow\, +\infty} = +\infty$$

$$\lim_{n\to+\infty} n^4 = \lim n^3 \cdot n = +\infty$$

ALCUNI LIMITI ELEMENTARI:

$\forall \; q \in \mathbb{Q}_+ :$

1. $$\lim_{n \to +\infty} n^d = +\infty$$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n^d} = 0$$

2. $\forall \; A \in \mathbb{R} : \; A > 1 :$

$$\lim_{n \to +\infty} A^n = +\infty$$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{A^n} = 0$$

$$= \left(\frac{1}{A}\right)^n$$

③

$q \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n \to +\infty} q^n = \begin{cases} 0 & \text{se } -1 < q < 1 \quad \left(|q| < 1\right) \\ 1 & \text{se } q = 1 \\ +\infty & \text{se } q > 1 \\ \nexists & \text{se } q \leq -1 \end{cases}$$

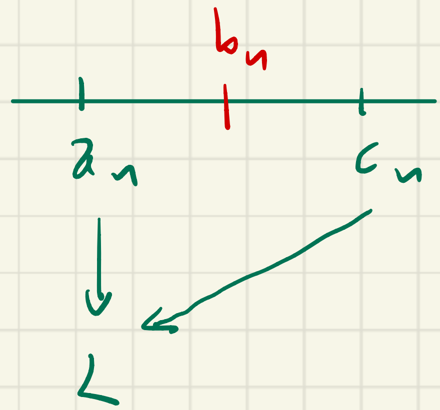
(Risultato intuitivo, di cui ometto la prova)

Teorema del confronto:

$(a_n)_n$, $(b_n)_n$, $(c_n)_n$, $L > 0$

successioni t.c. che:

$$\begin{array}{ccccc} a_n & \le & b_n & \le & c_n \\ \big\downarrow{\scriptstyle n} & & & & \big\downarrow{\scriptstyle n} \\ L & & & & L \end{array}$$



Allora:

$$\lim_{n \to +\infty} b_n = L$$

Problema: 1

$p \in \mathbb{R}_+ \quad , \quad p > 0$

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{p} = ?$$

(Es.:

$p = 1000$

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{1000} = ?$$)

DIM.:

Se $p = 1 \longrightarrow \sqrt[n]{1} = 1 \quad \forall n$

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{1} = 1$$

Sia $p > 1$: $\longrightarrow \sqrt[n]{p} > 1$

$$\sqrt[n]{p} = 1 + \underbrace{\left(\sqrt[n]{p} - 1\right)}_{\substack{\shortparallel \\ \delta_n > 0}} = 1 + \delta_n$$

$\Longrightarrow$

$$p = \left(\sqrt[n]{p}\right)^n = \left(1 + \delta_n\right)^n$$

$$\geq \quad \text{diseg. di}$$

$$1 + n\delta_n \quad \text{Bernoulli}$$

$$p \geq 1 + n\,\delta_n$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{p-1}{n} \geq \delta_n > 0$$

$$\Big\downarrow \; n \to +\infty$$

$$0$$

Dal teorema del confronto:

$$\lim_{n\to+\infty} \delta_n = 0$$

$$\Longrightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{p} = \lim_{n\to+\infty} (1 + \delta_n)$$

$$= 1$$

$\square$

Se $\quad 0 < p < 1$: $\quad \frac{1}{p} > 1$

$$\sqrt[n]{p} = \sqrt[n]{\frac{1}{\left(\frac{1}{p}\right)}} = \frac{1}{\underbrace{\sqrt[n]{\frac{1}{p}}}_{\xrightarrow{n \to +\infty} 1}} \xrightarrow[n]{} 1$$

$\square$

In conclusione:

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{p} = 1 \qquad \forall p > 0}$$

$\square$