Cos'è il Calcolo Numerico (o Analisi Numerica)?

Cos'è il Calcolo Numerico (o Analisi Numerica)?

Il Calcolo Numerico è quella branca della **matematica** che si occupa di dare **strumenti efficienti** per il calcolo numerico di quantità **continue**.

Cos'è il Calcolo Numerico (o Analisi Numerica)?

Il Calcolo Numerico è quella branca della **matematica** che si occupa di dare **strumenti efficienti** per il calcolo numerico di quantità **continue**.

Esempio di quantità continua: **soluzione di un'equazione**

Cos'è il Calcolo Numerico (o Analisi Numerica)?

Il Calcolo Numerico è quella branca della **matematica** che si occupa di dare **strumenti efficienti** per il calcolo numerico di quantità **continue**.

Esempio di quantità continua: **soluzione di un'equazione**

Esempio. L'equazione $x^2 = 2$ ha una soluzione $\alpha > 0$.

Cos'è il Calcolo Numerico (o Analisi Numerica)?

Il Calcolo Numerico è quella branca della **matematica** che si occupa di dare **strumenti efficienti** per il calcolo numerico di quantità **continue**.

Esempio di quantità continua: **soluzione di un'equazione**

Esempio. L'equazione $x^2 = 2$ ha una soluzione $\alpha > 0$.

- $\alpha = \sqrt{2}$ (soluzione simbolica)

Cos'è il Calcolo Numerico (o Analisi Numerica)?

Il Calcolo Numerico è quella branca della **matematica** che si occupa di dare **strumenti efficienti** per il calcolo numerico di quantità **continue**.

Esempio di quantità continua: **soluzione di un'equazione**

Esempio. L'equazione $x^2 = 2$ ha una soluzione $\alpha > 0$.

- $\alpha = \sqrt{2}$ (soluzione simbolica)
- α è il limite dell'iterazione

$$x_{k+1} = \frac{x_k^2 + 2}{2x_k}, \quad x_0 = 2,$$

tramite la quale è possibile ottenere $\alpha = 1.414 + \varepsilon$, $|\varepsilon| < 10^{-3}$ (soluzione approssimata).

La seconda formulazione può sembrare **meno elegante**.

Calcolo simbolico vs. Calcolo numerico

Esempio. L'equazione $p(x) = 0$ con $p(x) = x^3 + x^2 - x + 1$ ha un'unica soluzione reale α.

Calcolo simbolico vs. Calcolo numerico

Esempio. L'equazione $p(x) = 0$ con $p(x) = x^3 + x^2 - x + 1$ ha un'unica soluzione reale α.

- $\alpha = \frac{1}{3}\left(-1 - \frac{4}{\sqrt[3]{19 - 3\sqrt{33}}} - \sqrt[3]{19 - 3\sqrt{33}}\right)$ (soluzione simbolica).

Calcolo simbolico vs. Calcolo numerico

Esempio. L'equazione $p(x) = 0$ con $p(x) = x^3 + x^2 - x + 1$ ha un'unica soluzione reale α.

- $\alpha = \frac{1}{3}\left(-1 - \frac{4}{\sqrt[3]{19 - 3\sqrt{33}}} - \sqrt[3]{19 - 3\sqrt{33}}\right)$ (soluzione simbolica).
- α è il limite dell'iterazione

$$x_{k+1} = x_k - \frac{p(x_k)}{p'(x_k)}, \quad x_0 = -2,$$

tramite la quale è possibile ottenere $\alpha = -1.83929 + \varepsilon$, $|\varepsilon| < 10^{-5}$ (soluzione approssimata).

Calcolo simbolico vs. Calcolo numerico

Esempio. L'equazione $x^5 + x^4 - x + 1 = 0$ ha un'unica soluzione reale α.

Calcolo simbolico vs. Calcolo numerico

Esempio. L'equazione $x^5 + x^4 - x + 1 = 0$ ha un'unica soluzione reale α.

- α **non esprimibile in forma chiusa con simboli noti** (soluzione simbolica)

Calcolo simbolico vs. Calcolo numerico

Esempio. L'equazione $x^5 + x^4 - x + 1 = 0$ ha un'unica soluzione reale α.

- α **non esprimibile in forma chiusa con simboli noti** (soluzione simbolica)
- α è il limite dell'iterazione

$$x_{k+1} = x_k - \frac{p(x_k)}{p'(x_k)}, \quad x_0 = -2,$$

  tramite la quale è possibile ottenere $\alpha = -1.49709$, $|\varepsilon| < 10^{-5}$ (soluzione approssimata).

Calcolo simbolico vs. Calcolo numerico

Quasi tutte le civiltà hanno trovato una formula per le equazioni di secondo grado.

Nel XVI secolo è stata trovata una formula per le equazioni di terzo e quarto grado (Tartaglia, Cardano e Ferrari).

Calcolo simbolico vs. Calcolo numerico

Quasi tutte le civiltà hanno trovato una formula per le equazioni di secondo grado.

Nel XVI secolo è stata trovata una formula per le equazioni di terzo e quarto grado (Tartaglia, Cardano e Ferrari).

Teorema (di Ruffini-Abel). **Non esiste** una formula che permetta di trovare le soluzioni di tutte le equazioni di quinto grado e che utilizzi solamente le operazioni elementari e le radici.

Una soluzione approssimata è **necessaria** per risolvere concretamente i problemi.

Cos'è il Calcolo Numerico

Il Calcolo Numerico è quella branca della **matematica** che si occupa di dare **strumenti efficienti** teorici e pratici per il calcolo numerico di quantità **continue**.

- Gli strumenti teorici sono teorie matematiche.
- Gli strumenti pratici sono gli **algoritmi**, progettati e analizzati nel **rigore della matematica**.

Gli algoritmi oggi sono pensati per essere implementati su calcolatore.

L'Analisi Numerica si preoccupa più dell'analisi e del progetto che dell'implementazione degli algoritmi e quindi rientra nella matematica.

Differenza tra la matematica classica e l'Analisi Numerica

Nell'analisi numerica si cerca di trovare una soluzione ai problemi continui che sia immediatamente utilizzabile nelle applicazioni.

Non basta una formula, ma serve anche un algoritmo che, una volta implementato, fornisca la soluzione **in un tempo ragionevole** e tenendo conto degli errori dovuti al fatto che **il calcolatore lavora su quantità finite**.

In altre parole, vogliamo trattare quantità continue (infinite) con strumenti finiti.

Quali sono le quantità continue?

Esempi di quantità continue da calcolare

- Soluzioni di una o più equazioni non lineari, radici di polinomi;

Quali sono le quantità continue?

Esempi di quantità continue da calcolare

- Soluzioni di una o più equazioni non lineari, radici di polinomi;
- Calcolo di quantità dell'algebra lineare: soluzione di sistemi lineari, determinanti, autovalori/vettori, rango, nucleo e immagine di una matrice;

Quali sono le quantità continue?

Esempi di quantità continue da calcolare

- Soluzioni di una o più equazioni non lineari, radici di polinomi;
- Calcolo di quantità dell'algebra lineare: soluzione di sistemi lineari, determinanti, autovalori/vettori, rango, nucleo e immagine di una matrice;
- Calcolo di integrali;

Quali sono le quantità continue?

Esempi di quantità continue da calcolare

- Soluzioni di una o più equazioni non lineari, radici di polinomi;
- Calcolo di quantità dell'algebra lineare: soluzione di sistemi lineari, determinanti, autovalori/vettori, rango, nucleo e immagine di una matrice;
- Calcolo di integrali;
- Approssimazione di funzioni;

Quali sono le quantità continue?

Esempi di quantità continue da calcolare

- Soluzioni di una o più equazioni non lineari, radici di polinomi;
- Calcolo di quantità dell'algebra lineare: soluzione di sistemi lineari, determinanti, autovalori/vettori, rango, nucleo e immagine di una matrice;
- Calcolo di integrali;
- Approssimazione di funzioni;
- Soluzione di equazioni differenziali ordinarie e alle derivate parziali.

Per ognuno di questi problemi esistono **uno o più algoritmi di soluzione**.

Stato dell'arte

Esempi di quantità continue da calcolare

- Soluzioni di una o più equazioni non lineari (Metodi di iterazione funzionale);
- Calcolo di quantità dell'algebra lineare: soluzione di sistemi lineari (GEPP), determinanti, autovalori/vettori (QR), rango, nucleo e immagine di una applicazione lineare/matrice (SVD);
- Calcolo di integrali (Quadratura automatica);
- Approssimazione di funzioni (Vari algoritmi);
- Soluzione di equazioni differenziali ordinarie (multistep VSVO e Runge-Kutta/Rosenbrock) e alle derivate parziali (elementi finiti e differenze finite).

Cosa si intende per efficienti?

Gli algoritmi numerici devono verificare due importanti requisiti

- Essere **numericamente stabili**, cioè non propagare gli errori
- Avere un **basso costo computazionale**

Chiariremo questi concetti con due esempi

Efficienza: stabilità numerica

Nel corso di analisi matematica avete imparato che vale (sviluppo in serie di Taylor di e^x)

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots ,$$

e anche che (formula di Taylor con resto di Lagrange)

$$e^x - \sum_{k=0}^{N} \frac{x^k}{k!} = e^{\xi} \frac{x^{N+1}}{(N+1)!}, \quad \xi \in (0, x),$$

cioè il resto tende a zero **rapidamente**.

Efficienza: stabilità numerica

Si hanno due semplici algoritmi per il calcolo di e^x

- $e^x \approx \sum_{k=0}^{N} \frac{x^k}{k!}$
- $e^x = \frac{1}{e^{-x}} \approx \frac{1}{\sum_{k=0}^{N} \frac{(-x)^k}{k!}}$

Dove N è scelto in modo che il resto sia minore della precisione richiesta.

Quale dei due è migliore?

Efficienza: stabilità numerica

Implementazione della formula $s = \sum_{k=0}^{N} \frac{x^k}{k!}$.

```
s=0;
for k=0:N
    m=fattoriale(k);
    s=s+x^k/m;
end
```

Implementazione inefficiente,

Efficienza: stabilità numerica

Implementazione della formula $s = \sum_{k=0}^{N} \frac{x^k}{k!}$.

```
s=0;
for k=0:N
    m=fattoriale(k);
    s=s+x^k/m;
end
```

Implementazione inefficiente, si può migliorare usando

$$\frac{x^{k+1}}{(k+1)!} = \frac{x}{(k+1)} \frac{x^k}{k!}.$$

Efficienza: stabilità numerica

Implementazione della formula $s = \sum_{k=0}^{N} \frac{x^k}{k!}$.

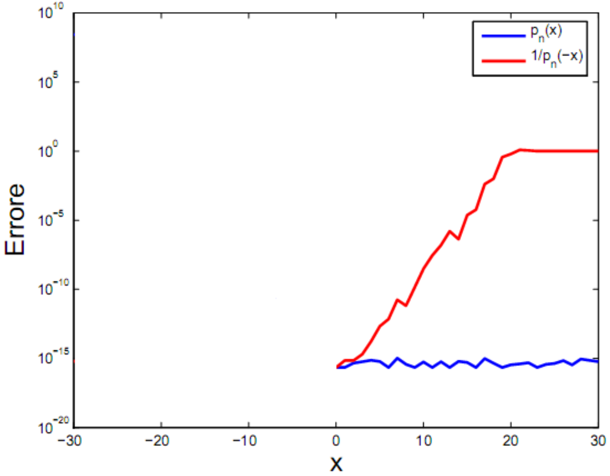
```
s=1;a=1;
for k=1:N
    a=a*x/k;
    s=s+a
end
```

Valutiamo l'**errore relativo**

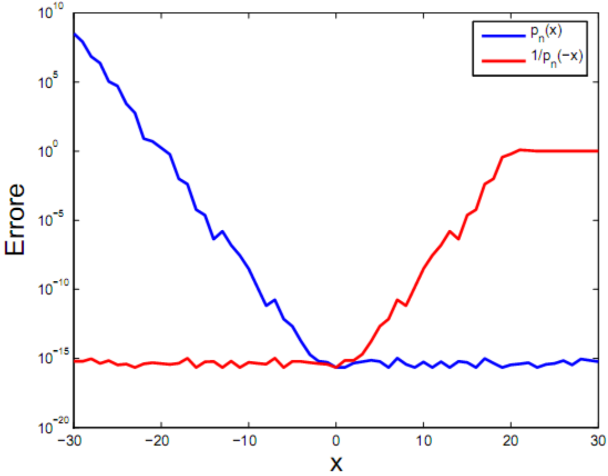
$$\text{err} = \frac{|s - e^x|}{e^x}.$$

Vogliamo che sia dell'ordine della precisione in cui lavoriamo $u \approx 2.2 \cdot 10^{-16}$.

Efficienza: stabilità numerica



Efficienza: stabilità numerica



Efficienza: basso costo computazionale

Una formula di Laplace per calcolare il determinante di una matrice A è

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A^{(ij)}),$$

dove $A^{(ij)}$ è la matrice ottenuta eliminando la riga i e la colonna j.

Efficienza: basso costo computazionale

Implementazione della formula di Laplace. Si utilizza la ricorsione.

```
function d=det(A,n)

if (n==1)
    d=A;
else
    s=0;
    for j=1:n
        temp=A(1,j)*det(A(2:n,[1:j-1 j+1:n]),n-1);
        s=s+(-1)^(1+j)*temp;
    end
end
```

Si effettuano $O(n!)$ operazioni. **Valutiamo i tempi.**

Efficienza: basso costo computazionale

Esempio. Calcolare il determinante della matrice $n \times n$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & 2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Si dimostra per induzione che $\det(A) = n + 1$.

Efficienza: basso costo computazionale

n	Alg. 1	Alg. 2	LU
6	0.11	< 0.02	< 0.02
7	0.75	< 0.02	< 0.02
8	6	< 0.02	< 0.02
9	53.8	0.03	< 0.02
10	534	0.03	< 0.02
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
15	6y	0.43	< 0.02
16	100y	0.75	< 0.02
17	1700y	1.2	< 0.02
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
100	?	1469y	< 0.02

Software per il calcolo numerico

- Librerie in Fortran utilizzabili in ogni linguaggio di programmazione: BLAS, LAPACK.
- Programmi per il calcolo scientifico: Matlab (commerciale), Octave (free software), Scilab.
- Programmi per il calcolo simbolico con features numeriche: Mathematica, Maple (commerciali).
- NumPy e SciPy per Python.
- Julia.

Relazioni con altre discipline: Analisi Matematica

Essendo l'analisi lo studio del continuo i legami con il Calcolo Numerico sono stretti.

Affinità: si studiano le stesse quantità con lo stesso linguaggio (Assiomi, Teoremi)

Divergenze:

- Per l'analisi $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^2-x^4}} dx = \arcsin(1/\sqrt{5})$, a volte **basta dimostrare che converge**.
- Per il calcolo numerico, **tramite un metodo** si trova $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^2-x^4}} dx \; [= \arcsin(1/\sqrt{5})] = 0.463648 + \varepsilon$.

Relazioni con altre discipline: Matematica Discreta

La matematica discreta studia anche oggetti continui come le matrici a coefficienti reali.

Affinità: si studiano alcune cose in comune con lo stesso linguaggio (Assiomi, Teoremi)

Divergenze:

- Per la matematica discreta **basta una formula** e il problema è risolto. Es. $Ax = b$, $x = A^{-1}b$.
- Per il calcolo numerico occorre un **metodo efficiente** per avere la soluzione numerica. Es. $Ax = b$ (es. eliminazione gaussiana).

Relazioni con altre discipline: Algoritmi e strutture dati

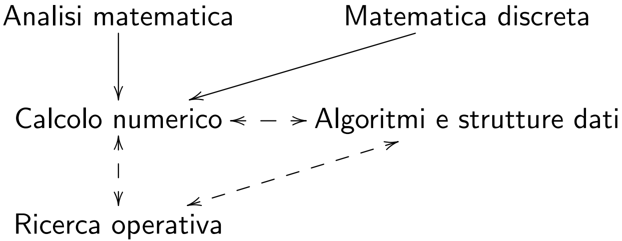
Il corso di Algoritmi e strutture dati si occupa di problemi discreti.

Affinità: l'obiettivo è fornire algoritmi efficienti per il calcolo di quantità.

Divergenze:

- Nel il corso di algoritmi si calcolano **quantità discrete**.
- Nel calcolo numerico si calcolano **quantità continue**.

Relazioni con gli altri corsi



Relazione con il mondo reale

$$\begin{tikzcd}
\text{Mondo reale} \arrow[rr, bend left, "\text{Modell(izz)azione}"] & & \text{Matematica} \arrow[ll, bend left, "\text{Applicazione}"]
\end{tikzcd}$$

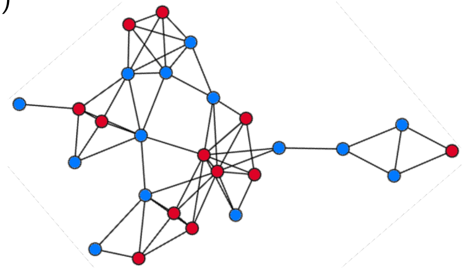
Esempi di applicazioni all'informatica

Applicazione 1. Il motore di ricerca per pagine web

Il pagerank delle pagine web è l'autovettore di un'opportuna matrice. Per calcolarlo occorre un algoritmo numerico (metodo delle potenze)

Il **successo** dell'azienda Google è stato inizialmente dovuto all'uso del calcolo numerico.

Modelli simili si utilizzano per **reti complesse** (economia, biologia, scienze umane)



Esempi di applicazioni all'informatica

Applicazione 2. Grafica vettoriale e grafica 3d

Il problema della grafica vettoriale si riconduce al congiungimento di punti tramite curve e il loro rendering. Per fare ciò si ricorre all'interpolazione e approssimazione (mesh, splines, NURBS, curve di Bézier).

L'uso di curve nei **videogiochi** si è affermato a partire dalla Playstation 2. Nell'**animazione computerizzata** è un caposaldo della Disney.

Esempi di applicazioni all'informatica

Applicazione 3. Multimedialità

L'esistenza dell'algoritmo FFT (Fast Fourier Transform) ha reso possibile realizzare applicazioni multimediali in tempo reale e formati di compressione efficienti e veloci.

I **formati di compressione** jpeg, mpeg, DivX, mp3 e i dispositivi ottici (CD, DVD, Blue Ray) sono basati sulla FFT e le sue varianti.

Altre applicazioni: alcuni esempi

- Matematica: calcolo numerico e approssimazione di quantità utili per dimostrare teoremi.
- Fisica: risoluzione delle equazioni del moto, del calore, delle onde, dell'elettrostatica, di Schroedinger (metodi numerici per equazioni differenziali ordinarie e alle derivate parziali).
- Medicina: la TAC (basata sulla FFT), il medical imaging in generale (per fini diagnostici).
- Sport: realizzazione di vele efficienti (basata sulla soluzione numerica dell'equazione della membrana).
- Guerra: armi intelligenti (calcolo numerico all'interno dei controlli)