# 1. Ottobre. 2025

# SERIE NUMERICHE

Ejempi:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots = ¿$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots = ¿$$

**Def.** (Serie):

Sia $(a_n)_n$ una successione di numeri reali

Definiamo la successione $(s_m)_m$ associata

$s_0 = a_0$

$s_1 = a_0 + a_1$

$s_2 = a_0 + a_1 + a_2$

$\vdots$

$$s_m = \sum_{j=0}^{m} a_j$$

$\vdots$

La successione $(s_n)_n$ delle somme parziali si chiama SERIE e si indica:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \quad \text{oppure} \quad \sum a_n$$

I numeri $a_n$ si chiamano termini della serie.

Esempio:

$$a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$S_0 = \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1$$

$$S_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^0 + \left(\frac{1}{2}\right)^1 = 1 + \frac{1}{2}$$

$$S_2 = \left(\frac{1}{2}\right)^0 + \left(\frac{1}{2}\right)^1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$$

$$S_3 = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$$

$$\vdots$$

**DEF.:** (Serie convergente):

La serie $\sum a_n$ si dice:

- CONVERGENTE se

$$\exists \lim_{n \to +\infty} S_n = A \in \mathbb{R}$$

si chiama **SOMMA** della serie

- DIVERGENTE se

$$\exists \lim_{n \to +\infty} S_n = \begin{cases} +\infty \\ \text{oppure} \\ -\infty \end{cases}$$

- INDETERMINATA se:

$$\nexists \lim_{n \to +\infty} S_n$$

**OSS.:**

Se una serie $\sum a_n$ è convergente (risp., divergente) e modifichiamo un numero FINITO di suoi termini, allora anche la nuova serie sarà convergente (risp., divergente)

# ESEMPIO 1

La serie geometrica:

$q \in \mathbb{R}$

$a_n := q^n$

$\Longrightarrow \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} q^n$

Per quali valori $q \in \mathbb{R}$ la serie geometrica converge?

$$S_n = 1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^{n-1} + q^n$$

Moltiplichiamo entrambi

i membri per $q$:

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} S_n & = & 1 & + & q & + & q^2 & + & q^3 & + & \dots & + & q^{n-1} & + & q^n \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow \\ q \cdot S_n & = & q & + & q^2 & + & q^3 & + & q^4 & + & \dots & + & q^n & + & q^{n+1} \end{array}$$

sommando $+1$:

$$1 + qS_n = \underbrace{1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^n}_{= S_n} + q^{n+1}$$

$$1 + qS_n = S_n + q^{n+1}$$

$$1 + q S_n = S_n + q^{n+1}$$

$$1 - q^{n+1} = S_n - q \cdot S_n$$

$$1 - q^{n+1} = (1 - q) \cdot S_n$$

Se $q \neq 1$, si ottiene:

$$S_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} =$$

$$= \frac{1}{1-q} - \frac{q^{n+1}}{1-q}$$

Si ha che:

$$\lim_n s_n = \lim_n \left( \frac{1}{1-q} - \frac{q^{n+1}}{1-q} \right)$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{1-q} & \text{se } |q| < 1 \\ +\infty & \text{se } q > 1 \\ \nexists & \text{se } q \leq -1 \end{cases}$$

<u>OSS.</u>: se $q = 1$ allora:

$$s_n = q^0 + q^1 + \dots + q^n = 1 + 1 + 1 + \dots + 1 =$$

$$= n + 1 \xrightarrow[n]{} +\infty$$

# CONCLUSIONE:

$$\lim_{n} s_n = \lim_{n} \left( \frac{1}{1-q} - \frac{q^{n+1}}{1-q} \right)$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{1-q} & \text{se } |q| < 1 \\ +\infty & \text{se } q \geq 1 \\ \nexists & \text{se } q \leq -1 \end{cases}$$

## RISULTATO FINALE:

$$\sum_{n} q^n \quad \text{converge}$$

$$\Updownarrow$$

$$|q| < 1$$

In tal caso:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$$

## Esempi :

$$\left|\frac{1}{2}\right| < 1$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$$

$$= \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$$

$$\sum_n 3^n = 1 + 3 + 9 + \dots = +\infty$$

$$\sum_n (-2)^n \quad \text{è} \quad \text{INDETERMINATA}$$

$$\downarrow$$

$$1 - 2 + 4 - 8 + 16 - 32 + \dots$$

$$0,\overline{15} = 0,15151515\ldots$$

$$= 0,15 + 0,0015 + 0,000015 + \ldots$$

$$= \frac{15}{100} + \frac{15}{10\,000} + \frac{15}{1\,000\,000} + \ldots$$

$$= \frac{15}{100}\left(1 + \frac{1}{100} + \frac{1}{10\,000} + \ldots\right)$$

$$= \frac{15}{100} \cdot \left(1 + \left(\frac{1}{100}\right) + \left(\frac{1}{100}\right)^2 + \left(\frac{1}{100}\right)^3 + \ldots\right)$$

$$= \frac{15}{100} \cdot \sum_{n=0} \left(\frac{1}{100}\right)^n =$$

$$= \frac{15}{100} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{100}} = \frac{15}{100} \cdot \frac{100}{99} = \frac{15}{99}$$

frazione generatrice

$$1,3\overline{4} = \frac{1}{10} \cdot 13,\overline{4} =$$

$$= \frac{1}{10} \cdot \left( 13 + 0,\overline{4} \right) =$$

$$= \frac{1}{10} \cdot \left( 13 + \frac{4}{10} + \frac{4}{100} + \frac{4}{1000} + \cdots \right)$$

$$= \frac{1}{10} \cdot \left( 13 + \frac{4}{10} \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \frac{1}{10} \right)^n \right)$$

$$= \frac{1}{10} \cdot \left( 13 + \frac{4}{10} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} \right) =$$

$$= \frac{1}{10} \left( 13 + \frac{4}{9} \right) =$$

$$= \frac{1}{10} \cdot \frac{13 \cdot 9 + 4}{9} = \frac{121}{90}$$

frazione generatrice $\dfrac{134 - 13}{90}$

$$0,\overline{9} = 0,999\ldots =$$

$$= 0,9 + 0,09 + 0,009 + \ldots$$

$$= \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000} + \frac{9}{10.000} + \ldots$$

$$= \frac{9}{10}\left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \ldots\right)$$

$$= \frac{9}{10} \cdot \left(1 + \frac{1}{10} + \left(\frac{1}{10}\right)^2 + \left(\frac{1}{10}\right)^3 + \ldots\right)$$

$$= \frac{9}{10} \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^n =$$

$$= \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{\frac{9}{10}} = 1$$

Analogamente:

$$1,\overline{9} = 2$$

$$14,\overline{9} = 15$$

cioè, la rappresentazione decimale NON è univoca.

# ESERCIZIO:

Per quali valori del parametro $x \in \mathbb{R}$ la serie:

$$\sum_{j=0}^{+\infty} \left( \frac{2+x}{1-x} \right)^j \quad \text{converge?}$$

Per quali valori del parametro $x \in \mathbb{R}$ la serie:

$$\sum_{j=0}^{+\infty} \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^j \quad \text{converge?}$$

$$\Updownarrow$$

$$\left| \frac{1+x}{1-x} \right| < 1$$

$$\begin{cases} \dfrac{1+x}{1-x} > -1 \\ \\ \dfrac{1+x}{1-x} < 1 \end{cases}$$

1) $\dfrac{2+x}{1-x} > -1$

$$\downarrow$$

$$\frac{2+x}{1-x} + 1 > 0$$

$$\frac{2+\cancel{x}+1-\cancel{x}}{1-x} > 0 \longrightarrow \frac{3}{1-x} > 0$$

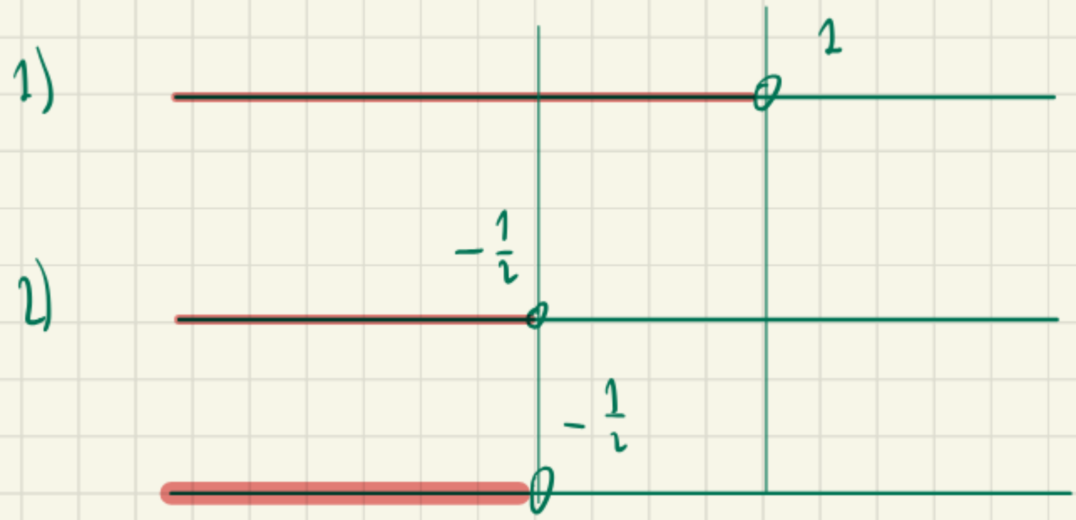
$$1-x > 0 \longrightarrow x < 1$$

2) $\dfrac{2+x}{1-x} < 1 \longrightarrow \dfrac{2+x}{1-x} - 1 < 0$

$$\frac{2+x-1+x}{1-x} < 0$$

$$\frac{1+2x}{1-x} < 0 \longrightarrow 1+2x < 0$$

$$x < -\frac{1}{2}$$



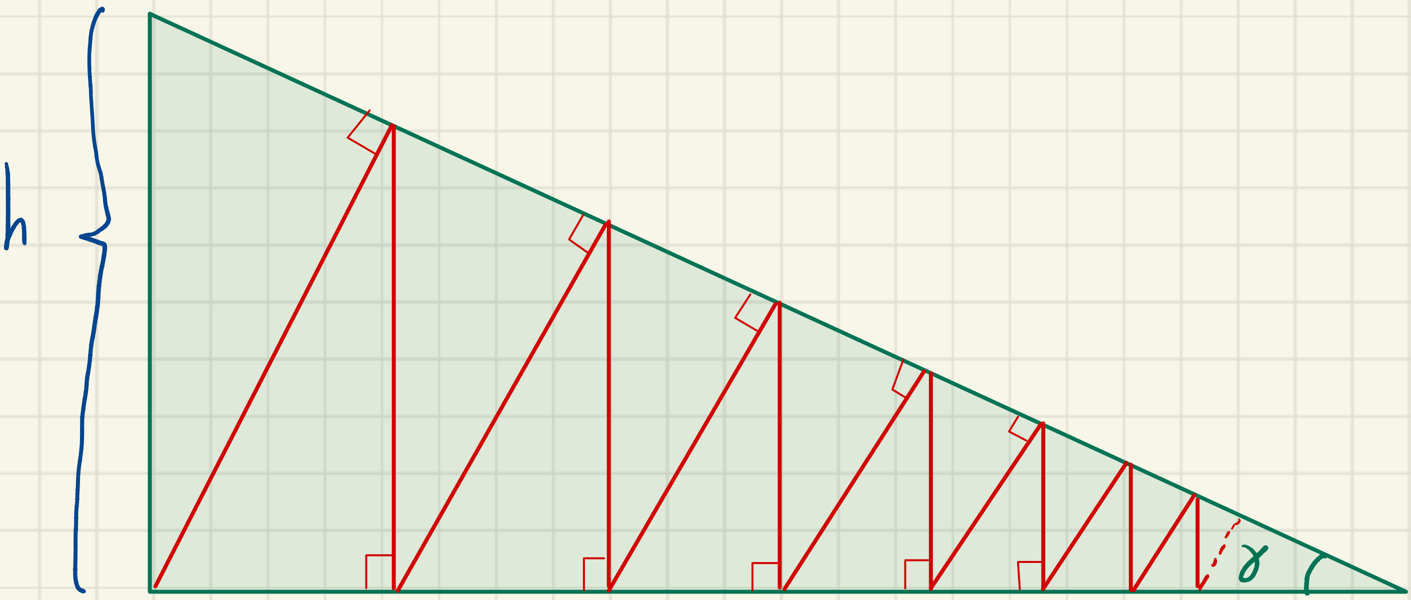

$$\sum_{j=0}^{+\infty}\left(\frac{2+x}{1-x}\right)^j \quad \text{converge} \iff x < -\frac{1}{2}$$

e in tal caso

$$\sum_{j=0}^{+\infty}\left(\frac{2+x}{1-x}\right)^j = \frac{1}{1-\frac{2+x}{1-x}} = \frac{1}{\frac{1-x-2-x}{1-x}} =$$

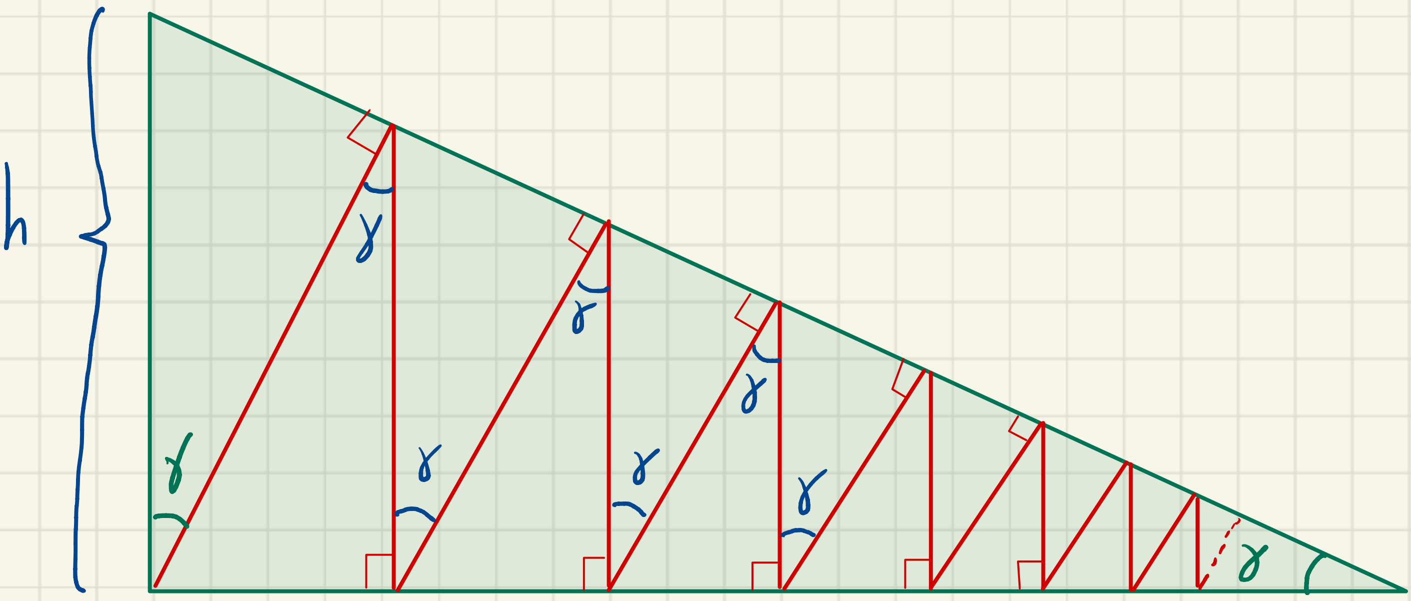
$$= \frac{1}{\frac{-2x-1}{1-x}} = \frac{1-x}{-2x-1} = \frac{x-1}{2x+1}$$

## ESERCIZIO:

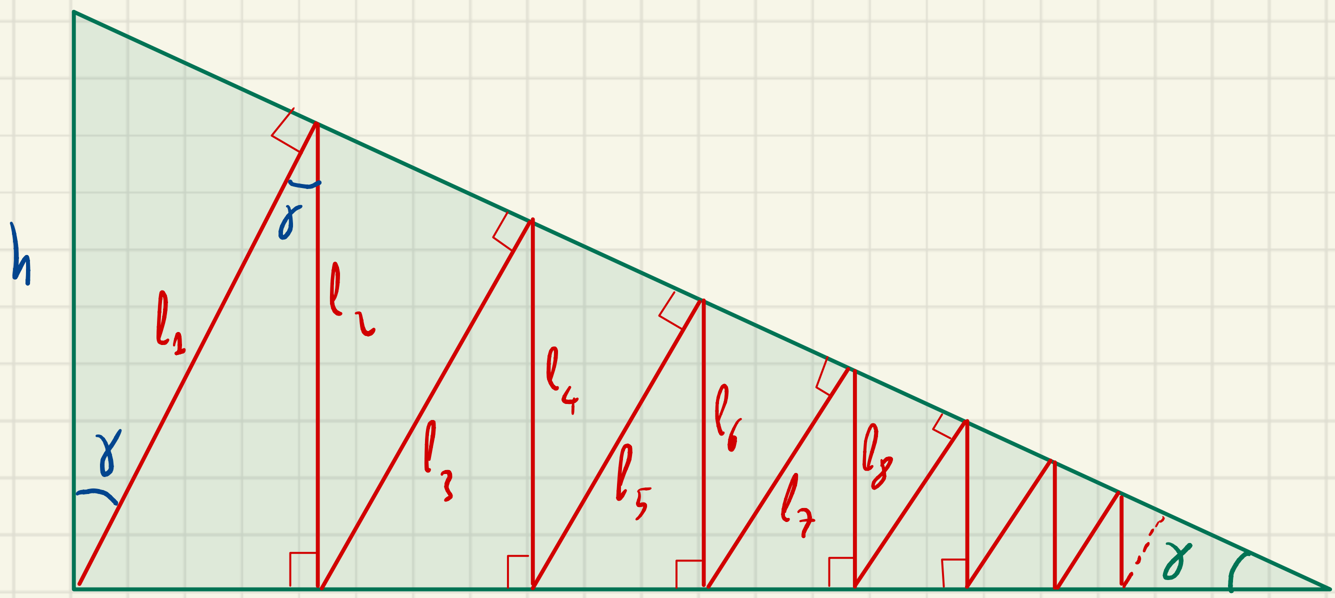



Calcolare la lunghezza della spezzata rossa.

Si osserva che:




Calcolare la lunghezza della spezzata rossa.




$$l_1 + l_2 + l_3 + l_4 + l_5 + \dots = ?$$

$$l_1 = h \cdot \cos\gamma$$

$$l_2 = l_1 \cdot \cos\gamma = (h \cdot \cos\gamma) \cdot \cos\gamma =$$

$$= h \cdot \cos^2\gamma$$

$$l_3 = l_2 \cdot \cos\gamma = (h \cdot \cos^2\gamma) \cdot \cos\gamma =$$

$$= h \cdot \cos^3\gamma$$

In generale:

$$l_n = h \cdot \cos^n \gamma$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} l_n = \sum_{n=1}^{+\infty} h \cdot \cos^n \gamma =$$

$$= h \cdot \cos \gamma \cdot \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} \cos^{n-1} \gamma}_{\sum_{j=0}^{+\infty} (\cos \gamma)^j} \qquad j = n-1$$

$$= h \cdot \cos \gamma \cdot \frac{1}{1 - \cos \gamma} =$$

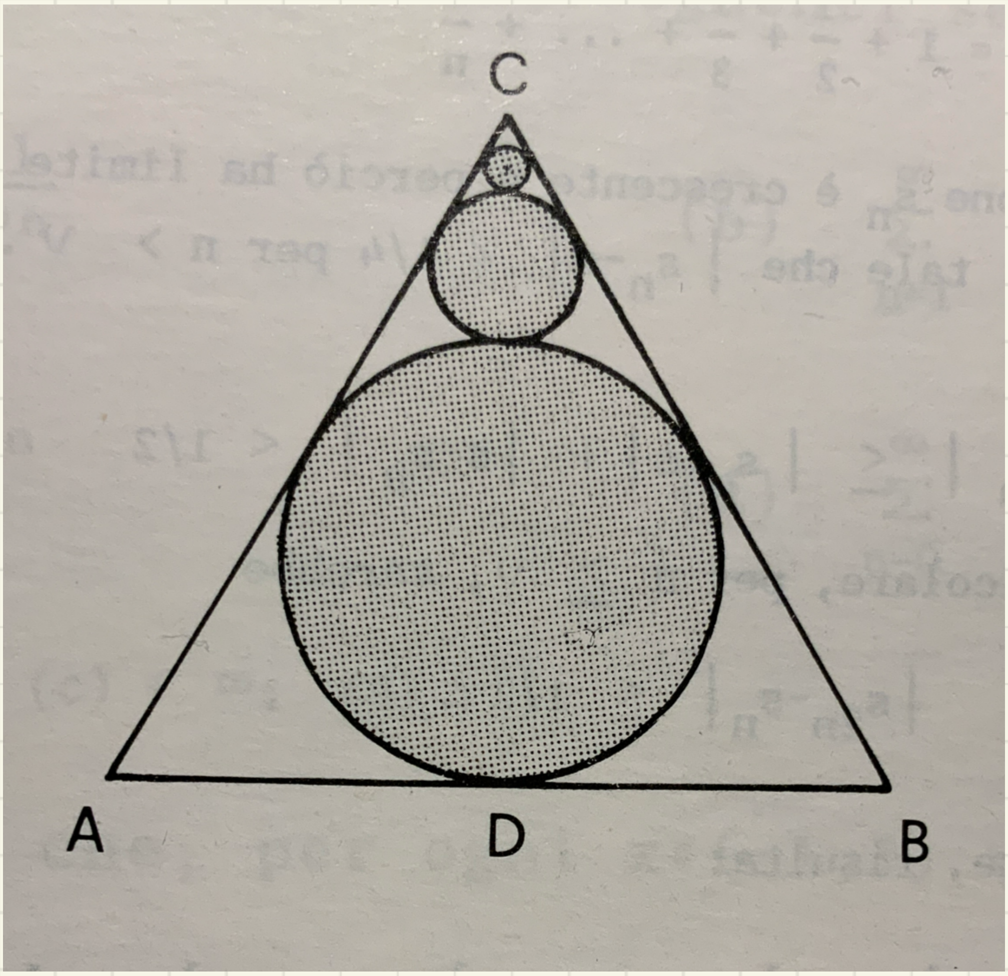
$$= h \cdot \frac{\cos \gamma}{1 - \cos \gamma}$$

Se $\gamma = 60° = \frac{\pi}{3}$

$\cos 60° = \frac{1}{2}$


$$\sum_{n=1} \ell_n = h \cdot \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = h$$

# ESERCIZIO:

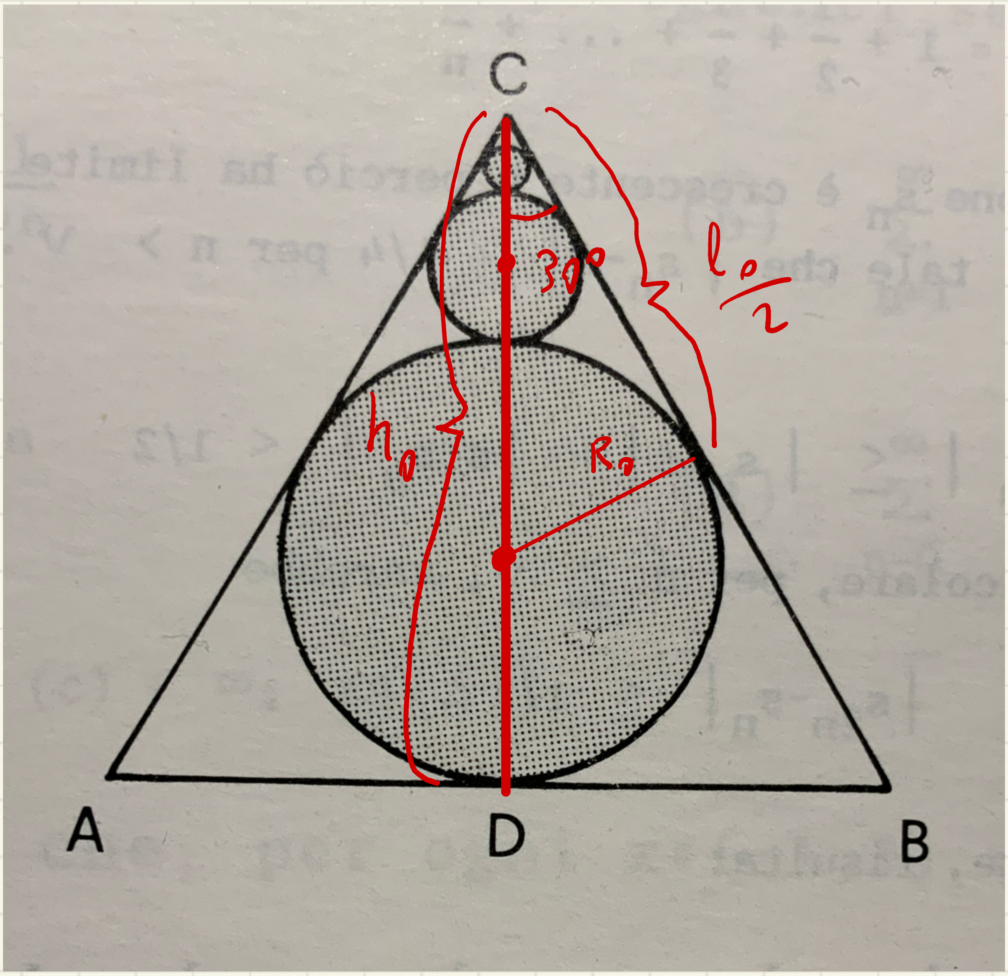



$AC = BC = AB$

$h$ = altezza di $\overset{\triangle}{ABC} = 1$

Calcolare la serie delle aree dei cerchi inscritti.

Solut.:

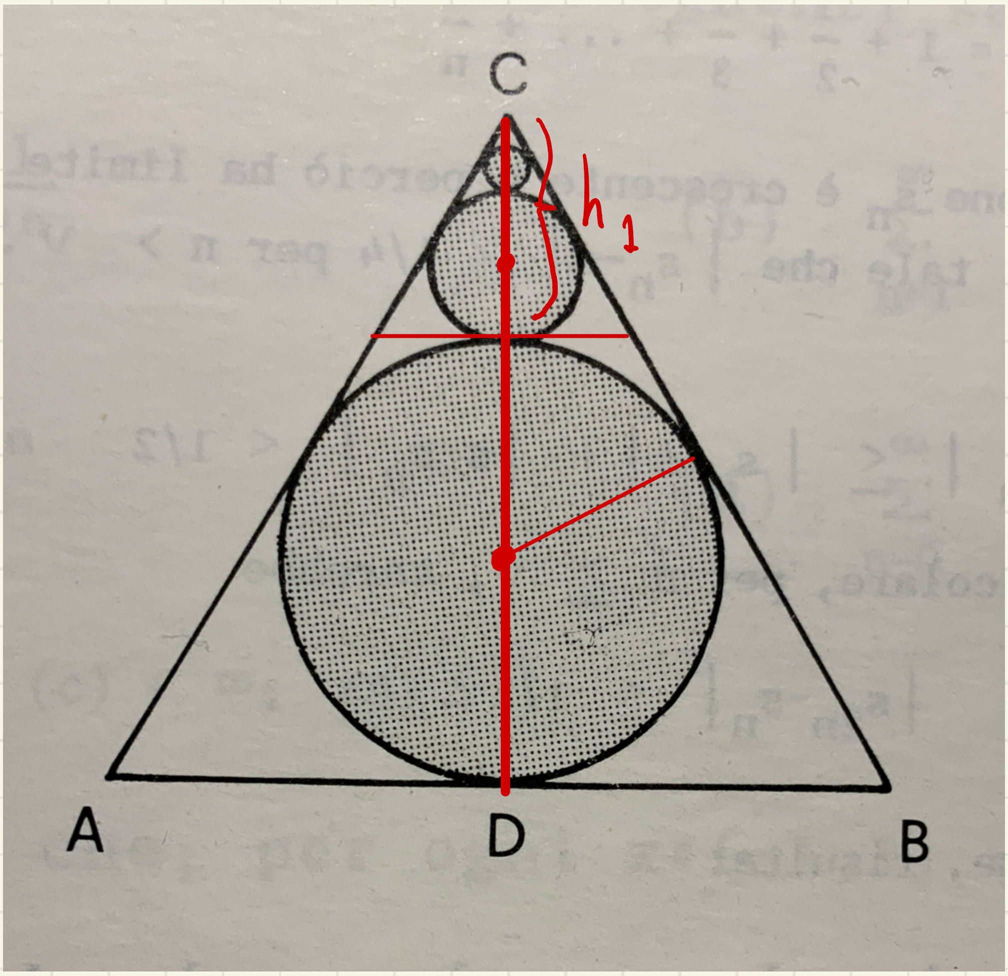



$AC = l_0$

$$h_0 = l_0 \cdot \cos(30°) = l_0 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$l_0 = \frac{2}{\sqrt{3}} h_0 \qquad R_0 = \frac{l_0}{2} \cdot \sin(30°) =$$

$$= \frac{h_0}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{h_0}{3}$$




$$h_1 = h_0 - 2R_0 = h_0 - \frac{2h_0}{3}$$

$$= \frac{h_0}{3}$$

In generale:

$$h_{j+1} = \frac{h_j}{3} \implies h_j = \left(\frac{1}{3}\right)^j h_0 = \left(\frac{1}{3}\right)^j$$

$$R_j = \frac{h_j}{3}$$

$$\text{Area cerchio } j = \pi R_j^2 =$$

$$= \pi \cdot \left( \frac{1}{3} h_j \right)^2 = \frac{\pi}{9} h_j^2$$

$$\sum_{j=0}^{+\infty} \left(\text{Area cerchio } j\right) =$$

$$= \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{\pi}{9} \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^j = \frac{\pi}{9} \sum_{j=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{9}\right)^j$$

$$= \frac{\pi}{9} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{9}} = \frac{\pi}{9} \cdot \frac{9}{8} = \frac{\pi}{8} \qquad \square$$

**TEOREMA:** (condizione NECESSARIA per la convergenza)

Sia $\sum_n a_n$ una serie convergente, allora:

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = 0$$

**DIM.:**

$\sum_n a_n$ convergente significa che la successione delle somme parziali $s_n$ converge

$$s_n = a_0 + a_1 + \dots + a_{n-1} + a_n$$

$$\lim_n s_n = L \in \mathbb{R}$$

Osserviamo che:

$$s_n = \underbrace{a_0 + a_1 + \dots + a_{n-1}}_{\substack{\shortparallel \\ s_{n-1}}} + a_n$$

$$s_n = s_{n-1} + a_n$$

$\Longrightarrow$

$$a_n = s_n - s_{n-1} \xrightarrow[n]{} L - L = 0$$

$$\begin{array}{ccc} s_n & & s_{n-1} \\ \downarrow n & & \downarrow n \\ L & & L \end{array}$$

$\square$

Infatti le serie geometriche

$$\sum_n 2^n \quad , \quad \sum_n (-1)^n$$

non convergono, essendo:

$$\lim_{n \to +\infty} 2^n = +\infty$$

$$\nexists \lim_n (-1)^n$$

Esempio:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt[n]{n}$$

Siccome $\lim_{n} \sqrt[n]{n} = 1 \neq 0$

$\sum \sqrt[n]{n}$ non converge

OSS.:

$(a_n)_n$

Allora:

$$\lim_n a_n = 0 \iff \lim_n |a_n| = 0$$

DIM.:

È sufficiente scrivere la definizione di limite di entrambi e verificare che sono le stesse:

$$|a_n - 0| = |a_n| = ||a_n| - 0|$$

## Esercizio:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot \frac{n^2-1}{n^2+1}$$

$$|a_n| = \left| (-1)^n \cdot \frac{n^2-1}{n^2+1} \right| = \frac{n^2-1}{n^2+1} =$$

$$= \frac{n^2}{n^2} \cdot \frac{1-\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n^2}} = \frac{1-\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n^2}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 \neq 0$$

quindi:

$$a_n \not\xrightarrow[n]{} 0$$

$\Longrightarrow$

$$\sum (-1)^n \cdot \frac{n^2-1}{n^2+1}$$ <u>non</u> converge

Tuttavia, la condizione

$$a_n \xrightarrow[n]{} 0$$

non è sufficiente a garantire la convergenza della serie $\sum_n a_n$

## Esempio:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots \quad ?$$

(serie armonica (semplice))

$$\lim_{n} \frac{1}{n} = 0$$

ma la serie converge!

# No!

$$s_1 = 1$$

$$s_2 = 1 + \frac{1}{2}$$

$$\underset{\substack{\| \\ s_{2^2}}}{s_4} = 1 + \frac{1}{2} + \underset{\substack{\geq \\ \frac{1}{4}}}{\frac{1}{3}} + \underset{\substack{\geq \\ \frac{1}{4}}}{\frac{1}{4}} \geq 1 + \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} =$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

$$= 1 + 2 \cdot \frac{1}{2}$$

$$\underset{\substack{\| \\ s_{2^3}}}{s_8} = \underbrace{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{\substack{\| \\ s_4}} + \underset{\substack{\geq \\ \frac{1}{8}}}{\frac{1}{5}} + \underset{\substack{\geq \\ \frac{1}{8}}}{\frac{1}{6}} + \underset{\substack{\geq \\ \frac{1}{8}}}{\frac{1}{7}} + \underset{\substack{\geq \\ \frac{1}{8}}}{\frac{1}{8}} \geq$$

$$\geq s_4 + 4 \cdot \frac{1}{8} = s_4 + \frac{1}{2} \geq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

$$= 1 + 3 \cdot \frac{1}{2}$$

$$s_{16} = s_8 + \underbrace{\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \cdots + \frac{1}{16}}_{8 \text{ addendi}} \geq$$

$$\begin{array}{ccccc} \shortparallel & & \vee\!\!/ & \vee\!\!/ & \vee\!\!/ & & \vee\!\!/ \\ s_{2^4} & & \frac{1}{16} & \frac{1}{16} & \frac{1}{16} & & \frac{1}{16} \end{array}$$

$$\geq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 8 \cdot \frac{1}{16} =$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} =$$

$$= 1 + 4 \cdot \frac{1}{2}$$

$\vdots$

$$s_{2^m} \geq 1 + m \cdot \frac{1}{2} = 1 + \frac{m}{2} \xrightarrow{m \to +\infty} +\infty$$

Quindi la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty$$

è divergente.

## OSSERVAZIONE (sulle serie a termini $\geq 0$)

$(a_n)_n$ ,

$a_n \geq 0 \quad \forall n$

Allora la serie $\sum a_n$

o converge oppure diverge.

DIM.:

Sia $(s_n)_n$ la successione

delle somme parziali.

$$s_{n-1} = a_0 + a_1 + \dots + a_{n-1}$$

$$s_n = a_0 + a_1 + \dots + a_{n-1} + a_n$$

$$s_n - s_{n-1} = a_n \geq 0$$

$\Longrightarrow$

$$s_n \geq s_{n-1} \quad \forall n$$

cioè : $(s_n)_n$ è crescente

$\Longrightarrow$ $\sum a_n$ o converge

o diverge

In particolare, se $(s_n)_n$ è <u>LIMITATA</u>, allora

$\sum a_n$ converge.

## Notazione:

$(a_n)_n \,, \quad a_n \geq 0 \quad \forall n$

$\sum a_n = +\infty$ serie divergente

$\sum a_n < +\infty$ serie convergente

## TEOREMA (criterio del confronto)

$(a_n)_n$ , $(b_n)_n$

$0 \leq a_n \leq b_n \quad \forall n$

Allora:

1) Se la serie $\sum b_n$ è convergente allora:

$\sum a_n$ è convergente

2) Se la serie $\sum a_n$ è divergente allora:

$\sum b_n$ è divergente

**DIM.:**

① $\forall n$:

$$s_n = a_0 + a_1 + \dots + a_n \leq$$

$$\leq b_0 + b_1 + \dots + b_n \leq \sum_{k=0}^{+\infty} b_k \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow$ $(s_n)_n$ è crescente e limitata

$\Rightarrow$ $(s_n)$ è convergente

② Per negazione: se $\sum b_n$ fosse convergente, allora da ① $\sum a_n$ convergente ASS.

OSS.:

Nel criterio del confronto è sufficiente che $\exists\, \delta \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} 0 \le a_n \le b_n \\ \forall\, n \ge \delta \end{cases}$$

Allora:

1) $\sum b_n < +\infty \implies \sum a_n < +\infty$

2) $\sum a_n = +\infty \implies \sum b_n = +\infty$

Esempio:

$$\sum_{j=0}^{+\infty} \left( \frac{1}{3+\sin(j)} \right)^j \quad ?$$

$$\sin(j) \geq -1$$

$$3+\sin(j) \geq 3-1 = 2$$

$$0 \leq \frac{1}{3+\sin(j)} \leq \frac{1}{2}$$

$$0 \leq \left( \frac{1}{3+\sin(j)} \right)^j \leq \left( \frac{1}{2} \right)^j$$

$$\sum \left( \frac{1}{2} \right)^j < +\infty$$

$$\sum_{j=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{3+\sin(j)}\right)^j$$

$$\sin(j) \geq -1 \qquad \forall j$$

$$\Downarrow$$

$$3+\sin(j) \geq 2$$

$$\frac{1}{3+\sin(j)} \leq \frac{1}{2} \longrightarrow \left(\frac{1}{3+\sin(j)}\right)^j \leq \left(\frac{1}{2}\right)^j$$

$$\sum_{j=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{3+\sin(j)}\right)^j \leq \sum_{j=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^j < +\infty$$

$$\Rightarrow \sum_{j=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{3+\sin(j)}\right)^j \quad \text{converge}$$

- $\sum a_n$ converge $\Rightarrow a_n \to 0$

- criterio del confronto

## Esempio:

A

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$$

Infatti:

$$\sqrt{n} \leq n \qquad \forall n > 0$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{n}$$

$$\sum \frac{1}{n} = +\infty \implies \sum \frac{1}{\sqrt{n}} = +\infty$$

A'

Provare che:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} = +\infty$$

se $\alpha \leq 1$

(usare il fatto che:

$$n \geq n^{\alpha}$$
)

B $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = ?$

Osserviamo che:

$$n! \geq 2^{n-1}$$

( Prova per induzione:

$$n = 0 : \quad 0! = 1 \geq \frac{1}{2} \quad \checkmark$$

$$P(K) : \quad K! \geq 2^{K-1} \Longrightarrow \underbrace{(K+1)! \geq 2^{K}}_{P(K+1)}$$

$$(K+1)! = (K+1) \cdot K! \geq \underset{\underset{2}{\vee\!\!/}}{(K+1)} \cdot 2^{K-1} \geq$$

$$\geq 2 \cdot 2^{K-1} = 2^{K} \; )$$

$$\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{2}{2^n}$$

$$\sum_n \frac{2}{2^n} = 2 \cdot \sum_n \frac{1}{2^n} < +\infty$$

$$\Longrightarrow \sum \frac{1}{n!} < +\infty$$

Si prova che:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = e$$

# SERIE ARMONICA:

$\alpha \in \mathbb{R}$

$$\sum_n \frac{1}{n^\alpha} = \begin{cases} = +\infty & \text{se } \alpha \leq 1 \\ ? & \text{se } \alpha > 1 \end{cases}$$

TEOREMA: (Criterio di condensazione)

$(a_n)_n$ t.c.: $a_n \geq 0 \quad \forall n$

$a_n \searrow$

(cioè: $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \dots$)

Allora la serie $\sum a_n$

converge se e solo se ($\Longleftrightarrow$)

$$\sum_{k=0}^{+\infty} 2^k a_{2^k} = a_1 + 2a_2 + 4a_4 + 8a_8 + \dots$$

converge.

DIM.:

$\Longleftarrow$ :

$$\underset{2^2-1}{s_{3}} = a_1 + a_2 + a_3 \leq a_1 + (a_2 + \underset{\substack{\wedge\!\!\!\!\!\parallel \\ a_2}}{a_3}) \leq$$

$$\leq a_1 + 2 a_{\underset{2^1}{2}}$$

$$\underset{2^3-1}{s_{7}} = s_3 + a_4 + \underset{\substack{\wedge\!\!\!\!\!\parallel \\ a_4}}{a_5} + \underset{\substack{\wedge\!\!\!\!\!\parallel \\ a_4}}{a_6} + \underset{\substack{\wedge\!\!\!\!\!\parallel \\ a_4}}{a_7} \leq$$

$$\leq s_3 + 4 \cdot a_4 \leq a_1 + 2 a_2 + 4 a_{\underset{2^2}{4}}$$

$$\underset{2^4-1}{s_{15}} = s_7 + a_8 + a_9 + a_{10} + a_{11} + a_{12} + a_{13} +$$

$$+ a_{14} + a_{15} \leq$$

$$\leq s_7 + 8 a_8 \leq a_1 + 2 a_2 + 4 a_4 + 8 a_{\underset{2^3}{8}}$$

$\Longrightarrow$

$$S_{2^{k+1}-1} \leq a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \dots + 2^k a_{2^k}$$

$\Longrightarrow$

$$(0 \leq) \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \leq \sum_{k=0}^{+\infty} 2^k a_{2^k} < +\infty$$

$\Longrightarrow$ :

$$s_2 = a_1 + a_2 \geq \frac{1}{2} a_1 + \frac{1}{2} \cdot 2 a_2 =$$

$$= \frac{1}{2} \left( a_1 + 2 a_2 \right)$$

$$s_4 = s_2 + \underset{\substack{\vee\!\shortparallel \\ a_4}}{a_3} + a_4 \geq s_2 + 2 \cdot a_4 =$$

$$= s_2 + \frac{1}{2} \cdot 4 a_4 \geq$$

$$\geq \frac{1}{2} \left( a_1 + 2 a_2 \right) + \frac{1}{2} \cdot 4 a_4 =$$

$$= \frac{1}{2} \left( a_1 + 2 a_2 + 4 a_4 \right)$$

$$s_8 = s_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 \geq$$

$$\geq s_4 + 4 \cdot a_8 = s_4 + \frac{1}{2} \cdot 8 a_8$$

$$\geq \frac{1}{2} \left( a_1 + 2 a_2 + 4 a_4 + 8 a_8 \right)$$

$$\vdots$$

$$s_{2^k} \geq \frac{1}{2} \left( a_1 + 2 a_2 + 4 a_4 + \dots + 2^k a_{2^k} \right)$$

$$\Longrightarrow :$$

$$+\infty > \sum_{n=1} a_n \geq \sum_k 2^k a_{2^k}$$

$$\square$$