26. Settembre. 2025

Problema 2:

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{n} = ?$$

Il metodo di prima NON funziona:

$$n \geq 1 \implies \sqrt[n]{n} = 1 + \underbrace{(\sqrt[n]{n} - 1)}_{\delta_n \geq 0}$$

$$n = \left(\sqrt[n]{n}\right)^n = (1 + \delta_n)^n \geq 1 + n\delta_n$$

$$n \geq 1 + n\delta_n$$

$$\frac{n-1}{n} \geq \delta_n \geq 0$$

$$\underset{\substack{\downarrow \\ 1}}{1 - \frac{1}{n}} \qquad \qquad \lim_n \delta_n = ?$$

Vediamo una maggiorazione diversa dalla disug. di B. che segue dal Binomio di Newton:

sia $B \geq 0$

$$(1+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} \cdot B^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \underbrace{\binom{n}{k} B^k}_{\geq 0} \geq$$

$$\geq \binom{n}{k} B^k \qquad \forall k \leq n$$

Abbiamo quindi provato che:

$$(1+\beta)^n \geq \binom{n}{1} \beta$$

$$(1+\beta)^n \geq \binom{n}{2} \beta^2 \Leftarrow$$

$$(1+\beta)^n \geq \binom{n}{3} \beta^n$$

$$\vdots$$

Usiamo una di queste maggiorazioni:

$$n \geq 1 \implies \sqrt[n]{n} = 1 + \underbrace{\left(\sqrt[n]{n} - 1\right)}_{\delta_n \geq 0}$$

$$n = \left(\sqrt[n]{n}\right)^n = \left(1 + \delta_n\right)^n \geq \binom{n}{2} \delta_n^2$$

dal Binomio di Newton + $\delta_n \geq 0$

II addendo nel Binomio

$\implies$

$$n \geq \frac{n(n-1)}{2} \delta_n^2$$

$$\cancel{n} \geq \frac{\cancel{n}(n-1)}{2} \delta_n^2$$

$$\frac{2}{n-1} \geq \delta_n^2$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n-1}} \geq \delta_n \geq 0$$

$$\Big\downarrow n$$

$$0$$

$$\Rightarrow \quad \lim_n \delta_n = 0$$

$$\sqrt[n]{n} - 1 = \delta_n \xrightarrow[n]{} 0$$

$$\Longrightarrow$$

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{n} = 1}$$

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{n^2} =$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \underbrace{\sqrt[n]{n}}_{\downarrow \atop 1} \cdot \underbrace{\sqrt[n]{n}}_{\downarrow \atop 1} = 1$$

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{n^3} = \lim_{n} \underbrace{\sqrt[n]{n^2}}_{\downarrow \atop 1} \cdot \underbrace{\sqrt[n]{n}}_{\downarrow \atop 1} = 1$$

$\forall k \in \mathbb{N}$

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{n^k} = 1$$

Problema 3 :

$A > 1$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{n}{A^n} = ?$$

DIM.: $(A > 1)$

$$A^n = \left(1 + \underbrace{(A-1)}_{\delta > 0}\right)^n = (1+\delta)^n$$

$$\ge \quad \binom{n}{2} \cdot \delta^2$$

selezionando
il II addendo del
Binomio di Newton

$\Longrightarrow$

$$A^n \ge \binom{n}{2} \delta^2 = \frac{n(n-1)}{2} \delta^2$$

$$A^n \geq \frac{n(n-1)}{2} \cdot \delta^2$$

Dividendo ambo i membri per $\frac{n-1}{2} \cdot \delta^2$:

$$A^n \cdot \frac{2}{n-1} \cdot \frac{1}{\delta^2} \geq n$$

Dividendo per A^n :

$$\underbrace{\frac{2}{n-1} \cdot \frac{1}{\delta^2}}_{\xrightarrow{n \to +\infty}\ 0} \geq \frac{n}{A^n} \geq 0$$

$\square$

$$\lim_n \frac{n}{A^n} = 0 \qquad (\forall A > 1)$$

$$\lim_n \frac{n^2}{A^n}$$

$\sqrt{A} > 1$

$$\frac{n^2}{A^n} = \underbrace{\frac{n}{(\sqrt{A})^n}}_{\downarrow\ 0} \cdot \underbrace{\frac{n}{(\sqrt{A})^n}}_{\downarrow\ 0} \longrightarrow 0$$

$\sqrt{A} > 1$

$$\lim_n \frac{n^3}{A^n} = \lim_n \underbrace{\frac{n^2}{(\sqrt{A})^n}}_{\downarrow\ 0} \cdot \underbrace{\frac{n}{(\sqrt{A})^n}}_{\downarrow\ 0} = 0$$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{n^K}{A^n} = 0 \qquad \forall K \in \mathbb{N} \quad \forall A > 1$$

$+\infty$ (numeratore) $\quad$ $+\infty$ (denominatore)

A^n tende a $+\infty$

"più velocemente" di n^K

Quindi:

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} \frac{n}{A^n} = 0} \qquad (A > 1)$$

Similmente si prova che:

$\forall \beta \in \mathbb{R}$

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} \frac{n^\beta}{A^n} = 0} \qquad (A > 1)$$

cioè: l'esponenziale A^n diverge

più velocemente di n^β

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^{10}+n^{4}+6n^{8}}{A^{n}} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{n^{10}}{A^{n}} + \frac{n^{4}}{A^{n}} + 6\cdot\frac{n^{8}}{A^{n}} = 0$$

$$\downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow$$

$$0 \qquad 0 \qquad 0$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sum_{k=0}^{m} a_k n^{k}}{A^{n}} = 0$$

Si prova che:

$\forall \alpha > 0$, $\forall \beta$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{(\log n)^{\beta}}{n^{\alpha}} = 0}$$

cioè: una qualunque potenza n^{α} diverge <u>più velocemente</u> di ogni logaritmo $(\log n)^{\beta}$.

Oss.: $(A > 1)$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{n^{\alpha} \cdot (\log n)^{\beta}}{A^n} =$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \underbrace{\frac{n^{\alpha+1}}{A^n}}_{\downarrow \atop 0} \cdot \underbrace{\frac{(\log n)^{\beta}}{n}}_{\downarrow \atop 0} = 0$$

Problema 4 :

$$\lim_{n} \frac{A^n}{n!} = ?$$

$$(A > 1)$$

Oss.: se $0 < A < 1$:

$$\lim_n \frac{A^n}{n!} = \lim \underbrace{A^n}_{\to 0} \cdot \underbrace{\frac{1}{n!}}_{\to 0} = 0$$

Infatti:

$$0 \le \frac{1}{n!} \le \underbrace{\frac{1}{n}}_{\to 0}$$

Proviamo un esempio:

$$A = 3$$

$$\lim_{n} \frac{3^n}{n!} = \; ?$$

$$0 \leq \frac{3^n}{n!} = \frac{3}{n} \cdot \frac{3}{n-1} \cdot \frac{3}{n-2} \cdot \ldots \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{3} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{1}$$

$$\leq \frac{3}{n} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \leq$$

$$\leq \frac{3}{n} \cdot 27 = \frac{81}{n} \longrightarrow 0$$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{3^n}{n!} = 0$$

In generale: (se $A \in \mathbb{N}$)

$$n! = n(n-1)(n-2)\cdot \ldots \cdot (A+2)\cdot(A+1)\cdot A \cdot \ldots \cdot 1$$

$$\frac{A^n}{n!} = \frac{A}{n} \cdot \underset{\substack{\wedge \\ 1}}{\frac{A}{n-1}} \cdot \underset{\substack{\wedge \\ 1}}{\frac{A}{n-2}} \cdot \ldots \cdot \underset{\substack{\wedge \\ 1}}{\frac{A}{A+2}} \cdot \underset{\substack{\wedge \\ 1}}{\frac{A}{A+1}} \cdot \underset{\substack{\wedge \\ A}}{\frac{A}{A}} \cdot \ldots$$

$$\ldots \cdot \underset{\substack{\wedge \\ A}}{\frac{A}{2}} \cdot \underset{\substack{\wedge \\ A}}{\frac{A}{1}} \leq$$

$$\leq \frac{A}{n} \cdot A^A \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

se $A \notin \mathbb{N}$, simile

considerando $[A]$ = parte intera

Quindi:

$$\boxed{\lim_{n} \frac{A^n}{n!} = 0}$$

$n!$ diverge più velocemente

di ogni esponenziale

Problema 5 :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{n!}{n^n} = ?$$

$$\frac{n!}{n^n} = \underset{\underset{1}{\wedge}}{\frac{n}{n}} \cdot \underset{\underset{1}{\wedge}}{\frac{n-1}{n}} \cdot \underset{\underset{1}{\wedge}}{\frac{n-2}{n}} \cdot \ldots \cdot \underset{\underset{1}{\wedge}}{\frac{2}{n}} \cdot \frac{1}{n} \leq$$

$$\leq 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1 \cdot \frac{1}{n} \leq$$

$$\leq \frac{1}{n} \xrightarrow[n]{} 0$$

Quindi:

$$\boxed{\lim \frac{n!}{n^n} = 0}$$

n^n diverge più velocemente del fattoriale $n!$

GERARCHIA DEGLI INFINITI:

$\log n$

$n^{\alpha} \quad (\alpha > 0)$

$A^{n} \quad (A > 1)$

$n!$

n^{n}

velocità crescente

Altri esempi:

$$\lim_{n \to +\infty} n^4 - 3n^3 - n = ?$$

$$n^4 - 3n^3 - n = \underbrace{n^4}_{+\infty} \underbrace{\left(1 - \underbrace{\frac{3}{n}}_{0} - \underbrace{\frac{1}{n^3}}_{0} \right)}_{1}$$

$$\lim_{n \to +\infty} n^4 - 3n^3 - n = +\infty$$

$$\lim_{n\to+\infty} \boxed{n^5 - 2n^6 + n^4} = -\infty$$

$$\| $$

$$\underbrace{n^6}_{\to +\infty}\underbrace{\left(\frac{1}{n} - 2 + \frac{1}{n^2}\right)}_{\to -2}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{3n^2 - 4n^4}{6n^4 - n^3 - 10} = -\frac{2}{3}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \underbrace{\frac{n^4}{n^4}}_{= 1} \cdot \underbrace{\frac{\frac{3}{n^2} - 4}{6 - \frac{1}{n} - \frac{10}{n^4}}}_{\to \frac{-4}{6} = -\frac{2}{3}}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{7n^6 - 5n^4 - 16n^5}{-4n^4 + 10n} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{n^6}{n^4} \cdot \boxed{\frac{7 - \frac{5}{n^2} - \frac{16}{n}}{-4 + \frac{10}{n^3}}} = -\infty$$

$n^2 \to +\infty$

$\frac{7}{-4} = -\frac{7}{4}$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{3n^4 - 5n^2 + n}{8n^2 - 2n^8 + 1} =$$

$$= \lim \frac{n^4}{n^8} \cdot \boxed{\frac{3 - \frac{5}{n^2} + \frac{1}{n^3}}{\frac{8}{n^6} - 2 + \frac{1}{n^8}}} = 0$$

$0 \leftarrow \frac{1}{n^4}$

$\frac{3}{-2} = -\frac{3}{2}$

$p(n)$, $q(n)$ polinomi

$$\frac{p(n)}{q(n)} \rightarrow \begin{cases} \pm\infty & \text{se } \deg p(n) > \deg q(n) \\ \ell \neq 0 & \text{se } \deg p(n) = \deg q(n) \\ 0 & \text{se } \deg p(n) < \deg q(n) \end{cases}$$

ESERCIZIO :

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{2^n + 3^n} = ?$$

3^n è il termine dominante fra 2^n e 3^n:

$$3^n \le \underset{\overset{\wedge}{3^n}}{2^n} + 3^n \le 2 \cdot 3^n$$

Passando alla $\sqrt[n]{}$: $\sqrt[n]{2} \cdot \sqrt[n]{3^n}$

$$\underset{\overset{\parallel}{3}}{\sqrt[n]{3^n}} \le \sqrt[n]{2^n + 3^n} \le \sqrt[n]{2 \cdot 3^n}$$

$$\sqrt[n]{2 \cdot 3^n} = \sqrt[n]{2} \cdot 3 \longrightarrow 1 \cdot 3 = 3$$

Oppure, metodo alternativo:

$$3 = \sqrt[n]{3^n} \leq \sqrt[n]{2^n + 3^n} = \sqrt[n]{3^n\left(\frac{2^n}{3^n} + 1\right)} =$$

$$= 3 \cdot \sqrt[n]{1 + \left(\frac{2}{3}\right)^n} \leq$$

$$\leq 3 \cdot \left(1 + \underbrace{\left(\frac{2}{3}\right)^n}_{\substack{\downarrow\, n \to +\infty \\ 0}}\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 3$$

(Oss.: $\forall\, a \geq 1$: $\sqrt[n]{a} \leq a$)

Dal criterio del confronto:

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{2^n + 3^n} = 3$$

Esercizi per casa:

- $$\lim \sqrt[n]{a^n + b^n} = \max\{a, b\}$$

  $(a, b \geq 0)$

- $$\lim_{n \to +\infty} \frac{3^{n+1} + 5^{n+1}}{3^n + 5^n} = 5$$

Introduciamo ora una classe speciale di successioni.

LE SUCCESSIONI MONOTONE:

DEF.: $(a_n)_n$ si dice (STRETT.) CRESCENTE se:

$$\forall n \in \mathbb{N}: \quad a_n \leq a_{n+1} \quad (<) \qquad (a_n \nearrow)$$

$(b_n)_n$ si dice (STRETT.) DECRESCENTE se:

$$\forall n \in \mathbb{N}: \quad b_n \geq b_{n+1} \quad (>) \qquad (b_n \searrow)$$

Una successione crescente o decrescente si dice MONOTONA.

Esempio:

$a_n = \frac{1}{n}$ è decrescente

$b_n = n^2$ è crescente

Una proprietà importante delle successioni monotone è che esse hanno sempre limite, ossia sono sempre convergenti o divergenti.

<u>TEOREMA:</u>

Se $(a_n)_n$ è <u>crescente</u>, allora:

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = \sup \{ a_n \mid n \in \mathbb{N} \}$$

Se $(a_n)_n$ è <u>decrescente</u>, allora:

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = \inf \{ a_n \mid n \in \mathbb{N} \}$$

DIM.:

Dimostriamo il teorema nell'ipotesi che $(a_n)_n \nearrow$.

Si tratta di provare che:

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = \sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

Posto $L := \sup \underbrace{\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}}_{= A}$

Vi sono due casi: $L = +\infty$, $L \in \mathbb{R}$.

I $L = +\infty$:

Si tratta di provare che:

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = +\infty \quad , \text{ cioè}$$

$$\forall K \in \mathbb{R} : \exists \delta > 0 \quad \forall n > \delta \quad a_n \geq K$$

$$\left.\begin{array}{l}\forall K \in \mathbb{R} : \ \exists\, \delta > 0 : \ \forall n > \delta \\ \qquad a_n \geq K\end{array}\right\} ?$$

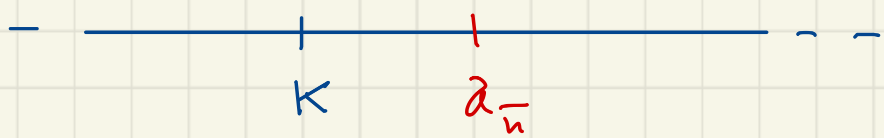
$L = +\infty \implies A$ non è sup. lim.

$\implies$ A non ammette maggioranti

$\implies$ K non è un maggiorante

di $A = \{ a_n \mid n \in \mathbb{N} \}$

$\implies \exists\, a_{\bar{n}} \in A : \quad a_{\bar{n}} > K$



Siccome $(a_n)_n \nearrow$, si ha:

$$\forall n > \bar{n} =: \delta \qquad a_n \geq a_{\bar{n}} > K$$

c.v.d.

I

II $L \in \mathbb{R}$:

Si tratta di provare che:

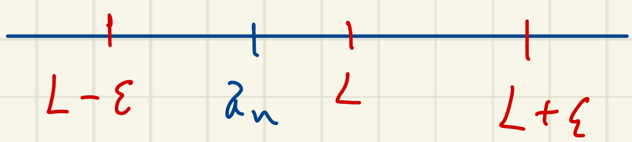
$$\lim_{n\to+\infty} a_n = L \quad , \quad \text{cioè:}$$

$$\forall \varepsilon > 0 : \quad \exists \delta > 0 \quad \forall n > \delta :$$

$$|a_n - L| < \varepsilon$$

$$\Updownarrow$$

$$L - \varepsilon < a_n < \underbrace{L + \varepsilon}$$



è <u>automatica</u> poiché

$L = \sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$

$\Longrightarrow$ L è un maggiorante di $\{a_n \mid n\}$

$\Longrightarrow$ $\forall n : \quad a_n \le L < L + \varepsilon$

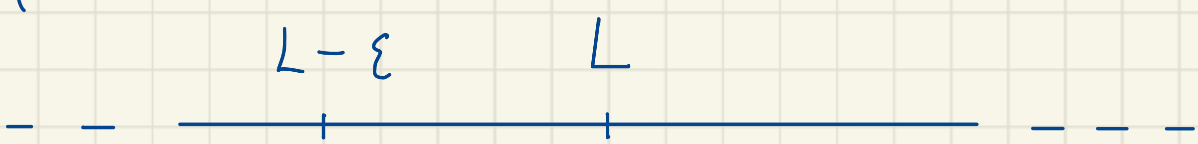
Si tratta di trovare δ t.c.:

$\forall n > \delta$:
$$a_n > L - \varepsilon$$

Usiamo nuovamente il fatto che:

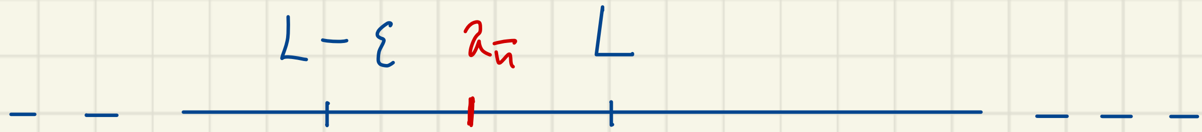
$$L = \sup \underbrace{\boxed{\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}}}_{= A}$$

L è il più piccolo dei magg. di A



$\Longrightarrow$ $L - \varepsilon$ non è un magg. di A

$\Longrightarrow$ $\exists\, a_{\bar{n}} \in A$: $\quad L - \varepsilon < a_{\bar{n}}$



Inoltre $(a_n) \nearrow$, quindi: $\forall n > \bar{n}$ $=: \delta$

$$L - \varepsilon < a_{\bar{n}} \le a_n$$

Si è così provato che:

$\forall n > \bar{n}$: $\quad$ $\underline{\underline{(\delta := \bar{n})}}$

$$L - \varepsilon < a_n < L + \varepsilon$$

c.v.d.

Rimane da provare il teorema se $(a_n)_n$ è DECRESCENTE

(Esercizio da fare!)

COROLLARIO:

1. $(a_n)_n \nearrow$, $(a_n)_n$ è sup. limitata (cioè: $\exists\, c \in \mathbb{R}$: $a_n \leq c \quad \forall n$)

Allora:

$(a_n)_n$ è convergente, cioè: $\exists\, r \in \mathbb{R}$: $a_n \longrightarrow r$ $(=: \sup A)$

2. $(a_n)_n \searrow$, $(a_n)_n$ è inf. limitata (cioè: $\exists\, c > 0$: $a_n \geq c \quad \forall n$)

Allora:

$(a_n)_n$ è convergente, cioè: $\exists\, r \in \mathbb{R}$: $a_n \longrightarrow r$ $(=: \inf A)$

IL NUMERO "e" DI NEPER : DI EULER

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad , \quad n \in \mathbb{N}^*$$

$$a_1 = 2$$

$$a_2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} = 2,25$$

$$a_3 = \left(\frac{4}{3}\right)^3 = \frac{64}{27} = 2,\overline{370}$$

$$a_4 = \left(\frac{5}{4}\right)^4 = \frac{625}{256} = 2,4414\ldots$$

$$\vdots$$

TEOREMA:

$\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ è convergente

cioè:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \in \mathbb{R}$$

numero di Neper
(di Euler)

Idea della dimostrazione:

Si prova che:

- $(a_n)_n$ è (strett.) crescente
- $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Dal corollario:

$$\exists \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

$$= \sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

Inoltre:

$$2 = a_1 < e \overset{(<)}{\leq} 3$$

DIMOSTRAZIONE

COMPLETA

(FACOLTATIVA)

Dimostriamo che $a_n \nearrow$

Faremo vedere che:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \qquad \left(\Longleftrightarrow \quad a_{n+1} > a_n\right)$$

Proviamolo:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} =$$

$$= \frac{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \frac{n+2}{n+1} \cdot \frac{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^n}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} =$$

$$= \frac{n+2}{n+1} \cdot \left(\frac{n+2}{n+1} \cdot \frac{n}{n+1}\right)^n =$$

$$= \frac{n+2}{n+1} \cdot \left(\frac{n^2+2n}{n^2+2n+1}\right)^n =$$

$$= \frac{n+2}{n+1} \cdot \left(\frac{n^2+2n+1-1}{n^2+2n+1}\right)^n =$$

$$\frac{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^n}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \left(\frac{\frac{n+2}{n+1}}{\frac{n+1}{n}}\right)^n =$$

$$= \left(\frac{n+2}{n+1} \cdot \frac{n}{n+1}\right)^n$$

$$= \frac{n+2}{n+1} \cdot \left(\frac{(n^2+2n+1)-1}{n^2+2n+1} \right)^n =$$

$$= \frac{n+2}{n+1} \cdot \left(1 - \frac{1}{n^2+2n+1} \right)^n$$

$$= \frac{n+2}{n+1} \cdot \underbrace{\left(1 + \left(\boxed{-\frac{1}{n^2+2n+1}}_{=:x} \right) \right)^n}_{\geq\; 1 + n\left(-\frac{1}{n^2+2n+1}\right)}$$

DISUG. DI BERNOULLI

(vedi slide) →

$$\geq \frac{n+2}{n+1} \cdot \left(1 - \frac{n}{n^2+2n+1} \right) =$$

$$= \frac{n+2}{n+1} \cdot \frac{n^2+2n+1-n}{n^2+2n+1} =$$

$$= \frac{n+2}{n+1} \cdot \frac{n^2+n+1}{n^2+2n+1} =$$

$$X = -\frac{1}{n^2+2n+1} \overset{!}{\geq} -1$$

$$\frac{1}{n^2+2n+1} \leq 1$$

$$\cancel{1} \leq n^2+2n+\cancel{1}$$

$$0 \leq n^2+2n \quad \checkmark$$

Disuguagl. di Bernoulli

$$\left(1-\frac{1}{n^2+2n+1}\right)^n \overset{\downarrow}{\geq} \left(1-\frac{n}{n^2+2n+1}\right)$$

$$\Longrightarrow$$

$$\frac{n+2}{n+1}\cdot\left(1-\frac{1}{n^2+2n+1}\right)^n \geq \frac{n+2}{n+1}\left(1-\frac{n}{n^2+2n+1}\right)$$

$$= \frac{n+2}{n+1} \cdot \frac{n^2+n+1}{n^2+2n+1} =$$

$$= \frac{n^3+n^2+n+2n^2+2n+2}{n^3+3n^2+3n+1} =$$

$$= \frac{n^3+3n^2+3n+2}{n^3+3n^2+3n+1} =$$

$$= \frac{(n^3+3n^2+3n+1)+1}{n^3+3n^2+3n+1} =$$

$$= 1 + \frac{1}{n^3+3n^2+3n+1} > 1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$$

$$\Rightarrow \quad a_{n+1} > a_n \qquad \forall n$$

$$(a_n)_n \nearrow$$

CATENA IN SINTESI:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \underbrace{\frac{n+2}{n+1} \cdot \left(1 - \frac{1}{n^2+2n+1}\right)^n}$$

$$\geq$$

Disug. di Bernoulli

$$\frac{n+2}{n+1} \cdot \left(1 - \frac{n}{n^2+2n+1}\right) =$$

$$= 1 + \frac{1}{n^3+3n^2+3n+1} > 1$$

cioè:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \implies a_{n+1} > a_n$$

$$(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^{n-k} \cdot B^k$$

Binomio di Newton

$$A = 1 \qquad B = \frac{1}{n}$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^k$$

② Proviamo che $(a_n)_n$ è superiormente limitata.

Usiamo il binomio di Newton:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)!\,k!} \frac{1}{n^k} =$$

$$\frac{n!}{(n-k)!} = \underbrace{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-(k-1))}_{\text{sono } k \text{ fattori}}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-(k-1))}{n^k} \cdot \frac{1}{k!}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-(k-1))}{n^k} \cdot \frac{1}{k!}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \underbrace{\frac{n}{n}}_{\leq 1} \cdot \underbrace{\frac{n-1}{n}}_{\leq 1} \cdot \ldots \cdot \underbrace{\frac{n-(k-1)}{n}}_{\leq 1} \cdot \frac{1}{k!}$$

(*) vedi sopra

$$\leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \underbrace{1}_{\frac{1}{0!}} + \underbrace{1}_{\frac{1}{1!}} + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!}$$

(*)

$$\frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \ldots \cdot \frac{n-(k-1)}{n} \leq 1$$

moltiplico entrambi i membri per $\frac{1}{k!}$

$$\frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \ldots \cdot \frac{n-(k-1)}{n} \cdot \frac{1}{k!} \leq \frac{1}{k!}$$

$$= 1 + 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!}$$

Vediamo $\dfrac{1}{k!} \leq \dfrac{1}{k-1} - \dfrac{1}{k}$

$$\leq 2 + \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) =$$

$$= 2 + \Bigg[\underbrace{\left(1 - \frac{1}{2} \right)}_{k=2} + \underbrace{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right)}_{k=3} + \underbrace{\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right)}_{k=4} +$$

$$+ \underbrace{\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5} \right)}_{k=5} + \underbrace{\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6} \right)}_{k=6} +$$

$$+ \dots + \underbrace{\left(\frac{1}{n-2} - \frac{1}{n-1} \right)}_{k=n-1} + \underbrace{\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right)}_{k=n} \Bigg]$$

$$\leq 2 + 1 - \frac{1}{n} = 3 - \frac{1}{n} < 3$$

Oss.:

$$K! = K \cdot (K-1) \cdot (K-2) \cdot \ldots \cdot 1 \geq K \cdot \underset{0}{\underset{\vee}{(K-1)}}$$

se $K \geq 2$

$$\Longrightarrow \quad K! \geq K(K-1)$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{1}{K!} \leq \frac{1}{K(K-1)} = \frac{1}{K-1} - \frac{1}{K}$$

$$\frac{K-(K-1)}{(K-1)K} = $$

$$= \frac{\cancel{K} - \cancel{K} + 1}{(K-1)K} =$$

$$= \frac{1}{(K-1)K}$$

FINE!