19 Settembre 2025

BINOMIO DI NEWTON

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} \cdot b^k$$

Scriviamo ora $(a+b)^n$
al variare di n:

$$(a+b)^1 = \binom{1}{0} a + \binom{1}{1} b$$

$$(a+b)^2 = \binom{2}{0} a^2 + \binom{2}{1} a \cdot b + \binom{2}{2} b^2$$

$$(a+b)^3 = \binom{3}{0} a^3 + \binom{3}{1} a^2 b + \binom{3}{2} a b^2 + \binom{3}{3} b^3$$

$\vdots$

$$n=1 \qquad \underset{1}{\binom{1}{0}}a + \underset{1}{\binom{1}{1}}b$$

$$n=2 \qquad \binom{2}{0}a^2 + \binom{2}{1}ab + \binom{2}{2}b^2$$

$$n=3 \qquad \binom{3}{0}a^3 + \binom{3}{1}a^2b + \binom{3}{2}ab^2 + \binom{3}{3}b^3$$

$$n=4 \qquad \binom{4}{0}a^4 + \binom{4}{1}a^3b + \binom{4}{2}a^2b^2 + \binom{4}{3}ab^3 + \binom{4}{4}b^4$$

$\binom{1}{0}=1$, $\binom{1}{1}=1$, $\binom{2}{0}=1$, $\binom{2}{2}=1$, $\binom{3}{0}=1$, $\binom{3}{3}=1$, $\binom{4}{0}=1$, $\binom{4}{4}=1$

. . . .

Valgono:

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$$

$$\binom{n}{0} = 1 \qquad \binom{n}{n} = 1$$

$n = 1$ 1   1

$n = 2$ 1   2   1

$n = 3$ 1   3   3   1

$n = 4$ 1   4   6   4   1

È facile ottenere i coefficienti del binomio $(a+b)^n$:

$$
\begin{array}{lccccccccccc}
n=1 & & & & & 1 & & 1 & & & & \\
n=2 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
n=3 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
n=4 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
n=5 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}
$$

- - - - - - - - - - . .

$$(a+b)^5 = 1 \cdot a^5 + 5 \cdot a^4 b + 10\, a^3 b^2 + 10\, a^2 b^3 + 5 \cdot a b^4 + 1 \cdot b^5$$

Allo schema seguente è

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

. . . .

attribuito il nome di

TRIANGOLO DI TARTAGLIA

IL PRINCIPIO DI INDUZIONE

Il principio di induzione è un metodo utile per dimostrare formule o teoremi che dipendono da un parametro intero (in $\mathbb{N}$) o, in generale, da un parametro discreto.

Esempi:

(A)

$$\sum_{j=0}^{n} j = \frac{n(n+1)}{2}$$

(cioè:

$$0 + 1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) + n =$$

$$= \frac{n(n+1)}{2}$$
)

(B)

$$\sum_{j=0}^{n} j^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

cioè :

$$0^2 + 1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2 + n^2 =$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

c

$$\sum_{j=0}^{n} j^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

D

Binomio di Newton:

$$(a+b)^{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k}$$

Analizziamo il primo esempio

$$\sum_{j=0}^{n} j = \frac{n(n+1)}{2}$$

Provare questa formula equivale a provare che tutte le (infinite) uguaglianze seguenti sono vere:

$$\sum_{j=0}^{n} j = \frac{n(n+1)}{2}$$

$n = 0$ $$0 = \frac{0 \cdot (0+1)}{2}$$

$n = 1$ $$0 + 1 = \frac{1 \cdot (1+1)}{2}$$

$n = 2$ $$0 + 1 + 2 = \frac{2 \cdot (2+1)}{2}$$

$n = 3$ $$0 + 1 + 2 + 3 = \frac{3 \cdot (3+1)}{2}$$

$\vdots$

Induzione (Idea)

$n = 0$ $\quad 0 = \frac{0 \cdot (0+1)}{2}$ $\quad P(0)$

$n = 1$ $\quad 0 + 1 = \frac{1 \cdot (1+1)}{2}$ $\quad P(1)$

$n = 2$ $\quad 0 + 1 + 2 = \frac{2 \cdot (2+1)}{2}$ $\quad P(2)$

$n = 3$ $\quad 0 + 1 + 2 + 3 = \frac{3 \cdot (3+1)}{2}$ $\quad P(3)$

$n = 4$ $\quad 0 + 1 + 2 + 3 + 4 = \frac{4 \cdot (4+1)}{2}$ $\quad P(4)$

$\vdots$

Principio di Induzione:

$$\{ P(n) \mid n \in \mathbb{N} \}$$

un'affermazione o un'uguaglianza che dipende da un parametro n

Hp:

$(P(\bar{n}))$

1) $P(0)$ è vera

2) $P(K)$ vera $\Longrightarrow$ $P(K+1)$ vera

(Implicazione induttiva)

Th:

$(\forall n \geq \bar{n})$

$P(n)$ è vera $\forall n \in \mathbb{N}$

Idea grezza:

Sappiamo che:

- $P(0)$ è vera
- $\forall K \in \mathbb{N}$:
  $\left. P(K) \text{ vera} \Longrightarrow P(K+1) \text{ vera} \right\} \mathrm{I}$

Dunque:

$P(0)$ vera

$K=0$: $P(0) \Longrightarrow P(1)$ vera

$K=1$: $P(1) \Longrightarrow P(2)$ vera

$K=3$

....

Idea grezza:

$P(0)$ è vera

Ip. induttiva per $K = 0$

$P(1)$ è vera

Ip. induttiva per $K = 1$

$P(2)$ è vera

Ip. induttiva per $K = 2$

$P(3)$ è vera

$\vdots$

La dimostrazione "vera" del principio di Induzione si basa sul:

Principio del minimo in $\mathbb{N}$:

Ogni sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{N}$ ammette minimo:

$$\forall A \subseteq \mathbb{N},\ A \neq \emptyset$$
$$\exists m \in A : \quad m \leq a \quad \forall a \in A$$

(cioè m è il minimo di A)

DIMOSTRAZIONE (Principio di Induzione)

Si procede per assurdo:

cioè neghiamo la tesi del teorema:

$$\forall n \in \mathbb{N} : P(n) \text{ è vera}$$

$$=$$

$$\exists \bar{n} \in \mathbb{N} : P(\bar{n}) \text{ falsa}$$

supponiamo, quindi:

$$\exists\, \bar{n} \in \mathbb{N} : \quad P(\bar{n}) \text{ falsa}$$

Sia:

$$A = \{ n \in \mathbb{N} \mid P(n) \text{ è falsa} \}$$

allora:

- $A \subseteq \mathbb{N}$
- $\bar{n} \in A \implies A \neq \emptyset$

Per il principio del minimo:

$\exists\, m \in A : \quad m$ è il minimo di A

si ha che $m \neq 0$ $(\Rightarrow m \geq 1)$

(se fosse $m = 0 \Rightarrow 0 \in A$

$\Rightarrow P(0)$ è falsa IMPOSSIBILE per ipotesi)

$m > 0 \Rightarrow m-1 \in \mathbb{N}$

ma si ha che:

$m-1 \notin A \Longrightarrow P(m-1)$ è vera

Usando l'implicazione induttiva

con $K = m-1$

$P(m-1)$ vera $\Longrightarrow$ $P(m)$ è vera

ma $m \in A$ $\Longrightarrow$ $P(m)$ è falsa

ASSURDO !!

Dunque: tutte le $P(n)$

sono VERE !

FINE

ESEMPIO: 1

Proviamo:

$$\sum_{j=0}^{n} j = \frac{n(n+1)}{2} \qquad P(n)$$

usando il principio di Induzione.

$P(0)$:

$$\sum_{j=0}^{0} j = \frac{0(0+1)}{2}$$

$$0 = 0 \qquad \text{vera}$$

✓

Rimane da provare

l'implicazione induttiva :

Se $P(k)$ vera $\overset{?}{\Longrightarrow}$ $P(k+1)$ vera

$$\sum_{j=0}^{k} j = \frac{k(k+1)}{2}$$

$$\sum_{j=0}^{k+1} j = \frac{(k+1)\cdot((k+1)+1)}{2}$$

$$= \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

$$\sum_{j=0}^{k+1} j = \underbrace{1+2+\ldots+(k-1)+k}_{\sum_{j=0}^{k} j = \frac{k\cdot(k+1)}{2}} + (k+1) =$$

$$= \frac{k\cdot(k+1)}{2} + k+1 =$$

$$= \frac{k\cdot(k+1) + 2(k+1)}{2} =$$

$$= \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

✓

ESEMPIO 2:

Disuguaglianza di Bernoulli:

$\forall x \in \mathbb{R} : x > -1 \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$(1+x)^n \geq 1 + nx$$

Dimostriamo per induzione che:

$$\forall x \in \mathbb{R} : x > -1 \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$(1+x)^n \geq 1 + nx \qquad P(n)$$

$P(0)$:

$$(1+x)^0 \geq 1 + 0 \cdot x$$

$$1 \geq 1$$

✓

(infatti $x > -1 \Rightarrow 1 + x > 0$)

?

$P(K)$ vera $\Longrightarrow$ $P(K+1)$ vera

$$(1+x)^K \geq 1+Kx \qquad (1+x)^{K+1} \geq 1+(K+1)x$$

$$(1+x)^{k+1} = (1+x)(1+x)^k$$

per ipotesi induttiva:

$$(1+x)^k \geq 1 + kx$$

moltiplicando ambo i membri

per $1+x$ (>0 per ipotesi)

$$\underbrace{(1+x)(1+x)^k}_{\substack{\shortparallel \\ (1+x)^{k+1}}} \geq \underbrace{(1+x)(1+kx)}$$

$$= 1 + kx + x + kx^2$$

$$= 1 + (k+1)x + \underbrace{kx^2}_{\geq 0}$$

$$\geq 1 + (k+1)x$$

$\blacksquare$

Vediamo un esempio di come si affronta un problema, avvalendoci del principio di induzione.

PROBLEMA:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (n-1)^2 + n^2 = ?$$

cioè:

$$\sum_{j=0}^{n} j^2 = ?$$

Nell' esercizio precedente si è visto che:

$$\sum_{j=0}^{n} j = \frac{n(n+1)}{2} =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n}_{\text{polinomio in } n \text{ di grado } 2}$$

Come "indovinare"

$$\sum_{j=0}^{n} j^2 = ?$$

Facciamo l'ipotesi (del tutto arbitraria) che

$$\sum_{j=0}^{n} j^2 = \underbrace{a_0 + a_1 n + a_2 \cdot n^2 + a_3 n^3}_{\text{polinomio in } n \text{ di grado } 3}$$

Si deve scoprire se esistono dei numeri

$$a_0\,,\ a_1\,,\ a_2\,,\ a_3$$

per cui la formula sopra sia vera.

Perché di grado 3?

$$\sum_{j=0}^{n} j^2 = \underbrace{\underset{n^2}{1^2} + \underset{n^2}{2^2} + \underset{n^2}{3^2} + \dots + \underset{n^2}{(n-1)^2} + \underset{n^2}{n^2}}_{n \text{ addendi}}$$

$\Longrightarrow$

$$\sum_{j=0}^{n} j^2 \leq n \cdot n^2 = n^3$$

terzo grado

I PASSO:

Come si trovano i numeri

$$a_0, a_1, a_2, a_3$$

in

$$\sum_{j=0}^{n} j^2 = a_0 + a_1 n + a_2 \cdot n^2 + a_3 n^3 \, ?$$

Se la formula

$$\sum_{j=0}^{n} j^2 = a_0 + a_1 n + a_2 \cdot n^2 + a_3 n^3$$

è vera $\forall n$, allora

per $n = 0$:

$$\sum_{j=0}^{0} j^2 = a_0 + a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 0^2 + a_3 \cdot 0^3$$

$$\boxed{0 = a_0}$$ 1° condizione

per $n = 1$

$$\sum_{j=0}^{1} j^2 = a_0 + a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 1^2 + a_3 \cdot 1^3$$

$$\boxed{1^2 = a_0 + a_1 + a_2 + a_3}$$ 2° condizione

per $n = 2$:

$$\sum_{j=0}^{2} j^2 = a_0 + a_1 \cdot 2 + a_2 \cdot 2^2 + a_3 \cdot 2^3$$

$$\shortparallel$$

$$1^2 + 2^2$$

$$\boxed{5 = a_0 + 2a_1 + 4a_2 + 8a_3}$$

3° cond.

per $n = 3$:

$$\sum_{j=0}^{3} j^2 = a_0 + a_1 \cdot 3 + a_2 \cdot 3^2 + a_3 \cdot 3^3$$

$$\shortparallel$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2$$

$$\boxed{14 = a_0 + 3a_1 + 9a_2 + 27a_3}$$

4° cond.

Si ha quindi:

$$\begin{cases} \lambda_0 = 0 \\ \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1 \\ \lambda_0 + 2\lambda_1 + 4\lambda_2 + 8\lambda_3 = 5 \\ \lambda_0 + 3\lambda_1 + 9\lambda_2 + 27\lambda_3 = 14 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda_0 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1 \\ 2\lambda_1 + 4\lambda_2 + 8\lambda_3 = 5 \\ 3\lambda_1 + 9\lambda_2 + 27\lambda_3 = 14 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1 \\ 2\lambda_1 + 4\lambda_2 + 8\lambda_3 = 5 \\ 3\lambda_1 + 9\lambda_2 + 27\lambda_3 = 14 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = 1 - \lambda_2 - \lambda_3 \\ 2(1 - \lambda_2 - \lambda_3) + 4\lambda_2 + 8\lambda_3 = 5 \\ 3(1 - \lambda_2 - \lambda_3) + 9\lambda_2 + 27\lambda_3 = 14 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \quad \text{''} \\ 2 + 2\lambda_2 + 6\lambda_3 = 5 \\ 3 + 6\lambda_2 + 24\lambda_3 = 14 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2 + 2\lambda_2 + 6\lambda_3 = 5 \\ 3 + 6\lambda_2 + 24\lambda_3 = 14 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda_2 = \frac{3}{2} - 3\lambda_3 \\ 3 + 6\left(\frac{3}{2} - 3\lambda_3\right) + 24\lambda_3 = 14 \end{cases}$$

$$3 + 9 - 18\lambda_3 + 24\lambda_3 = 14$$

$$6\lambda_3 = 2$$

$$\lambda_3 = \frac{1}{3}$$

$$\lambda_2 = \frac{3}{2} - 3 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$$

$$\lambda_0 = 0 \qquad \lambda_3 = \frac{1}{3} \qquad \lambda_2 = \frac{1}{2}$$

$$\lambda_1 = 1 - \lambda_2 - \lambda_3 = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

$$\sum_{j=0}^{n} j^2 = \lambda_0 + \lambda_1 n + \lambda_2 \cdot n^2 + \lambda_3 n^3$$

$$= \frac{1}{6} n + \frac{1}{2} n^2 + \frac{1}{3} n^3 =$$

$$= \frac{n + 3n^2 + 2n^3}{6} =$$

$$= \frac{n(1 + 3n + 2n^2)}{6}$$

$$= \frac{n(2n+1)(n+1)}{6}$$

Per il momento si è solo provato che:

$$\sum_{j=0}^{n} j^2 = \frac{n(2n+1)(n+1)}{6}$$

se $n = 0, 1, 2, 3$

Dobbiamo provare che tale formula è vera $\underline{\forall n}$

Proviamolo <u>PER INDUZIONE</u>

$$\sum_{j=0}^{n} j^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad P(n)$$

$P(0)$:

$$\sum_{j=0}^{0} j^2 = \frac{0(0+1)(0+1)}{6}$$

$$0 = 0 \qquad \checkmark$$

$P(0)$ è vera

Rimane da provare

l' implicazione induttiva

$$P(k) \text{ vera} \overset{?}{\Longrightarrow} P(k+1) \text{ vera}$$

$$\sum_{j=0}^{k} j^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

$$\sum_{j=0}^{k+1} j^2 = \frac{(k+1)\left((k+1)+1\right)\cdot\left(2(k+1)+1\right)}{6} =$$

$$= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

$$\sum_{j=0}^{K+1} j^2 = \underbrace{1^2 + 2^2 + \ldots + (K-1)^2 + K^2}_{\sum_{j=0}^{K} j^2 = \frac{K(K+1)(2K+1)}{6}} + (K+1)^2 =$$

$$= \frac{K(K+1)(2K+1)}{6} + (K+1)^2 =$$

$$= \frac{(K+1)\left[K(2K+1) + 6(K+1)\right]}{6} =$$

$$= \frac{(K+1)(2K^2 + K + 6K + 6)}{6}$$

$$= \frac{(K+1)(2K^2 + 7K + 6)}{6}$$

si fattorizza
$(K+2)(2K+3)$

$$= \frac{(K+1)(K+2)(2K+3)}{6}$$

EJERCIZIO :

(c)

$$\sum_{j=0}^{n} j^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

$$\sum_{j=0}^{n} j^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 =$$

$$= \left(\sum_{j=0}^{n} j\right)^2$$

EJEMPIO 3 ((2,2)

Prova per induzione del Binomio di Newton:

$$(a+b)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^{n-j} b^j$$

SOLUZIONE:

<u>$n=1$</u>: vera

$$(a+b) = \overset{1}{\overset{\shortparallel}{\binom{1}{0}}} a + \overset{1}{\overset{\shortparallel}{\binom{1}{1}}} b$$

$$P(k) \text{ vera } \overset{?}{\Longrightarrow} P(k+1) \text{ vera}$$

$$(a+b)^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} a^{k-j} b^j$$

$$(a+b)^{k+1} = \sum_{j=0}^{k+1} \binom{k+1}{j} a^{k+1-j} b^j$$

$$(a+b)^{k+1} = (a+b)(a+b)^k =$$

$$= (a+b) \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} a^{k-j} b^j =$$

$$= a \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} a^{k-j} b^j +$$

$$+ b \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} a^{k-j} b^j =$$

$$= \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} a^{k+1-j} b^j$$

$$+ \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} a^{k-j} b^{j+1}$$

$$= \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} a^{k+1-j} b^{j} +$$

$$+ \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} a^{k-j} b^{j+1}$$

$$\| \quad \ell = j+1 \quad j = \ell - 1$$

$$= \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} a^{k+1-j} b^{j} +$$

$$+ \sum_{\ell=1}^{k+1} \binom{k}{\ell-1} a^{k-(\ell-1)} b^{\ell}$$

$$= \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} a^{k+1-j} b^{j} +$$

$$+ \sum_{\ell=1}^{k+1} \binom{k}{\ell-1} a^{k+1-\ell} b^{\ell}$$

$$= \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} a^{k+1-j} b^{j} +$$

$$+ \sum_{l=1}^{k+1} \binom{k}{l-1} a^{k+1-l} b^{l}$$

(usiamo la stessa lettera $j \to s$, $l \to s$)

$$= \sum_{s=0}^{k} \binom{k}{s} a^{k+1-s} b^{s} +$$

$$+ \sum_{s=1}^{k+1} \binom{k}{s-1} a^{k+1-s} b^{s}$$

$$= \sum_{s=0}^{k} \binom{k}{s} a^{k+1-s} b^{s} +$$

$$+ \sum_{s=1}^{k+1} \binom{k}{s-1} a^{k+1-s} b^{s}$$

$$= \underbrace{\binom{k}{0}}^{1}_{\,} a^{k+1} + \sum_{s=1}^{k} \binom{k}{s} a^{k+1-s} b^{s}$$

$$+ \underbrace{\binom{k}{k}}_{1} b^{k+1} + \sum_{s=1}^{k} \binom{k}{s-1} a^{k+1-s} b^{s}$$

$$= a^{k+1} + b^{k+1} +$$

$$+ \sum_{s=1}^{k} \underbrace{\left[\binom{k}{s} + \binom{k}{s-1} \right]}_{\binom{k+1}{s}} a^{k+1-s} b^{s}$$

$$\sum_{j=1}^{k} \binom{k}{j} a^{k+1-j} b^{j}$$

$$+ \sum_{j=1}^{k} \binom{k}{j-1} a^{k+1-j} b^{j}$$

$$= \sum_{j=1}^{k} \left[\binom{k}{j} a^{k+1-j} b^{j} + \binom{k}{j-1} a^{k+1-j} b^{j} \right]$$

$$= \sum_{j=1}^{k} \left[\binom{k}{j} + \binom{k}{j-1} \right] a^{k+1-j} b^{j}$$

$$
= a^{k+1} + b^{k+1} +
$$

$$
+ \sum_{j=1}^{k} \underbrace{\left[\binom{k}{j} + \binom{k}{j-1} \right]}_{\binom{k+1}{j}} a^{k+1-j} \, b^{j}
$$

$$
= a^{k+1} + b^{k+1} +
$$

$$
+ \sum_{j=1}^{k} \binom{k+1}{j} a^{k+1-j} \, b^{j}
$$

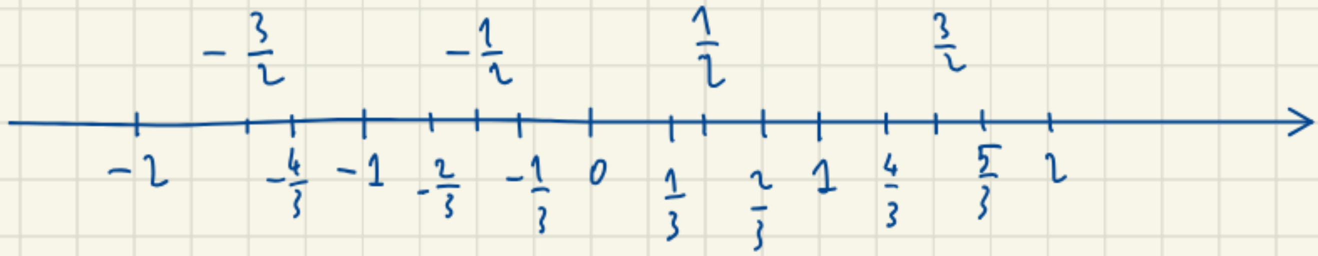
$$
= \binom{k+1}{0} a^{k+1} + \binom{k+1}{k+1} b^{k+1}
$$

$$
+ \sum_{j=1}^{k} \binom{k+1}{j} a^{k+1-j} \, b^{j}
$$

$$= \sum_{j=0}^{k+1} \binom{k+1}{j} a^{k+1-j} b^{j}$$

FINE

L'INSIEME DEI NUMERI RAZIONALI $\mathbb{Q}$:



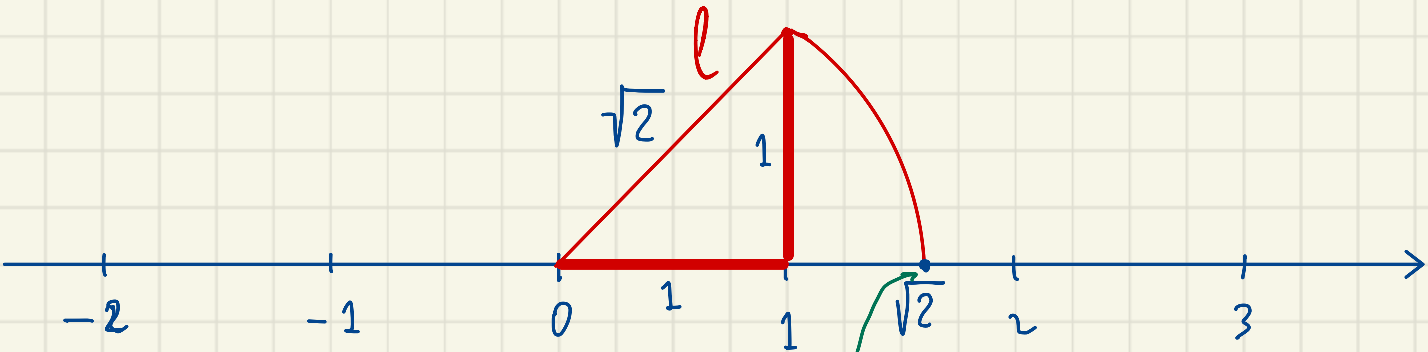
DOMANDA:

Esistono tanti numeri razionali quanti sono i punti della retta?

Equivalentemente, c'è una funzione biunivoca fra $\mathbb{Q}$ e i punti di una retta?

La risposta è NO!

$$l^2 = 1^2 + 1^2 = 2$$



questo punto corrisponde al numero $\sqrt{2}$

DOMANDA:

$$\sqrt{2} \in \mathbb{Q} \; ?$$

TEOREMA: $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

DIM. (PER ASSURDO)

Assumiamo che $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$.
Dunque: $\exists\, m, n \in \mathbb{N}$:

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n}$$

Possiamo supporre che la frazione $\frac{m}{n}$ sia ridotta ai minimi termini, cioè:

$$M.C.D.(m, n) = 1$$

$$\frac{m}{n} = \sqrt{2} \implies \frac{m^2}{n^2} = 2$$

$$\implies m^2 = 2n^2$$

$\implies m^2$ è pari

(da ciò che si è visto in precedenza)

$\implies m$ è pari

Quindi: $\exists\, m_1 \in \mathbb{N} : \quad m = 2 \cdot m_1$

$$(2 \cdot m_1)^2 = 2 \cdot n^2$$

$$4 \cdot m_1^2 = 2 \cdot n^2$$

$$2 \cdot m_1^2 = n^2$$

$n^2 = 2 \cdot m_1^2$

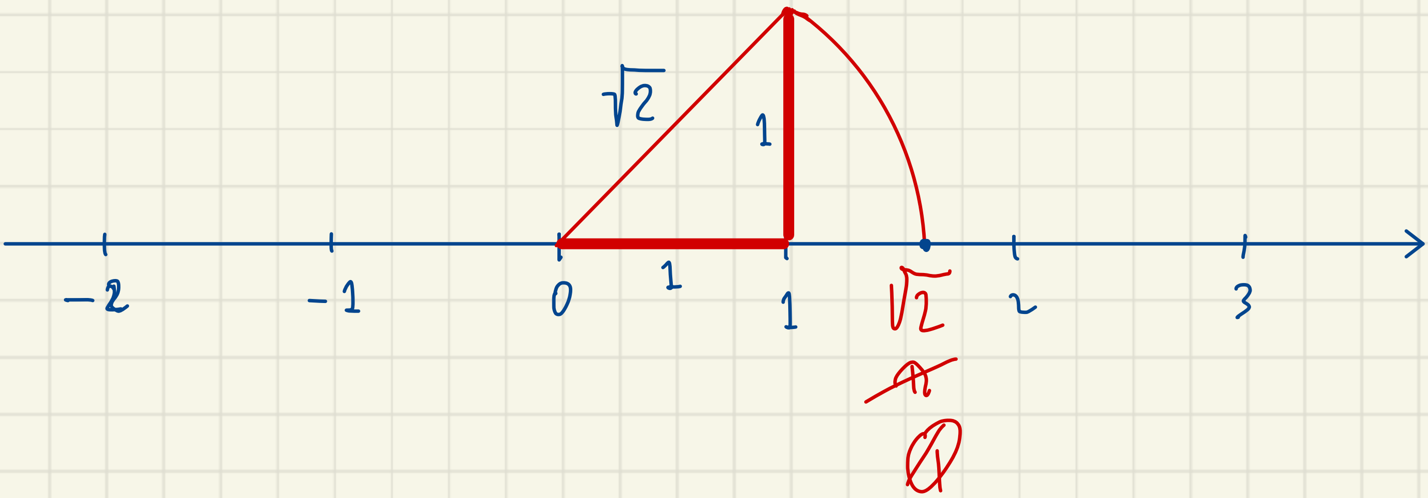
$\Longrightarrow$ n^2 è pari

$\Longrightarrow$ n è pari

Si è così provato che
m, n sono pari

$\Longrightarrow$ 2 è un fattore
comune di m e n

ASSURDO! $M.C.D.(m,n)=1$



Ci sono altri "punti" che <u>non</u> corrispondono a numeri rationali!

TEOREMA:

Sia $p \in \mathbb{N}$ un numero primo
$\Longrightarrow \sqrt{p} \notin \mathbb{Q}$

La prova è simile alla precedente.
Per un generico numero primo p, si usa una osservazione che prescinde dai numeri pari/dispari.

Oss.:

Sia M un numero naturale.

I fattori primi che compongono M^2 sono i **medesimi** di quelli che compongono M.

$$M = p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{n_k} \qquad n_1, n_2, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$$

$$M^2 = p_1^{2n_1} \cdot p_2^{2n_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{2n_k}$$

Esempio:

$30 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \longrightarrow$ fattori $2, 3, 5$

$30^2 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2$

$20 = 2^2 \cdot 5 \longrightarrow$ fattori $2, 5$

$20^2 = 2^4 \cdot 5^2$

TEOREMA:

Sia $p \in \mathbb{N}$ un numero primo

$$\Longrightarrow \sqrt{p} \notin \mathbb{Q}$$

DIM.:

per assurdo: $\longrightarrow$ supponiamo $\sqrt{p} \in \mathbb{Q}$

$\exists\, m, n \in \mathbb{N}$:

$$\sqrt{p} = \frac{m}{n}$$

$$M.C.D.(m, n) = 1$$

$$\sqrt{p} = \frac{m}{n} \implies p = \frac{m^2}{n^2}$$

$$n^2 \cdot p = m^2$$

p è un fattore primo di m^2

$\implies$ p è un fattore primo di m

$$\implies \exists\, m_1 \in \mathbb{N} : \quad m = p \cdot m_1$$

$$n^2 \cdot p = (p \cdot m_1)^2$$

$$n^2 \cdot \cancel{p} = p^{\cancel{2}} \cdot m_1^2$$

$$n^2 = p \cdot m_1^2$$

$\Longrightarrow$ p è un fattore primo di n^2

$\Longrightarrow$ p è un fattore primo di n

$\Longrightarrow$ p è un fattore comune a m e n

ASS.

Quindi:

$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$, $\sqrt{5} \notin \mathbb{Q}$

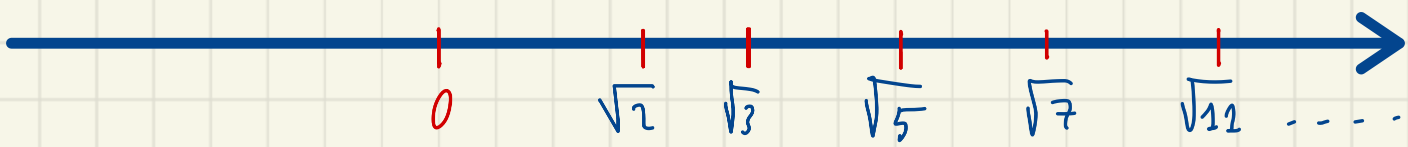
$\sqrt{7} \notin \mathbb{Q}$, ...

Quanti sono i numeri primi?

I numeri primi sono infiniti,

$\Longrightarrow \{ \sqrt{p} \mid p \text{ numero primo} \}$

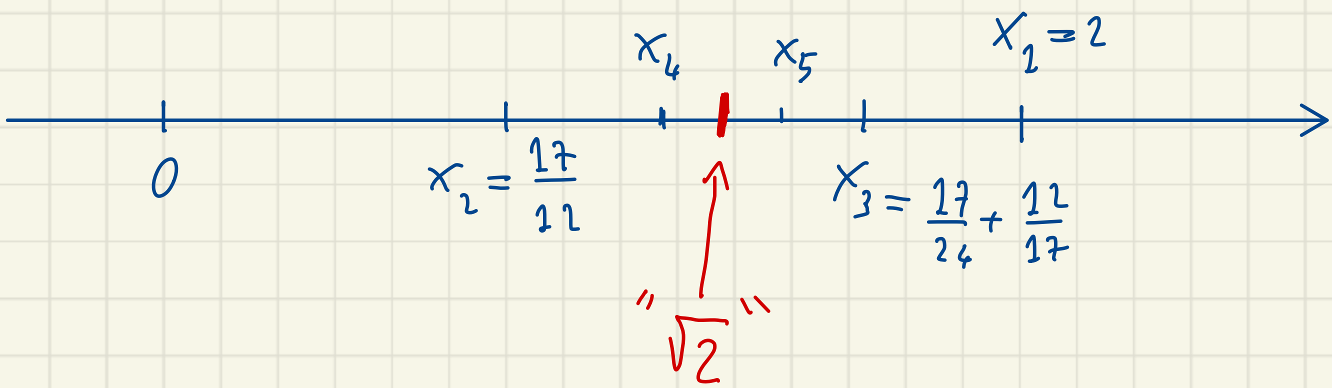
è infinito e corrisponde a punti sulla retta che non corrispondono a nessun numero razionale



Esempio:

$$\begin{cases} x_n = \dfrac{x_{n-1}}{2} + \dfrac{1}{x_{n-1}} \\ x_1 = 2 \end{cases} \Longrightarrow x_n \in \mathbb{Q}$$

$$2, \quad \underbrace{1 + \frac{1}{2}}_{\substack{x_2 \; \frac{3}{2} \\ \shortparallel \\ 1{,}5}}, \quad \underbrace{\frac{\frac{3}{2}}{2} + \frac{2}{3}}_{\substack{\shortparallel \; x_3 \\ \frac{3}{4} + \frac{2}{3} = \frac{17}{12} \\ \shortparallel \\ 1{,}41\overline{7}}}, \quad \underbrace{\frac{17}{24} + \frac{12}{17}}_{\substack{\shortparallel \; x_4 \\ 1{,}414215\overline{68}}}, \quad \ldots\ldots$$



$$x_n \longrightarrow \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$$