STATISTICHE D'ORDINE

Cercare l'elemento di rango i in un array A.

Elemento di rango i è l'elemento che occupa la posizione i nell'insieme A ordinato

Esempio $A: 7, 10, 2, 4, 5, 3, 9$

2 = elemento di rango 1 (1-st smallest)

5 = elemento di rango 4 (4-th smallest)

$A' = 2, 3, 4, 5, 7, 9, 10$

index $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$

Trovare il minimo o il massimo richiede n confronti se $|A| = n$

Ossia trovare l'elemento di rango 1 o l'elemento di rango n costa $\Theta(n)$

Sono casi speciali o questo vale per ogni rango?

Per rispondere a questa domanda cerchiamo di trovare un algoritmo

Sol 1 Cerca elemento di rango i:

1) ordino A in A'
2) ritorno l'elemento in $A'[i]$

Costo computazionale:

$$\Theta(n \log n) + \Theta(1)$$

Sol 2

Rank $(A, 1, f; i)$

```
if i < ⌊(n+1)/2⌋ then for J ← 1 to i do
        scambia (A[J], minimo(A, J, f))
    return A[i]
else for J ← n downto i do
        scambia (A[J], massimo(A, 1, J))
    return A[i]
```

Sol 2

Procedura minimo (A, J, f) ritorna l'indice dell'elemento minimo in $(A[J], \dots A[f])$ e l'elemento associato

Procedura massimo $(A, 1, J)$ ritorna l'indice dell'elemento massimo in $(A[1], \dots A[J])$ e l'elemento associato

$i = 3$

4 2 7 3 4 5 10 11

2 | 4 7 3 4 5 10 11 $\quad j = 1$

2 3 | 7 4 4 5 10 11 $\quad j = 2$

2 3 4 | 7 4 5 10 11 $\quad j = 3$

4 3 2 1 6 8 10 5 $\quad j = n-2$

4 3 2 1 6 8 5 | 10 $\quad j = n$

4 3 2 1 6 5 | 8 10 $\quad j = n-1$

4 3 2 1 5 | 6 8 10 $\quad j = n-2$

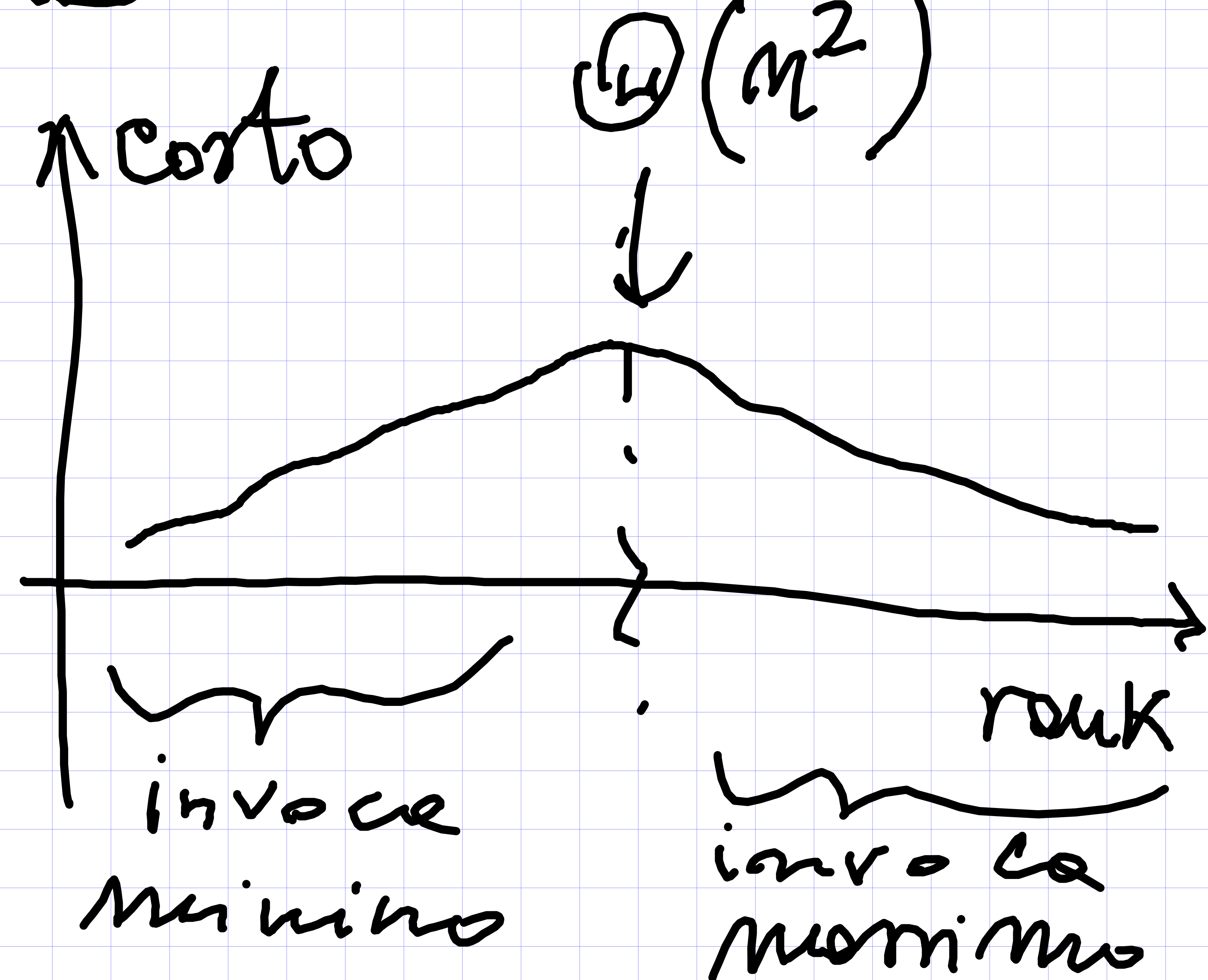
Sol 2

L'algoritmo costa

$$\Theta\left(\frac{n+1}{2}\, n\right)$$

minimo

massimo



$$\sum_{i=1}^{n/2} (n-i+1) = \sum_{t=n/2+1}^{n} t =$$

$$\sum_{t=1}^{n} t - \sum_{t=1}^{n/2+1} t = \frac{n(n+1)}{2} - \frac{(n/2+1)(\frac{n}{2}+2)}{2}$$

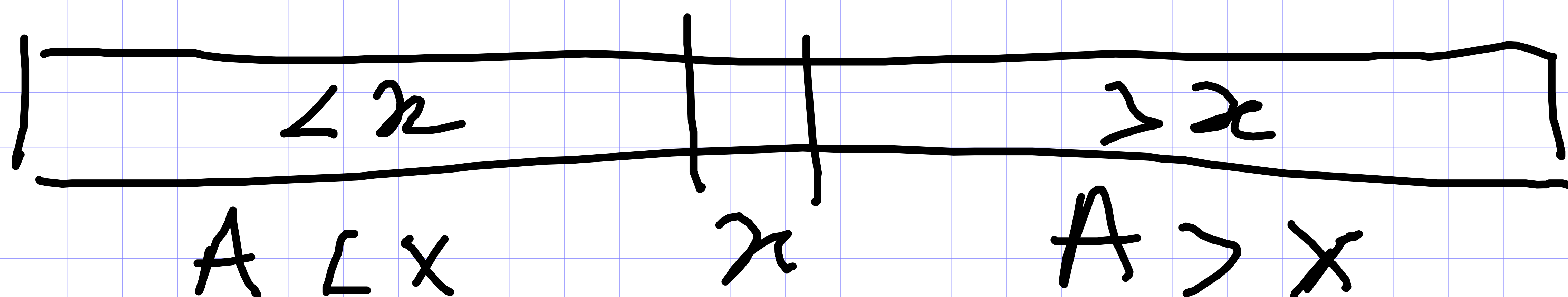
$$= \underbrace{\frac{n^2}{2} - \frac{n^2}{8}}_{} + \dots\dots \geq c n^2 \quad \begin{cases} O(n^2) \\ \Omega(n^2) \end{cases}$$

#passi

Possiamo far meglio?

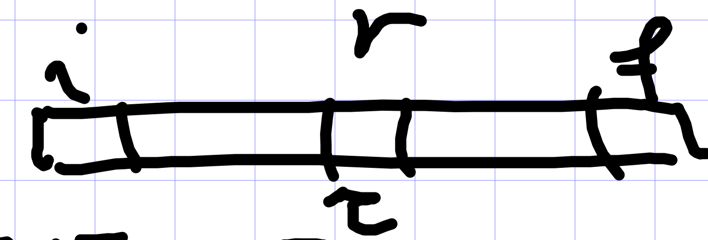
$\boxed{\text{Hp: tutti elementi distinti}}$

OSSERVIAMO che
dato x, trovare il RANK(x)
è facile. Basta trovare
quanti elementi sono $< x$
$\downarrow$
PARTITION$(A, 1, n; x)$



// calcolare il rango A[r]

```
PARTITION (A, i, f : r)
    t ← i
    perno ← A[r]; scambia (A[i], A[r])
    for j = i+1 to f do
        if A[j] < perno then
            t ← t + 1
            scambia (A[t], A[j])
    scambia (A[t], A[i])
    return (t)
```



$\Theta(n)$

i	1	2	3	4	5	6	7	8
	8	1	9	2	4	5	6	3
	5	1	9	2	4	8	6	3
	t	~~j~~	~~j~~	~~j~~	j			

t

5 1 2 9 4 8 6 3

t

5 1 2 4 3 8 6 9

t t ~~j~~ ~~j~~

3 1 2 4 $\boxed{5}$ 8 6 9

t = 5

PARTITION(A, 1, 8; 6)
= rank(A[6])

L'idea:

per trovare l'elemento di rango i prima testo il rango di un qualsiasi elemento x

```
CERCA(A, s, e, i)
    k ← rank(x) in (A, s, e)
    if i = k then DONE!
    if i < k then | cerco a sx
                  | tra i valori < x
             else | cerco a dx
                  | tra i valori > x
```

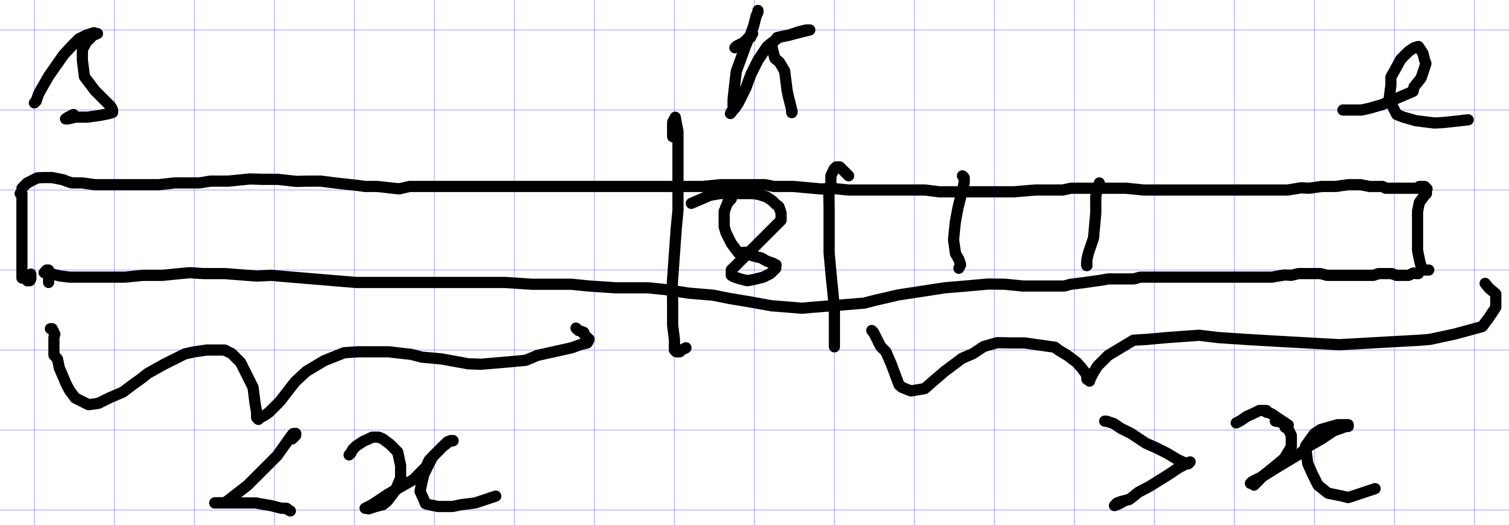
TECNICALITIES:

Quando cerco a sx, cerco l'elemento di rango i

Quando cerco a dx, cerco l'elemento di rango $(i-k)$

$\Downarrow$

perchè se cerco a dx "escludo"/"perdo" elementi e quindi il rango diminuisce



Se ricorro a sx
gli elementi hanno rango da $s..k$

Se ricorro a dx
$k+1 \rightarrow$ elemento di rango 1 a dx
$k+2 \rightarrow$ " " " 2 " "

Questa soluzione è vincente se si eliminano una frazione degli n elementi.

La complessità è alta solo se $rank(x)$ è molto piccolo o molto grande, ossia a x $k \to i$ o $k \to f$.

$\boxed{\text{IN MEDIA}}$ complessità è $O(n)$

worst case

$$T(n) = \max\big(T(left), T(right)\big) + \Theta(n)$$

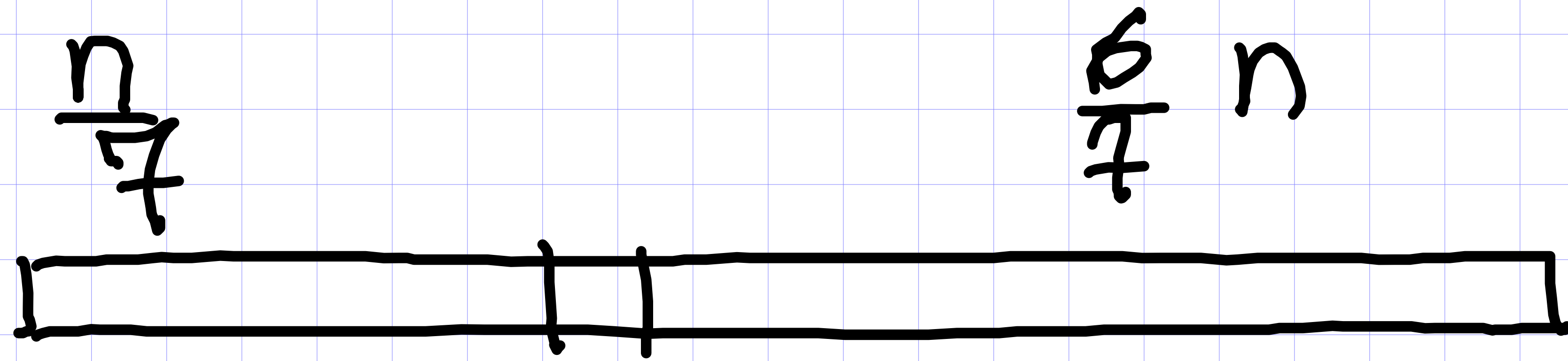
$$left + right = n - 1$$

$left = n/2$ $right = \frac{n}{2} - 1$ $T(n) = T(\frac{n}{2}) + \Theta(n)$,

$$T(n) \in \Theta(n)$$

Come "trasformare" la soluzione <u>lineare</u> nel caso <u>pessimo</u> per ogni i?

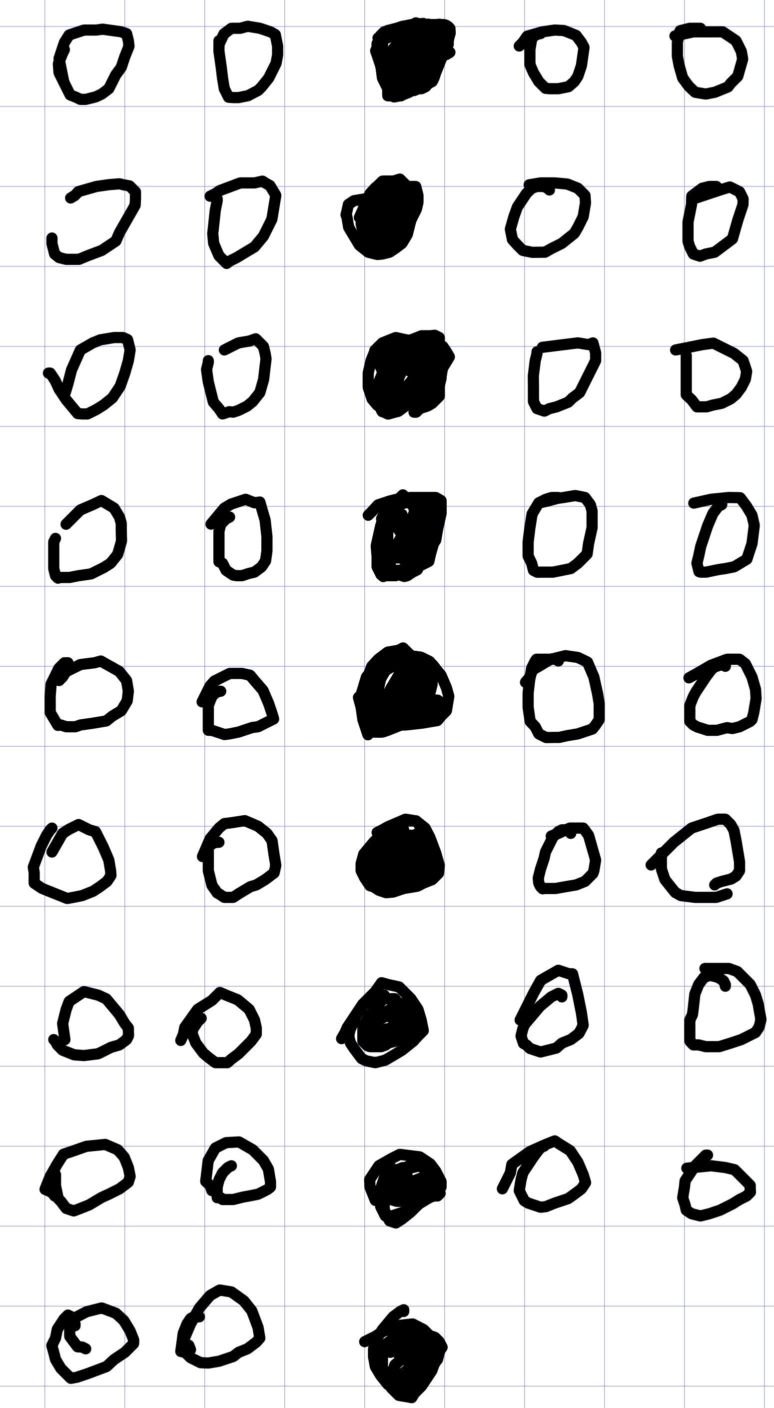
la scelta del perno non deve essere del tutto casuale. Debbo garantire che il perno abbia "abbastanza elementi a sx" e "abbastanza elementi a dx"



$k = \frac{n}{7}$

$$T(n) = \max\left(T\left(\frac{n}{7}\right), T\left(\frac{6}{7}n\right)\right) + n$$

va bene



formo
$\lceil \frac{n}{5} \rceil$ gruppi
da 5
e li ordino

1	8	2	7	9
2	4	5	6	9
1	3	2	4	1
2	1	2	5	3
2	2	3	6	8
3	7	4	5	9
4	8	1	1	9
7	6			

1	2	3	7	8
2	4	5	6	9
1	1	2	3	4
1	2	2	3	5
2	2	3	6	8
3	4	5	7	9
1	1	4	8	9
6	7			

1	2	3	7	8
2	4	5	6	9
1	1	2	3	4
1	2	2	3	5
2	2	3	6	8
3	4	5	7	9
1	1	4	8	9
6	7			

$\left\lceil \frac{n}{5} \right\rceil$

"MM: rank(MM) = 3"

3

1	1	2	3	4
1	2	3	7	8
1	2	2	3	5
2	2	3	6	8
2	4	5	6	9
1	1	4	8	9
3	4	5	7	9
6	7			

$\left(\left\lceil \frac{n/5}{2} \right\rceil \cdot 3 - 2 \cdot 3\right)$

1	1	2	3	4
1	2	3	7	8
1	2	2	3	5
2	2	3	6	8
2	4	2	6	9
1	1	4	8	9
3	4	5	7	9
6	7			

$n = 4\ell$

MM = 3

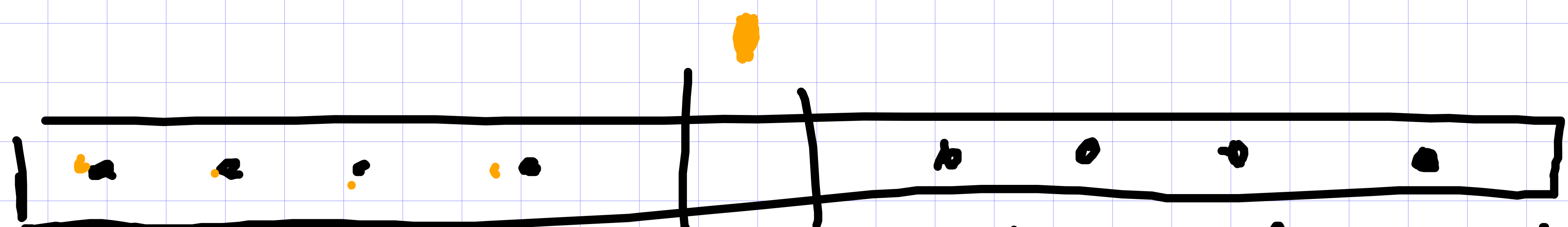
Low
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 3 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 3 & & & \end{bmatrix}$$

rank(3) = 18

High
$$\begin{bmatrix} 4 & 7 & 8 & 5 & 6 & 8 \\ 4 & 5 & 6 & 9 & 4 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 7 & 9 & 6 & 7 \end{bmatrix}$$

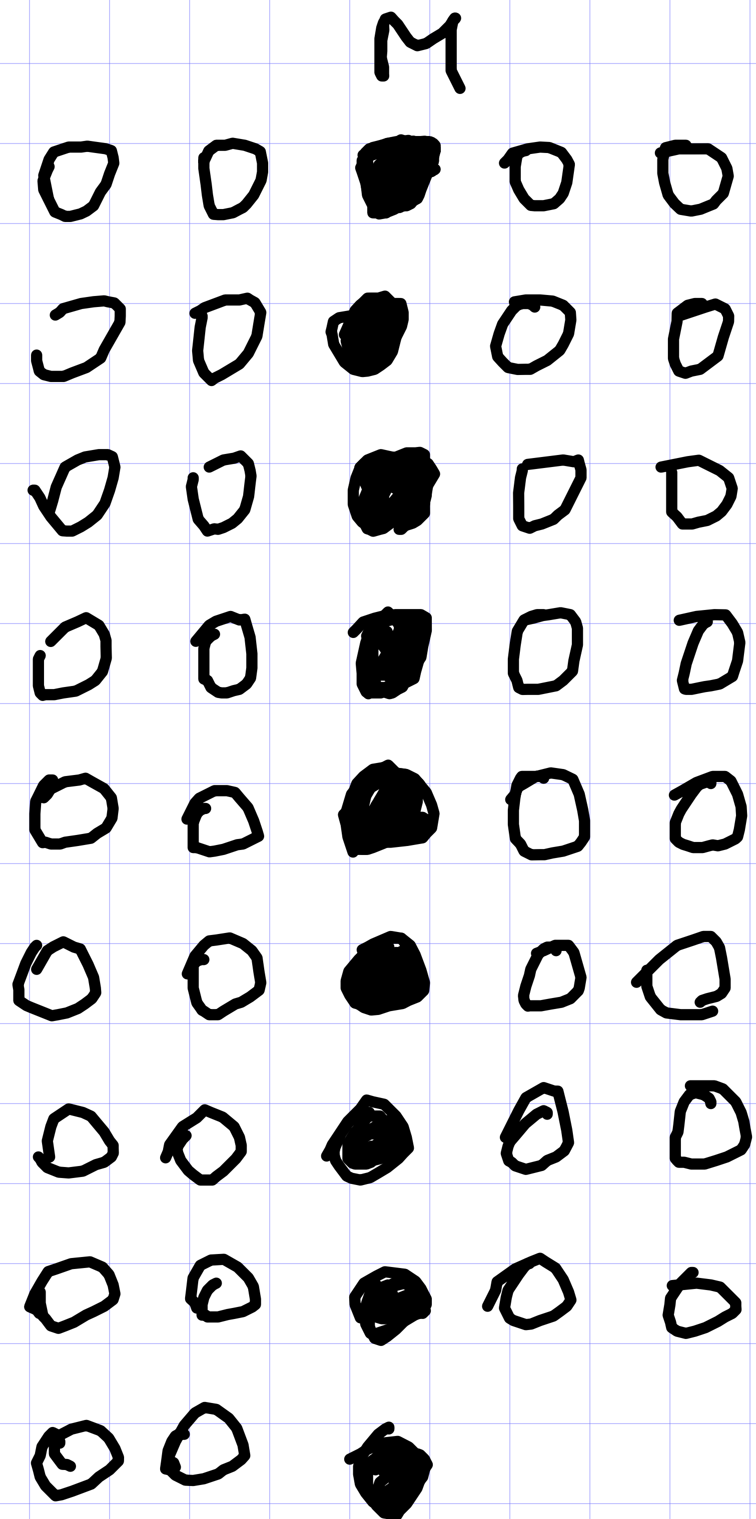
$\boxed{MM}$ è seguito da almeno $\left(\frac{3n}{10} - 6\right)$ elementi

$\boxed{MM}$ è preceduto da almeno $\left(\frac{3n}{10}\right)$ elementi



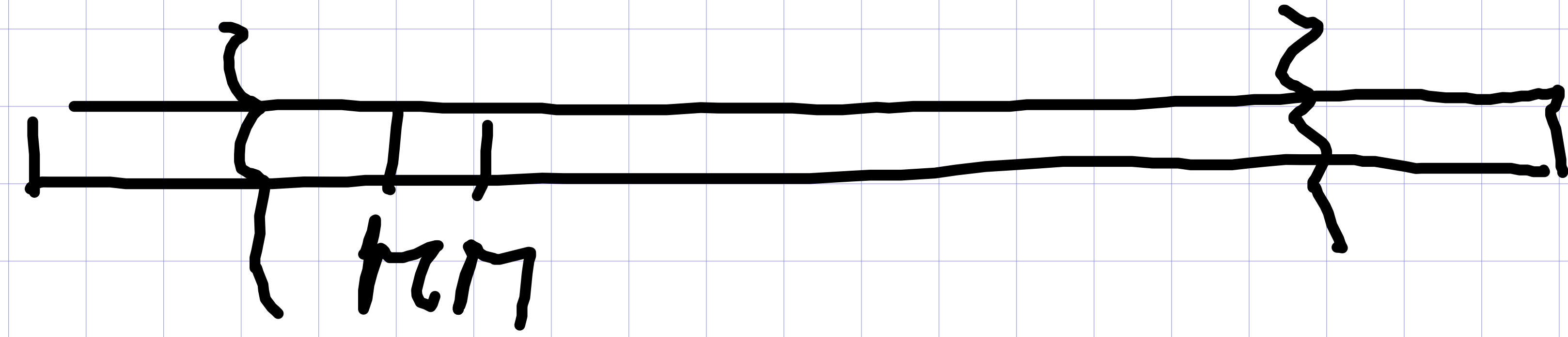
MM sta al centro!

cerca rango i



formo gruppi da 5
ordino ciascun gruppo
cerco la MM

$K \leftarrow \text{Partition}(A, s, e; MM)$
$z = \text{rank}(MM) = K - s + 1$
if rank(MM) $= i$
    then return MM
else
if rank(MM) $> i$
    then
// < MM // cerca$(A, s, K; i)$
    else
// > MM // cerca$(A, k+1, e; i-z)$



alla dx di MM ci stanno
al più $n - \left(\frac{3}{10} n\right)$ elementi

alla sx di MM ci stanno
al più $n - \left(\frac{3}{10} n - 6\right)$ elementi

$\Rightarrow$ Ricorsione è su al più $\frac{7}{10} n + 6$ elementi

$$T(n) = \overbrace{\underbrace{T(n/5)}_{\text{cerca MM}} + \underbrace{T\left(\tfrac{7}{10}n + 6\right)}_{\text{cerca SX o DX}}}^{<n} + \underbrace{\Theta(n)}_{\text{Partition}}$$

$+ \frac{n}{5} \cdot \Theta(1)$

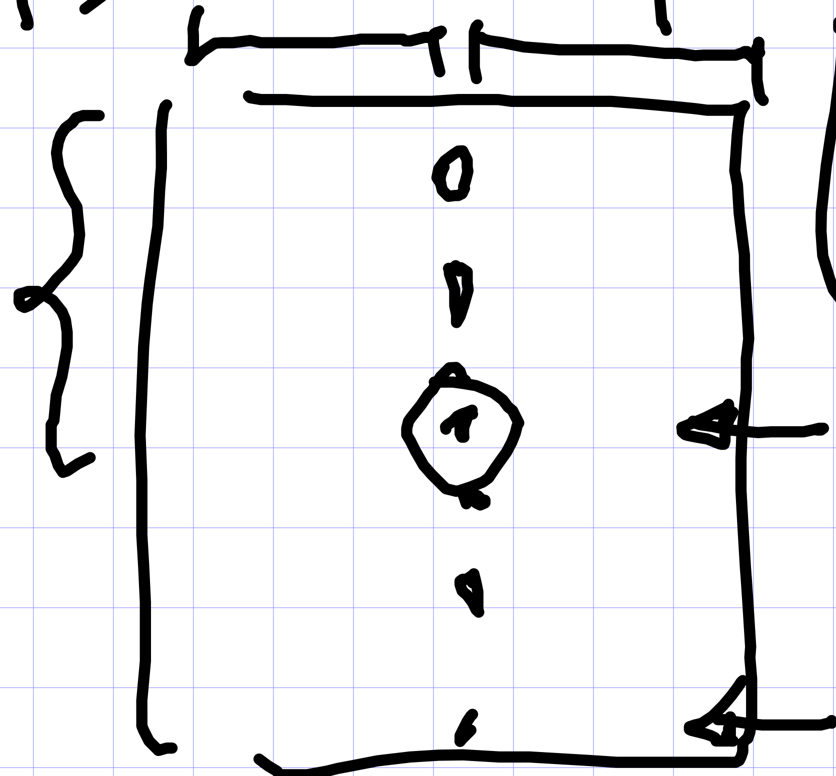
Soluzione : $T(n) \in \Theta(n)$

OTTIMO!

gruppi da 7

ordinamento $\frac{n}{7} \cdot \Theta(1) + n$

$$T(n) = T\left(\frac{n}{7}\right) + T\left(\frac{10}{14} n + 8\right) + \Theta(n)$$



$\frac{n}{7}$

$$\left(\left\lceil \frac{n}{7 \cdot 2} \right\rceil - 2\right) 4$$

$$\left(4 \frac{n}{14} - 8\right)$$

ESCLUDO

gruppi da 3: non funziona!