Esercizi di Calcolo Numerico
a.a. 2020-21*

*Versione del 2 ottobre 2022. Questi esercizi sono forniti in formato di bozza ed è vietata la pubblicazione su Internet (possono invece essere distribuiti liberamente tra gli studenti).

Esercizi Erranti

Per altri esercizi sull'analisi dell'errore e sui numeri di macchina, si faccia riferimento al fascicolo presente in portineria.

Esercizio 1. Si scrivano i numeri $x_1 = 100/3$, $x_2 = 3/100$ in forma normalizzata e dato l'insieme di numeri di macchina $\mathcal{F}(10, 4, *, *)$, si calcoli $\mathrm{fl}(x_1) \oplus \mathrm{fl}(x_2)$. Si usi l'arrotondamento.

Soluzione. Si ha $100/3 = 33.\overline{3}$ che in forma normalizzata può essere scritto come $x_1 = 0.\overline{3} \cdot 10^2$, mentre $3/100 = 0.03$ che in forma normalizzata può essere scritto come $x_2 = 0.3 \cdot 10^{-1}$. Per ottenere $\mathrm{fl}(x_1)$ è sufficiente considerare le prime quattro cifre della rappresentazione normalizzata di x_1, poiché $x_1 = 0.33333\ldots \cdot 10^2$, si ha $\mathrm{fl}(x_1) = 0.3333 \cdot 10^2$; analogamente $\mathrm{fl}(x_2) = 0.3 \cdot 10^{-1}$. □

Esercizio 2. Si scrivano i numeri $x_1 = 1/3$, $x_2 = 1/4$ in $\mathcal{F}(10, 1, *, *)$ e si calcoli poi $\mathrm{fl}(x_1) \ominus \mathrm{fl}(x_2)$. Si usi l'arrotondamento.

Soluzione. Si ha $\mathrm{fl}(x_1) = \mathrm{fl}(0.\overline{3}) = 0.3$, e $\mathrm{fl}(x_2) = \mathrm{fl}(0.25) = 0.3$, da cui $\mathrm{fl}(x_1) \ominus \mathrm{fl}(x_2) = 0$. □

Esercizio 3. Si calcolino in modo esatto gli errori relativi di rappresentazione dei numeri reali $1/7$ e $1/8$ in $\mathcal{F}(10, 2, *, *)$, specificando quale dei due errori è più grande in modulo. Si usi l'arrotondamento.

Soluzione. Si ha $1/7 = 0.1426\ldots$ da cui $\mathrm{fl}(1/7) = 0.14$, mentre $1/8 = 0.125$ da cui $\mathrm{fl}(1/8) = 0.13$. I rispettivi errori di rappresentazione sono

$$\varepsilon_1 = \frac{0.14 - 1/7}{1/7} = \frac{\frac{14}{100} - \frac{1}{7}}{\frac{1}{7}} = \frac{14 \cdot 7 - 100}{700} 7 == -\frac{2}{100}, \qquad \varepsilon_2 = \frac{4}{100},$$

quindi l'errore che si commette rappresentando $1/8$ in $\mathcal{F}$ è più grande in modulo. □

Esercizio 4. Sia dato $\mathcal{F} := \mathcal{F}(10, 2, *, *)$. Si trovino due numeri $x, y \in \mathbb{R}$ tali che $x > y$, ma $\mathrm{fl}(x) \leqslant \mathrm{fl}(y)$. Si usi il troncamento.

Soluzione. Se $x = 0.123$ e $y = 0.122$, si ha $\mathrm{fl}(x) = 0.12$ e $\mathrm{fl}(y) = 0.12$. Quindi $x > y$, ma $\mathrm{fl}(x) \leq \mathrm{fl}(y)$. □

Esercizio 5. Sia dato $\mathcal{F} := \mathcal{F}(10, 2, *, *)$. Si trovino due numeri $x, y \in \mathbb{R}$ tali che $x < y$, ma $\mathrm{fl}(x) \geqslant \mathrm{fl}(y)$. Si usi l'arrotondamento.

Esercizio 6. Si trovi la rappresentazione di $2/7$ in $\mathcal{F}(10, 20, *, *)$.

Soluzione. Operando la divisione si scopre che $2/7 = 0.\overline{285714}$ e quindi la rappresentazione cercata è $\mathrm{fl}(2/7) = 0.28571428571428571428 \cdot 10^0$. □

Esercizio 7. Siano $x = 10$ e $y = 1/10$, si dica quanto valgono i prodotti

$$(\mathrm{fl}(x) \otimes \mathrm{fl}(x)) \otimes \mathrm{fl}(y), \qquad \mathrm{fl}(x) \otimes (\mathrm{fl}(x) \otimes \mathrm{fl}(y)),$$

se si utilizza l'aritmetica finita di $\mathcal{F}(10, 2, *, *)$ con arrotondamento.

Esercizio 8. *(gennaio 2016)* Trovare in $\mathcal{F}(10, 2, 10, 10)$ il più piccolo intero positivo k tale che $\mathrm{fl}(k) \otimes \mathrm{fl}(1/k) \neq \mathrm{fl}(1)$. Si trovi, inoltre, il più piccolo intero positivo h tale che $\mathrm{fl}(h) \times \mathrm{fl}(1/h) > \mathrm{fl}(1)$. Si usi l'arrotondamento. Cosa succede usando il troncamento?

Soluzione. Si può procedere per tentativi, osservando che $h \geq k$ e $\mathrm{fl}(1) = 1$. Se si considera l'intero 1, si ha $\mathrm{fl}(1) \otimes \mathrm{fl}(1) = \mathrm{fl}(1)$, per $k = 2$

$$\mathrm{fl}(1/2) = \mathrm{fl}(0.5) = 0.50 \cdot 10^0, \qquad \mathrm{fl}(2) = 0.20 \cdot 10^1, \qquad \mathrm{fl}(2) \otimes \mathrm{fl}(1/2) = \mathrm{fl}(0.50 \cdot 10^0 \times 0.20 \cdot 10^1) = \mathrm{fl}(1).$$

Per $k = 3$

$$\mathrm{fl}(3) \otimes \mathrm{fl}(1/3) = \mathrm{fl}(3 \times 0.33) = 0.99 \neq 1,$$

e quindi k è 3. Si può procedere allo stesso modo per gli interi successivi

$$\mathrm{fl}(4) \times \mathrm{fl}(1/4) = 4 \times 0.25 = 1, \quad \mathrm{fl}(5) \times \mathrm{fl}(1/5) = 5 \times 0.2 = 1, \quad \mathrm{fl}(6) \otimes \mathrm{fl}(1/6) = 6 \times 0.17 = 1.02 > 1,$$

e quindi $h = 6$.

Nel caso in cui si usi il troncamento, la risposta alla prima domanda non cambia, cioè $k = 3$, mentre poiché, per $x > 0$, si ha $\mathrm{trunc}(x) \leq x$ abbiamo che, per ogni n, $\mathrm{fl}(n) \times \mathrm{fl}(1/n) \leq n \times 1/n = 1$ e quindi non esiste alcun valore per cui valga la seconda diseguaglianza (trascurando l'overflow). □

Esercizio 9. *(febbraio 2016)* Sia dato l'insieme dei numeri di macchina $\mathcal{F}(10, 2, 10, 10)$ e siano dati $a = 1/5$, $b = 3$ e $c = 157$. Dopo aver scritto in forma normalizzata $\mathrm{fl}(a)$, $\mathrm{fl}(b)$, $\mathrm{fl}(c)$, si calcoli $\mathrm{fl}(a) \oplus \mathrm{fl}(b)$ e si dica quanto valgono

$$(\mathrm{fl}(a) \oplus \mathrm{fl}(b)) \oplus \mathrm{fl}(c), \quad (\mathrm{fl}(b) \oplus \mathrm{fl}(a)) \oplus \mathrm{fl}(c), \quad \mathrm{fl}(c) \oplus (\mathrm{fl}(a) \oplus \mathrm{fl}(b)), \quad \mathrm{fl}(c) \oplus (\mathrm{fl}(b) \oplus \mathrm{fl}(a)).$$

Si usi l'arrotondamento e si scrivano tutti i risultati in forma normalizzata.

Soluzione. Si ha

$$\mathrm{fl}(1/5) = \mathrm{fl}(0.2) = 0.20 \cdot 10^0, \qquad \mathrm{fl}(3) = 0.30 \cdot 10^1, \qquad \mathrm{fl}(157) = 0.16 \cdot 10^3, \qquad \mathrm{fl}(a) \oplus \mathrm{fl}(b) = \mathrm{fl}(1/5 + 3) = 0.32 \cdot 10^1.$$

Inoltre,

$$(\mathrm{fl}(a) \oplus \mathrm{fl}(b)) \oplus \mathrm{fl}(c) = (\mathrm{fl}(b) \oplus \mathrm{fl}(a)) \oplus \mathrm{fl}(c) = \mathrm{fl}(c) \oplus (\mathrm{fl}(a) \oplus \mathrm{fl}(b)) = \mathrm{fl}(c) \oplus (\mathrm{fl}(b) \oplus \mathrm{fl}(a)) = \mathrm{fl}(3.2 + 157) = \mathrm{fl}(160.2) = 0.16 \cdot 10^3$$

dove le uguaglianze valgono poiché vale la proprietà commutativa per la somma di macchina. □

Esercizio 10. Sia dato l'insieme di numeri di macchina $\mathcal{F}(\beta, 2, 1, 1)$, dire per quali valori di $\beta > 2$ si ha $\mathrm{fl}(2) \oplus \mathrm{fl}(2) =$Inf. Dire cosa accade per $\beta = 2$.

Soluzione. Il risultato è Inf quando 4 è maggiore del più grande numero di macchina, cioè, quando 4 nella base β ha due o più cifre. Questo accade per $\beta < 5$. Infatti $4 = [11]_3$ e $4 = [10]_4$. Per $\beta \geq 5$, si ha $\mathrm{fl}(2) \oplus \mathrm{fl}(2) = 0.40 \cdot \beta^1 \in \mathcal{F}(\beta, 2, 1, 1)$. Per $\beta = 2$ si ha $\mathrm{fl}(2) =$Inf, in quanto $2 = [10]_2$. □

Esercizio 11. Si dica quanto fa $\mathrm{fl}(8) \otimes \big((\mathrm{fl}(1) \oslash \mathrm{fl}(9)) \oplus (\mathrm{fl}(1) \oslash \mathrm{fl}(9))\big)$ in $\mathcal{F}(10, 2, 5, 5)$, scrivendo il risultato in notazione normalizzata.

Esercizio 12. Sia dato l'insieme di numeri di macchina $\mathcal{F} := \mathcal{F}(10, 2, 1, 1)$, si scrivano le rappresentazioni in forma normalizzata dei numeri 1, 3 e $1/3$ in $\mathcal{F}$ e si calcolino in modo esatto gli errori relativi di rappresentazione. Si dica inoltre quanto valgono $3 \otimes 1/3$ e $5 \otimes 5$ (se si opera con il troncamento).

Soluzione. $1 = 0.10 \cdot 10^1$, $1/3 = 0.33 \cdot 10^0$, $3 = 0.30 \cdot 10^1$. Nel primo e terzo caso gli errori sono nulli, mentre per $1/3$ l'errore relativo è

$$\frac{\widetilde{x} - x}{x} = \frac{0.33 - 1/3}{1/3} = \frac{33/100 - 1/3}{1/3} = 3\frac{99 - 100}{300} = -\frac{1}{100} = -10^{-2}.$$

Infine

$$3 \otimes 1/3 = \mathsf{trunc}(0.30 \cdot 10^1 \cdot 0.33 \cdot 10^0) = \mathsf{trunc}(0.99 \cdot 10^1) = 0.99 \cdot 10^1.$$

e

$$5 \otimes 5 = \mathsf{trunc}(0.50 \cdot 10^1 \cdot 0.50 \cdot 10^1) = \mathsf{trunc}(0.25 \cdot 10^2) = \mathsf{Inf}.$$

□

Esercizio 13. Sia dato l'insieme di numeri di macchina $\mathcal{F} := \mathcal{F}(10, 2, 1, 1)$, si scrivano le rappresentazioni in forma normalizzata dei numeri $1/7$, 5 e $5/7$ in $\mathcal{F}$ e si calcolino gli errori relativi di rappresentazione. Si dica inoltre quanto valgono $5/7 \ominus (5 \otimes 1/7)$ (se si opera con il troncamento).

Esercizio 14. Si elenchino tutti i numeri di macchina dell'insieme $\mathcal{F}(2, 2, 1, 1)$.

Esercizio 15. Sia dato l'insieme di numeri di macchina $\mathcal{F} := \mathcal{F}(10, 3, 2, 2)$. Si consideri la successione $a_k = 10^k$, si scriva la rappresentazione in forma normalizzata di a_k in $\mathcal{F}$ specificando per quali valori di k si ha overflow.

Esercizio 16. Sia dato l'insieme di numeri di macchina $\mathcal{F} := \mathcal{F}(10, 2, 100, 100)$, si scrivano le rappresentazioni in forma normalizzata dei numeri $\cos(\pi/3), 1000000$ e $\log(e)$ in $\mathcal{F}$ e si calcolino i rispettivi errori di rappresentazione. Si dica inoltre quanto vale $(\mathrm{fl}(1000) \ominus \mathrm{fl}(1)) \oplus \mathrm{fl}(1)$.

Esercizio 17. Siano dati gli insiemi di numeri di macchina

$$\mathcal{F}_1 := \mathcal{F}(2, 1, 10, 10), \qquad \mathcal{F}_2 := \mathcal{F}(2, 2, 10, 10), \qquad \mathcal{F}_3 := \mathcal{F}(10, 1, 10, 10),$$

si scriva la rappresentazione normalizzata del numero 1 e si dica quanto vale $\mathrm{fl}(1) \oplus \mathrm{fl}(1)$, in $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ e $\mathcal{F}_3$,

Esercizio 18. Si dica quale dei seguenti numeri appartiene a $\mathcal{F} := \mathcal{F}(10, 3, 1, 10)$: $x_1 = \sqrt{2}$, $x_2 = 123000$, $x_3 = 1/1000$, $x_4 = 0.1234 \cdot 10^{10}$.

Soluzione. Si ha: $x_1 \notin \mathcal{F}$, poiché la sua rappresentazione in base $x_1 = 1.414\ldots$, una volta normalizzato, ha cifre non banali dopo la terza; $x_2 \in \mathcal{F}$, poiché è vero che ha sei cifre, ma una volta normalizzato, si può scrivere $x_2 = 0.123 \cdot 10^3$, che non ha cifre banali dopo la terza e l'esponente è compreso tra i valori ammessi; $x_3 \notin \mathcal{F}$ poiché $x_3 = 0.1 \cdot 10^{-2}$ e l'esponente è minore del minimo; $x_4 \notin \mathcal{F}$ poiché, nella forma normalizzata, ha cifre non banali dopo la terza. □

Esercizio 19. Si scriva la rappresentazione normalizzata in $\mathcal{F}(10, 2, *, *)$ del numero $x = 11/4$, usando l'arrotondamento.

Esercizio 20. Siano $a = 5$ e $b = 100$, si dica quanto vale $a \oplus b$ in $\mathcal{F}(10, 2, *, *)$, usando l'arrotondamento.

(a) 110
(b) $0.105 \cdot 10^3$
(c) $0.10 \cdot 10^3$
(d) $0.10 \cdot 10^2$

Esercizio 21. Sia $x = 3/8 = 0.375$. Si dica quanto vale l'errore relativo di rappresentazione commesso approssimando x con $\mathrm{fl}(x)$ in $\mathcal{F}(10, 2, *, *)$, usando il troncamento ($37 \times 8 = 296$).

Esercizio 22. (*18 novembre 2016*) Si hanno a disposizione 8 bit e si vuole costruire un tipo di dato *short float*.

(a) Si definisca un insieme di numeri di macchina del tipo $\mathcal{F} := \mathcal{F}(2, t, m, M)$ che si possa memorizzare su 8 bit e che contenga i numeri $1/8$ e -8 (e lo zero!).

(b) Si specifichi, per la scelta effettuata in (a), quante sono le stringhe di bit che non rappresentano alcun numero in $\mathcal{F}$. Esiste una scelta in cui tutte le stringhe di bit rappresentano un numero?

Esercizio 23. Si determinino due diversi insiemi di numeri di macchina che contengono il numero $x = -5.2415 \cdot 10^{99}$.

Esercizio 24. (*settembre 2017*) Siano dati gli insiemi di numeri di macchina $\mathcal{F}_1 := \mathcal{F}(10, 5, 3, 3)$ e $\mathcal{F}_2 := \mathcal{F}(10, 2, 10, 10)$. Si fornisca un esempio di numero appartenente a $\mathcal{F}_1$ ma non a $\mathcal{F}_2$ e un esempio di numero appartenente a $\mathcal{F}_2$ ma non a $\mathcal{F}_1$.

Soluzione. Sia $x_1 = 0.123 \cdot 10^0$. Abbiamo che $x_1 \in \mathcal{F}_1$ poiché la sua rappresentazione in forma normalizzata non ha cifre non banali dopo la quinta e perché l'esponente appartiene all'insieme degli esponenti ammessi, ma $x_1 \notin \mathcal{F}_2$ poiché la sua rappresentazione in forma normalizzata ha una cifra non banale dopo la seconda. Sia $x_2 = 0.1 \cdot 10^4$. Si ha che $x_2 \notin \mathcal{F}_1$ poiché la sua rappresentazione in forma normalizzata ha un esponente fuori dall'insieme degli esponenti ammessi. □

Esercizio 25. Si trovino i punti nell'intorno dei quali la funzione $f(x) = x^2 - 4x + 3$ è malcondizionata.

Esercizio 26. Si dica quanto vale il coefficiente di amplificazione dell'errore inerente nel calcolo della funzione $f(x) = e^{2x^2}$, con $x \neq 0$ e $\varepsilon_x = \frac{\mathrm{fl}(x)-x}{x}$.

Esercizio 27. Si dica, motivando la risposta, se la funzione $f(x) = \sin x - 1$ è malcondizionata nell'intorno di $x = 0$.

Esercizio 28. Si dica, motivando la risposta, se la funzione $f(x) = \cos x - 1$ è malcondizionata nell'intorno $x = 0$.

Esercizio 29. Sia data la funzione

$$f(x) = x^4 - 9 = (x^2 - 3)(x^2 + 3),$$

(a) studiare il condizionamento del calcolo della funzione;

(b) calcolare l'errore algorimico ottenuto usando la seconda formula e studiarne la stabilità;

(c) mostrare che per $x > \sqrt{6}$ il modulo dell'errore algoritmico ottenuto con la seconda formula può essere maggiorato con $6u$, dove u è la precisione di macchina.

Soluzione. (a) Basta calcolare il coefficiente di amplificazione

$$c_x = \frac{x}{f(x)} f'(x) = \frac{4x^4}{x^4 - 9},$$

e osservare che esso tende a infinito per $x \to \pm\sqrt{3}$ (le soluzioni dell'equazione $x^4 - 9$ sono $x = \pm\sqrt{3}$) e quindi il problema è mal condizionato nell'intorno dei punti $\pm\sqrt{3}$. Poiché $\lim_{x\to\pm\infty} c_x = 4$ si ha che il problema è ben condizionato per $x \to \pm\infty$.

(b) L'algoritmo è così descritto $v_1 = x^2$, $v_2 = v_1 - 3$, $v_3 = v_1 + 3$, $v_4 = v_2 v_3$, con errore locale η_i, $i = 1, 2, \ldots, 4$ con $|\eta_i| < u$. L'errore algoritmico può essere calcolato mediante l'uso dei grafi dell'errore ottenendo

$$\varepsilon_{ALG} = \eta_4 + \eta_2 + \eta_3 + \left(\frac{x^2}{x^2 - 3} + \frac{x^2}{x^2 + 3} \right) \eta_1,$$

da cui si deduce subito che l'algoritmo è instabile negli intorni di $\sqrt{3}$ e $-\sqrt{3}$.

(c) Si può maggiorare il modulo dell'errore algoritmico nel seguente modo

$$|\varepsilon_{ALG}| \leq |\eta_4| + |\eta_2| + |\eta_3| + |\eta_1| \left(\frac{|x^2|}{|x^2 + 3|} + \frac{|x^2|}{|x^2 - 3|} \right) \leq u \left(3 + \frac{x^2}{x^2 + 3} + \frac{x^2}{x^2 - 3} \right),$$

dove i valori assoluti sono spariti poiché $x > \sqrt{6}$ implica $x^2 - 3 > 0$ e le altre quantià sono evidentemente positive.

Ora, siccome $x^2 < x^2 + 3$ allora $\frac{x^2}{x^2+3} < 1$ e tutto si maggiora con $6u$ se $\frac{x^2}{x^2-3} \leq 2$; ma $x^2 \leq 2(x^2 - 3)$ se e solo se $x^2 \geq 6$ se e solo se $x \geq \sqrt{6}$ o $x \leq -\sqrt{6}$. Quindi per $x > \sqrt{6}$ l'errore è maggiorato da $6u$.

Alternativamente, si poteva osservare che

$$|\varepsilon_{ALG}| \leq u \left(3 + \frac{2x^4}{x^4 - 9} \right),$$

e $\frac{2x^4}{x^4-9} < 3$ se e solo se $x^4 > 27$ che vale per $x > \sqrt[4]{27}$ e $x < -\sqrt[4]{27}$ ma, poiché $\sqrt{6} > \sqrt[4]{27}$ allora vale anche per $x > \sqrt{6}$ e $x < -\sqrt{6}$ cioè $x^2 > 6$. In particolare, si può dimostrare che per $x > \sqrt{6}$, vale la maggiorazione $|\varepsilon_{ALG}| \leq (3 - \frac{1}{3})u$ □

Esercizio 30. *(23 febbraio 2010)* Si consideri la seguente funzione

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 - y^2} = \sqrt{x - y} \cdot \sqrt{x + y}, \quad |y| < x.$$

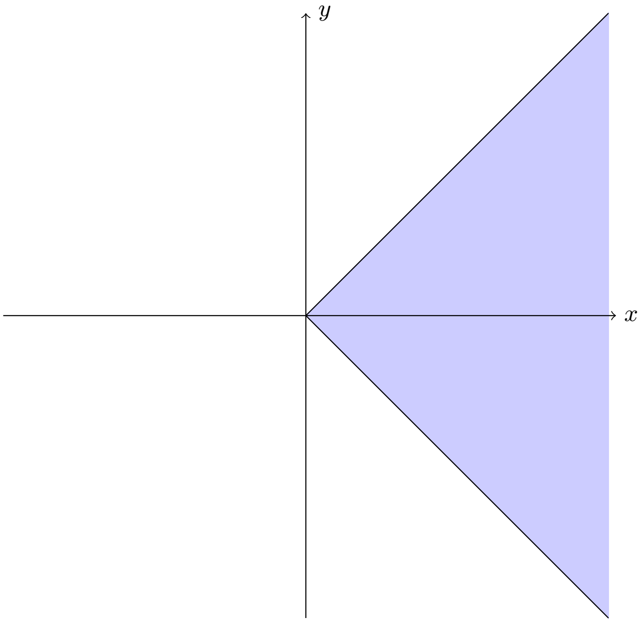
Supponendo di calcolare la radice quadrata con una funzione di libreria che produce un errore locale minore in modulo della precisione di macchina u:

(a) si rappresenti graficamente l'insieme $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |y| < x\}$;

(b) si studi il condizionamento del calcolo di $f(x, y)$;

(c) si calcoli l'errore algoritmico ottenuto usando le due espressioni scritte sopra e si provi che uno dei due si può maggiorare con $4u$.

Soluzione. (a) Basta osservare che la regione è data dal settore delimitato dalle rette $y = x$ e $y = -x$ e contenente il semiasse positivo delle x.



(b) Poiché la funzione è derivabile infinite volte nell'insieme $|y| < x$, si può calcolare l'errore inerente usando la formula $\varepsilon_{IN} = c_x\varepsilon_x + c_y\varepsilon_y$ dove $|\varepsilon_x|, |\varepsilon_y| \le u$ da cui

$$\varepsilon_{IN} = \frac{x}{f(x,y)}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\varepsilon_x + \frac{y}{f(x,y)}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\varepsilon_y = \frac{x}{\sqrt{x^2-y^2}}\frac{2x}{2\sqrt{x^2-y^2}}\varepsilon_x - \frac{y}{\sqrt{x^2-y^2}}\frac{2y}{2\sqrt{x^2-y^2}}\varepsilon_y = \frac{x^2\varepsilon_x - y^2\varepsilon_y}{x^2-y^2}.$$

Si vede che l'errore inerente non è limitato negli intorni dei punti $y = \pm x$ dove il problema del calcolo di $f(x,y)$ risulta malcondizionato.

(c) la risoluzione è standard, unica accortezza ricordare che il coefficiente di amplificazione della radice quadrata è $\frac{1}{2}$. $\square$

Esercizio 31. *(29 giugno 2010)* Si studi il condizionamento della funzione $f(x) = \sqrt{x^2-4}$, definita per $|x| > 2$.

Esercizio 32. Dopo aver calcolato il limite $\lim_{x\to 0} \frac{\arctan(x)}{x}$, si studi il condizionamento del calcolo della funzione $f(x) = \arctan(x)$, per $x \in \mathbb{R}$.

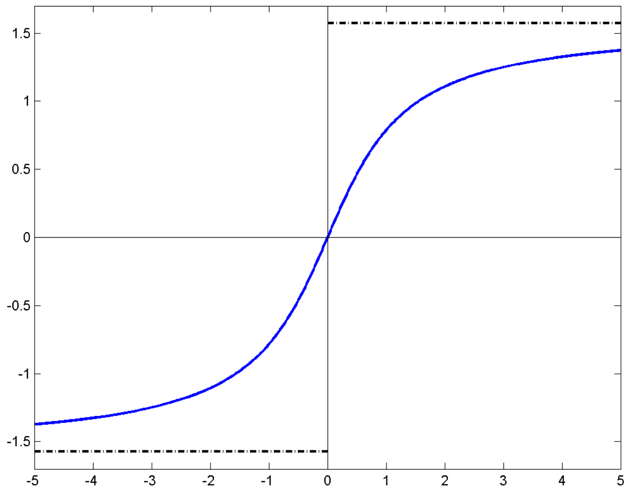
Proprietà della funzione arcotangente. La funzione $f(x) = \arctan(x)$ è una funzione trigonometrica che gode delle seguenti proprietà:

- è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$;
- è continua e derivabile infinite volte in $\mathbb{R}$;
- è una funzione dispari, cioè $\arctan(-x) = -\arctan(-x)$;
- $\lim_{x\to\pm\infty} \arctan(x) = \pm\frac{\pi}{2}$;
- vale $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ e quindi $f'(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, in particolare f è monotona crescente.

Alcuni valori notevoli per l'arcotangente sono:

$$\arctan(0) = 0, \quad \arctan(\sqrt{3}/3) = \frac{\pi}{6}, \quad \arctan(1) = \frac{\pi}{4}, \quad \arctan(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3},$$

dalla simmetria si deduce che $\arctan(-\sqrt{3}/3) = -\arctan(\sqrt{3}/3)$, $\arctan(-1) = -\arctan(1)$ e $\arctan(-\sqrt{3}) = -\arctan(\sqrt{3})$. In basso è rappresentato un grafico qualitativo.



Esercizio 33. *(15 giugno 2009)* Sia data la funzione

$$f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x^2-9}} = \sqrt{\frac{x+3}{2}} + \sqrt{\frac{x-3}{2}}, \qquad x > 3,$$

(a) verificare che le due espressioni sono equivalenti;

(b) studiare il condizionamento del calcolo di $f(x)$;

(c) calcolare l'errore algorimico ottenuto usando le due formule e discuterne la stabilità (si assuma che la radice quadrata venga effettuata con un errore locale dell'ordine della precisione di macchina).

Esercizio 34. *(13 luglio 2009)* Sia data la funzione

$$f(x) = 1 - \frac{1}{1+3x} = \frac{3x}{1+3x}, \quad x > -\frac{1}{3},$$

(a) si studi il condizionamento del calcolo di $f(x)$;

(b) mostrare che per $x > 0$, l'errore inerente può essere maggiorato con la precisione di macchina;

(c) calcolare l'errore algorimico ottenuto usando le due formule e si confrontino i risultati.

Esercizio 35. *(2 settembre 2009)* Un tizio deve calcolare la radice sesta di un numero positivo ed ha a disposizione un calcolatore con le funzioni di libreria radice quadrata e radice cubica (si assume che il valore assoluto dell'errore prodotto nel calcolo di queste funzioni si possa maggiorare con la precisione di macchina). Dal punto di vista della stabilità numerica gli conviene calcolare prima la radice quadrata e poi quella cubica o prima quella cubica e poi quella quadrata? (Suggerimento: si calcolino gli errori algoritmici corrispondenti ai due metodi possibili e si confrontino opportune maggiorazioni del loro modulo).

Esercizio 36. Sia data la funzione

$$f(x) = x^4 - 9 = (x^2 - 3)(x^2 + 3),$$

(a) studiare il condizionamento del calcolo della funzione;

(b) calcolare l'errore algoritmico ottenuto usando la seconda formula e studiarne la stabilità;

(c) mostrare che per $x > \sqrt{6}$ il modulo dell'errore algoritmico ottenuto con la seconda formula può essere maggiorato con $6u$, dove u è la precisione di macchina.

Esercizio 37. *(14 giugno 2013)* Sia $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, e si consideri la funzione $f(a, b, c, d) = \det(A)$.

(a) Si calcoli l'errore inerente relativo al calcolo della funzione e si discuta il condizionamento in funzione della matrice A;

(b) mostrare che se a e d hanno lo stesso segno e se b e c hanno segno opposto allora è possibile maggiorare il modulo dell'errore inerente con la costante $2u$;

(c) si calcoli l'errore algoritmico.

Soluzione. (a) L'errore inerente nel calcolo di $f(a, b, c, d) = ad - bc$, con a, b, c, d non nulli, è $\varepsilon_{IN} = \chi_a\varepsilon_a + \chi_b\varepsilon_b + \chi_c\varepsilon_c + \chi_d\varepsilon_d$, con

$$\chi_a = \frac{a}{f}\frac{\partial f}{\partial a} = \frac{a}{ad - bc}d = \frac{ad}{ad - bc}, \quad \chi_d = \chi_a, \quad \chi_b = \chi c = \frac{-bc}{ad - bc}.$$

Si deduce che il problema è mal condizionato quando la matrice di partenza è singolare (con $a, b, c, d \neq 0$). (b) se a e d hanno lo stesso segno $ad > 0$ e quindi $|ad| = ad$, se b e c hanno segno opposto allora $bc < 0$ e quindi $|bc| = -bc$, infine $ad - bc > 0$ e quindi $|ad - bc| = ad - bc$. Ora,

$$|\varepsilon_{IN}| \leq \frac{|ad|}{|ad - bc|}|\varepsilon_a| + |\varepsilon_d| + \frac{|bc|}{|ad - bc|}|\varepsilon_b| + |\varepsilon_c| = 2\frac{|ad| + |bc|}{|ad - bc|}u = 2\frac{ad - bc}{ad - bc}u = 2u.$$

(c) L'algoritmo da considerare è $v_1 = ad$, $v_2 = bc$, $v_3 = v_1 - v_2$ (è unico a meno di scambiare v_1 con v_2 che non cambia l'errore). Se si denota con η_i l'errore commesso nell'operazione i, l'errore algoritmico può essere ottenuto utizzando i grafi dell'errore

$$\varepsilon_{ALG} = \eta_3 + \frac{v_1}{v_3}\eta_1 + \frac{-v_2}{v_3}\eta_2 = \eta_3 + \frac{ad}{ad - bc}\eta_1 + \frac{-bc}{ad - bc}\eta_2.$$

□

Esercizio 38. *(14 giugno 2013)* Sia $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, e si consideri la funzione $f(a, b, c, d) = \|A\|_F^2$.

(a) Si calcoli l'errore inerente relativo al calcolo della funzione e si discuta il condizionamento in funzione della matrice A;

(b) mostrare che è possibile maggiorare il modulo dell'errore inerente con la costante $2u$;

(c) si calcoli l'errore algoritmico ottenuto utilizzando l'algoritmo parallelo per la somma.

Soluzione. (a) L'errore inerente nel calcolo di $f(a,b,c,d) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$, con a, b, c, d non nulli, è $\varepsilon_{IN} = \chi_a \varepsilon_a + \chi_b \varepsilon_b + \chi_c \varepsilon_c + \chi_d \varepsilon_d$, con

$$\chi_a = \frac{a}{f}\frac{\partial f}{\partial a} = \frac{a}{\|A\|^2} 2a = \frac{2a^2}{\|A\|^2}, \quad \chi_b = \frac{2b^2}{\|A\|^2}, \quad \chi_c = \frac{2c^2}{\|A\|^2}, \quad \chi_d = \frac{2d^2}{\|A\|^2}.$$

Osservando che, poiché $a^2 \le a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ si ha che $\chi_a \le 2$ e lo stesso vale per χ_b, χ_c, χ_d, si deduce che il problema è ben condizionato. (b) Si ha,

$$|\varepsilon_{IN}| \le \frac{|2a^2|}{\|A\|^2}|\varepsilon_a| + \frac{|2b^2|}{\|A\|^2}|\varepsilon_b| + \frac{|2c^2|}{\|A\|^2}|\varepsilon_c| + \frac{|2d^2|}{\|A\|^2}|\varepsilon_d| \le \frac{2a^2 + 2b^2 + 2c^2 + 2d^2}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} u = 2u.$$

(c) L'algoritmo da considerare è $v_1 = a^2$, $v_2 = b^2$, $v_3 = c^2$, $v_4 = d^2$ a cui segue la somma parallela $v_5 = v_1 + v_2$, $v_6 = v_3 + v_4$, $\|A\|^2 = v_7 = v_5 + v_6$ (ci sono due variazioni: porre $v_5 = v_1 + v_3$ e $v_6 = v_2 + v_4$ o porre $v_5 = v_1 + v_4$ e $v_6 = v_2 + v_3$ ma l'analisi dell'errore è simile). Se si denota con η_i l'errore commesso nell'operazione i, l'errore algoritmico può essere ottenuto utizzando i grafi dell'errore

$$\begin{aligned}\varepsilon_{ALG} = \eta_7 + \frac{v_5}{v_7}\left(\eta_5 + \frac{v_1}{v_5}\eta_1 + \frac{v_2}{v_5}\eta_2\right) + \frac{v_6}{v_7}\left(\eta_6 + \frac{v_3}{v_6}\eta_3 + \frac{v_4}{v_6}\eta_4\right)& \\ = \eta_7 + \frac{1}{\|A\|^2}\left(a^2\eta_1 + b^2\eta_2 + c^2\eta_3 + d^2\eta_4 + (a^2+b^2)\eta_5 + (c^2+d^2)\eta_6\right).&\end{aligned}$$

□

Esercizi Strutturati

Esercizio 39. (*26 novembre 2010*) Siano $L \in \mathbb{C}^{n\times n}$ una matrice triangolare inferiore, $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ una generica matrice e $v \in \mathbb{C}^{n\times n}$ un generico vettore, si descriva un algoritmo che ottenga il prodotto Lv sfruttando la struttura con un costo asintotico pari alla metà del costo del prodotto Av. Si scriva una porzione di (pseudo)codice che implementi l'algortimo.

Soluzione. È sufficiente modificare in modo opportuno l'algoritmo che calcola il prodotto di una matrice per un vettore, ottenendo

```
function w=prod(L,v)
for k=1:n
   w(k)=0;
   for  h=1:k   % nel caso generico questo for va da 1 fino a n
      w(k)=w(k)+L(k,h)*v(h);
   end
end
```

Il ciclo più interno esegue due operazioni e viene eseguito k volte, quindi il costo delle operazioni aritmetiche all'interno del ciclo esterno è $2k$. Per ottenere il costo totale, indicato con $C(n)$, occorre sommare questo numero per k che va da 1 a n.

$$C(n) = \sum_{k=1}^{n} 2k = 2\sum_{k=1}^{n} k = 2\frac{n(n+1)}{2} = n^2 + n \approx n^2,$$

che è la metà del costo asintotico del prodotto matrice-vettore. □

Esercizio 40. (*22 gennaio 2010*) Si descriva un algoritmo che, dati gli interi non negativi n e k con $n \geq k$, calcoli $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$, con costo computazionale $O(k)$. Si calcoli il numero di operazioni effettuate.

Risoluzione. Utilizzando la formula $s := \binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$, si può realizzare un semplice algoritmo del tipo

```
s=1;t=n;
for j=1:k
    s=s*t/j;
    t=t-1;
end
```

L'algoritmo richiede tre operazioni all'interno del ciclo, per un totale di $3k$ operazioni. Si può utilizzare anche il triangolo di Tartaglia.

Esercizio 41. (*16 settembre 2011*) Siano $p(x)$ e $q(x)$ due polinomi di grado al più n. Si descriva un algoritmo che, dati i coefficienti di p e q e un punto x_0, valuti la frazione $f(x_0) = p(x_0)/q(x_0)$ con un costo asintotico non maggiore di $4n + o(n)$ operazioni aritmetiche. L'algoritmo può essere presentato in pseudocodice o in un qualsiasi linguaggio di programmazione.

Esercizio 42. (*3 febbraio 2011*) Si scrivano tre porzioni di pseudocodice che, dato in input un vettore $x \in \mathbb{R}^n$, calcolino in output rispettivamente le quantità

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2},$$
$$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k|,$$
$$\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|\}.$$

È consentito usare le operazioni aritmetiche e le chiamata alla funzione di libreria `abs` che calcola il valore assoluto di un numero reale e `sqrt` che calcola la radice quadrata di un numero positivo (non si può usare la funzione `max`). Valutarne il costo computazionale in termini di operazioni aritmetiche, contando come 1 operazione ogni chiamata ad `abs` e `sqrt` e ogni confronto.

Esercizio 43. (*15 settembre 2011*) È ben nota l'identità

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Scrivere un algoritmo in pseudocodice che approssimi π, usando la formula precedente troncando la somma al termine M (cioè sommando i primi M termini). È possibile usare la funzione di libreria `sqrt()` per calcolare la radice quadrata di un numero.

Esercizio 44. *(24 settembre 2012)* Sia data una matrice $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$.

(a) Si scriva in pseudocodice un algoritmo che calcoli la somma degli elementi sulle diagonali di A e li metta in un vettore v di dimensione $2n-1$ e si dica qual è il suo costo computazionale;

(b) si dica se l'algoritmo si può parallelizzare e in tal caso quanti cicli sono richiesti;

(c) si dica se è possibile abbassare il costo computazionale nel caso in cui A sia simmetrica, modificando opportunamente il codice del punto (a);

(d) si dica se è possibile abbassare il costo computazionale nel caso in cui A sia tridiagonale, modificando opportunamente il codice del punto (a);

(e) si dica se è possibile abbassare il costo computazionale nel caso in cui A sia una matrice di Toeplitz (cioè una matrice costante lungo le diagonale, più precisamente, tale che $a_{ij} = t_{i-j}$, dove $t_{-n+1}, t_{-n+2}, \dots, t_{-1}, t_0, t_1, \dots, t_{n-1}$ sono numeri fissati).

Esercizio 45. Scrivere in pseudocodice un algoritmo che data una matrice calcoli la somma degli elementi in cui l'indice di riga è pari e l'indice di colonna è dispari.

Esercizio 46. (*18 luglio 2012*) Siano $v, w \in \mathbb{C}^n$ con $v \neq 0$ e sia data la matrice $Q = 2I - vv^T$.

(a) Dire se la matrice Q è simmetrica;

(b) dire qual è la parte principale del costo computazionale necessario per formare Q e moltiplicarla per il vettore generico w;

(c) trovare un algoritmo che calcoli il prodotto Qw in $O(n)$ ops e darne un'implementazione in pseudocodice.

Esercizio 47. Sia A una matrice $n\times n$. Si scriva in pseudocodice un algoritmo che calcoli la media aritmetica delle somme delle colonne di A. Quanto vale questa media se A è una matrice stocastica (cioè tale che la somma di ogni riga è 1)?

Esercizio 48. (*14 giugno 2016*) Sia data la struttura

$$\mathcal{S}_n = \{M \in \mathbb{R}^{2n\times 2n} \,:\, m_{ij} = 0, \text{ per } i \neq j, i \neq j+n, i \neq j-n\}.$$

Una matrice $M \in \mathcal{S}_n$ può essere rappresentata come

$$M = \left[\begin{array}{cccc|cccc} a_1 & & & & b_1 & & & \\ & a_2 & & & & b_2 & & \\ & & \ddots & & & & \ddots & \\ & & & a_n & & & & b_n \\ \hline c_1 & & & & d_1 & & & \\ & c_2 & & & & d_2 & & \\ & & \ddots & & & & \ddots & \\ & & & c_n & & & & d_n \end{array}\right] \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}.$$

(a) Dire se $\mathcal{S}_n$ è un'algebra.

(b) Descrivere in pseudocodice un algoritmo per il calcolo di $w = Mv$ dove $M \in \mathcal{S}_n$ e $v \in \mathbb{R}^{2n}$ e che abbia costo computazionale minore o uguale a $8n$ ops e si conti il numero di operazioni richieste.

(c) Avendo a disposizione un numero di processori sufficientemente elevato, si fornisca un algoritmo parallelo che calcoli il prodotto $w = Mv$ in 2 cicli di calcolo, specificando qual è il minimo numero di processori necessari (si ignorino le questioni legate all'accesso alla memoria).

(d1) Si consideri ora il caso in cui $a_i = 1$ e $c_i = 1$ per $i = 1, \ldots, n$ e $b_i = \gamma^{i-1}$, $d_i = -\gamma^{i-1}$, dove γ è un numero reale. Scrivere in pseudocodice un algoritmo che calcoli tutte le potenze di γ e il prodotto $w = Mv$ e che non richieda più di $4n$ ops.

(d2) Si consideri ora il caso in cui $b_i = 1$ e $d_i = 1$ per $i = 1, \ldots, n$ e $a_i = \gamma^{i-1}$, $c_i = -\gamma^{i-1}$, dove γ è un numero reale. Scrivere in pseudocodice un algoritmo che calcoli tutte le potenze di γ e il prodotto $w = Mv$ e che non richieda più di $4n$ ops.

Soluzione. (a) La struttura è un'algebra, infatti scrivendo a blocchi $M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ e $M' = \begin{bmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{bmatrix}$, con $M, M' \in \mathcal{S}_n$, tutti i blocchi di M e M' sono matrici diagonali. Si ha $MM' = \begin{bmatrix} AA' + BC' & AB' + BD' \\ CA' + DC' & CB' + DD' \end{bmatrix}$ e ognuno dei blocchi è dato da prodotti e somme di matrici diagonali che rimangono diagonali.

(b) È possibile costruire un algoritmo che richiede esattamente 6n ops.

```
for i=1:n
  w(i)=m(i,i)*v(i)+m(i,i+n)*v(i+n);
  w(i+n)=m(i+n,i)*v(i)+m(i+n,i+n)*v(i+n);
end
```

o, il che è lo stesso

```
for i=1:n
  w(i)=a(i)*v(i)+b(i)*v(i+n);
  w(i+n)=c(i)*v(i)+d(i)*v(i+n);
end
```

(c) Se si considera il precedente algoritmo, il ciclo esterno è completamente parallelizzabile, così come le due istruzioni interne possono essere eseguite in parallelo. Nel calcolo di $w(i)$ e $w(i+n)$ le due moltiplicazioni possono essere eseguite in parallelo in un ciclo, seguite dalla somma, per un totale di due cicli.

```
parallel for i=1:n
  parallel
    s1=m(i,i)*v(i);
    t1=m(i,i+n)*v(i+n);
    s2=m(i+n,i)*v(i);
    t2=m(i+n,i+n)*v(i+n);
  end
  parallel
    w(i)=s1+t1;
    w(i+n)=s2+t2;
  end
end
```

Sono necessari $4n$ processori. Per il primo blocco parallelo interno sono necessari 4 processori, per il secondo 2, quindi per eseguire il contenuto del for esterno in 2 cicli sono necessari 4 processori. Questo numero va moltiplicato per le volte che viene ripetuto il ciclo for è cioè n volte, in questo modo otteniamo che il numero di processori richiesto è $4n$.

(d1) Siccome $d_i = -b_i$ le formule per w_i e w_{i+n} diventano molto simili $w_i = v_i + b_i v_{n+i}$ e $w_{n+i} = v_i - b_i v_{n+1}$, conviene quindi calcolare $s = b_i v_{n+i}$ prima, risparmiando così n operazioni. Inoltre, siccome il calcolo di $a_i v_i$ e $c_i v_i$ non è necessario, per ogni i sono richieste 3 operazioni più il calcolo di $b_i = \gamma^{i-1}$. Per quest'ultimo calcolo conviene sfruttare la formula $\gamma^i = \gamma^{i-1}\gamma$ e memorizzare γ^{i-1} per calcolare γ^i con una sola operazione. In termini di programmazione, occorre creare un accumulatore a cui viene assegnato il valore 1 e che a ogni passo sarà moltiplicato per γ.

In totale sono richieste 4 operazioni per ogni coppia di componenti e questo calcolo va ripetuto n volte, per un totale di $4n$ ops. Un'implementazione efficiente è data da

```
p=1;
for i=1:n
  s=p*v(i*n);
  w(i)=v(i)+s;
  w(i+n)=v(i)-s;
  p=p*gamma;
end
```

$\square$

Esercizio 49. (*5 luglio 2016*) Sia data la struttura

$$\mathcal{S}_n = \{M \in \mathbb{R}^{2n\times 2n} \ : \ m_{ij} = 0, \ \text{per } i \neq j, i \neq j+n, i \neq j-n\}.$$

Una matrice $M \in \mathcal{S}_n$ può essere rappresentata come

$$M = \left[\begin{array}{cccc|cccc} a_1 & & & & b_1 & & & \\ & a_2 & & & & b_2 & & \\ & & \ddots & & & & \ddots & \\ & & & a_n & & & & b_n \\ \hline c_1 & & & & d_1 & & & \\ & c_2 & & & & d_2 & & \\ & & \ddots & & & & \ddots & \\ & & & c_n & & & & d_n \end{array}\right] \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}.$$

(a) Mostrare che se $A \in \mathcal{S}_n$ allora $A^T \in \mathcal{S}_n$.

(a) Descrivere in pseudocodice un algoritmo per il calcolo di $w = v^T M$ dove $M \in \mathcal{S}_n$ e $v \in \mathbb{R}^{2n}$ e che abbia costo computazionale minore o uguale a $8n$ ops e si conti il numero di operazioni richieste.

(c) Avendo a disposizione un numero di processori sufficientemente elevato, si fornisca un algoritmo parallelo che calcoli il prodotto $w = v^T M$ in 2 cicli di calcolo, specificando qual è il minimo numero di processori necessari (si ignorino le questioni legate all'accesso alla memoria).

(d1) Si consideri ora il caso in cui $a_i = 1$ e $c_i = 1$ per $i = 1, \ldots, n$ e $b_i = \gamma^{i-1}$, $d_i = -\gamma^{i-1}$, dove γ è un numero reale. Scrivere in pseudocodice un algoritmo che calcoli tutte le potenze di γ e il prodotto $w = v^T M$ e che non richieda più di $4n$ ops.

(d2) Si consideri ora il caso in cui $b_i = 1$ e $d_i = 1$ per $i = 1, \ldots, n$ e $a_i = \gamma^{i-1}$, $c_i = -\gamma^{i-1}$, dove γ è un numero reale. Scrivere in pseudocodice un algoritmo che calcoli tutte le potenze di γ e il prodotto $w = v^T M$ e che non richieda più di $4n$ ops.

Esercizio 50. (*9 settembre 2016*) Sia data la struttura

$$\mathcal{S}_n = \{M \in \mathbb{R}^{n\times 2n} \ : \ m_{ij} = 0, \ \text{per } i \neq j, i \neq j-n\}.$$

Una matrice $M \in \mathcal{S}_n$ può essere rappresentata come

$$M = \left[\begin{array}{cccc|cccc} a_1 & & & & b_1 & & & \\ & a_2 & & & & b_2 & & \\ & & \ddots & & & & \ddots & \\ & & & a_n & & & & b_n \end{array}\right] \in \mathbb{R}^{n\times 2n}.$$

(a) Dire se è una struttura sparsa.

(b) Dopo aver specificato la dimensione di w, descrivere in pseudocodice un algoritmo per il calcolo di $w = Mv$ dove $M \in \mathcal{S}_n$ e $v \in \mathbb{R}^{2n}$ e che abbia costo computazionale minore o uguale a $3n$ ops e si conti il numero di operazioni richieste.

(c) Avendo a disposizione un numero di processori sufficientemente elevato, si fornisca un algoritmo parallelo che calcoli il prodotto $w = Mv$ in 2 cicli di calcolo, specificando qual è il minimo numero di processori necessari (si ignorino le questioni legate all'accesso alla memoria).

(d) Si consideri ora il caso in cui $a_i = 1$ per $i = 1, \ldots, n$ e $b_i = \gamma^{i-1}$, dove γ è un numero reale. Scrivere in pseudocodice un algoritmo che calcoli tutte le potenze di γ e il prodotto $w = Mv$ e che non richieda più di $2n$ ops.

Esercizio 51. (*23 settembre 2016*) Sia data la struttura

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_n = \{M \in \mathbb{R}^{2n\times 2n} \,:\, & m_{ij} = 0,\\ & \text{per } j \neq n-i+1 \text{ e } i \leq n; \text{ per } j \neq i+n \text{ e } i \leq n; \text{ per } j \neq i-n \text{ e } i > n \text{ per } j \neq 3n-i+1 \text{ e } i > n\}.\end{aligned}$$

Una matrice $M \in \mathcal{S}_n$ può essere rappresentata come

$$M = \left[\begin{array}{cccc|cccc}
 & & & a_1 & b_1 & & & \\
 & & a_2 & & & b_2 & & \\
 & \iddots & & & & & \ddots & \\
a_n & & & & & & & b_n \\ \hline
c_1 & & & & & & & d_1 \\
 & c_2 & & & & & d_2 & \\
 & & \ddots & & & \iddots & & \\
 & & & c_n & d_n & & &
\end{array}\right] \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}.$$

(a) Si esibiscano due esempi di matrice (non nulla) appartenente ad $\mathcal{S}_n$, per $n = 3$, se ne calcoli il prodotto e si dica se è ancora una matrice di $\mathcal{S}_n$.

(b) Descrivere in pseudocodice un algoritmo per il calcolo delle prime n componenti del prodotto Mv dove $M \in \mathcal{S}_n$ e $v \in \mathbb{R}^{2n}$ e che abbia costo computazionale minore o uguale a $3n$ ops.

(c) Descrivere in pseudocodice un algoritmo per il calcolo delle ultime n componenti del prodotto Mv definito in (a) e che abbia costo minore o uguale a $3n$ ops.

(d) Avendo a disposizione due processori, si mostri che è possibile calcolare il prodotto Mv definito in (a) con $2n$ cicli di calcolo.

Esercizio 52. (*23 settembre 2016*)Sia data la struttura

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_n = \{M \in \mathbb{R}^{2n\times 2n} \,:\, & m_{ij} = 0,\\ & \text{per } j \neq n-i+1 \text{ e } i \leq n; \text{ per } j \neq 2n-i+1 \text{ e } i \leq n; \text{ per } j \neq i-n \text{ e } i > n \text{ per } j \neq 3n-i+1 \text{ e } i > n\}.\end{aligned}$$

Una matrice $M \in \mathcal{S}_n$ può essere rappresentata come

$$M = \left[\begin{array}{cccc|cccc}
 & & & a_1 & & & & b_1 \\
 & & a_2 & & & & b_2 & \\
 & \iddots & & & & \iddots & & \\
a_n & & & & b_n & & & \\ \hline
c_1 & & & & & & & d_1 \\
 & c_2 & & & & & d_2 & \\
 & & \ddots & & & \iddots & & \\
 & & & c_n & d_n & & &
\end{array}\right] \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}.$$

(a) Si esibiscano due esempi di matrice (non nulla) appartenente ad $\mathcal{S}_n$, per $n = 3$, se ne calcoli il prodotto e si dica se è ancora una matrice di $\mathcal{S}_n$.

(b) Descrivere in pseudocodice un algoritmo per il calcolo delle prime n componenti del prodotto Mv dove $M \in \mathcal{S}_n$ e $v \in \mathbb{R}^{2n}$ e che abbia costo computazionale minore o uguale a $3n$ ops.

(c) Descrivere in pseudocodice un algoritmo per il calcolo delle ultime n componenti del prodotto Mv definito in (a) e che abbia costo minore o uguale a $3n$ ops.

(d) Avendo a disposizione due processori, si mostri che è possibile calcolare il prodotto Mv definito in (a) con $2n$ cicli di calcolo.

Esercizio 53. (*13 aprile 2013*) Nell'insieme delle matrici $m \times n$, sia data la seguente struttura

$$\mathcal{S}_{m,n} = \{A \in \mathbb{K}^{m\times n} \,:\, a_{ij} = 0, \text{ per } i \text{ pari}\}.$$

(Una matrice in $\mathcal{S}_{m,n}$ può essere immaginata come una matrice a strisce.)

(a) Si dica se $\mathcal{S}_{m,n}$ è uno spazio vettoriale e se ne trovi la dimensione, distinguendo il caso in cui m è dispari da quello in cui è pari;

(b) si descriva di un algoritmo strutturato per il calcolo del prodotto $c = Ab$ dove $A \in \mathcal{S}_{m,n}$ e $b \in \mathbb{K}^n$ precisando il numero di operazioni richieste (è sufficiente una stima asintotica) e se ne dia un'implementazione in pseudocodice.

Esercizio 54. (*13 aprile 2013*) Nell'insieme delle matrici $n \times m$, con $m > n$, sia data la seguente struttura

$$\mathcal{S}_{m,n} = \{A \in \mathbb{K}^{n\times m} \,:\, a_{ij} = 0,\ \text{per } i > j\}.$$

(Una matrice in $\mathcal{S}_{m,n}$ può essere immaginata come una matrice rettangolare che nella parte sinistra è triangolare superiore.)

(a) Si dica se $\mathcal{S}_{m,n}$ è uno spazio vettoriale e se ne trovi la dimensione;

(b) si descriva di un algoritmo strutturato per il calcolo del prodotto $c = Ab$ dove $A \in \mathcal{S}_{m,n}$ e $b \in \mathbb{K}^m$ precisando il numero di operazioni richieste (è sufficiente una stima asintotica) e se ne dia un'implementazione in pseudocodice.

Esercizio 55. (*13 aprile 2013*) Nell'insieme delle matrici $n \times m$, sia data la seguente struttura

$$\mathcal{S}_{m,n} = \{A \in \mathbb{K}^{n\times m} \,:\, a_{ij} = 0,\ \text{per } i \text{ dispari}\}.$$

(Una matrice in $\mathcal{S}_{m,n}$ può essere immaginata come una matrice a strisce.)

(a) Si dica se $\mathcal{S}_{m,n}$ è uno spazio vettoriale e se ne trovi la dimensione, distinguendo il caso in cui n è dispari dal caso in cui è pari;

(b) si descriva di un algoritmo strutturato per il calcolo del prodotto $c = Ab$ dove $A \in \mathcal{S}_{m,n}$ e $b \in \mathbb{K}^m$ precisando il numero di operazioni richieste (è sufficiente una stima asintotica) e se ne dia un'implementazione in pseudocodice.

Esercizio 56. (*13 aprile 2013*) Nell'insieme delle matrici $m \times n$, con $m > n$, sia data la seguente struttura

$$\mathcal{S}_{m,n} = \{A \in \mathbb{K}^{m\times n} \,:\, a_{ij} = 0,\ \text{per } i < j\}.$$

(Una matrice in $\mathcal{S}_{m,n}$ può essere immaginata come una matrice rettangolare che nella parte alta è triangolare inferiore.)

(a) Si dica se $\mathcal{S}_{m,n}$ è uno spazio vettoriale e se ne trovi la dimensione;

(b) si descriva di un algoritmo strutturato per il calcolo del prodotto $c = Ab$ dove $A \in \mathcal{S}_{m,n}$ e $b \in \mathbb{K}^n$ precisando il numero di operazioni richieste (è sufficiente una stima asintotica) e se ne dia un'implementazione in pseudocodice.

Risoluzione Esercizio **??**. Le matrici di $\mathcal{S}_{m,n}$ sono matrici che hanno le righe pari nulle.

(a) L'insieme $\mathcal{S}_{m,n}$ è un sottospazio vettoriale poiché la somma e il prodotto per scalare di elementi nulli sono ancora nulli; la sua dimensione è data dal numero di righe non necessariamente nulle, moltiplicate per n. Se m è pari, allora la dimensione è $\frac{mn}{2}$, altrimenti è $\frac{n(m+1)}{2}$.

(b) Le componenti di c di indice pari sono date dal prodotto di una riga nulla per b e quindi sono nulle, allora per calcolare c è sufficiente moltiplicare le righe non nulle di A per b, il costo di questo algoritmo è 2 volte la dimensione di $\mathcal{S}_{m,n}$ quindi il costo asintotico è mn ops nel caso pari e $mn + m$ nel caso dispari. In pseudocodice:

```
c=zeros(m,1);
for i=1:2:m
   c(i)=a(i,1)*b(1);
   for j=2:n
      c(i)=c(i)+a(i,j)*b(j);
   end
end
```

Risoluzione Esercizio **??**. Le matrici in $\mathcal{S}_{m,n}$ possono essere viste come matrici a blocchi del tipo $A = \begin{bmatrix} B & C \end{bmatrix}$, dove $B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ e $C \in \mathbb{K}^{n\times(m-n)}$, con B triangolare superiore e C piena.

(a) L'insieme $\mathcal{S}_{m,n}$ è un sottospazio vettoriale poiché la somma e il prodotto per scalare di elementi nulli sono ancora nulli; la sua dimensione è data dalla somma della dimensione delle matrici $n \times (m-n)$ che è $(m-n)n$ e della dimensione delle matrici $n \times n$ triangolari superiori che è $n(n+1)/2$, in totale si ha dunque

$$mn - n^2 + \frac{1}{2}(n^2 + n) = mn - \frac{1}{2}(n^2 - n).$$

(b) Se si scrive $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$ con $b_1 \in \mathbb{K}^n$ e $b_2 \in \mathbb{K}^{m-n}$, si ottiene che $c = Bb_1 + Cb_2$ e quindi c è ottenuto calcolando prima Bb_1 che è il prodotto di una matrice triangolare superiore $n \times n$ per un vettore che richiede n^2 ops e poi il prodotto Cb_2 che è il prodotto di una matrice piena $(m-n) \times n$ per un vettore che richiede $2(m-n)n$ ops per un totale di $2mn - n^2$ ops (la somma tra Bb_1 e Cb_2 è trascurabile). In pseudocodice

```
for i=1:n
   c(i)=a(i,i)*b(i);
   for j=i+1:m
      c(i)=c(i)+a(i,j)*b(j);
   end
end
```

Risoluzione Esercizio **??**. Le matrici di $\mathcal{S}_{m,n}$ sono matrici che hanno le righe pari nulle.

(a) L'insieme $\mathcal{S}_{m,n}$ è un sottospazio vettoriale poiché la somma e il prodotto per scalare di elementi nulli sono ancora nulli; la sua dimensione è data dal numero di righe non necessariamente nulle, moltiplicate per m. Se n è pari, allora la dimensione è $\frac{mn}{2}$, altrimenti è $\frac{m(n-1)}{2}$.

(b) Le componenti di c di indice pari sono date dal prodotto di una riga nulla per b e quindi sono nulle, allora per calcolare c è sufficiente moltiplicare le righe non nulle di A per b, il costo di questo algoritmo è 2 volte la dimensione di $\mathcal{S}_{m,n}$ quindi il costo asintotico è mn ops nel caso pari e $mn - m$ nel caso dispari. In pseudocodice:

```
c=zeros(n,1);
for i=2:2:n
   c(i)=0;
   for j=1:m
      c(i)=c(i)+a(i,j)*b(j);
   end
end
```

Risoluzione Esercizio **??**. Le matrici in $\mathcal{S}_{m,n}$ possono essere viste come matrici a blocchi del tipo $A = \begin{bmatrix} B \\ C \end{bmatrix}$, dove $B \in \mathbb{K}^{(m-n)\times n}$ e $C \in \mathbb{K}^{n\times n}$, con B triangolare inferiore e C piena.

(a) L'insieme $\mathcal{S}_{m,n}$ è un sottospazio vettoriale poiché la somma e il prodotto per scalare di elementi nulli sono ancora nulli; la sua dimensione è data dalla somma della dimensione delle matrici $(m-n) \times n$ che è $(m-n)n$ e della dimensione delle matrici $n \times n$ triangolari inferiori che è $n(n+1)/2$, in totale si ha dunque

$$mn - n^2 + \frac{1}{2}(n^2 + n) = mn - \frac{1}{2}(n^2 - n).$$

(b) Se si scrive $c = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$ con $c_1 \in \mathbb{K}^{m-n}$ e $c_2 \in \mathbb{K}^n$, si ottiene che $c_1 = Bb$ e $c_2 = Cb$ quindi c è ottenuto calcolando il prodotto di una matrice triangolare inferiore $n \times n$ per un vettore che richiede n^2 ops e il prodotto di una matrice piena $(m-n) \times n$ per un vettore che richiede $2(m-n)n$ ops, per un totale di $2mn - n^2$ ops. In pseudocodice

```
for i=1:m
   c(i)=a(i,1)*b(1);
   for j=2:min(i,n)
      c(i)=c(i)+a(i,j)*b(j);
   end
end
```

Esercizio 57. (*24 maggio 2012*) Sia data una matrice $A \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}$ avente la seguente struttura: $a_{ij} = 0$ per $j \le n$ e $i > j$ e $a_{ij} = 0$ per $j > n$ e $n < i < j$ (cioè dividendo la matrice in blocchi $n \times n$, il blocco in alto a sinistra è triangolare superiore, il blocco in alto a destra è pieno, il blocco in basso a sinistra è nullo e il blocco in basso a destra è triangolare inferiore). La struttura, per $n = 3$, è la seguente

$$\begin{bmatrix} * & * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & * & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & * & * & * \end{bmatrix}.$$

Indicando con $\mathcal{S}$ la struttura così fatta,

(a) si dimostri che $\mathcal{S}$ è uno spazio vettoriale e se ne trovi la dimensione;

(b) si dica se $\mathcal{S}$ è un'algebra, cioè se $A, B \in \mathcal{S}$ implica che $AB \in \mathcal{S}$, motivando la risposta;

(c) si trovi un algortimo per il calcolo del prodotto della matrice A per un vettore $b \in \mathbb{R}^{2n}$ che non richieda più di $4n^2$ operazioni, dandone un'implementazione in pseudocodice;

(b) si trovi un algoritmo che risolva il sistema lineare $Ax = b$ con $b \in \mathbb{R}^{2n}$ che richieda $O(n^2)$ ops, se ne dia un'implementazione in pseudocodice e si valuti il costo computazionale.

In caso di estrema difficoltà si risolva l'esercizio e si trovi il numero di operazioni necessarie per calcolare il prodotto Ab e per risolvere il sistema lineare $Ax = b$ per $n = 3$.

Esercizio 58. (*24 maggio 2012*) Sia data una matrice $A \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}$ avente la seguente struttura: $a_{ij} = 0$ per $i \le n$ e $i < j$ e $a_{ij} = 0$ per $i > n$ e $i > j > n$ (cioè dividendo la matrice in blocchi $n \times n$, il blocco in alto a sinistra è triangolare superiore, il blocco in alto a destra è pieno, il blocco in basso a sinistra è nullo e il blocco in basso a destra è triangolare inferiore). La struttura, per $n = 3$, è la seguente

$$\begin{bmatrix} * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & 0 & * & * \\ * & * & * & 0 & 0 & * \end{bmatrix}.$$

Indicando con $\mathcal{S}$ la struttura così fatta,

(a) si dimostri che $\mathcal{S}$ è uno spazio vettoriale e se ne trovi la dimensione;

(b) si dica se $\mathcal{S}$ è un'algebra, cioè se $A, B \in \mathcal{S}$ implica che $AB \in \mathcal{S}$, motivando la risposta;

(c) si trovi un algortimo per il calcolo del prodotto della matrice A per un vettore $b \in \mathbb{R}^{2n}$ che non richieda più di $4n^2$ operazioni, dandone un'implementazione in pseudocodice;

(b) si trovi un algoritmo che risolva il sistema lineare $Ax = b$ con $b \in \mathbb{R}^{2n}$ che richieda $O(n^2)$ ops, se ne dia un'implementazione in pseudocodice e si valuti il costo computazionale.

In caso di estrema difficoltà si risolva l'esercizio e si trovi il numero di operazioni necessarie per calcolare il prodotto Ab e per risolvere il sistema lineare $Ax = b$ per $n = 3$.

Esercizio 59. (*15 settembre 2011*) Sia data la struttura di matrici $\mathcal{S} = \{(a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n} \,:\, a_{ij} = 0,\ i+j > n+1\}$. In altre parole, $\mathcal{S}$ è l'insieme delle matrici che sono nulle sotto la diagonale secondaria. Ad esempio, per $n = 4$ una matrice in $\mathcal{S}$ ha la forma

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 \\ a_{41} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(a) Trovare un algoritmo che calcoli il prodotto Ab, dove $A \in \mathcal{S}$ e b è un vettore, che sfrutti la struttura, calcolarne il costo computazionale e darne un'implementazione in pseudocodice;

(b) trovare un algoritmo che calcoli il determinante di una matrice appartenente a $\mathcal{S}$ e con costo computazionale asintotico $O(n)$.

Esercizio 60. (*29 settembre 2011*) Sia dato l'insieme $\mathcal{S}$ delle matrici a X, cioè delle matrici $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tali che $a_{ij} = 0$ per $i \neq j$ e $i \neq n-j+1$ (che sono nulle al di fuori della diagonale e dell'antidiagonale).

(a) Trovare un algoritmo che calcoli il prodotto Ab, dove $A \in \mathcal{S}$ e b è un vettore, che sfrutti la struttura, calcolarne il costo computazionale e darne un'implementazione in pseudocodice;

Esercizio 61. (*24 aprile 2013*) Sia data la struttura $\mathcal{S}_n = \{A \in \mathbb{C}^{n\times n} \,:\, A = vw^T, v, w \in \mathbb{C}^n\}$, cioè le matrici che si possono scrivere come prodotto di una colonna per una riga.

(a) si dimostri che se $A, B \in \mathcal{S}_n$ allora $AB \in \mathcal{S}_n$ e si dica se $\mathcal{S}_n$ è un'algebra;

(b) si fornisca un algoritmo (implementato in pseudocodice) che calcoli il prodotto Au, con $A \in \mathcal{S}_n$ e $u \in \mathbb{C}^n$ e che abbia un costo computazionale asintotico non maggiore di $3n + o(n)$ ops e se ne determini il costo computazionale;

(c) si fornisca un algoritmo (implementato in pseudocodice) che calcoli il prodotto AB, con $A, B \in \mathcal{S}_n$ e che abbia un costo computazionale asintotico non maggiore di $n^2 + o(n^2)$ ops e se ne determini il costo computazionale;

(d) si fornisca un algoritmo (implementato in pseudocodice) che calcoli A^k con k qualsiasi e che abbia un costo computazionale asintotico non maggiore di $n^2 + k + o(n^2)$ ops e se ne determini il costo computazionale;

(e) si trovi il determinante di $A \in \mathcal{S}_n$. (Hint: si distingua il caso $n = 1$ dal caso $n > 1$.)

Soluzione. Osserviamo preliminarmente che le matrici in $\mathcal{S}_n$ hanno rango minore o uguale a 1, infatti, scrivendo A per colonne come $A = [w_1 v | w_2 v | \cdots | w_n v]$, si osserva che tutte le colonne sono multiple dello stesso vettore e quindi A non può avere rango maggiore di 1.

(a) Siano $A = v_1 w_1^T$ e $B = v_2 w_2^T$ allora $AB = (v_1 w_1^T)(v_2 w_2^T) = v_1(w_1^T v_2) w_2^T$, ma $\alpha = w_1^T v_2$ è uno scalare e quindi si può scrivere $AB = (\alpha v_1) w_2^T$ da cui $AB \in \mathcal{S}_n$. La struttura $\mathcal{S}_n$ non è un'algebra per $n \geq 2$, in quanto non è uno spazio vettoriale, poiché la somma di due matrici di $\mathcal{S}_n$ non è necessariamente una matrice di $\mathcal{S}_n$. Questo fatto si può vedere con un controesempio: siano

$$A = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

si osserva che $A, B \in \mathcal{S}_2$, ma $A + B = I$ che ha rango 2 e quindi $A + B \notin \mathcal{S}_2$. Analoghi controesempi si possono trovare per ogni $n \geq 2$, mentre $\mathcal{S}_1$ è un'algebra poiché $\mathcal{S}_1 = \mathbb{R}$.

(b) Si osserva che se $A = vw^T$, allora $Au = (vw^T)u = v(w^T u)$, quindi il prodotto Au si può ottenere calcolando prima il prodotto scalare $s = w^T u$ e poi moltiplicando s per il vettore v. Un'implementazione con sovrascrittura di u è data da

```
s=v(1)*w(1);
for i=2:n
   s=s+v(i)*w(i);
end
for i=1:n
   u(i)=s*u(i);
end
```

Il costo computazionale dell'algoritmo è $\mathcal{C}(n) = 3n - 1 = 3n + o(n)$ ops, quindi è fast rispetto all'algoritmo standard che calcola il prodotto vw^T e poi moltiplica la matrice ottenuta per u con un costo di $3n^2 + o(n^2)$ ops.

(c) Si osserva che se $A = v_A w_A^T$ e $B = v_B w_B^T$, allora $AB = (v_A w_A^T)(v_B w_B)^T = v_A(w_A^T v_B) w_B^T$, quindi il prodotto AB si può ottenere calcolando prima il prodotto scalare $s = w_A^T v_B$, moltiplicando s per il vettore v_A, infine moltiplicando il vettore ottenuto $(s v_A)$ per il vettore w_B^T. Un'implementazione (con sovrascrittura di w_A) è data da

```
s=wa(1)*vb(1);
for i=2:n
   s=s+wa(i)*vb(i);
end
for i=1:n
   va(i)=s*va(i);
end
for i=1:n
   for j=1:n
      C(i,j)=va(i)*wb(j);
   end
end
```

Il costo computazionale dell'algoritmo è $\mathcal{C}(n) = n^2 + 3n - 1 = n^2 + o(n)$ ops, quindi è fast rispetto all'algoritmo standard che calcola i prodotti $A = v_A w_A^T$ e $B = w_B w_B^T$ e poi forma il prodotto AB righe per colonne con un costo di $2n^3 + o(n^3)$ ops.

(d) Si osserva che se $A = vw^T$, allora

$$A^k = \underbrace{(vw^T)(vw^T)\cdots(vw^T)}_{k \text{ volte}} = v\,\underbrace{(w^T v)\cdots(v^T w)}_{k-1 \text{ volte}}\,w^T = ((vw^T)^{k-1}v)w^T$$

e A^k si può ottenere calcolando prima il prodotto scalare $s = w^T v$, elevando s alla potenza $k-1$, moltiplicando $t = s^{k-1}$ per v, e infine moltiplicando (tv) per w^T. Un'implementazione (con sovrascrittura di v) è data da

```
s=v(1)*w(1);
for i=2:n
   s=s+v(i)*w(i);
end
% calcolo s^(k-1)
t=s;
for i=2:k-1
   t=t*s;
end
for i=1:n
   v(i)=t*v(i);
end
for i=1:n
   for j=1:n
      C(i,j)=v(i)*w(j);
   end
end
```

Il costo computazionale dell'algoritmo è $\mathcal{C}(n) = n^2 + k - 1 + 3n - 1 = n^2 + k + o(n)$ ops. Si noti che la potenza s^{k-1} può essere calcolata con un'algoritmo che richiede $O(\log_2 k)$ ops anziché k.

(e) Nel caso $n = 1$, $v, w \in \mathbb{R}$ e quindi il determinante di A è vw, nel caso $n > 2$ sappiamo che A ha rango minore o uguale a 1 e quindi il determinante è 0.

□

Commenti. L'esercizio consiste nello sfruttare una struttura *di rango basso*. È sufficiente spostare le parentesi per ottenere un grande miglioramento in termini di efficienza computazionale. Molti studenti hanno sbagliato l'implementazione del calcolo di s^{k-1}.

Nessuno è riuscito a dimostrare che S_n non è un'algebra. Quasi tutti hanno affermato, senza dimostrarlo, che non è un'algebra. Solo un paio di studenti hanno risolto il punto (e). □

Esercizio 62. (*28 giugno 2013*) Sia $n \geq 2$ e si consideri l'insieme $\mathbb{R}^{n\times 2}$ delle matrici che hanno n righe e 2 colonne.

(a) Siano $A, B \in \mathbb{R}^{n\times 2}$, si fornisca il numero esatto di operazioni necessarie per calcolare il prodotto AB^T (utilizzando il prodotto righe per colonne);

(b) si dica quali sono le dimensioni che può avere il vettore $v \in \mathbb{R}^k$ affinché il prodotto $(AB^T)v$ abbia senso;

(c) si fornisca un algoritmo (implementato in pseudocodice) che calcoli il prodotto $(AB^T)v$ con $A, B \in \mathbb{R}^{n\times 2}$ e v come nel punto precedente, che sfrutti la struttua e se ne calcoli il costo computazionale;

(d) si fornisca un algoritmo che calcoli $A_1B^T + A_2B^T + A_3B^T$ con $A_1, A_2, A_3, B \in \mathbb{R}^{n\times 2}$ e che abbia lo stesso costo asintotico del calcolo di A_1B^T;

(e) **[facoltativo]** Siano $A, B \in \mathbb{R}^{n\times 2}$, si mostri che la matrice AB^T ha rango al più 2. Viceversa, sia $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matrice di rango 2, si dimostri, utilizzando la fattorizzazione QR con pivoting, che essa si può scrivere come $M = AB^T$ con $A, B \in \mathbb{R}^{n\times 2}$;

Soluzione. (a) La matrice AB^T ha n^2 elementi, ciascuno di essi è ottenuto come prodotto di una riga di A per una colonna di B. Ognuna di questi prodotti riga per colonna richiedono 3 ops, quindi in totale sono richieste $3n^2$ ops.
(b) Le uniche dimensioni ammesse sono $k = n$ e $k = 1$.
(c) Se v ha dimensione n, è conveniente calcolare il prodotto come $A(B^Tv)$. Ponendo $w = B^Tv$, il suo calcolo richiede due prodotti scalari tra vettori di dimensione n e quindi richiede $4n - 2$ ops. Il calcolo di Aw richiede n prodotti di vettori di dimensione 2 e quindi $3n$ ops. Il totale è $7n - 2$ ops.

```
s=0;t=0;
for k=1:n
   s=s+b(k,1)*v(k);
   t=t+b(k,2)*v(k);
end
w(1)=s;w(2)=t;
for k=1:n
   v(k)=a(k,1)*w(1)+a(k,2)*w(2);
end
```

Se v ha dimensione 1 si può moltiplicare B^Tc per un totale di $2n$ ops e poi moltiplicare la matrice ottenuta $C^T = B^Tc$ per A come AB^T e per quanto visto sopra questo richiede $3n^2$ ops. Il codice è quello standard del prodotto righe per colonne.
(d) Se si usa la proprietà distributiva $A_1B^T + A_2B^T + A_3B^T = (A_1 + A_2 + A_3)B^T$, basta sommare le tre matrici A_1, A_2 e A_3 e questo richiede $O(n)$ ops, e moltiplicare la matrice ottenuta per B^T e questo ha lo stesso costo che moltiplicare A_1B^T.
(e) Siano a_1 e a_2 le due colonne di A, allora la colonna c_i della matrice AB^T si può scrivere come $c_i = a_1b_{1i} + a_2b_{2i}$ e quindi tutte le colonne di AB^T sono combinazioni delle due colonne di A e quindi il rango è al più 2. Viceversa, sia $A = QR$ la fattorizzazione QR con pivoting di M, se M ha rango 2 allora

$$M = Q\begin{bmatrix} R & S \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = Q\left[\begin{array}{cc|ccc} * & * & * & \cdots & * \\ 0 & * & * & \cdots & * \\ \hline 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{array}\right]$$

Sia Q_1 la matrice ottenuta selezionando le prime due colonne di Q, allora $M = Q_1[R \;\; S]$ e quindi è della forma voluta. □

Esercizio 63. (*17 luglio 2013*) Siano dati i vettori $v_1, v_2, \ldots, v_{2k} \in \mathbb{R}^n$. Si consideri il prodotto

$$P = v_1v_2^Tv_3v_4^T \cdots v_{2k-1}v_{2k}^T.$$

(a) Si descriva un algoritmo che calcoli questo prodotto con un costo asintotico di $n^2 + 2nk$ ops e se ne dia un'implementazione in pseudocodice;

(b) si descriva un algoritmo che calcola AP con $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e che abbia un costo asintotico di $3n^2 + 2nk$ ops e se ne dia un'implementazione in pseudocodice;

(c) si dica come si semplifica il problema se tutti i vettori sono uguali a un vettore fissato $v \in \mathbb{R}^n$.

In caso di difficoltà si consideri il caso $k = 2$ in cui il prodotto è $v_1v_2^Tv_3v_4^T$.

Soluzione. (a) Si possono calcolare prima i prodotti $v_2v_3^T, v_4v_5^T, \ldots, v_{2k-2}v_{2k-1}^T$, che sono $k - 1$, ciascuno dei quali richiede $2n - 1$ ops. Questi numeri vanno moltiplicati tra loro (questo richiede al più k ops) ottenendo lo scalare α. A questo punto, moltiplicando α per v_1, con n ops si ottiene $u = \alpha v_1$. Infine calcolando uv_{2k}^T con n^2 ops si ottiene la matrice P.

Una possibile implementazione si può ottenere indicando con $V \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matrice la cui colonna i-esima è il vettore v_i.

```
a=1;
for i=1:k-1
   v=V(:,2*i);w=V(:,2*i+1);
   s=v(1)*w(1);
   for j=2:n
```

```
      s=s+v(j)*w(j);
   end
   a=a*s;
end
for i=1:n
   v(i)=a*V(:,1);
   w(i)=V(i,2*k);
end
for i=1:n
   for j=1:n
      p(i,j)=v(i)*w(j);
   end
end
```

(b) Per calcolare AP si può procedere come sopra fino al calcolo di $u = \alpha v_1$ e poi calcolare Auv_{2k}^T come $(Au)v_{2k}^T$, cioè un prodotto matrice vettore ($2n$ ops) e un prodotto colonna per riga. Il codice è ottenuto aggiungendo il calcolo di Au che si può implementare nel seguente modo

```
for i=1:n
   s=A(i,1)*v(1);
   for j=2:n
      s=A(i,j)*v(j);
   end
   vv(i)=v(i);
end
```

(c) Se tutti i vettori sono uguali, i seguenti miglioramenti sono possibili

1. si calcola $v^T v$ con $2n-1$ ops e poi si eleva alla $k-1$ ottenenendo α in $2n+k-3$ ops, che diventano asintoticamente $2n + \log_2 k$ se si usa il metodo di potenza binaria;
2. si calcola $u = \sqrt{\alpha} v$ e si calcola $P = uu^T$ con $n^2/2$ operazioni aritmetiche, ricordando che P è simmetrica.

Il costo asintotico totale è $n^2/2 + \log_2 k$. Il calcolo AP si avvantaggia di poco dal fatto che $P = uu^T$.

□

Esercizio 64. (*25 luglio 2013*) Scrivere una porzione di pseudocodice che calcoli il prodotto di una matrice di Hessenberg superiore per un vettore sfruttando la struttura, e se ne calcoli il costo computazionale (la parte principale). Si ricordi che una matrice $H \in \mathbb{C}^{n\times n}$ è detta di Hessenberg superiore se $h_{ij} = 0$ per $i > j+1$; nel caso $n = 5$ la struttura è del tipo

$$\begin{bmatrix} * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ & * & * & * & * \\ & & * & * & * \\ & & & * & * \end{bmatrix}.$$

(Suggerimento: calcolare la prima componente a parte e le restanti con un ciclo for.)

Soluzione. Detto $c = Hv$, una possibile implementazione è

```
c=0;
for j=1:n
   c(1)=c(1)+h(1,j)*v(j);
end
for i=2:n
   for j=i-1:n
      c(i)=c(i)+h(i,j)*v(j);
   end
end
```

Il costo computazionale del calcolo di c_1 è dato da $2n$ operazioni, mentre per ciascuna delle altre componenti sono richieste $2(n-i+2)$ ops per un totale di

$$2n + \sum_{i=2}^{n} 2(n-i+2) = n^2 + o(n)$$

operazioni. □

Esercizio 65. (*25 luglio 2013*) Siano $w, u \in \mathbb{R}^n$ e siano $P, Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ le corrispondenti matrici di Householder ($P = I - \frac{2}{w^Tw}ww^T$ e $Q = I - \frac{2}{u^Tu}uu^T$). Si descriva un algoritmo che calcoli il prodotto PQ e che non richieda più di $6n^2 + o(n^2)$ ops e se ne calcoli il costo computazionale.

Soluzione. Sia $P = I - \beta ww^T$ e $Q = I - \gamma uu^T$, si ha

$$PQ = (I - \beta ww^T)(I - \gamma uu^T) = I - \beta ww^T - \gamma uu^T - \beta\gamma ww^T uu^T.$$

Se calcolo a parte $w^T u$, con $2n - 1$ ops, poi si tratta di calcolare tre matrici del tipo □

Esercizio 66. (*13 settembre 2013*) Scrivere una porzione di pseudocodice che calcoli la somma di ogni riga di una matrice $n \times n$, memorizzando il risultato in un vettore di dimensione n. Dire quante operazioni sono richieste per il calcolo e dare una versione strutturata dell'algoritmo nel caso in cui la matrice sia tridiagonale o triangolare superiore, specificando il costo computazionale dell'algoritmo strutturato.

Soluzione. Detto $c = Av$, una possibile implementazione è

```
c=0;
for j=1:n
   c(1)=c(1)+h(1,j)*v(j);
end
for i=2:n
   for j=i-1:n
      c(i)=c(i)+h(i,j)*v(j);
   end
end
```

Il costo computazionale del calcolo di c_1 è dato da $2n$ operazioni, mentre per ciascuna delle altre componenti sono richieste $2(n - i + 2)$ ops per un totale di

$$2n + \sum_{i=2}^{n} 2(n - i + 2) = n^2 + o(n)$$

operazioni. □

Esercizio 67. (*13 settembre 2013*) Siano $w_1, u_1, w_2, u_2 \in \mathbb{R}^n$ e siano $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matrici generiche. Si consideri il prodotto $(A + w_1u_1^T)(w_2u_2^T)$. Trovare un algoritmo che calcoli tale prodotto e che non richieda più di $6n^2 + o(n^2)$ ops e se ne calcoli il costo computazionale.

Esercizio 68. (*27 settembre 2013*) Siano $A \in \mathbb{R}^{2n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times 2n}$ e $C \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}$. Si dica se per il calcolo di ABC è più conveniente calcolare il prodotto $M = AB$ e poi calcolare MC o calcolare il prodotto $N = BC$ poi calcolare AN, specificando il numero di operazioni necessarie nei due casi.

Esercizio 69. (*26 novembre 2013*) Sia A una matrice $n \times n$ che è nulla esclusa la diagonale principale e la seconda sopradiagonale. Una rappresentazione grafica è di tale matrice è data da

$$\begin{bmatrix} * & 0 & * & & & \\ & * & 0 & * & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & * & 0 & * \\ & & & & * & 0 \\ & & & & & * \end{bmatrix}.$$

Si scriva in pseudocodice un algoritmo che calcoli il prodotto di una tale matrice per un vettore v di dimensione n e che non richieda più di $3n + o(n)$ operazioni artimetiche elementari.

Esercizio 70. Siano $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e siano $v, w \in \mathbb{R}^n$, e si consideri il prodotto $\gamma = v^T ABw$. Si dica quali sono le dimensioni di γ e si calcoli il costo computazionale asintotico del calcolo di γ utilizzando la priorità data dalle parentesi nelle seguenti tre espessioni:

$$\gamma = (v^T A)(Bw), \qquad \gamma = (v^T(AB))w, \qquad \gamma = v^T(A(Bw)).$$

Esercizio 71. *(29 maggio 2015)* Sia n un intero non negativo e sia data sull'insieme delle matrici $\mathbb{R}^{(2n+1)\times(2n+1)}$ la struttura

$$\mathcal{S}_n = \{A \in \mathbb{R}^{(2n+1)\times(2n+1)} \,:\, a_{ij} = 0, \text{ per } i \neq 1, i \neq 2n+1, j \neq 1, j \neq 2n+1\}.$$

L'insieme $\mathcal{S}_n$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^{(2n+1)\times(2n+1)}$; una matrice in $\mathcal{S}_n$ può essere definita come *matrice a cornice*.

(a1) Dire qual è la dimensione di $\mathcal{S}_n$, precisando se si tratta di un'algebra.

(a2) Dire quali sono il minimo e il massimo numero di elementi non nulli di $\mathcal{S}_n$, precisando se si tratta di una struttura sparsa.

(b1) Data $A \in \mathcal{S}_n$ e $b \in \mathbb{R}^{2n+1}$, scrivere in pseudocodice un algoritmo che calcoli il prodotto di $b^T A$ in $O(n)$ ops e se ne calcoli il costo computazionale.

(b2) Data $A \in \mathcal{S}_n$ e $b \in \mathbb{R}^{2n+1}$, scrivere in pseudocodice un algoritmo che calcoli il prodotto di Ab in $O(n)$ ops e se ne calcoli il costo computazionale.

(c1) Date $A, B \in \mathcal{S}_n$, scrivere in pseudocodice un algoritmo che calcoli il prodotto di AB in $O(n^2)$ ops e si calcoli la parte principale del costo computazionale.

(c2) Data $A \in \mathcal{S}_n$ e $B \in \mathbb{R}^{(2n+1)\times(2n+1)}$, scrivere in pseudocodice un algoritmo che calcoli il prodotto di AB in $O(n^2)$ ops e si calcoli la parte principale del costo computazionale.

(c3) Data $A \in \mathbb{R}^{(2n+1)\times(2n+1)}$ e $B \in \mathcal{S}_n$, scrivere in pseudocodice un algoritmo che calcoli il prodotto di AB in $O(n^2)$ ops e si calcoli la parte principale del costo computazionale.

(d) Studiare l'applicabilità del metodo di Gauss per una matrice $A \in \mathcal{S}_n$ e dire sotto quali condizioni una matrice $A \in \mathcal{S}_n$ può essere invertibile.

(e) Si discuta la possibilità di parallelizzare l'algoritmo al punto (b) con un numero sufficientemente alto di processori, specificando il numero di cicli di calcolo necessari.

Soluzione. (a1) La dimensione è data dal numero di elementi non nulli che è $8n$. Si tratta di un'algebra per $n = 0$, poiché coincide con l'insieme delle matrici 1×1, per $n > 0$ non si tratta di un'algebra, poiché il prodotto di due matrici in $\mathcal{S}_n$ può non essere in $\mathcal{S}_n$. Per vedere questo fatto è sufficiente trovare un controesempio: se $A \in \mathcal{S}_n$ è tale che $a_{ij} = 1$ per $i = 1$ o $i = 2n+1$ o $j = 1$ o $j = 2n+1$ allora, detto $C = A^2$ si ha che $c_{22} = 2 \neq 0$ e quindi $C \notin \mathcal{S}_n$.

(a2) Gli elementi lungo la cornice sono $8n$, quindi il numero minimo di elementi non nulli è 0 e il numero massimo è $8n$. È una struttura sparsa poiché

$$\lim_{n\to\infty} \frac{8n}{n^2} = 0.$$

(b1) Ci si accorge che, detto c il vettore tale che $c = Ab$, gli elementi centrali di c (con indici da 2 a $2n$) possono essere calcolati con sole 3 operazioni, mentre per i due estremi (con indici 1 e $2n+1$) è necessario calcolare un prodotto riga per colonna.

```
c=zeros(2*n+1,1);
% calcolo c(1) e c(2*n+1)
for k=1:2*n+1
  c(1)=c(1)+A(1,k)*b(k);
  c(2*n+1)=c(2*n+1)+A(2*n+1,k)*b(k);
end
% calcolo i restanti c(i)
for i=2:2*n
  c(i)=A(i,1)*b(1)+A(i,2*n+1)*b(2*n+1);
end
```

Il costo computazionale è dato dalla somma del costo del primo ciclo che è di $8n + o(n)$ ops e del secondo ciclo che è $6n + o(n)$ ops. La parte principale del costo computazionale è quindi $14n$ ops.

(b2) Ci si accorge che, detto c il vettore tale che $c^T = b^T A$, gli elementi centrali di c (con indici da 2 a $2n$) possono essere calcolati con sole 3 operazioni, mentre per i due estremi (con indici 1 e $2n+1$) è necessario calcolare un prodotto riga per colonna.

```
c=zeros(2*n+1,1);
% calcolo c(1) e c(2*n+1)
for k=1:2*n+1
  c(1)=c(1)+b(k)*A(k,1);
  c(2*n+1)=c(2*n+1)+b(k)*A(k,2*n+1);
end
% calcolo i restanti c(i)
for i=2:2*n
  c(i)=b(1)*A(1,i)+b(2*n+1)*A(2*n+1,i);
end
```

Il costo computazionale è dato dalla somma del costo del primo ciclo che è di $8n+o(n)$ ops e del secondo ciclo che è $6n+o(n)$ ops. La parte principale del costo computazionale è quindi $14n$ ops.

(c) Soluzione furba. Siccome nel punto (b) era stato trovato un algoritmo che calcola il prodotto matrice-vettore (o vettore-matrice) con $O(n)$ ops, utilizzando lo stesso algoritmo è possibile calcolare il prodotto matrice-matrice come n prodotti matrice-vettore (o vettore-matrice) con $O(n^2)$ ops. Questo algoritmo non sfrutta al massimo la struttura però è una soluzione accettabile.

(c1) Date due matrici a cornice A e B, il loro prodotto $C = AB$ può essere una matrice piena. Ci si accorge che per gli elementi nei quattro vertici ($a_{11}, a_{1,2n+1}, a_{2n+1,1}$ e $a_{2n+1,2n+1}$) il numero di operazioni richieste è quello di un prodotto riga per colonna, mentre per i restanti sono sufficienti tre operazioni.

```
C=zeros(2*n+1,2*n+1);
% calcolo gli elementi sui vertici
for k=1:2*n+1
  C(1,1)=C(1,1)+A(1,k)*B(k,1);
  C(1,2*n+1)=C(1,2*n+1)+A(1,k)*B(k,2*n+1);
  C(2*n+1,1)=C(2*n+1,1)+A(2*n+1,k)*B(k,1);
  C(2*n+1,2*n+1)=C(2*n+1,2*n+1)+A(2*n+1,k)*B(k,2*n+1);
end
% calcolo i restanti elementi della prima e ultima colonna
for j=2:2*n
  C(1,j)=A(1,1)*B(1,j)+A(1,2*n+1)*B(2*n+1,j);
  C(2*n+1,j)=A(2*n+1,1)*B(1,j)+A(2*n+1,2*n+1)*B(2*n+1,j);
end
% calcolo gli elementi sulle colonne centrali
for i=2:2*n
  for j=1:2*n+1
    C(i,j)=A(i,1)*B(1,j)+A(i,2*n+1)*B(2*n+1,j);
  end
end
```

La parte principale del costo computazionale è data dall'ultimo ciclo (i primi due eseguono $O(n)$ operazioni) ed è $12n^2$ ops.

(c2) Data una matrice a cornice A e una matrice generica B, il loro prodotto $C = AB$ è una matrice piena. Ci si accorge che è possibile risparmiare sul calcolo degli elementi delle righe di C dalla seconda alla penultima, per cui sono sufficienti tre operazioni.

```
C=zeros(2*n+1,2*n+1);
% calcolo gli elementi della prima e dell'ultima riga
for j=1:2*n+1
  for k=1:2*n+1
    C(1,j)=C(1,j)+A(1,k)*B(k,j);
    C(2*n+1,j)=C(2*n+1,j)+A(2*n+1,k)*B(k,j);
  end
end
% calcolo gli elementi delle restanti righe
for i=2:2*n
  for j=1:2*n+1
    C(i,j)=A(i,1)*B(1,j)+A(i,2*n+1)*B(2*n+1,j);
  end
end
```

La parte principale del costo computazionale è data dalla somma del costo del primo ciclo che esegue $16n^2 + o(n^2)$ ops e del secondo ciclo che esegue $12n^2 + o(n^2)$ ops. La parte principale è $28n^2$ ops.

(c3) Data una matrice generica A e una matrice a cornice B, il loro prodotto $C = AB$ è una matrice piena. Ci si accorge che è possibile risparmiare sul calcolo degli elementi delle colonne di C dalla seconda alla penultima, per cui sono sufficienti tre operazioni.

```
C=zeros(2*n+1,2*n+1);
% calcolo gli elementi della prima e dell'ultima colonna
for i=1:2*n+1
  for k=1:2*n+1
    C(i,1)=C(i,1)+A(i,k)*B(k,1);
    C(i,2*n+1)=C(i,2*n+1)+A(i,k)*B(k,2*n+1);
  end
end
```

```
% calcolo gli elementi delle restanti colonne
for j=2:2*n
  for i=1:2*n+1
    C(i,j)=A(i,1)*B(1,j)+A(i,2*n+1)*B(2*n+1,j);
  end
end
```

La parte principale del costo computazionale è data dalla somma del costo del primo ciclo che esegue $16n^2 + o(n^2)$ ops e del secondo ciclo che esegue $12n^2 + o(n^2)$ ops. La parte principale è $28n^2$ ops.

(d) Per $n = 0$ la matrice è 1×1 e quindi il metodo di Gauss è applicabile. Per $n = 1$ si ha una matrice 3×3 per cui il metodo è applicabile se e solo se $a_{11} \neq 0$ (primo passo) e $a_{12} \neq 0$ e $a_{21} \neq 0$ (secondo passo). Per $n \geq 1$ il terzo minore principale di testa è del tipo

$$\begin{bmatrix} * & * & * \\ * & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

che ha determinante 0 e quindi il metodo di Gauss non è applicabile.

Come sopra, per $n = 0$ la matrice è invertibile se e solo se $a_{11} \neq 0$, per $n = 1$ può essere invertibile, per $n > 1$ invece la matrice non è mai invertibile perché ha almeno tre righe con due soli elementi non nulli, una delle quali sarà linearmente dipendente dalle altre.

(e) Nell'algoritmo del punto (b) il primo ciclo si può parallelizzare con $\lceil \log_2(2n + 1) \rceil + 1$ cicli, invece il secondo ciclo è completamente parallelizzabile e ogni istruzione può essere eseguita con due cicli (uno per i prodotti e uno per la somma), infine i due cicli possono essere eseguiti in parallelo. Il numero di cicli totale è minore o uguale a $3 + \lceil \log_2 n \rceil$. □

Commenti. Un solo studente ha intuito la soluzione furba. La traccia presentata qui non è quella effettivamente apparsa nel compito, dove ciascuna fila aveva una selezione limitata di domande. □

Esercizio 72. (*15 giugno 2016*) Si dica, motivando la risposta, quanti cicli sono necessari in un'architettura parallela per valutare un polinomio di grado uno ($p(x) = a_0 + a_1 x$) in due punti.

Soluzione. Se si vuole valutare un polinomio in due punti, avendo due copie dei coefficienti del polinomio, diciamo $a(2) = b(2) = a_1$ e $a(1) = b(1) = a_0$, servono due cicli

```
parallel
  s=a(2)*x;
  t=b(2)*y;
end
parallel
  p=a(1)+s;
  q=b(1)+t;
end
```

Non è possibile parallelizzare ulteriormente, poiché senza calcolare $a_1 x$ non è possibile eseguire la somma, quindi servono almeno due cicli e due processori. □

Esercizio 73. (*15 giugno 2016*) Si dica, motivando la risposta, quanti cicli sono necessari in un'architettura parallela per valutare due polinomi di grado uno ($p(x) = a_0 + a_1 x$ e $q(x) = b_0 + b_1 x$) in un punto.

Soluzione. Se si vogliono valutare due polinomi in un punto, avendo due copie del punto $y = x$, servono due cicli

```
parallel
  s=a(2)*x;
  t=b(2)*y;
end
parallel
  p=a(1)+s;
  q=b(1)+t;
end
```

Non è possibile parallelizzare ulteriormente, poiché senza calcolare $a_1 x$ non è possibile eseguire la somma, quindi servono almeno due cicli e due processori. □

Esercizio 74. (*15 giugno 2016*) Si scriva in pseudocodice un algoritmo che moltiplica una matrice $n \times n$ che ha solo la prima riga non nulla per un vettore in $O(n)$ ops.

Soluzione. Detta A la matrice e b il vettore, si vuole calcolare c. Supponendo di avere inizializziato il vettore c a 0, un possibile codice è

```
c(1)=a(1,1)*b(1);
for k=2:n
  c(1)=c(1)+a(1,k)*b(k);
end
```

che esegue esattamente $2n-1$ operazioni. □

Esercizio 75. (*6 luglio 2015*) Sia n un intero non negativo e sia data sull'insieme delle matrici $\mathbb{R}^{(2n+1)\times(2n+1)}$ la struttura

$$\mathcal{S}_n = \{A \in \mathbb{R}^{(2n+1)\times(2n+1)} \ : \ a_{ij} = 0, \ \text{per } i \neq n+1, j \neq n+1\}.$$

L'insieme $\mathcal{S}_n$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^{(2n+1)\times(2n+1)}$; una matrice in $\mathcal{S}_n$ può essere definita come *matrice a croce*.

(a) Trovare la dimensione di $\mathcal{S}_n$ e dire se l'identità e la matrice nulla appartengono a $\mathcal{S}_n$.

(b) Data $A \in \mathcal{S}_n$ e $b, d \in \mathbb{R}^{2n+1}$, scrivere in pseudocodice un algoritmo che calcoli il prodotto di $d^T Ab$ in non più di $O(n)$ ops e se ne calcoli il costo computazionale.

(c) Ripetere l'esercizio del punto (b), nell'ipotesi $b_{n+1} = 0$, mostrando che in questo caso il costo computazionale asintotico dell'algoritmo può essere dimezzato.

(d) Dire se il metodo di Gauss applicato a una generica matrice $A \in \mathcal{S}_n$, con $n > 0$, si arresta, precisando a quale passo si arresta.

Soluzione. (a) La dimensione è data dal numero di elementi non nulli che è $4n+1$. Per $n = 0$ si ha $\mathcal{S}_0 = \mathcal{R}^{1\times 1}$ e quindi sia l'identità, che la matrice nulla appartengono a $\mathcal{S}_0$. Per $n > 0$ la matrice nulla appartiene a $\mathcal{S}_n$ non appartiene a $\mathcal{S}_n$ per $n \geq 1$ poiché, detto ζ_{ij} l'elemento generico della matrice nulla, si ha $\zeta_{ij} = 0$ per ogni i e j e in particolare per $i \neq n+1, j \neq n+1$. Infine, per $n > 0$ l'identità non appartiene a $\mathcal{S}_n$ poiché, detto δ_{ij} l'elemento generico dell'identità, vale $\delta_{11} = 1$, ma in questo caso $i = j = 1 \neq n+1$.

(b) È sufficiente calcolare prima $c = Ab$ e poi calcolare il prodotto scalare $d^T c = d^T Ab$, quest'ultima operazione richiede $4n$ operazioni, quindi ci concentreremo sulla prima.

Ci si accorge che le righe di A hanno tutte al più un elemento non nullo, tranne la centrale ($n+1$-esima) che può avere tutti gli elementi non nulli, quindi $c_i = a_{i,n+1}b_{n+1}$ per ogni i escluso $n+1$, e $c_{n+1} = a_{n+1,1}b_1 + \cdots + a_{n+1,2n+1}b_{2n+1}$. Questo calcolo può essere eseguito con $2n$ operazioni per calcolare $c_1, \ldots, c_n$ e $c_{n+2}, \ldots, c_{2n+1}$ e con altre $4n+1$ operazioni per calcolare c_n.

In totale il calcolo di $d^T Ab$ può essere eseguito con un costo asintotico di $10n + o(n)$ ops. Scriviamo ora lo pseudocodice.

```
c=zeros(2*n+1,1);
% calcolo i valori da c(1) a c(n)
for k=1:n
  c(i)=A(k,n+1)*b(n+1);
end
% calcolo c(n+1)
for i=1:2*n+1
  c(n+1)=c(n+1)+A(n+1,i)*b(i);
end
% calcolo i valori da c(n+2) a c(2n+1)
for k=1:n
  c(i)=A(k,n+1)*b(n+1);
end
% calcolo il prodotto scalare
s=d(1)*c(1);
for k=2:2*n+1
  s=s+d(k)*c(k);
end
```

(c) Di fatto occorre calcolare solo c_{n+1} poiché per $i \neq n+1$ si sa che $c_i = a_{i,n+1}b_{n+1} = 0$. Si possono evitare il primo e il terzo ciclo for che richiedono $2n$ operazioni, inoltre il prodotto scalare finale si riduce a un solo prodotto, poiché c ha un solo elemento eventualmente non nullo. Il costo computazionale è di $4n + o(n)$ ops.

```
c=zeros(2*n+1,1);
% calcolo c(n+1)
for i=1:2*n+1
  c(n+1)=c(n+1)+A(n+1,i)*b(i);
end
% calcolo il prodotto scalare
s=d(n+1)*c(n+1);
```

(d) Per $n \geq 1$ si ha $a_{11} = 0$ e quindi il metodo di Gauss si arresta al primo passo.

Soluzione alternativa. Se si scompone la matrice A come somma della matrice M che ha come unica colonna la colonna centrale di A e della matrice N che ha come unica riga la riga centrale di A escluso l'elemento centrale si ha

$$d^T Ab = d^T Mb + d^T Nb = (d^T M)b + d^T (Nb).$$

Il prodotto $c = Nb$ è nullo tranne per l'elemento di posizione $n+1$ che si trova con $4n$ ops, mentre $d^T c = d_{n+1}c_{n+1}$ e quindi si può calcolare $d^T Nb$ con $4n$ ops. Con altrettante si calcola $d^T Mb$ per un totale di $8n$ ops.

Se $b_{n+1} = 0$ allora $d^T Ab = d^T Nb$ e quindi sono sufficienti $4n$ ops. □

Commenti. Un solo studente ha risolto tutto l'esercizio. Nessuno ha trovato la soluzione alternativa. □

Esercizio 76. (*15 settembre 2015*) Sia data la struttura di matrici $\mathcal{S}_n = \{A \in \mathbb{R}^{3n\times 2n} : a_{ij} = 0 \text{ per } i \leq n, j > n \text{ e per } i > 2n, j \leq n\}$.

(a) Si fornisca un esempio di matrice appartenente a $\mathcal{S}_2$.

(b) Si descriva un algoritmo che calcola il prodotto Ab con $A \in \mathcal{S}_n$ e $b \in \mathbb{R}^{2n}$ che richieda non più di $8n^2+o(n^2)$ ops e se ne fornisca un'implementazione in pseudocodice;

(c) Data $A \in \mathcal{S}_n$, si descriva un algoritmo che calcola il prodotto AA^T e che richieda non più di $16n^3 + o(n^3)$ ops.

(Hint: Tetris)

Soluzione. La configurazione di una matrice di $\mathcal{S}_2$ è del tipo

$$\begin{bmatrix} * & * & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{bmatrix}$$

(b) Un'implementazione può essere

```
for i=1:3*n
  c(i)=0;
end
for i=1:2*n
  for j=1:n
    c(i)=c(i)+a(i,j)*b(j);
  end
end
for i=n+1:3*n
  for j=n+1:2*n
    c(i)=c(i)+a(i,j)*b(j);
  end
end
```

Si verifica facilmente che le operazioni richieste sono $8n^2$.

(c) Il risultato sarà una matrice $3n \times 3n$, si può ragionare in termini di blocchi. Scrivendo la matrice

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \\ 0 & A_{32} \end{bmatrix}, \qquad A^T = \begin{bmatrix} A_{11}^T & A_{21}^T & 0 \\ 0 & A_{22}^T & A_{32}^T \end{bmatrix},$$

dove ciascuno dei blocchi è una matrice $n \times n$, ci si accorge che

$$AA^T = \begin{bmatrix} A_{11}A_{11}^T & A_{11}A_{21}^T & 0 \\ A_{21}A_{11}^T & A_{21}A_{21}^T + A_{22}A_{22}^T & A_{22}A_{32}^T \\ 0 & A_{32}A_{22}^T & A_{32}A_{32}^T \end{bmatrix}$$

e quindi per costruire AA^T sono sufficienti 8 moltiplicazioni tra matrici $n \times n$ e una somma per un costo complessivo di $16n^3 + o(n^3)$ ops. □

Esercizio 77. (*30 settembre 2015*) Sia data la struttura di matrici $\mathcal{S}_n = \{A \in \mathbb{R}^{3n\times 2n} : a_{ij} = 0$ per $i \le n, j \le n$ e per $i \le n, j > 2n\}$.

(a) Si descriva un algoritmo che calcola il prodotto Ab con $A \in \mathcal{S}_n$ e $b \in \mathbb{R}^{2n}$ che richieda non più di $8n^2+o(n^2)$ ops e se ne fornisca un'implementazione in pseudocodice.

(b) Data $A \in \mathcal{S}_n$, si descriva un algoritmo che calcola il prodotto A^TA e che richieda non più di $12n^3 + o(n^3)$ ops.

(c) Data $A \in \mathcal{S}_n$, si descriva un algoritmo che calcola il prodotto AA^T e che richieda non più di $20n^3 + o(n^3)$ ops.

Esercizio 78. (*gennaio 2016*) Sia data la struttura

$$\mathcal{S}_n = \{A \in \mathbb{R}^{(2n)\times(2n)} : a_{ij} = 0 \text{ per } i \le n, j \le n \text{ e } a_{ij} = 0 \text{ per } i > n, j > n\}.$$

(a) Si scriva in pseudocodice un algoritmo che calcola il prodotto Ab, dove $A \in \mathcal{S}_n$ e $b \in \mathbb{R}^{2n}$ e che non richieda più di $4n^2$ ops.

(b) Si scriva in pseudocodice un algoritmo che calcola il prodotto AB, dove $A, B \in \mathcal{S}_n$ e che non richieda più di $4n^3$ ops.

(c) Si dica se il metodo di Gauss è applicabile a una matrice della struttura $\mathcal{S}_n$, motivando la risposta.

Esercizio 79. (*febbraio 2016*) Sia data la struttura

$$\mathcal{S}_n = \{A \in \mathbb{R}^{(2n)\times(2n)} : a_{ij} = 0 \text{ per } i \le n, j > n \text{ e } a_{ij} = 0 \text{ per } i > n, j \le n\}.$$

(a) Si scriva in pseudocodice un algoritmo che calcola il prodotto Ab, dove $A \in \mathcal{S}_n$ e $b \in \mathbb{R}^{2n}$ e che non richieda più di $4n^2$ ops.

(b) Si scriva in pseudocodice un algoritmo che calcola il prodotto AB, dove $A, B \in \mathcal{S}_n$ e che non richieda più di $4n^3$ ops.

(c) Si scriva in pseudocodice un algoritmo che calcola il prodotto AC, dove $A \in \mathcal{S}_n$ e

$$C \in \{M \in \mathbb{R}^{(2n)\times(2n)} : m_{ij} = 0 \text{ per } i \le n, j \le n \text{ e } m_{ij} = 0 \text{ per } i > n, j > n\}$$

che non richieda più di $4n^3$ ops.

Esercizio 80. *(18 novembre 2016)* Sia data la struttura

$$\mathcal{S}_n = \{A \in \mathbb{R}^{(2n)\times(2n)} : a_{ij} = 0, \text{ per } i \text{ dispari e } j \ne i \text{ e per } i \text{ pari e } j \ne i-1, i\}.$$

(a) Si trovi la dimensione di $\mathcal{S}_n$ come sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^{(2n)\times(2n)}$.

(b) Si descriva in pseudocodice un algoritmo che calcola il prodotto $c = Ab$, dove $A \in \mathcal{S}_n$ e $b \in \mathbb{R}^{2n}$ e che richieda $O(n)$ ops e si calcoli la parte principale del costo computazionale.

(c) Si descriva in pseudocodice un algoritmo parallelo che calcola il vettore c come nel punto (a) e che richieda non più di 2 cicli utilizzando $2n$ processori. (Si trascurino le operazioni necessarie a valutare gli indici.)

(d) Si descriva una variante del metodo di sostituzione in avanti che calcoli la soluzione del sistema lineare $Ax = b$ dove $A \in \mathcal{S}_n$ e $b \in \mathbb{R}^{2n}$ in $O(n)$ ops e si calcoli la parte principale del costo computazionale.

(e) Si descriva in pseudocodice un algoritmo parallelo che calcola il vettore x come nel punto (c) e che richieda non più di 3 cicli utilizzando non più di $3n$ processori. (Si trascurino le operazioni necessarie a valutare gli indici.) (*) È possibile fare lo stesso calcolo in 3 cicli e con $2n$ processori?

Soluzione. (a) La dimensione è pari al massimo numero di elementi non nulli, che in questo caso è $3n$.
(b) Ci accorgiamo che per i pari $c_i = a_{i,i-1}v_{i-1} + a_{i,i}v_i$ e per i dispari $c_i = a_{ii}v_i$. Una possibile implementazione è

```
for i=2:2:2*n
  j=i-1;
  c(j)=a(j,j)*v(j);
  c(i)=a(i,j)*v(j)+a(i,i)*v(i);
end
```

all'interno del ciclo, vengono eseguite 4 operazioni (5 se si conta anche il calcolo degli indici). Il ciclo viene eseguito n volte e quindi in totale sono richieste $4n$ ($5n$) ops.
(c) Ciascuna componente è indipendente dalle altre e quindi possono essere calcolate in parallelo. Nel calcolo di c_i, con 2 processori, è possibile calcolare in parallelo i prodotti $a_{ii}v_i$ e $a_{i,i+1}v_{i+1}$ e calcolarne in seguito la loro somma e c_{i+1} in parallelo.

```
parallel for i=2:2:2*n
  j=i-1;
  parallel
    t1=a(i,i)*v(i);
    t2=a(i,j)*v(j);
  end
  parallel
    c(i)=t1+t2;
    c(j)=a(j,j)*v(j);
  end
end
```

Il numero di cicli di calcolo è 2. Il numero di processori richiesti è pari a $2n$, infatti ogni passo del ciclo for può essere eseguito con due processori e il ciclo viene ripetuto n volte.
(d) Un modo per risolvere il problema è di modificare il metodo di sostituzione in avanti. Oppure si osserva che la prima equazione è $a_{11}x_1 = b_1$, da cui ricavare x_1 e la seconda $a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2$, da cui ricavare $x_2 = (b_2 - a_{21}x_1)/a_{22}$. Una situazione simile si ripete per la terza e quarta componente (se $n > 1$), infatti la terza equazione è $a_{33}x_3 = b_3$, da cui si ricava immediatamente x_3 e la quarta $a_{43}x_3 + a_{44}x_4 = b_4$, da cui si ricava x_4, conoscendo x_2. Si ottiene l'implementazione

```
for i=1:2:2*n
  j=i+1;
  x(i)=b(i)/a(i,i);
  x(j)=(b(j)-a(j,i)*x(i))/a(j,j);
end
```

che, trascurando il calcolo degli indici, richiede 4 operazioni ripetute n volte, quindi $4n$ ops.
(e) Il ciclo for è interamente parallelizzabile ma, per come è scritto il codice, ogni operazione nel calcolo di x_i richiede il risultato di un'operazione precedente. Quindi trasformando il for in un for parallelo, si può calcolare la soluzione con 4 cicli e n processori, ma non è sufficiente. Si può tuttavia utilizzare il seguente espediente: calcolare $x_i = b_i/a_{ii}$, $t_1 = b_{i+1}/a_{i+1,i+1}$ e $t_2 = a_{i+1,i}/a_{j+1,j+1}$ in parallelo e osservare che $x_{i+1} = t_1 - t_2x_i$ e che quest'ultimo calcolo si può eseguire con due cicli. Si ha la seguente implementazione

```
parallel for i=1:2:2*n
  j=i+1;
  parallel
    x(i)=b(i)/a(i,i);
    t2=a(j,i)/a(j,j);
  end
  parallel
    t1=b(j)/a(j,j);
    t3=t2*x(i);
  end
  x(j)=t1-t3;
end
```

che richiede 3 cicli e $2n$ processori. □

Esercizio 81. *(30 gennaio 2017)* Una matrice $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, con $n > 2$, è detta *antitridiagonale* se $a_{ij} = 0$ per $i + j < n$ e per $i + j > n + 2$ (cioè la matrice tale che gli unici elementi non nulli sono sull'antidiagonale principale e sulle due diagonali ad essa adiacenti).

(a) Scrivere in pseudocodice un algoritmo che calcoli il prodotto Ab, dove A è una matrice antitridiagonale e b un vettore, e che asintoticamente richieda non più di $6n$ ops;

(b) si dia un'implementazione parallela che calcoli il prodotto Ab con A antitridiagonale e b qualsiasi, in non più di tre cicli con $3n$ processori. (*) Calcolare il prodotto in tre cicli con $2n$ processori.

Esercizio 82. *(giugno 2017)* Sia data la struttura

$$\mathcal{S}_n = \{M \in \mathbb{R}^{n\times n} \,:\, m_{ij} = 0, \text{ quando } i \neq j \text{ e } i \neq n \text{ e } j \neq 1\}.$$

Una matrice $M \in \mathcal{S}_n$ può essere rappresentata come

$$M = \begin{bmatrix} * & & & & \\ * & * & & & \\ * & & * & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ * & * & \cdots & * & * \end{bmatrix}.$$

(a) Si dica qual è il massimo numero di elementi non nulli di M;

(b) trovare un algoritmo che calcoli il prodotto Mv dove $M \in \mathcal{S}_n$ e $v \in \mathbb{R}^n$ e che non richieda più di $6n + o(n)$ ops.

(c) si descriva una variante dell'algoritmo del punto (b) che sfrutti il parallelismo e richieda $o(n)$ cicli, specificando il numero di cicli e il numero di processori richiesti.

Esercizi Gaussiani

Esercizio 83. *(24 giugno 2016)* Sia data la struttura

$$\mathcal{S}_n = \{M \in \mathbb{R}^{2n\times 2n} \ : \ m_{ij} = 0, \ \text{per } i \neq j, i \neq j+n, i \neq j-n\}.$$

Una matrice $M \in \mathcal{S}_n$ può essere rappresentata come

$$M = \left[\begin{array}{cccc|cccc} a_1 & & & & b_1 & & & \\ & a_2 & & & & b_2 & & \\ & & \ddots & & & & \ddots & \\ & & & a_n & & & & b_n \\ \hline c_1 & & & & d_1 & & & \\ & c_2 & & & & d_2 & & \\ & & \ddots & & & & \ddots & \\ & & & c_n & & & & d_n \end{array}\right] \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}.$$

(a) Nel caso in cui il metodo di Gauss sia applicabile a una matrice $M \in \mathcal{S}_n$, si mostri che è possibile effettuare il primo passo con 3 operazioni.

(b) Si scriva in pseudocodice una variante strutturata del metodo di Gauss che applicato alla matrice $M \in \mathcal{S}_n$ richieda non più di $3n$ ops.

(c) Si mostri che, con un numero sufficientemente alto di processori, è possibile parallelizzare l'algoritmo del punto (d) in modo che richieda 3 cicli di calcolo, specificando il numero di processori.

(d) Si dimostri che è possibile ottenere una matrice triangolare superiore con il metodo di Gauss applicato a una matrice $M \in \mathcal{S}_n$ se e solo se $a_i \neq 0$ per $i = 1, \ldots, n$.

Soluzione. (a) Il numero di elementi non nulli è al più $4n$, che è la dimensione di $\mathcal{S}_n$ come spazio vettoriale e inoltre è una struttura sparsa, poiché $\lim_{n\to\infty} 4n/n^2 = 0$. □

Esercizio 84. Si calcoli o si stimi il costo asintotico della fattorizzazione LU di una matrice tridiagonale ottenuta tramite un algoritmo che sfrutti la struttura, si dica inoltre come sono fatte L e U.

Soluzione. Data una matrice tridiagonale di dimensione n, al primo passo occorre fare una combinazione di righe che elimini il solo elemento a_{21}. Per far ciò è necessario calcolare la quantità $\ell_{21} = a_{21}/a_{11}$ e sostituire alla riga r_2 la riga $r_2 - \ell_{21}r_1$, quest'ultima operazione modifica solo due elementi: a_{21} che diventa 0 e quindi non va calcolato e a_{22} che diventa $a_{22}^{(2)} = a_{22} - \ell_{21}a_{12}$. In totale, il primo passo richiede al più tre operazioni (1d+1a+1m).

La sottomatrice di A_2 a cui applicare il secondo passo del metodo di Gauss è ancora tridiagonale e quindi si ripete il procedimento.

Dunque ognuno degli $n-1$ passi del metodo di Gauss costerà 3 ops, e quindi il costo totale è $3(n-1)$ ops, che asintoticamente è $3n$, dunque $O(n)$.

La matrice U oltre ad essere triangolare superiore è anche bidiagonale superiore (nel senso che gli unici elementi diversi da 0 si possono trovare sulla diagonale principale e sulla sopradiagonale). Analogamente la matrice L è bidiagonale inferiore, in quanto solo gli elementi $\ell_{i+1,i}$ e ℓ_{ii} possono essere diversi da 0.

Una rappresentazione grafica può essere:

$$\begin{bmatrix} * & * & & & \\ * & * & * & & \\ & * & * & * & \\ & & * & * & * \\ & & & * & * \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ * & 1 & & & \\ & * & 1 & & \\ & & * & 1 & \\ & & & * & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} * & * & & & \\ & * & * & & \\ & & * & * & \\ & & & * & * \\ & & & & * \end{bmatrix}.$$

Un altro modo di calcolare il costo è riscrivere l'algoritmo di Gauss, rimuovendo i calcoli non necessari. Ricordando che il passo k dell'algoritmo è

$$\begin{aligned} a_{ij}^{(k+1)} &= a_{ij}^{(k)}, \quad i = 1, \ldots, k, \\ a_{ij}^{(k+1)} &= 0, \quad i = k+1, \ldots, n, j = 1, \ldots, k, \\ a_{ij}^{(k+1)} &= a_{ij}^{(k)} - \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}} a_{kj}^{(k)}, \quad i = k+1, \ldots, n, j = k+1, \ldots, n, \end{aligned}$$

per un costo di $2(n-k)^2$ ops. Nel caso tridiagonale, $a_{ik}^{(k)} = 0$ per $i > k+1$ e $a_{kj} = 0$ per $j > k+1$, quindi l'unico calcolo effettuato è

$$a_{k+1,k+1}^{(k+1)} = a_{k+1,k+1}^{(k)} - \frac{a_{k+1,k}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}} a_{k,k+1}^{(k)},$$

cioè 3 ops, tutto il resto è nullo o coincide con $a_{ij}^{(k)}$. È chiaro quindi che il costo totale è $3(n-1)$ ops. □

Esercizio 85. Si calcoli o si stimi il costo asintotico della fattorizzazione LU ottenuta tramite un algoritmo che sfrutta la struttura di una matrice di Hessenberg superiore, cioè una matrice $A = (a_{ij})$ tale che $a_{ij} = 0$ se $i > j+1$ cioè che è nulla sotto la sottodiagonale. Si dica inoltre come sono fatte L e U.

Soluzione. Data una matrice di Hessenberg superiore di dimensione n, al primo passo occorre fare una combinazione di righe che elimini il solo elemento a_{21}. Per far ciò è necessario calcolare la quantità $\ell_{21} = a_{21}/a_{11}$ e sostituire alla riga r_2 la riga $r_2 - \ell_{21} r_1$, quest'ultima operazione modifica tutti gli elementi della riga r_2 che sono n: l'elemento a_{21} diventa 0 e quindi non va calcolato e gli elementi a_{2j}, per $j = 2, \dots, n$ diventano $a_{2j}^{(2)} = a_{2j} - \ell_{21} a_{1j}$. In totale, il primo passo richiede al più $(2n-1)$ operazioni (1d+(2n-1)a+(2n-1)m).

La sottomatrice di A_2 a cui applicare il secondo passo del metodo di Gauss è ancora di Hessenberg e quindi si ripete il procedimento con $n-1$ al posto di n.

Dunque il passo k del metodo di Gauss costerà $2(n-k+1)-1 = 2(n-k)-1$ ops, e quindi il costo totale è $\sum_{k=1}^{n-1} \big(2(n-k)-1\big)$ ops (trascurando i termini di ordine inferiore), ma $\sum_{k=1}^{n} 2(n-k) \sim 2\frac{n^2}{2} = n^2$ cioè $O(n^2)$.

La matrice U è triangolare superiore e piena, mentre la matrice L è bidiagonale inferiore, in quanto solo gli elementi $\ell_{i+1,i}$ e ℓ_{ii} possono essere diversi da 0.

Una rappresentazione grafica può essere:

$$\begin{bmatrix} * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ & * & * & * & * \\ & & * & * & * \\ & & & * & * \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ * & 1 & & & \\ & * & 1 & & \\ & & * & 1 & \\ & & & * & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} * & * & * & * & * \\ & * & * & * & * \\ & & * & * & * \\ & & & * & * \\ & & & & * \end{bmatrix}.$$

Un altro modo di calcolare il costo è riscrivere l'algoritmo di Gauss, rimuovendo i calcoli non necessari. Ricordando che il passo k dell'algoritmo è

$$\begin{aligned} a_{ij}^{(k+1)} &= a_{ij}^{(k)}, \quad i = 1, \dots, k, \\ a_{ij}^{(k+1)} &= 0, \quad i = k+1, \dots, n, j = 1, \dots, k+1, \\ a_{ij}^{(k+1)} &= a_{ij}^{(k)} - \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}} a_{kj}^{(k)}, \quad i = k+1, \dots, n, j = k+1, \dots, n, \end{aligned}$$

per un costo di $2(n-k)^2$ ops. Nel caso in cui A è di Hessenberg superiore, $a_{ik}^{(k)} = 0$ per $i > k+1$, quindi gli unici calcoli effettuati sono

$$a_{k+1,j}^{(k+1)} = a_{k+1,j}^{(k)} - \frac{a_{k+1,k}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}} a_{k,j}^{(k)}, \quad j = k+1, \dots, n$$

cioè $2(n-k)+1$ ops, tutto il resto è nullo o coincide con $a_{ij}^{(k)}$. Procedendo come sopra si ottiene il costo n^2. □

Esercizio 86. Si valuti il costo computazionale del calcolo della soluzione di un sistema lineare $Ax = b$ con matrice rispettivamente tridiagonale e di Hessenberg superiore.

Soluzione. Nel caso tridiagonale, applicando la procedura degli esercizi precedenti alla matrice a cui è stato unito il vettore b, al passo k occorre calcolare anche $b_{k+1}^{(k+1)} = b_{k+1}^{(k)} - \frac{a_{k+1,k}^{(k)}}{b_k^{(k)}}$ con un costo di 2 operazioni per ogni passo e un totale di $2(n-1)$ operazioni che sommate al costo del calcolo degli elementi di U arriva a $5(n-1)$. Poi occorre calcolare il costo per la soluzione del sistema bidiagonale superiore $Ux = \widetilde{b}$, che con una variante del metodo di sostituzione all'indietro costa $3n-2$. Il costo totale della soluzione del sistema lineare è di $8n-7$ ops, asintoticamente $8n$.

Nel caso di Hessenberg superiore, il calcolo dell'aggiornamento di b è ancora $O(n)$ ed è quindi trascurabile rispetto al costo del calcolo di U che è n^2 (si veda l'esercizio relativo), mentre il costo per la soluzione del sistema triangolare superiore $Ux = \widetilde{b}$ è n^2 che va sommato al costo della fattorizzazione per un totale di $2n^2$ ops per la soluzione del sistema lineare. □

Esercizio 87. Sia data la matrice ad albero

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & -\frac{13}{3} \end{bmatrix}.$$

Si descriva l'algoritmo di Gauss applicato alla matrice A, dicendo qual è il numero di operazioni aritmetiche elementari necessarie (escludendo quelle il cui risultato è noto a priori oppure non richiede calcolo). Scrivere inoltre L e U e risolvere il sistema lineare $Ax = b$ con $b = [7,\ 3,\ 4,\ -\frac{1}{3}]^T$.

Soluzione. Si ha $A_1 = A$, per calcolare A_2 bisogna prima di tutto calcolare $\ell_{21} = \frac{a_{21}}{a_{11}} = 2$, $\ell_{31} = \frac{a_{31}}{a_{11}} = 3$ e $\ell_{41} = \frac{a_{41}}{a_{11}} = 4$ per un costo di 3 operazioni. Poi occorre calcolare $r_2 \to r_2 - \ell_{21} r_1$ e questo costa 3 operazioni poiché $a_{21}^{(2)} = 0$ e questo non richiede calcoli, $a_{22}^{(2)} = a_{22} - \ell_{21} a_{12}$ (2 ops), $a_{23}^{(2)}$ non cambia e infine $a_{24}^{(2)} = a_{24} - \ell_{21} a_{14}$ e questo richiede solo una operazione poiché $a_{24} = 0$. Con ragionamenti analoghi si osserva che per calcolare $r_3 \to r_3 - \ell_{31} r_1$ sono richieste 2 ops e per calcolare $r_4 \to r_4 - \ell_{41} r_1$ sono richieste 3 ops. Il costo totale del primo passo è 11 ops. La matrice ottenuta è (per comodità si calcola contemporaneamente anche il vettore $b^{(2)}$)

$$[A_2 | b^{(2)}] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 4 & 7 \\ 0 & -3 & 0 & -8 & -11 \\ 0 & -6 & 1 & -12 & -17 \\ 0 & -8 & 0 & -\frac{61}{3} & -\frac{85}{3} \end{array}\right].$$

Al secondo passo $\ell_{32} = 2$, $\ell_{42} = \dfrac{8}{3}$ e con 6 operazioni (senza contare il costo per il calcolo di $b^{(3)}$) si ottiene

$$[A_3 | b^{(3)}] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 4 & 7 \\ 0 & -3 & 0 & -8 & -11 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

che è già triangolare superiore, quindi $U = A_3$ e il costo totale è 17 operazioni.

La fattorizzazione è

$$L \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & \frac{8}{3} & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & -3 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Il sistema $Ux = \widetilde{b} = [7,\ -11,\ 5,\ 1]^T$ fornisce la soluzione $x = [1,\ 1,\ 1,\ 1]$. □

Esercizio 88. Sia data la matrice ad albero

$$A = \begin{bmatrix} -13/3 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Si descriva l'algoritmo di Gauss applicato alla matrice A, dicendo qual è il numero di operazioni aritmetiche elementari necessarie (escludendo quelle il cui risultato è noto a priori oppure non richiede calcolo). Scrivere inoltre L e U e risolvere il sistema lineare $Ax = b$ con $b = [-\frac{1}{3},\ 3,\ 4,\ 7]^T$.

Soluzione. Si ha $A_1 = A$, per calcolare A_2 bisogna prima di tutto calcolare $\ell_{41} = \frac{a_{41}}{a_{11}} = -\frac{12}{13}$, e poi occorre calcolare $r_4 \to r_4 - \ell_{41} r_1$ e questo costa 2 operazioni poiché $a_{41}^{(4)} = 0$, e questo non richiede calcoli, $a_{42}^{(2)}$ e $a_{43}^{(2)}$ rimangono inviariati e l'unica quantità da calcolare è $a_{44}^{(2)} = a_{44} - \ell_{41} a_{14}$ (2 ops). La matrice ottenuta è (per comodità si calcola contemporaneamente anche il vettore $b^{(2)}$)

$$[A_2 | b^{(2)}] = \left[\begin{array}{cccc|c} -\frac{13}{3} & 0 & 0 & 4 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & \frac{61}{13} & \frac{87}{13} \end{array}\right].$$

Al secondo passo $\ell_{42} = 2$ e con 3 operazioni (senza contare il costo per il calcolo di $b^{(3)}$) si ottiene

$$[A_3 | b^{(3)}] = \left[\begin{array}{cccc|c} -\frac{13}{3} & 0 & 0 & 4 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{9}{13} & \frac{9}{13} \end{array}\right].$$

Il costo totale è di 6 operazioni. □

Esercizio 89. Calcolare il costo della fattorizzazione LU di una matrice ad albero del tipo

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & & \\ \vdots & & \ddots & & \\ a_{n-1,1} & & & a_{n-1,n-1} & \\ a_{n,1} & & & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Soluzione. Al primo passo occorre eliminare gli elementi della prima colonna, e quindi per ogni riga occorre fare almeno $n+1$ operazioni (per esempio per la prima $a_{22}^{(2)} = a_{22} - \ell_{21}a_{12}$, $a_{23}^{(2)} = -\ell_{21}a_{13}$, e così via fino a $a_{2n}^{(2)} = -\ell_{21}a_{1n}$). Il costo totale del primo passo è dunque $(n-1)(n+1)$. Al passo successivo la matrice è già piena e quindi il costo del resto dell'algoritmo è quello usuale cioè $\frac{2}{3}(n-1)^3$ e quindi il costo asintotico è $\frac{2}{3}n^3$. □

Esercizio 90. Calcolare il costo della fattorizzazione LU della matrice ottenuta scambiando le prime righe e colonne con le ultime ottentendo

$$A' = \begin{bmatrix} a_{n,n} & & & & a_{n1} \\ & a_{22} & & & a_{21} \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,1} \\ a_{1n} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{11} \end{bmatrix}.$$

Dire come sono fatte L e U.

Soluzione. Al primo passo occorre eliminare a_{1n} e quindi occorre combinare l'ultima riga con la prima riga, ne risulterà essere modificato solo l'elemento a_{11} (in basso a destra) per il calcolo del quale sono richieste 3 operazioni. Al secondo passo occorre eliminare a_{12} e anche questa volta il costo è di 3 operazioni. Il costo totale è $3(n-1)$ operazioni che asintoticamente è $3n$ o $O(n)$.

Si noti che la soluzione di $Ax = b$ con A la matrice dell'esercizio precedente può essere ottenuta dalla soluzione del sistema $Ay = \Pi b$, e con $x = \Pi y$, dove Π è la permatuzaione che scambia la prima componente con l'ultima.

Le matrici L e U sono

$$L = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ \frac{a_{1n}}{a_{nn}} & \frac{a_{12}^{(2)}}{a_{22}} & \cdots & \frac{a_{1,n-1}^{(n-1)}}{a_{n-1,n-1}} & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} a_{n,n} & & & & a_{n1} \\ & a_{22} & & & a_{21} \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,1} \\ & & & & a_{11}^{(n)} \end{bmatrix},$$

o semplicemente hanno pattern

$$L = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ * & * & \cdots & * & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} * & & & & * \\ & * & & & * \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & * & * \\ & & & & * \end{bmatrix}.$$

□

Esercizio 91. (*30 maggio 2009 - Compitino*) Dati

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 3 \\ 3 & 0 & 6 & 0 & 9 \\ -2 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} -5 \\ 7 \\ 21 \\ -3 \\ 17 \end{bmatrix},$$

(a) si descriva l'algoritmo di Gauss per la fattorizzazione LU di A, dicendo quali sono le operazioni aritmetiche elementari necessarie;

(b) si scriva la matrice U;

(c) si scriva la matrice L;

(d) si risolva il sistema lineare $Ax = b$;

(e) si generalizzi il risultato dei punti precedenti al caso n dispari, cioè nel caso di una matrice $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tale che $a_{ii} \neq 0$, $a_{i1} \neq 0$, $a_{in} \neq 0$, $a_{i,n-i+1} \neq 0$ per $i = 1, \dots, n$ e nulla altrove (cioè una matrice che è nulla eccetto la prima e l'ultima colonna, la diagonale e l'antidiagonale). In particolare: assumendo che esista la fattorizzazione LU si calcoli il costo computazionale della fattorizzazione LU (o se ne dia una stima asintotica), e si descriva come sono fatte L e U.

(e2) (*Seconda fila*) si generalizzi il risultato dei punti precedenti al caso n dispari, cioè nel caso di una matrice $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tale che $a_{ii} \neq 0$, $a_{1i} \neq 0$, $a_{ni} \neq 0$, $a_{i,n-i+1} \neq 0$ per $i = 1, \dots, n$ e nulla altrove (cioè una matrice che è nulla eccetto la prima e l'ultima riga, la diagonale e l'antidiagonale). In particolare: assumendo che esista la fattorizzazione LU si calcoli il costo computazionale della fattorizzazione LU (o se ne dia una stima asintotica), e si descriva come sono fatte L e U.

Soluzione. I punti (a)–(d) sono standard: al primo passo occorre eliminare $a_{31} = 3$, $a_{41} = -2$ e $a_{51} = 4$, per far questo si calcolano $\ell_{31} = -3$, $\ell_{41} = 3$ e $\ell_{51} = -4$ (3 ops) e poi si fanno le seguenti operazioni di riga $r_3 - \ell_{31}r_1 \to r_3$ (2 ops), $r_4 - \ell_{41}r_1 \to r_4$ (2 ops) e $r_5 - \ell_{51}r_1 \to r_5$ (2 ops). In definiva il primo passo fornisce la matrice

$$[A_2|b_2] = \left[\begin{array}{ccccc|c} -1 & 0 & 0 & 0 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & -3 \end{array}\right].$$

Al secondo passo basta eliminare $a_{42}^{(2)} = 1$ e per far questo occore calcolare $\ell_{42} = 1$ (1 op) e fare l'operazione di riga $r_4 - \ell_{42}r_2 \to r_1$ (4 ops) ottenendo la matrice

$$[A_3|b_3] = \left[\begin{array}{ccccc|c} -1 & 0 & 0 & 0 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & -3 \end{array}\right],$$

che ci da

$$U = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ & 1 & 0 & 3 & 3 \\ & & 6 & 0 & 0 \\ & & & -2 & 2 \\ & & & & -3 \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ 0 & 1 & & & \\ -3 & 0 & 1 & & \\ 2 & 1 & 0 & 1 & \\ -4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(e) Una matrice con le caratteristiche richieste può essere rappresentata graficamente nel modo seguente

$$A = \begin{bmatrix} * & & & & & & * \\ * & * & & & & * & * \\ * & & * & & * & & * \\ * & & & * & & & * \\ * & & * & & * & & * \\ * & * & & & & * & * \\ * & & & & & & * \end{bmatrix}.$$

Al primo passo occorre eliminare gli elementi $a_{21}, \dots, a_{n1}$ sulla prima colonna, per eliminare ognuno degli elementi sono richieste 3 operazioni, per un totale di $3(n-1)$. Si osservi che gli elementi nulli sono rimasti nulli.

Dopo il primo passo, ogni colonna dalla seconda fino alla $\frac{n-1}{2} - 1 = \frac{n-3}{2}$ ha un solo elemento diverso da zero sotto la diagonale (precisamente sull'antidiagonale). Per eliminarlo occorrono 5 operazioni, per un totale di $5(\frac{n-3}{2})$.

Il costo totale è dunque

$$C(n) = 3(n-1) + 5\frac{n-3}{2} = \frac{11}{2}n - \frac{21}{2} \approx \frac{11}{2}n = O(n).$$

Le matrici L e U sono graficamente

$$L = \begin{bmatrix} * & & & & & & \\ * & * & & & & & \\ * & & * & & & & \\ * & & & * & & & \\ * & & * & & * & & \\ * & * & & & & * & \\ * & & & & & & * \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} * & & & & & & * \\ & * & & & & * & * \\ & & * & & * & & * \\ & & & * & & & * \\ & & & & * & & * \\ & & & & & * & * \\ & & & & & & * \end{bmatrix}.$$

(e2) Una matrice con le caratteristiche richieste può essere rappresentata graficamente nel modo seguente

$$A = \begin{bmatrix} * & * & * & * & * & * & * \\ & * & & & & * & \\ & & * & & * & & \\ & & & * & & & \\ & & * & & * & & \\ & * & & & & * & \\ * & * & * & * & * & * & * \end{bmatrix}.$$

Al primo passo occorre eliminare solo l'elemento a_{n1} e quindi occorre combinare l'ultima riga con la prima per un totale di $2(n-1)+1 = 2n-1$.

Dopo il primo passo, ogni colonna dalla seconda fino alla $\frac{n-1}{2} - 1 = \frac{n-3}{2}$ ha due elementi diversi da zero sotto la diagonale. Per ciascuno occorrono 6 operazioni, per un totale di $6(\frac{n-3}{2}) = 3(n-3)$.

Dopo questa fase è sufficiente eliminare gli ultimi elementi non nulli sull'ultima riga e sulle colonne da $\frac{n-1}{2}$ a $n-1$ per ciascuno è sufficiente un'operazione per un costo di $\frac{n-1}{2}$.

Il costo totale è dunque

$$C(n) = 2(n-1) + 3(n-3) + \frac{n-1}{2} = \frac{11}{2}n - \frac{21}{2} \approx \frac{11}{2}n = O(n).$$

Le matrici L e U sono graficamente

$$L = \begin{bmatrix} * & & & & & & \\ & * & & & & & \\ & & * & & & & \\ & & & * & & & \\ & & * & & * & & \\ & * & & & & * & \\ * & * & * & * & * & * & * \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} * & * & * & * & * & * & * \\ & * & & & & * & \\ & & * & & * & & \\ & & & * & & & \\ & & & & * & & \\ & & & & & * & \\ & & & & & & * \end{bmatrix}.$$

Commenti. Le matrici con questa struttura sono dette "a farfalla", il motivo si può facilmente intuire.

La prima parte è stata risolta da tutti, a parte qualche inevitabile errore di calcolo o qualche fraintendimento sulle operazioni da contare. La seconda parte invece è stata affrontata da pochi e solo due studenti sono riusciti a trovare la risposta completa, cioè $C(n) \approx \frac{11}{2}n$. □

Esercizio 92. (*13 luglio 2009*) Sia data una matrice $A_n = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$ con n dispari, tale che $a_{ii} = 1$ per $i \neq \frac{n+1}{2}$, $a_{\frac{n+1}{2},\frac{n+1}{2}} = 2$, $a_{i,n-i+1} = -1$ per $i = 1, \ldots, \frac{n-1}{2}$ e $a_{i,n-i+1} = 1$ per $i = \frac{n+3}{2}, \ldots, n$ e per il resto nulla. Per $n = 5$ la matrice è

$$A_5 = \begin{bmatrix} 1 & & & & -1 \\ & 1 & & -1 & \\ & & 2 & & \\ & 1 & & 1 & \\ 1 & & & & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Si dimostri che la matrice è riducibile e si descriva una permutazione che la renda triangolare superiore a blocchi;

(b) dire qual è il costo computazionale del metodo di Gauss applicato alla matrice A_n e come sono fatte L e U;

(c) (#) disegnare i cerchi di Gerschgorin di A_n e spiegare perché non è possibile utilizzare i teoremi di Gerschorin per stabilire se la matrice è invertibile o se il metodo delle potenze è applicabile;

(d) (#) trovare una permutazione che renda la matrice A_n diagonale a blocchi con blocchi di dimensione minore di 3, mostrare inoltre che A_n è invertibile e che ad essa può essere applicato il metodo delle potenze.

Esercizio 93. (*2 settembre 2009*) Sia data una matrice $2n \times 2n$ triangolare superiore a blocchi con 4 blocchi $n \times n$

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix},$$

dove le matrici A_{11}, A_{12} e A_{22} sono generiche.

(a) Si dimostri che A ammette fattorizzazione LU se e solo se A_{11} e A_{22} ammettono fattorizzazione LU;

(b) si calcoli il costo computazionale (asintotico) del metodo di Gauss applicato alla matrice A e lo si confronti con il costo del metodo di Gauss applicato a una generica matrice $2n \times 2n$;

(c) si dica come sono fatte L e U;

(d) si trovi un algoritmo per il calcolo del determinante di A che abbia un costo computazionale asintotico pari a $4n^3/3$ operazioni aritmetiche.

Nel caso in cui si abbia difficoltà nel lavorare con matrici generiche si può considerare un caso specifico con $n = 2$ (in tal caso l'esercizio vale la metà).

Soluzione. (a) Detti A_k i minori principali di testa di A si ha che essi coincidono con i minori principali di testa di A_{11} per $k \leq n$, mentre per $k > n$ sono matrici triangolari superiori a blocchi del tipo

$$A_k = \begin{bmatrix} A_{11} & * \\ 0 & M_k \end{bmatrix}, \quad k > n.$$

dove M_k è un minore principale di testa di A_{22}. Ora, poiché $\det(A_k) = \det(A_{11})\det(M_k)$ ne segue che $\det(A_k) \neq 0$ se e solo se $\det(M_k) \neq 0$ e $\det(A_{11}) \neq 0$.

(b) Il costo per una generica matrice $2n \times 2n$ è $\frac{2}{3}(2n)^3 = \frac{16}{3}n^3$.

Sfruttando la struttura al passo 1 occorre eliminare $n-1$ elementi della prima colonna di A e quindi il costo è di $2(n-1)(2n-1)$ operazioni, al passo $1 < k \leq n$ il costo è $2(n-k)(2n-k)$ il costo totale dei primi n passi è quindi $\sum_{k=1}^{n} 2(n-k)(2n-k) = \sum 4n^2 - \sum 6nk + \sum 2k^2 = 4n^3 - \frac{6}{2}n^3 + \frac{2}{3}n^3 = \frac{5}{3}n^3$. Gli ultimi n passi coincidono con l'algoritmo di Gauss applicato alla matrice A_{22} e quindi costano $\frac{2}{3}n^3$.

In totale abbiamo un costo di $\frac{7}{3}n^3$ ops che è molto meno del costo generico che è $\frac{16}{3}n^3$.

(c) ...

(d) Utilizzando l'algoritmo di Gauss strutturato del punto (b) si avrebbe un costo pari a $\frac{7}{3}n^3$. Un modo più veloce consiste nell'osservare che $\det(A) = \det(A_{11})\det(A_{22})$ poiché A è triangolare superiore a blocchi. Il calcolo dei due determinanti può essere effettuato con il metodo di Gauss che ha un costo pari a $\frac{2}{3}n^3$ per ognuna per un totale di $\frac{4}{3}n^3$ operazioni. □

Esercizio 94. (*18 dicembre 2009 - Compitino*) Dati

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 18 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ -2 \\ 5 \\ 17 \end{bmatrix}.$$

(a) Sapendo che la sottomatrice formata dalle ultime 4 righe e colonne (il minore principale di coda di ordine 4) è invertibile, dimostrare che la matrice A è invertibile e ammette fattorizzazione LU;

(b) si calcoli la fattorizzazione LU di A e si risolva il sistema lineare $Ax = b$ scrivendo esplicitamente L, U e la soluzione x;

(c) si consideri la seguente generalizzazione: sia $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$ una matrice tale che $a_{ij} = 0$ per $i > j$ e $(i,j) \neq (n, n-1)$ (cioè ha elementi nulli sotto la diagonale tranne il secondo elemento dell'ultima riga). In particolare: utilizzando la struttura si calcoli il costo computazionale della fattorizzazione LU (o se ne dia una stima asintotica), e si descriva come sono fatte L e U.

(d) si dica come cambiano le risposte se l'elemento nullo è il terzo dell'ultima riga (per $n > 3$).

Soluzione. (a) La matrice A è triangolare superiore a blocchi, quindi è invertibile se e solo se sono invertibili i blocchi diagonali e cioè a_{11} (che è invertibile perché non è 0) e il minore di coda di ordine 4. Alternativamente si poteva ragionare sui determinanti, osservando che $\det(A) = a_{11}\det(B)$ dove B è il minore di coda di ordine 4.

Per provare che la fattorizzazione LU esiste occorre ancora provare che i minori principali di testa sono tutti invertibili, ma i essi sono tutte matrici triangolari con elementi non nulli sulla diagonale.

(b)

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 12 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(c) Il primo passo del metodo di Gauss non è necessario. Al secondo passo occorre eliminare l'elemento a_{n2} e questo richiede una divisione, $n-2$ moltiplicazioni (sono gli elementi della prima riga dal terzo in poi che vengono moltiplicati per ℓ_{2n} e infine 1 somma, perché l'ultimo elemento della riga n è non nullo), in totale n ops. Si osservi che in questo modo la riga n diventa non nulla (nel caso peggiore) a partire dal terzo elemento in poi.

Dal terzo passo in poi va eliminato un solo elemento per colonna. Per esempio al terzo passo è richiesta una divisione e $2(n-3)$ operazioni. Al passo k sono richieste $1+2(n-k)$ ops e si prosegue fino al passo $n-1$.

In totale il costo computazionale asintotico, in termini di operazioni aritmetiche, sarà

$$C(n) = n + \sum_{k=3}^{n-1} 1 + 2\sum_{k=3}^{n-1}(n-k) = n + n - 3 + 2\sum_{j=1}^{n-3} j = 2n - 3 + 2\frac{(n-3)(n-2)}{2} = n^2 - 3n + 3 \approx n^2 = O(n^2).$$

La matrice L è graficamente

$$L = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ & * & * & * & 1 \end{bmatrix},$$

mentre la matrice U è triangolare superiore piena (nel caso peggiore).

(d) Se l'elemento non nullo è il terzo dell'ultima riga è come se si applicasse l'algoritmo di Gauss a una matrice come quella del punto (c) ma di dimensione $n-1$ e quindi il costo sarà $C(n) = (n-1)^2 - 3(n-1) + 3 \approx n^2 = O(n^2)$. In sostanza, il costo asintotico non cambia. □

Commenti. Solamente uno studente ha dimostrato che la fattorizzazione LU di A esiste usando i minori, mentre la quasi totalità ha affermato che siccome A è invertibile, essa ammette fattorizzazione LU. Niente di più falso, basta prendere la matrice

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

che è invertibile ma non ammette fattorizzazione LU. Un solo studente ha trovato l'esatto costo computazionale, mentre molti hanno trovato la parte principale n^2.

Esercizio 95. (*22 gennaio 2010*) Sia data la matrice $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, tale che $a_{ij} = 3$ se $i = j$ o $j = n$, $a_{ij} = -3$ se $i > j$ e $a_{ij} = 0$ altrove (in altre parole la matrice ha tutti gli elementi della parte triangolare inferiore stretta uguali a -3, gli elementi della diagonale e dell'ultima colonna uguali a 3 e per il resto è nulla),

(a) si applichi il metodo di eliminazione di Gauss con la variante del massimo pivot parziale nel caso $n = 4$;

(b) sapendo che la matrice è invertibile, si dimostri che ammette fattorizzazione LU;

(c) si calcoli il costo computazionale della fattorizzazione LU di A o se ne dia una stima asintotica;

(d) si deduca come sono fatte L e U e si dica qual è l'elemento di massimo modulo di L e U;

(e) (#) si dica se la matrice è riducibile.

Soluzione. (a) L'esercizio è standard. L'unica accortezza risiede nel fatto che non è necessario effettuare scambi di righe.

(b) I minori principali di testa A_k per $k = 1, 2, \ldots, n-1$ sono matrici triangolari inferiori con 3 sulla diagonale e quindi tutte matrici invertibili. Sapendo che la matrice è invertibile si conclude che ammette fattorizzazione LU.

(c) Al primo passo occorre eliminare la prima colonna con un costo di tre operazioni per ogni elemento eliminato per un totale di $3(n-1)$ ops. Al secondo passo la struttura è analoga e quindi il costo è $3(n-2)$ ops. Al passo k sarè $3(n-k)$ ops.

Il costo totale è quindi

$$\sum_{k=1}^{n-1} 3(n-k) = 3\sum_{h=1}^{n-1} h = 3\frac{(n-1)n}{2} = \frac{3}{2}(n^2 - n) \approx \frac{3}{2}n^2,$$

che è $O(n^2)$.

(d) La matrice L è triangolare inferiore con tutti gli elementi sotto la diagonale diversi da zero, mentre U è una matrice triangolare superiore i cui unici elementi diversi da zero sono quelli della diagonale e dell'ultima colonna. L'elemento di massimo modulo di L è 1, mentre quello di massimo modulo di U è $3\cdot 2^{n-1}$ (si dimostra per induzione).

(e) La matrice è irriducibile in quanto fissati $1 \le i, j \le n$, un cammino da i a j è dato da $i \to n \to j$, in quanto a_{in} e a_{nj} sono diversi da zero per ogni i e j. □

Esercizio 96. (*23 febbraio 2010*) Nella grafica vettoriale è a volte necessario calcolare la soluzione di un sistema lineare in cui la matrice dei coefficienti A ha la seguente struttura: A è una matrice $n\times n$ che ha elementi non nulli sulle tre diagonali principali e inoltre l'elemento in alto a destra e quello in basso a sinistra sono non nulli (cioè $a_{ij} \ne 0$ se $i - j = -1, 0, 1$, $a_{1n}, a_{n1} \ne 0$ e il resto è nullo).

(a) si calcoli il costo computazionale (o se ne dia una stima asintotica) dell'algoritmo di Gauss applicato alla matrice A;

(b) si dica come sono fatte L e U e si calcoli il costo computazione della risoluzione del sistema $Ux = b$, per $b \in \mathbb{R}^n$ con il metodo di sostituzione all'indietro strutturato;

(c) si dica qual è il costo complessivo del calcolo della soluzione del sistema $Ax = b$;

(d) nel caso specifico della grafica vettoriale è $a_{ii} = 2$ per $i = 1, \ldots, n$, $a_{i,i+1} = a_{i+1,i} = 1/2$, per $i = 1, \ldots, n-1$ e $a_{1n} = a_{n1} = 1/2$, (#) si dimostri che questa matrice ammette fattorizzazione di Cholesky.

Se non si sa che pesci pigliare si provi a trovare la fattorizzazione LU e LL^T della matrice del punto d per $n = 4$ e si calcoli la soluzione del sistema $Ax = b$ con $b = [\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}]^T$.

Soluzione. (a) Al primo passo occorre eliminare gli elementi a_{21} e a_{n1} quindi per calcolare $A^{(2)}$ occorre sostituire alla seconda riga la somma della seconda riga con la prima moltiplicata per $-\ell_{21} = -a_{21}/a_{11}$, e all'ultima riga la somma dell'ultima riga con la prima moltiplicata per $-\ell_{n1} = -a_{n1}/a_{11}$. Ciascuna delle due combinazioni richiede 4 operazioni aritmetiche elementari: 1 per calcolare ℓ_{i1} e tre per modificare due valori. Il costo totale del primo passo è quindi di 8 ops.

La matrice ottenuta da $A^{(2)}$ eliminando la prima riga e la prima colonna (per $n > 4$) ha la stessa struttura della matrice A e quindi per ottenere la matrice $A^{(3)}$ ci vogliono sempre 8 operazioni. Il ragionamento si ripete fio alla matrice $A^{(n-2)}$. Il penultimo passo richiede 10 ops, mentre l'ultimo passo ne richiede solo 3 (si osservi che un numero finito di passi puè essere trascurato per il calcolo del costo computazionale asintotico).

Il costo asintotico totale è quindi $\sum_{i=1}^{n-3} 8 + 10 + 3 = 8n - 11 \approx 8n = O(n)$.

(b)

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & 1 & 0 \\ * & * & * & * & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} * & * & 0 & 0 & * \\ 0 & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * \end{bmatrix}.$$

La soluzione del sistema $Ux = \widetilde{b}$ con l'algoritmo di sostituzione all'indietro richiede il calcolo per $k = n, n-1, \ldots, 1$ di

$$x_k = \frac{1}{u_{kk}} \left(b_k - \sum_{j=k+1}^{n} u_{kj} x_j \right) = \frac{1}{u_{kk}} \left(b_k - u_{k,k+1} x_{k+1} - u_{kn} x_n \right),$$

dove l'ultima uguaglianza vale poichè ci sono solo tre elementi non nulli per ogni riga. Quindi il costo per il calcolo di x_k è di 5 operazioni (per $k \leq n-2$, x_n si calcola con una sola operazione e x_{n-1} con 3, ma questo non cambia il costo asintotico). Il costo asintotico totale è $C(n) = 1 + 3 + 5 \sum_{k=1}^{n-2} = 5n - 6 \approx 5n = O(n)$.

(c) La soluzione del sistema $Ax = b$ si può ottenere per esempio calcolando la fattorizzazione LU di A e poi risolvendo i due sistemi $L\widetilde{b} = b$ e $Ux = \widetilde{b}$. Il costo della fattorizzazione LU è $8n$ per il punto a, mentre il costo della soluzione del sistem $Ux = \widetilde{b}$ è $5n$, infine il costo della soluzione del sistema $L\widetilde{b} = b$ tramite la sostituzione in avanti è $4n$ poiché a ogni passo dal secondo all'ultimo ho 2 operazioni e nell'ultimo passo ne ho $2n - 1$ (questa quantità non è trascurabile, come invece accade nei casi non strutturati). Il costo asintotico complessivo è quindi $17n$.

Alla stessa conclusione si poteva arrivare considerando il costo dell'algoritmo di Gauss applicato alla matrice estesa $[A|b]$, e osservando che a ogni passo, l'aggiornamento di b richiede 4 operazione per un totale di $4n$. Come visto a lezione l'aggiornamento di b equivale alla soluzione di $L\widetilde{b} = b$.

□

Esercizio 97. (*24 marzo 2010*) Sia A una matrice diagonale. Si dica sotto quali condizioni ammette fattorizzazione LU, si scriva la sua fattorizzazione LU e si scriva un programma in pseudocodice che risolva il sistema lineare $Ax = b$ al variare di b, dopo aver calcolato il costo computazionale della soluzione del sistema $Ax = b$.

Soluzione. La matrice A ammette fattorizzazione LU se e solo se gli elementi sulla diagonale sono tutti non nulli, in questo caso L è la matrice identità e $U = A$, per risolvere il sistema si può usare un algoritmo che richiede n operazioni, più precisamente:

```
for k=1:n
    x_k=b_k/a_{kk}
end
```

□

Esercizio 98. (*29 giugno 2010*) Sia $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ con $n > 3$ una matrice *pentadiagionale* cioè tale che i suoi elementi a_{ij} sono nulli quando $|i-j| > 2$ (in altre parole è tutta nulla escluse eventualmente la diagonale principale e le due diagonali sopra o sotto di essa). Un esempio è dato da

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 6 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \end{bmatrix}.$$

(a) (#) Si esibisca un esempio di matrice pentadiagonale riducibile;

(b) supponendo che la fattorizzazione LU di A esista, si dica qual è il costo asintotico necessario per ottenere questa fattorizzazione se si sfrutta la struttura e si dica che struttura hanno L e U;

(c) si dica qual è il costo asintotico dell'algoritmo di sostituzione all'indietro per la risoluzione del sistema lineare $Ux = \widetilde{b}$ con U come al punto b e sfruttando la struttura;

(d) si calcoli il costo asintotico totale del calcolo della soluzione del sistema lineare $Ax = b$ con A pentadiagonale (attenzione: il costo per ottenere $\widetilde{b}$ da b non è trascurabile!).

In caso di difficoltà si risolva solamente il sistema lineare $Ax = b$ con A come nell'esempio e $b = [7\ \ 13\ \ 19\ \ 15\ \ 10]^T$.

Soluzione. (a) Un esempio è dato dalla matrice nulla.

(b) Si puè analizzare il costo del primo passo del metodo di Gauss evitando operazioni superflue: occorre calcolare due divisioni per ottenere ℓ_{21} e ℓ_{31} e poi occorre combinare le righe 2 e 3 con la prima per ciascuna delle quali vengono modificati soltanto i primi tre elementi (il primo diventa zero e non si conta). In questo modo si hanno 4 somme e 4 moltiplicazioni. Il totale delle operazioni al primo passo è 10.

A questo punto si osserva che al secondo passo bisogna lavorare con una sottomatrice che è ancora pentadiagonale e quindi il costo resta invariato. Per induzione si ottiene $C(n) \approx 10n$. Si puè anche calcolare il costo esatto, osservando che la struttura pentadiagonale si mantiene fino al passo $n-2$, mentre al passo $n-1$ si fanno 3 operazioni, da cui $C(n) = 10(n-2) + 3 = 10n - 17$.

Le strutture di L e U sono rappresentate qui sotto

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & 1 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & 1 & 0 & 0 \\ 0 & * & * & 1 & 0 \\ 0 & 0 & * & * & 1 \end{bmatrix}, \qquad U = \begin{bmatrix} * & * & * & 0 & 0 \\ 0 & * & * & * & 0 \\ 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * \end{bmatrix}.$$

(c) Il costo asintotico $B(n)$ della sostituzione all'indietro strutturata si ottiene osservando che la formula che determina l'algoritmo di sostituzione all'indietro si semplifica per $k = n-2, \ldots, 1$

$$x_k = \frac{1}{u_{ii}}\left(\widetilde{b}_i - \sum_{k=i+1}^{n} u_{ik}x_k\right) = \frac{1}{u_{ii}}\left(\widetilde{b}_i - \sum_{k=i+1}^{i+2} u_{ik}x_k\right) = \frac{1}{u_{ii}}\left(b_i - u_{i,i+1}x_{i+1} - u_{i,i+2}x_{i+2}\right).$$

E quindi ognuna di queste quantitè viene calcolata con 5 operazioni. Il costo totale è dunque $B(n) \approx 5n$.

(d) Il costo totale puè essere ottenuto sommando il costo della fattorizzazione LU, il costo del calcolo di $\widetilde{b}$ da b e il costo della sostituzione all'indietro. Il primo e l'ultimo sono giè stati calcolati.

Il costo del calcolo di $\widetilde{b}$ da b si puè ottenere analizzando il metodo di Gauss applicato alla matrice $[A|b]$ e osservando che ad ogni passo si fanno 4 operazioni sugli elementi di b e quindi il costo asintotico totale è $D(n) \approx 4n$ (allo stesso risultato si poteva arrivare considerando il costo della sostituzione in avanti per il calcolo di $L\widetilde{b} = b$).

In definitiva il costo asintotico totale per trovare la soluzione del sistema è $10n + 5n + 4n = 19n$.

Nel caso speciale i risultati sono

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad x = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

□ *Commenti.* Come spesso accade, molti hanno concluso che ogni matrice pentadiagonale è irriducibile, supponendo che gli elementi delle cinque diagonali principali fossero tutti diversi da 0. In realtà non è così (si legga bene la definizione).

Esercizio 99. (*15 luglio 2010*) Si trovi la fattorizzazione LU della matrice

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & \arctan(0) \\ 5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 10 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 5 & -1 & 3 & 2 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix},$$

risolvendo congiuntamente il sistema $Ax = b$ dove $b = [5\ 4\ 12\ 7\ 6]^T$.

Si trovi un algoritmo per il calcolo della fattorizzazione LU di una matrice triangolare inferiore con costo $O(n^2)$ e possibilmente con costo asintotico $n^2/2$.

Esercizio 100. (*13 gennaio 2011*) Sia data la matrice A di dimensione $2n$, con $n > 1$ diagonale a blocchi, con n blocchi sulla diagonale, $A_1, \dots, A_n$, tutti di dimensione 2:

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_n \end{bmatrix}.$$

(a) (#) Si dimostri che la matrice A è riducibile;

(b) si dimostri che esiste la fattorizzazione LU di A se e solo se esiste la fattorizzazione LU di A_i per $i = 1, \dots, n$;

(c) si descriva un algoritmo per la fattorizzazione LU di A che abbia un costo asintotico lineare in n, dandone un'implementazione (in pseudocodice o in un qualsiasi linguaggio di programmazione);

(d) si calcoli il costo asintotico dell'algortimo del punto (a);

(e) si calcoli il costo asintotico della soluzione del sistema $Ax = b$ con $b \in \mathbb{C}^{2n}$, sfruttando i risultati precedenti.

In caso di difficoltà, siano

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & & & & \\ 4 & 1 & & & & \\ & & 2 & 1 & & \\ & & 1 & 2 & & \\ & & & & 2 & -1 \\ & & & & 4 & 0 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 7 \\ 6 \\ 4 \\ 5 \\ 3 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

Si calcoli la fattorizzazione LU di A e la soluzione del sistema $Ax = b$.

Esercizio 101. (*3 febbraio 2011*) Sia data la matrice $(a_{ij})_{i,j=1,\dots,n} = A_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tale $a_{ij} = i + j$

(a) Si scirivano A_1, A_2 e A_3 (cioè le matrici 1×1, 2×2 e 3×3 che verificano questa proprietà);

(b) si dica se per A_1, A_2 e A_3 esistono la fattorizzazione LU (#) e/o di Cholesky e in tal caso calcolarle;

(c) si dica se esiste la fattorizzazione LU di A_n per n generico;

(d) (#) si dica se A_n è definita positiva per n generico.

Esercizio 102. (*25 febbraio 2011*) Sia data la matrice $A_n = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ definita come $a_{ij} = i$ per $i \geq j$ e $a_{ij} = 0$ per $i < j$, cioè

$$A_n = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ 2 & 2 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ n & n & \cdots & n \end{bmatrix}.$$

Si consideri solo il caso in cui $n > 1$.

(a) (#) Si dimostri che il metodo delle potenze applicato alla matrice A_n converge e si stimi il parametro di convergenza locale (si possono trovare gli autovalori di A_n);

(b) si calcoli la soluzione del sistema

$$A_3 \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 9 \end{bmatrix},$$

utilizzando il metodo di Gauss con la variante del massimo pivot parziale,

(c) si calcoli la soluzione del sistema del punto (b) con il metodo di sostituzione in avanti.

Esercizio 103. (*23 giugno 2011*) Una matrice $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, con $n > 2$, è detta *antitridiagonale* se $a_{ij} = 0$ per $i + j < n$ e per $i + j > n + 2$ (cioè la matrice tale che gli unici elementi non nulli sono sull'antidiagonale principale e sulle due diagonali ad essa adiacenti).

(a) (#) Trovare un esempio di matrice antitridiagonale riducibile e uno di matrice tridiagonale irriducibile;

(b) dire se il metodo di Gauss è applicabile a una matrice antitridiagonale;

(c) trovare un algoritmo che calcoli il prodotto Ab, dove A è una matrice antitridiagonale e b un vettore, che sfrutti la struttura, calcolarne il costo computazionale e darne un'implementazione in pseudocodice;

(d) trovare un algoritmo che calcoli la soluzione del sistema lineare $Ax = b$, dove A è una matrice antitridiagonale e b è un vettore, e che abbia costo computazionale asintotico lineare (cioè $O(n)$).

Esercizio 104. (*15 settembre 2011*) Sia data la struttura di matrici $\mathcal{S} = \{(a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n} : a_{ij} = 0,\ i+j > n+1\}$. In altre parole, $\mathcal{S}$ è l'insieme delle matrici che sono nulle sotto la diagonale secondaria. Ad esempio, per $n = 4$ una matrice in $\mathcal{S}$ ha la forma

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 \\ a_{41} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(a) Trovare un algoritmo che calcoli il prodotto Ab, dove $A \in \mathcal{S}$ e b è un vettore, che sfrutti la struttura, calcolarne il costo computazionale e darne un'implementazione in pseudocodice;

(b) trovare un algoritmo che calcoli la soluzione del sistema lineare $Ax = b$, dove $A \in \mathcal{S}$, b è un vettore, e che abbia costo computazionale asintotico $O(n^2)$;

(c) (#) descrivere l'insieme delle matrici riducibili e appartenenti a $\mathcal{S}$;

(d) trovare un algoritmo che calcoli il determinante di una matrice appartenente a $\mathcal{S}$ e con costo computazionale asintotico $O(n)$.

In alternativa, in caso di difficoltà, descrivere un algoritmo che per $n = 3$ calcoli il prodotto di una matrice $A \in \mathcal{S}$ per un vettore b con 9 operazioni, e un algoritmo che calcoli la soluzione del sistema lineare $Ax = b$ con 9 operazioni. Trovare il determinante di A.

Esercizio 105. (*29 settembre 2011*) Sia dato l'insieme $\mathcal{S}$ delle matrici a X, cioè delle matrici $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tali che $a_{ij} = 0$ per $i \neq j$ e $i \neq n - j + 1$ (che sono nulle al di fuori della diagonale e dell'antidiagonale).

(a) Trovare un algoritmo che calcoli il prodotto Ab, dove $A \in \mathcal{S}$ e b è un vettore, che sfrutti la struttura, calcolarne il costo computazionale e darne un'implementazione in pseudocodice;

(b) trovare una versione dell'algoritmo di Gauss che sfrutti la struttura, calcolarne il costo computazionale e darne un'implementazione;

(c) dire qual è la struttura della matrice U ottenuta all'ultimo passo del metodo di Gauss e trovare una versione dell'algoritmo di sostituzione all'indietro che risolva il sistema $Ux = \widetilde{b}$ con non più di 2n operazioni aritmetiche elementari.

In alternativa, in caso di difficoltà, risolvere il problema per la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \widetilde{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 12 \\ -1 \\ 16 \\ 8 \end{bmatrix},$$

Esercizio 106. (*1 febbraio 2012*) Sia data la matrice $A_n \in \mathbb{C}^{n\times n}$ le cui prime $n-1$ righe coincidono con le prime $n-1$ righe dell'identità e l'elemento dell'ultima riga $a_{nj} = (-1)^{j+1}2^j$, cioè $a_{n1} = 2$, $a_{n2} = -4$, $a_{n3} = 8$, e così via. Ad esempio, per $n = 4$,

$$A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & 8 & -16 \end{bmatrix}$$

(a) Si descriva un algoritmo che calcoli la soluzione del sistema lineare $A_n x = b$ dove $b \in \mathbb{C}^n$ eseguendo non più di $2n$ operazioni aritmetiche;

(b) dire qual è la fattorizzazione LU di A_n (cioè dire quali sono L e U);

(c) scrivere la matrice $A_n^{(2)}$ ottenuta applicando un passo del metodo di Gauss con la variante del massimo pivot parziale alla matrice A_n e mostrare che il minore di coda di ordine $n-1$ di $A_n^{(2)}$ è A_{n-1};

(d) dire qual è il costo computazionale del metodo di eliminazione di Gauss con la variante del massimo pivot parziale applicato alla matrice A_n se si sfrutta la struttura (cioè se non si eseguono moltiplicazioni per 0 e somme con 0) e darne un'implementazione in pseudocodice o in un qualsiasi linguaggio di programmazione;

(e) dire qual è il costo computazionale della risoluzione del sistema lineare $A_n x = b$, dove $b \in \mathbb{C}^n$, con il metodo di eliminazione di Gauss con la variante del massimo pivot parziale;

(f) (#) dire se la matrice A_n è irriducibile;

(g) (#) dire se il metodo delle potenze è applicabile alla matrice A_n e trovare un autovettore multiplo del limite.

In alternativa, in caso di difficoltà, trovare la soluzione del sistema $A_4 x = b$, dove $b = [2 \;\; 3 \;\; 4 \;\; 5]^T$ con il metodo di Gauss e il metodo di Gauss con variante del massimo pivot parziale e si risponda alle domande (b), (f) e (g) per A_4.

Esercizio 107. *(13 aprile 2012)* Al variare dei parametri $a, b, c, d \in \mathbb{R}$,

$$A = \begin{bmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{bmatrix}$$

si dica

(a) per quali valori dei parametri il metodo di Gauss applicato alla matrice A si arresta al primo, al secondo o al terzo passo;

(b) nel caso in cui il metodo di Gauss sia applicabile trovare la fattorizzazione LU di A, scrivendo esplicitamente L e U;

(c) si dica se è necessario fare scambi di righe nella variante del massimo pivot;

(d) (#) si dica per quali valori dei parametri la matrice A è definita positiva e in tal caso si trovi la fattorizzazione di Cholesky.

In caso di difficoltà risolvere i punti (b), (c) e (d) con i dati $a = 1, b = 2, c = 3, d = 4$.

Soluzione. (a-c) Applicando il metodo di Gauss

$$A_1 = \begin{bmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{bmatrix} \to A_2 = \begin{bmatrix} a & a & a & a \\ 0 & b-a & b-a & b-a \\ 0 & b-a & c-a & c-a \\ 0 & b-a & c-a & d-a \end{bmatrix} \to$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} a & a & a & a \\ 0 & b-a & b-a & b-a \\ 0 & 0 & c-b & c-b \\ 0 & 0 & c-b & d-b \end{bmatrix} \to U = A_4 = \begin{bmatrix} a & a & a & a \\ 0 & b-a & b-a & b-a \\ 0 & 0 & c-b & c-b \\ 0 & 0 & 0 & d-c \end{bmatrix}.$$

con

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Quindi il metodo si arresta al primo passo se $a = 0$, al secondo passo se $b = a \neq 0$, al terzo passo se $c = b$ e $b \neq a$, con $a \neq 0$. Non è necessario fare scambi di righe nel caso in cui si applichi la variante del massimo pivot.

(d) La matrice è simmetrica, perché sia definita positiva è sufficiente che gli elementi sulla diagonale di U siano positivi e quindi $a > 0$, $b > a$, $c > b$ e $d > c$ o più semplicemente $d > c > b > a > 0$. □

Esercizio 108. *(13 aprile 2012)* Al variare dei parametri $a, b, c, d \in \mathbb{R}$,

$$A = \begin{bmatrix} a & b & a & a \\ a & c & c & b \\ a & c & d & d \\ a & c & d & b \end{bmatrix}$$

si dica

(a) per quali valori dei parametri il metodo di Gauss applicato alla matrice A si arresta al primo, al secondo o al terzo passo;

(b) nel caso in cui il metodo di Gauss sia applicabile trovare la fattorizzazione LU di A, scrivendo esplicitamente L e U;

(c) si dica se è necessario fare scambi di righe nella variante del massimo pivot;

(d) (#) si dica per quali valori dei parametri la matrice A è definita positiva.

In caso di difficoltà risolvere i punti (b), (c) e (d) con i dati $a = 1, b = 2, c = 3, d = 4$.

Soluzione. (a-c) Applicando il metodo di Gauss

$$A_1 = \begin{bmatrix} a & b & a & a \\ a & c & c & b \\ a & c & d & d \\ a & c & d & b \end{bmatrix} \to A_2 = \begin{bmatrix} a & b & a & a \\ 0 & c-b & c-a & b-a \\ 0 & c-b & d-a & d-a \\ 0 & c-b & d-a & b-a \end{bmatrix} \to$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} a & b & a & a \\ 0 & c-b & c-a & b-a \\ 0 & 0 & d-c & d-b \\ 0 & 0 & d-c & 0 \end{bmatrix} \to U = A_4 = \begin{bmatrix} a & b & a & a \\ 0 & c-b & c-a & b-a \\ 0 & 0 & d-c & b-d \\ 0 & 0 & 0 & b-d \end{bmatrix}.$$

con

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Quindi il metodo si arresta al primo passo se $a = 0$, al secondo passo se $c = b$ con $a \neq 0$, al terzo passo se $d = c$ con $c \neq b$ e $a \neq 0$. Non è necessario fare scambi di righe nel caso in cui si applichi la variante del massimo pivot.

(d) Perché la matrice sia simmetrica occorre che $b = a$ e $b = c$, in questi casi la matrice è singolare e quindi non può essere definita positiva.

□

Esercizio 109. *(13 aprile 2012)* Al variare dei parametri $a, b, c, d \in \mathbb{R}$,

$$A = \begin{bmatrix} a & a & a & a \\ a & c & b & c \\ a & c & d & b \\ a & c & d & b \end{bmatrix}$$

si dica

(a) per quali valori dei parametri il metodo di Gauss applicato alla matrice A si arresta al primo, al secondo o al terzo passo;

(b) nel caso in cui il metodo di Gauss sia applicabile trovare la fattorizzazione LU di A, scrivendo esplicitamente L e U;

(c) si dica se è necessario fare scambi di righe nella variante del massimo pivot;

(d) (#) si dica per quali valori dei parametri la matrice A è definita positiva.

In caso di difficoltà risolvere i punti (b), (c) e (d) con i dati $a = 1, b = 2, c = 3, d = 4$.

Soluzione. (a-c) Applicando il metodo di Gauss

$$A_1 = \begin{bmatrix} a & a & a & a \\ a & c & b & c \\ a & c & d & b \\ a & c & d & b \end{bmatrix} \to A_2 = \begin{bmatrix} a & a & a & a \\ 0 & c-a & b-a & c-a \\ 0 & c-a & d-a & b-a \\ 0 & c-a & d-a & b-a \end{bmatrix} \to$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} a & a & a & a \\ 0 & c-a & b-a & c-a \\ 0 & 0 & d-b & b-c \\ 0 & 0 & d-b & b-c \end{bmatrix} \to U = A_4 = \begin{bmatrix} a & a & a & a \\ 0 & c-a & b-a & c-a \\ 0 & 0 & d-b & d-c \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

con

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Quindi il metodo si arresta al primo passo se $a = 0$, al secondo passo se $c = a \neq 0$, al terzo passo se $d = b$, $c \neq a$ e $a \neq 0$. Non è necessario fare scambi di righe nel caso in cui si applichi la variante del massimo pivot.

(d) La matrice non può essere definita positiva poiché è singolare. □

Esercizio 110. *(10 settembre 2013)* Sia data la matrice $A_n \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tale che $a_{ij} = \min\{i, j\}$. Per esempio, nel caso $n = 4$ abbiamo

$$A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

(a) Calcolare la fattorizzazione LU di A_4;

(b) calcolare il determinante di A_4;

(c) calcolare la soluzione del sistema $A_4x = b$, con $b = [2\ \ 3\ \ 3\ \ 3]^T$;

(d) generalizzare i risultati precedenti al caso n qualsiasi con $b = [2\ \ 3\ \cdots\ 3]^T$.

Esercizio 111. *(27 febbraio 2013)* Sia data la matrice

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ \beta & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix},$$

con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

(a) Si dica per quali valori di α e β l'algoritmo di Gauss applicato ad A ha breakdown; negli altri casi, applicando l'algoritmo di Gauss, si dica qual è la matrice U della fattorizzazione LU di A e si risolva il sistema lineare $Ax = b$, con

$$b = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ -\alpha \end{bmatrix};$$

si dica, infine quante operazioni sono necessarie per calcolare x;

(b) (#) si dica per quali valori di α e β la matrice A è definita positiva e, in tal caso, si scriva la sua fattorizzazione di Cholesky;

(c) si dica per quali valori di α e β il problema lineare dei minimi quadrati con dati A e b come nel punto (a) ammette soluzione unica e in tal caso trovarla;

(d) si risponda alle domande precedenti per la matrice $A = (a_{ij})$ di dimensione $n \geq 2$, sulla cui diagonale c'è il numero α, al di fuori della quale è nulla, eccetto eventualmente gli elementi $a_{12} = a_{21} = \beta$; una rappresentazione di tale matrice e una generalizzazione del termino noto b sono date da

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta & 0 & \cdots & 0 \\ \beta & \alpha & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & \vdots & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ -\alpha \\ \vdots \\ -\alpha \end{bmatrix};$$

(e) si fornisca un algoritmo che calcoli in modo efficiente il prodotto Av, con A come nel punto (d) e $v \in \mathbb{R}^n$ vettore generico e se ne valuti il costo computazionale.

(Nota: se si risolve il punto (d), si acquista anche il punteggio dato dai punti (a), (b) e (c), senza bisogno di risolverli a parte.)

Esercizio 112. Si trovino i valori dei parametri reali $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$ tali che il metodo di Gauss sia applicabile alla matrice

$$\begin{bmatrix} a & 1 & b \\ 1 & 1 & c \\ d & e & f \end{bmatrix}.$$

Soluzione. Occorre e basta che i due minori principali di testa siano invertibili. Si ha $\det M_1 = a$ e $\det(M_2) = a - 1$ per cui il metodo di Gauss è applicabile se e solo se $a \neq 0, 1$ e per ogni valore degli altri parametri. □

Esercizio 113. Si trovino i valori del parametro reale $a \in \mathbb{R}$ affinché il metodo di Gauss sia applicabile alla matrice

$$\begin{bmatrix} a & a & 0 & 1 \\ 1 & a & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Esercizio 114. Sia data la matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Si dica per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ il metodo di Gauss non è applicabile alla matrice A, specificando a che passo si arresta. Si dica inoltre per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ è necessario scambiare due righe nell'algoritmo di Gauss con la variante del massimo pivot parziale.

Esercizio 115. Sia data la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a & 0 \\ a & 1 & a \\ 0 & a & 1 \end{bmatrix}.$$

Si dica per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ è necessario scambiare due righe al primo o al secondo passo dell'algoritmo di Gauss con la variante del massimo pivot parziale applicato ad A.

Esercizio 116. Sia data la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & b & 0 \\ a & 1 & b \\ 0 & a & 1 \end{bmatrix}.$$

Si dica per quali valori di $a, b \in \mathbb{R}$ il metodo di Gauss è applicabile alla matrice A, trovando esplicitamente una coppia di valori per cui il metodo è applicabile e una coppia per cui non lo è. Si disegni poi nel piano l'insieme di tutte le coppie (a, b) tali che il metodo di Gauss sia applicabile.

Esercizio 117. Sia data la matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ a & 1 & a & 0 \\ 0 & a & 1 & a \\ 0 & 0 & a & 1 \end{bmatrix}.$$

Si dica per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ il metodo di Gauss non è applicabile alla matrice A. Si dica per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ si arresta al primo, al secondo o al terzo passo, rispettivamente.

Esercizio 118. Sia data la matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & b & 0 & 0 \\ b & 1 & a & 0 \\ 0 & a & 1 & \pi \\ 0 & 0 & 0.12315721579 & 1 \end{bmatrix}.$$

Si dica per quali valori di $a, b \in \mathbb{R}$ si arresta al primo, al secondo o al terzo passo, rispettivamente. Si raffiguri nel piano (a, b) l'insieme dei valori per i quali il metodo di Gauss non è applicabile alla matrice A.

Esercizio 119. (*15 giugno 2015*) Sia $\mathcal{S}_n = \{A \in \mathbb{K}^{n\times n} \ : \ a_{ij} = 0, \text{ per } i > j+1\}$ l'insieme delle matrici di Hessenberg inferiori, che possono essere rappresentate graficamente come

$$\begin{bmatrix} * & * & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & 0 & 0 \\ * & * & * & * & 0 \\ * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \end{bmatrix}.$$

(a) Si dica se $\mathcal{S}_n$ è uno spazio vettoriale e se ne calcoli la dimensione.

(b) Assumendo che il metodo di Gauss sia applicabile alla matrice $A \in \mathcal{S}_n$, si spieghi come è possibile eseguire il primo passo del metodo di Gauss con $O(n)$ operazioni, precisando qual è la struttura della matrice A_2.

(c) Si spieghi come è possibile applicare il metodo di Gauss con $O(n^2)$ operazioni.

(d) Dopo aver spiegato qual è la struttura della matrice $U = A_n$, si scriva in pseudocodice una variante del metodo di sostituzione all'indietro del sistema $Ux = \widetilde{b}$ che calcoli la soluzione in $O(n)$ ops.

(e) Dire qual è il costo computazionale asintotico totale necessario al calcolo della soluzione del sistema $Ax = b$, con $A \in \mathcal{S}_n$.

In caso di difficoltà estreme si calcoli la fattorizzazione LU della matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}.$$

Esercizio 120. (*6 luglio 2015*) Sia data la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix},$$

con $a \in \mathbb{R}$ e si consideri il metodo di Gauss applicato alla matrice A.

(a) Si dica per quali valori di a il metodo si arresta al primo passo.

(b) Si dica per quali valori di a il metodo si arresta al secondo passo.

(c) Si dica per quali valori di a il metodo si arresta al terzo passo.

(d) Si dica per quali valori di a il metodo si arresta al quarto passo.

Soluzione. Siano M_1, M_2, M_3 e M_4 i minori principali di testa di A.
(a) Siccome $\det(M_1) = 1 \neq 0$, il metodo di Gauss non si arresta al primo passo per nessun valore di a.
(b) Siccome $\det(M_2) = 1 - a$, il metodo di Gauss si arresta al secondo passo se e solo se $1 - a = 0$, cioè per $a = 1$.
(c) Per arrivare al terzo passo occorre porre $a \neq 1$. Siccome $\det(M_3) = (a-1)^2$ è nullo se $a = 1$, il metodo non si arresterà mai al terzo passo.
(d) Per arrivare al quarto passo occore porre $a \neq 1$. Senza calcolare il determinante, ci si accorge che M_4 ha due righe uguali e quindi $\det(M_4) = 0$, quindi il metodo di Gauss si arresta al quarto passo per ogni $a \neq 1$. □

Esercizi Interpolanti

Esercizio 121. In un concorso pubblico al candidato viene richiesto di scrivere il termine successivo della seguente successione

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 2, \quad a_2 = 4,$$

la risposta attesa dalla commissione è ovviamente $a_3 = 8$, secondo l'opinione che $a_n = 2^n$ sia la successione "giusta".

(a) si trovi un polinomio di grado al più 2 tale che $p(0) = 1$, $p(1) = 2$, $p(2) = 4$;

(b) usando la legge $a_n = p(n)$ si dica quanto vale a_3;

(c) si spieghi perché esistono infiniti polinomi di grado maggiore o uguale a 3 tali che $q(0) = 1$, $q(1) = 2$, $q(2) = 4$, dedurne che si possono costruire infinite formule per cui a_n sia un polinomio di grado 3;

(d) si dica se esiste un polinomio tale che $p(n) = 2^n$ per ogni itero positivo n;

(e) se si approssima $\sqrt{8} = 2^{3/2} \approx p(3/2)$, si stimi l'errore commesso utilizzando la formula del resto (si può utilizzare la maggiorazione $\log^3 2 < 1/3$).

Soluzione. (a) Utilizzando i polinomi di Lagrange o risolvendo un opportuno sistema lineare si ottiene $p(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 1$.

(b) La nuova legge è $a_n = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n + 1$, da cui $a_3 = 7$.

(c) Assegnando un valore a caso per a_3 è sempre possibile trovare un polinomio di grado al più 3 e che verifichi le 4 condizioni $q(0) = 1$, $q(1) = 2$, $q(2) = 4$ e $q(3) = a_3$. Questi polinomi sono infiniti, in quanto ce n'è uno diverso per ogni valore di $a_3 \in \mathbb{R}$. Escluso il polinomio p del punto (a) che è di grado 2 ed è l'unico che passa per i primi tre punti, gli altri hanno grado esattamente 3 (per l'unicità di p). Ognuno di essi corrisponde a una successione diversa.

Un altro modo di vederlo è imporre ad un polinomio di grado 3 generico il passaggio per i primi tre punti e osservare che rimane un parametro libero che può assumere infiniti valori.

(d) Dato un polinomio $p(x)$, vale sempre $\lim_{n\to\infty} \frac{p(n)}{2^n} = 0$ (poiché 2^n ha ordine di infinito superiore a qualunque polinomio, cosa che si può vedere anche applicando ripetutamente il teorema di de L'Hopital, ad esempio $\lim_{n\to\infty} \frac{an^2 + bn + c}{2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2an + b}{2^n \log 2} = \lim_{n\to\infty} \frac{2a}{2^n \log^2 2} = 0$).

Se esistesse un polinomio p tale che $p(n) = 2^n$ allora si avrebbe $\lim_{n\to\infty} \frac{p(n)}{2^n} = 1$, assurdo.

(e) Si vuole approssimare $f(3/2)$ con $p(3/2)$ dove la funzione $f(x)$ è 2^x che è derivabile infinite volte su $\mathbb{R}$. Il teorema del resto ci dice che $r(x) = \pi_2(x)\frac{f'''(\xi)}{6}$ per $x, \xi \in [0, 2]$. Poiché $f'''(x) = 2^x \log^3 2$, si ha

$$|r(3/2)| = \left| \frac{3}{2}\left(\frac{3}{2} - 1\right)\left(\frac{3}{2} - 2\right)\frac{2^\xi \log^3 2}{6} \right| \leq \frac{3}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{2^2}{6}\log^3 2 \leq \frac{1}{18}.$$

□

Commenti. Lo spirito dell'esercizio era di far vedere che la domanda tipica dei concorsi "continuare la successione..." ha poco senso e qualunque siano i valori iniziali, tramite l'interpolazione polinomiale è possibile trovare infinite formule semplici che la generalizzano. Mentre in un concorso occorre dare la risposta più convenzionale.

I primi due punti non hanno creato problemi, tranne qualche raro errore di calcolo.

Il punto (d) era certamente difficile e pochi si sono cimentati, alcuni hanno scritto che un polinomio che verifica infinite condizioni deve avere grado infinito. A parte la mancanza di rigore dell'affermazione, essa è anche sbagliata in quanto per esempio il polinomio $p(x) = x$ verifica $p(n) = n$ per ogni n.

Nel punto (e) alcuni si sono confusi ed hanno pensato che la funzione da approssimare fosse $\sqrt{x}$ e non 2^x.

Esercizio 122. Sia data la funzione

$$f(x) = \frac{x}{x+1},$$

(a) si scriva il polinomio $p(x)$ di interpolazione di $f(x)$ sui nodi $x_0 = 0$, $x_1 = 1/2$, $x_2 = 1$;

(b) si dia un'espressione del resto $r(x) = f(x) - p(x)$ nell'intervallo $[0, 1]$ e una sua maggiorazione;

(c) si dica se esiste una costante K tale che $|r(x)| < K$ per ogni $x \neq -1$.

Soluzione. (a) Basta calcolare il polinomio di grado al più 2 tale che $p(0) = f(0) = 0$, $p(1) = f(1) = 1/2$ e $p(2) = f(2) = 2/3$.

(b) Il resto è $r(x) = f(x) - p(x) = \frac{x}{x+1} - p(x)$ del cui modulo è facile trovare una maggiorazione, ad esempio:

$$|r(x)| = \Big|\frac{x}{x+1} + \frac{1}{6}x^2 - \frac{2}{3}x\Big| = \frac{|x^3 - 3x^2 + 2x|}{6|x+1|} \le \frac{|x|^3 + 3|x|^2 + 2|x|}{6|x+1|} \overset{|x|\le 2, |x+1|\ge 1}{\le} \frac{24}{6} = 4.$$

(c) Poiché $\lim_{x\to -1} f(x) = \infty$ e $\lim_{x\to -1} p(x) = p(1)$ è finito, allora $\lim_{x\to -1} r(x) = \infty$ e quindi $\sup_{x\neq 1} |r(x)| = +\infty$ e non esiste una costante K tale che $|r(x)| < K$ per ogni $x \neq -1$. □

Esercizio 123. È noto che la traiettoria di un corpo in caduta libera è una parabola con la concavità rivolta verso il basso (se si trascura l'effetto dell'aria). Un tizio vuole calciare una palla attraverso due anelli allineati: il primo è posto alla distanza di 2 metri e all'altezza di 2 metri, il secondo è a distanza di 4 metri e ad altezza variabile. Prova a mettere il secondo anello a 2 metri di altezza e dopo vari tentativi ce la fa. A quel punto prova a spostare il secondo anello a un'altezza di 8 metri, non ci riesce per una buona mezz'ora e conclude che è impossibile.

(a) Trovare il polinomio di interpolazione che nei punti $x_0 = 0$, $x_1 = 2$, $x_2 = 4$, assume i valori $y_0 = 0$, $y_1 = 2$, $y_2 = d$ e dire per quali valori di d rappresenta una retta;

(b) dire qual è l'equazione della traiettoria (in un opportuno sistema di riferimento) se l'altezza del secondo anello è di 2 metri e dire a che distanza atterrerà la palla;

(c) riuscirà il tizio a lanciare la palla attraverso i due anelli se il secondo anello è posto ad un'altezza di 8 metri?

(d) si discuta la risolubilità del problema se gli anelli sono 3 e sono posti rispettivamente a 2, 4 e 6 metri di distanza e altezze variabili.

Soluzione. (a) Basta trovare il polinomio di interpolazione che è di grado al più 2 la cui espressione esplicita è $p(x) = \frac{1}{8}(d-4)x^2 + \frac{1}{4}(8-d)x$. L'equazione è una retta per $d = 4$.

(b) Si sceglie un sistema in modo che le coordinate del tizio sono $(0,0)$ e quelle degli anelli $(2,2)$ e $(4,2)$, l'equazione è quindi $y = \frac{1}{4}x(6-x)$. Il punto in cui atterrerà l'oggetto è tale che $y = 0$ e quindi è $x = 6$, che dista quindi 6 metri (come si poteva dedurre anche con considerazioni di simmetria).

(c) Non ci riuscirà perché il polinomio di interpolazione in questo caso è $y = 2x^2$, che ha la concavità rivolta verso l'alto e non corrisponde alla traiettoria di un grave.

(d) L'unico caso in cui il problema è risolubile è quello in cui i tre punti appartengono insieme all'origine a una sigola parabola. □

Esercizio 124. Sia dato il polinomio

$$p(x) = x^3 - 3x^2 + 2x.$$

(a) Si dimostri che $p(x)$ è il polinomio di interpolazione sui punti $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ o in caso contrario si trovi qual è il polinomio di interpolazione;

(b) si trovi il massimo modulo dell'errore commesso sull'intervallo $[0,2]$ approssimando la funzione nulla $f(x) \equiv 0$ con $p(x)$.

Soluzione. (a) Nonostante $p(x)$ passi per quei tre punti, non è il polinomio di interpolazione che ha grado al più 2 ed è il polinomio $p(x) \equiv 0$.

(b) Basta trovare il massimo assoluto della funzione $|p(x)|$ sull'intervallo $[0,2]$ che è $2\sqrt{3}/9$. □

Esercizio 125. Esercizio 2. [**8 punti**] Siano $x_0, x_1 \in \mathbb{R}$ punti distinti.

(a) Si dica se esiste, e in tal caso se è unico, un polinomio di grado al più 2 tale che $p(x_0) = t_0$, $p'(x_0) = t_1$ e $p''(x_0) = t_2$, per $x_0 = 3$, $t_0 = -1$, $t_1 = -1$, $t_2 = 2$;

(b) si dica se esiste, e in tal caso se è unico, un polinomio di grado al più 1 tale che $p'(x_0) = s_0$, $p(x_1) = s_1$, al variare di $s_0, s_1 \in \mathbb{R}$;

(c) si dica se esiste, e in tal caso se è unico, un polinomio di grado al più 1 tale che $p'(x_0) = w_0$, $p'(x_1) = w_1$, al variare di $w_0, w_1 \in \mathbb{R}$.

Soluzione. (a) Basta imporre le condizioni al generico polinomio di grado al più due $p(x) = ax^2 + bx + c$ ottenendo il sistema lineare:

$$\begin{cases} 9a + 3b + c = -1, \\ 6a + b = -1, \\ 2a = 2. \end{cases}$$

Chiaramante il sistema ha soluzione unica e quindi esiste un'unico polinomio di grado al più due che verifica le tre condizioni (si può anche trovare facilmente).

(b) Sia $p(x) = ax + b$ il generico polinomio di grado al più 1, imponendo le condizioni si ottiene $a = s_0$ e $ax_1 + b = s_1$, il problema quindi ha un'unica soluzione per ogni $s_0, s_1 \in \mathbb{R}$, in particolare $p(x) = s_0 x + s_1 - s_0 x_1$.

(c) Sia $p(x)$ il generico polinomio di grado al più 1, imponendo le condizioni si ottiene $a = w_0$ e $a = w_1$, quindi il problema ammette soluzione se e solo se $w_1 = w_0$. In questo caso le soluzioni sono infinite, poiché ogni polinomio del tipo $w_0 x + b$, $b \in \mathbb{R}$ risolve il problema. □

Commenti. Il primo punto, anche se non sembra, è un problema di interpolazione (di Hermite), infatti a volte si conoscono i valori di una funzione ma anche quelli di alcune sue derivate nei nodi e si vuole trovare un polinomio che coincida con f e le sue derivate fino a un opportuno ordine nei nodi.

I punti (b) e (c) erano alternativi a seconda della fila e sono stati svolti da pochissimi studenti.

Esercizio 126. Si calcoli il polinomio di interpolazione della funzione $f(x) = x^3$ sui nodi $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ e si trovino i punti dell'intervallo $[0, 2]$ in cui il modulo del resto è massimo.

Soluzione. Tramite il sistema lineare o tramite i polinomi di Lagrange (sconsigliato) si ottiene che il polinomio di interpolazione è $p(x) = 3x^2 - 2x$. Il resto è $r(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$. Il massimo di $|r(x)|$ su $[0, 2]$ può essere raggiunto in uno degli estremi o in un eventuale punto critico interno all'intervallo. Si vede subito che $r'(x) = 0$ se e solo se $x = 1 \pm \frac{1}{3}\sqrt{3}$, di questi due punti solo $\alpha = 1 - \frac{1}{3}\sqrt{3} \in (0, 2)$. Siccome il resto negli estremi è nullo, cioè $|r(0)| = 0$, $|r(2)| = 0$, se ne deduce che α è l'unico punto in cui il resto è massimo. □

Esercizio 127. Si consideri un polinomio $p(x)$ di grado 3. Dire, giustificando la risposta, se le seguenti affermazioni sono vere:

(a) fissati x_0, x_1, x_2 nodi distinti, esiste una funzione $f(x)$ continua su $\mathbb{R}$ tale che $p(x)$ sia il polinomio di interpolazione di f rispetto ai nodi x_0, x_1, x_2;

(b) fissati x_0, x_1, x_2, x_3 nodi distinti, esiste una funzione $f(x)$ continua su $\mathbb{R}$ tale che $p(x)$ sia il polinomio di interpolazione di f rispetto ai nodi x_0, x_1, x_2, x_3;

(c) fissati x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 nodi distinti, esiste una funzione $f(x)$ continua su $\mathbb{R}$ tale che $p(x)$ sia il polinomio di interpolazione di f rispetto ai nodi x_0, x_1, x_2, x_3, x_4.

Nel caso in cui tale funzione esista, si dica se è unica.

Soluzione. (a) Poiché il polinomio di interpolazione di una funzione $f(x)$ su tre nodi ha grado al più 2, non può esistere alcuna funzione il cui polinomio di interpolazione sui tre nodi è $p(x)$ (che ha grado 3).

(b) Se si pone $f(x) = p(x)$ si ha un esempio di funzione il cui polinomio di interpolazione è $p(x)$ (che è per definizione l'unico polinomio di grado al più 3 che coincide con $f(x)$ sui 4 nodi fissati). Non è l'unica funzione, infatti le soluzioni del problema sono tutte e sole le funzioni continue su $\mathbb{R}$ e che verificano le quattro condizioni $f(x_i) = p(x_i)$, per $i = 0, 1, 2, 3$.

(c) La risposta è identica al punto b con l'unica differenza che ora occorre prendere una funzione che verifica 5 condizioni.
□

Commenti. Gli studenti hanno dato risposte vaghe a questo quesito dicendo che l'unica affermazione vera fosse la b in quanto compatibile con il grado. In realtà il problema non è stato capito.

Dopo questo compito tre dei quattro rappresentanti degli studenti in consiglio di corso di laurea sono venuti a parlarmi lamentandosi che lo scritto di calcolo numerico è troppo lungo.

Esercizio 128. Si vuole approssimare la funzione $f(x) = \arctan(x)$ sull'intervallo $[-1, 1]$. Si calcoli il polinomio di interpolazione della funzione $f(x) = \arctan(x)$ rispetto ai nodi $x_0 = -1$, $x_1 = 0$ e $x_1 = 1$ e si calcoli il massimo modulo del resto sull'intervallo $[-1, 1]$ in funzione di $\gamma = \sqrt{\frac{4-\pi}{\pi}} \approx 0.52$.

Soluzione. Il polinomio è $p(x) = \frac{\pi}{4}x$, $r(x) = f(x) - p(x)$,

$$r'(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{1 + x^2}, \quad r'(x) = 0, \text{ se } \pi + \pi x^2 - 4 = 0, \ x = \sqrt{\frac{4 - \pi}{\pi}} =: \gamma \approx 0.52272320087706$$

. Il massimo è $|\frac{\pi}{4}\gamma - \arctan \gamma|$. □

Esercizio 129. Calcolare il polinomio $p(x)$ di interpolazione di $f(x) = e^{2x} - 2$ rispetto ai nodi $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ e calcolare gli zeri di $p(x)$ confrontandoli con α tale che $f(\alpha) = 0$. Si mostri graficamente che gli zeri sono a sinistra di α nella retta reale.

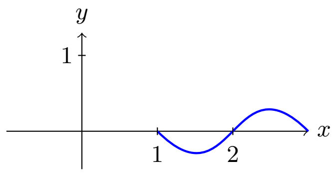
Esercizi Curvilinei

Esercizio 130. Sia data la curva di Bézier $B_{0123}(t)$ con punti di controllo

$$v_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad v_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Si calcoli $B_{0123}(1/2)$ e se ne tracci un grafico approssimativo.

Soluzione. Si ha $B_{0123}(1/2) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$, e il grafico di $B_{0123}(t)$ è



□

Esercizio 131. Si scriva l'equazione della curva di Bézier cubica $B_{0123}(t)$ con punti di controllo

$$v_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Si calcoli (anche graficamente) $B_{0123}(1/2)$.

Soluzione. Basta usare la formula $B_{0123}(t) = (1-t)^3 v_0 + 3t(1-t)^2 v_1 + 3t^2(1-t)v_2 + t^3 v_3$, per $t \in [0,1]$. Si ha

$$B_{0123}(t) = \begin{bmatrix} 6t(1-t)^2 + 12t^2(1-t) + 6t^3 \\ -6t(1-t)^2 + 6t^2(1-t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6t \\ 6t(1-t)(2t-1) \end{bmatrix}, \quad t \in [0,1],$$

da cui $B_{0123}(1/2) = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$. Si può arrivare alla stessa conclusione sfruttando la simmetria dei punti di controllo. □

Esercizio 132. Si scriva l'equazione della curva di Bézier cubica $B_{0123}(t)$ con punti di controllo

$$v_0 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Si calcoli (anche graficamente) $B_{0123}(1/2)$.

Soluzione. Si usa la formula $B_{0123}(t) = (1-t)^3 v_0 + 3t(1-t)^2 v_1 + 3t^2(1-t)v_2 + t^3 v_3$, per $t \in [0,1]$. Si ha

$$B_{0123}(t) = \begin{bmatrix} 3(1-t)^3 + 6t(1-t)^2 + 3t^2(1-t) \\ -3t(1-t)^2 + 3t^2(1-t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3(1-t) \\ 6t(1-t)(2t-1) \end{bmatrix}, \quad t \in [0,1],$$

da cui $B_3(1/2) = \begin{bmatrix} 3/2 \\ 0 \end{bmatrix}$. Si può arrivare alla stessa conclusione sfruttando la simmetria dei punti di controllo. □

Esercizio 133. Si trovi l'equazione della curva di Bézier $B(t)$ con punti di controllo

$$v_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Trovare il vettore tangente alla curva nel punto 0 (cioè per $t \to 0^+$) e mostrare che ha la stessa direzione della retta $x = 0$.

Soluzione. Sfruttando la solita formula si ottiene

$$B(t) = \begin{bmatrix} 3t^2(1-t) + t^3 \\ 3t(1-t)^2 + 3t^2(1-t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t^2(3-2t) \\ 3t(1-t) \end{bmatrix}, \quad t \in [0,1].$$

Il vettore tangente è

$$B'(t) = \begin{bmatrix} 6t(1-t) \\ 3(1-2t) \end{bmatrix}, \quad t \in (0,1).$$

e quindi $B'(0) = [0 \;\; 3]^T$ che è la direzione della retta $x = 0$. Si osservi che la funzione è definita in un intorno destro di 0 e quindi con la scrittura $B'(0)$ intendiamo la derivata destra di $B(t)$ in 0 (nel senso che $B'(0) = \lim_{h\to 0^+} \frac{B(h)-B(0)}{h}$), analogamente $B'(1)$ è la derivata sinistra. □

Esercizio 134. Si trovi l'equazione della curva di Bézier $B(t)$ con punti di controllo

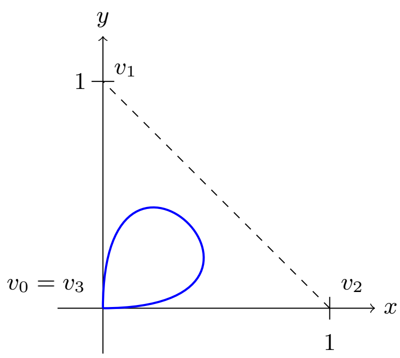
$$P_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad P_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad P_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad P_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Se ne tracci un grafico approssimativo. (#) Si scrivano le equazioni della curva ottenuta ruotando $B(t)$ di $\pi/2$ in senso orario e della curva ottenuta riflettendo $B(t)$ rispetto all'asse $x = 0$. Dimostrare che le due curve si trovano nel secondo quadrante (cioè $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x < 0, y > 0\}$. Si tratta della stessa curva?

Soluzione. Sfruttando la solita formula si ottiene

$$B(t) = \begin{bmatrix} 3t^2(1-t) \\ 3t(1-t)^2 \end{bmatrix}, \quad t \in [0,1].$$

La curva parte e termina nel punto $(0,0)$, è tangente ai due assi e si trova all'interno del triangolo di vertici $(0,0)$, $(1,0)$ e $(0,1)$.



La rotazione di angolo $\pi/2$ in senso antiorario è

$$G_{-\pi/2} = \begin{bmatrix} \cos(-\pi/2) & \sin(-\pi/2) \\ -\sin(-\pi/2) & \cos(-\pi/2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

per cui, detta $\widetilde{B}(t)$ la curva ruotata di $\pi/2$ in senso antiorario, si ha

$$\widetilde{B}(t) = G_{-\pi/2}B(t) = \begin{bmatrix} -3t(1-t)^2 \\ 3t^2(1-t) \end{bmatrix}, \quad t \in [0,1],$$

e si osserva che la prima componente è negativa e la seconda è positiva e quindi $\widetilde{B}(t)$ si trova nel secondo quadrante.

La riflessione rispetto all'asse $x = 0$ è ottenuta a partire da un vettore ortogonale all'asse, per esempio $v = [1 \;\; 0]^T$, utilizzando la formula si ha

$$P = I - 2\frac{vv^T}{v^Tv} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

dove si è usato $v^Tv = 1$. Detta $\widehat{B}(t)$ la curva riflessa, si ha

$$\widehat{B}(t) = PB(t) = \begin{bmatrix} -3t^2(1-t) \\ 3t(1-t)^2 \end{bmatrix}, \quad t \in [0,1].$$

Anche questa curva si trova nel secondo quadrante.

Le due curve non coincidono, in quanto, per esempio

$$\widetilde{B}(1/3) = \begin{bmatrix} -4/9 \\ 2/9 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} -2/9 \\ 4/9 \end{bmatrix} = \widehat{B}(1/3).$$

Tuttavia il loro supporto (cioè l'immagine della curva come sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$) è lo stesso come l'intuizione geometrica ci suggerisce. □

Esercizio 135. (*29 maggio 2015*) Si considerino i punti

$$Q_0 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, Q_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, Q_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad (1).$$

$$Q_0 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, Q_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, Q_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad (2).$$

$$Q_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, Q_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, Q_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad (3)$$

$$Q_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, Q_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, Q_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad (4).$$

(a) Si scriva l'equazione della curva di Bézier $B_{012}(t)$ relativa ai tre punti di controllo $v_0 = Q_0, v_1 = Q_1, v_2 = Q_2$, calcolando quanto vale $B_{012}(1/2)$.

(b) Si scriva l'equazione della curva di Bézier $B_{0112}(t)$ relativa ai quattro punti di controllo $v_0 = Q_0, v_1 = Q_1, v_2 = Q_1, v_3 = Q_2$, calcolando quanto vale $B_{0112}(1/2)$.

(c) Tracciare un grafico approssimativo delle curve.

(d) Si consideri la curva di Bézier $B_{01\cdots12}(t)$ relativa a $\ell+1$ punti $v_0 = Q_0$, $v_1 = Q_1, \dots, v_{\ell-1} = Q_1$ e $v_\ell = Q_2$, dire quanto vale $B_{01\cdots12}(1/2)$ e qual è il limite per ℓ che tende a infinito.

Soluzione. (a) L'esercizio è standard. La soluzione è

$$B_{012}(t) = (1-t)^2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + 2t(1-t) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t^2 \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(1-t)^2 - t^2 \\ (1-t)^2 - t^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 + 2t - 2t^2 \\ 1 - 2t \end{bmatrix}, \qquad B_{012}(1/2) = \begin{bmatrix} -1/2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(b) L'esercizio è standard. La soluzione è

$$B_{0112}(t) = (1-t)^3 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + 3t(1-t)^2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 3t^2(1-t) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t^3 \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(1-t)^3 - t^3 \\ (1-t)^3 - t^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 + 3t - 3t^2 \\ 1 - 3t + 3t^2 - 2t^3 \end{bmatrix}$$

e si ha $B_{0112}(1/2) = \begin{bmatrix} -1/4 \\ 0 \end{bmatrix}$

(d) Nel caso generale si ha

$$B_{01\dots12}(t) = (1-t)^\ell \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + t^\ell \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad B_{01\dots12}(1/2) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}^\ell - \frac{1}{2}^\ell \\ \frac{1}{2}^\ell - \frac{1}{2}^\ell \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2^{\ell-1} \\ 0 \end{bmatrix}$$

□

Esercizio 136. (*gennaio 2016*) Si scrivano le equazioni della curva di Bézier $B^{(1)}(t)$ relativa ai punti di controllo

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

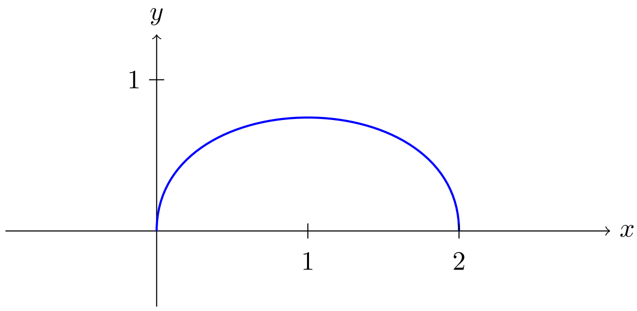
e della curva di Bézier $B^{(2)}(t)$ relativa ai punti di controllo

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

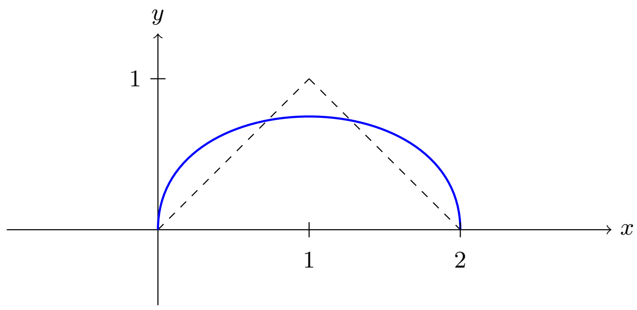
(a) Si mostri che $B^{(1)}(t)$ non può essere la curva in figura e si calcoli $B^{(1)}(1/2)$.

(b) Dopo aver mostrato che l'ascissa di $B^{(2)}(0.1)$ è minore di zero, si deduca che $B^{(2)}(t)$ non può essere la curva in figura.

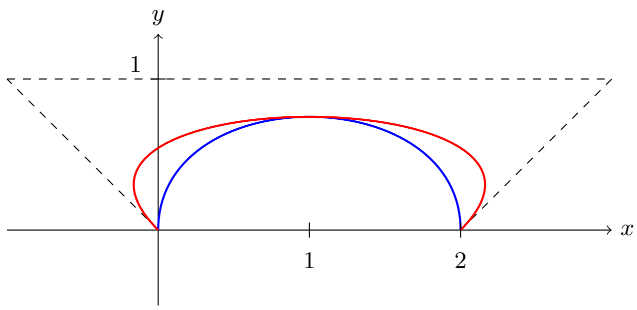
(c*) Si dica se $B^{(1)}(t)$ è una parabola.



Soluzione. (a) La curva non può essere quella nella figura sopra perché l'inviluppo convesso dei punti di controllo non contiene la curva come si vede nella figura sottostante.



(b) L'ascissa di $B^{(2)}(0.1)$ è negativa e quindi non può essere quella indicata che giace nel semipiano dei punti di ascissa non negativa $x \geq 0$. Il grafico della curva $B^{(2)}$ è il seguente



(c*) La curva $B^{(1)}(t)$ passa per i punti

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 3/4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Se la curva coincide con una parabola, la stessa parabola passerà per i tre punti sopra. La parabola di interpolazione è $p(x) = -\frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{2}x$.

Le due curve hanno un andamento qualitativo simile, per questo motivo, per mostrare la loro coincidenza occorre un'analisi quantitativa.

Se per esempio $t = 1/3$, si ottiene

$$B^{(1)}(t) = \begin{bmatrix} 20/27 \\ 2/3 \end{bmatrix}$$

Se la curva coincidesse con la parabola, si avrebbe che per $x = 20/27$, $p(x) = 2/3$, ma si può verificare facilmente che $p(20/27) \neq 2/3$.

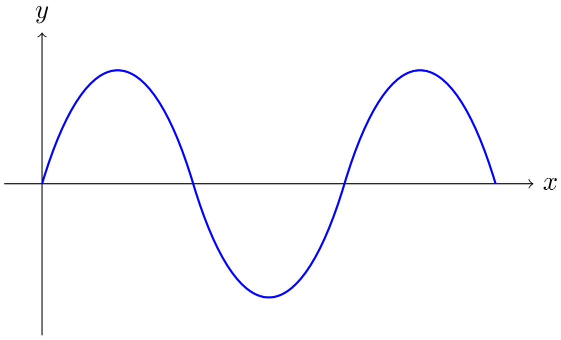
Le due curve, per $x = 20/27$ hanno diversa ordinata e quindi non coincidono. □

Esercizio 137. (*febbraio 2016*) Dopo aver scritto l'equazione della curva di Bézier relativa ai punti di controllo

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix};$$

dire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ si ha $B(\frac{1}{2}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Dire, motivando la risposta, se può esistere una curva di Bézier di grado 3 che ha il grafico in figura. (Hint: un'equazione polinomiale di grado tre ha al più tre soluzioni reali.)



Esercizio 138. (*15 giugno 2015*) Si considerino i punti

$$Q_0 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, Q_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, Q_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

(a) Si scriva l'equazione della curva di Bézier $B_{012}(t)$ relativa ai tre punti di controllo $v_0 = Q_0, v_1 = Q_1, v_2 = Q_2$, calcolando quanto vale $B_{012}(1/2)$.

(b) Si scriva l'equazione della curva di Bézier $B_{0112}(t)$ relativa ai quattro punti di controllo $v_0 = Q_0, v_1 = Q_1, v_2 = Q_1, v_3 = Q_2$, calcolando quanto vale $B_{0112}(1/2)$.

(c) Tracciare un grafico approssimativo delle curve.

(d) Si consideri la curva di Bézier $B_{01\cdots 12}(t)$ relativa a $\ell+1$ punti $v_0 = Q_0$, $v_1 = Q_1, \ldots, v_{\ell-1} = Q_1$ e $v_\ell = Q_2$, dire quanto vale $B_{01\cdots 12}(1/2)$ e qual è il limite per ℓ che tende a infinito.

Esercizio 139. (*6 luglio 2015*) Siano dati i punti

$$P_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad P_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix}, \qquad P_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Scrivere l'equazione della curva di Bézier quadratica $B_{123}(t)$ che ha come punti di controllo P_1, P_2 e P_3 e calcolare $B_{123}(1/6)$.

(b) Trovare le intersezioni della curva con gli assi (le rette di ascissa nulla e ordinata nulla).

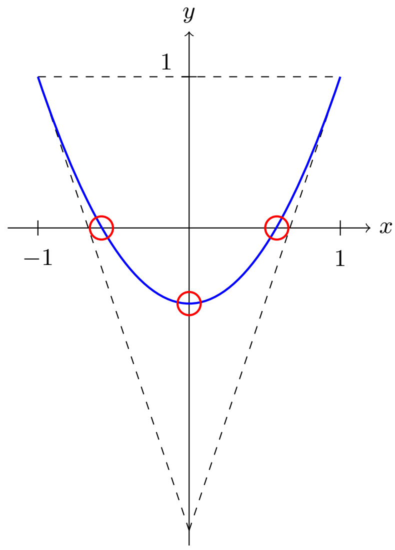
(c) Tracciare un grafico di $B_{123}(t)$ evidenziando le intersezioni con gli assi.

Soluzione. (a) L'equazione cercata è

$$B_{123}(t) = \begin{bmatrix} 2t-1 \\ 6t^2-6t+1 \end{bmatrix}.$$

(b) La curva interseca l'asse y quando $x = 0$ e quindi per $t = 1/2$, il punto di intersezione è $\begin{bmatrix} 0 \\ -1/2 \end{bmatrix}$. La curva interseca l'asse x quando $y = 0$ e quindi per $6t^2 - 6t + 1 = 0$ cioè per $t = \frac{1}{6}(3 \pm \sqrt{3})$. Si hanno due punti di intersezione $\begin{bmatrix} \pm\frac{\sqrt{3}}{3} \\ 0 \end{bmatrix}$.

(c)



□

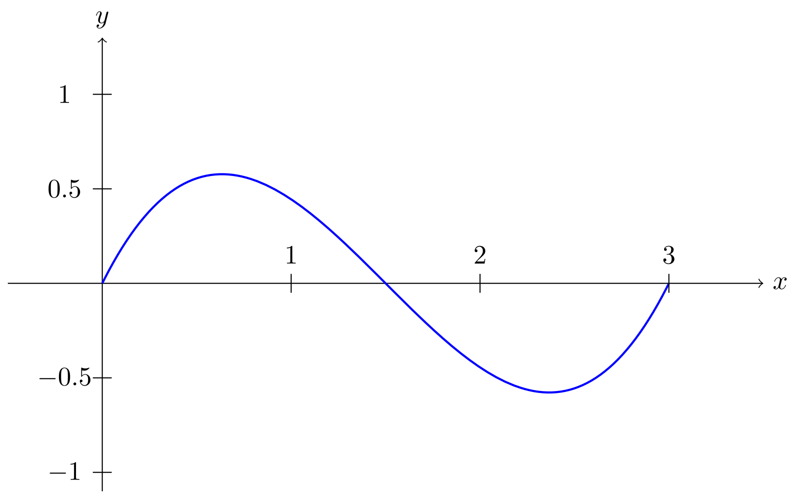
Esercizio 140. (*15 settembre 2015*) Si considerino le tre curve di Bézier corrispondenti ai seguenti punti di controllo.

(i) $P_0 = \left[\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right]$, $P_1 = \left[\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right]$, $P_2 = \left[\begin{smallmatrix}2\\-1\end{smallmatrix}\right]$, $P_3 = \left[\begin{smallmatrix}3\\0\end{smallmatrix}\right]$.

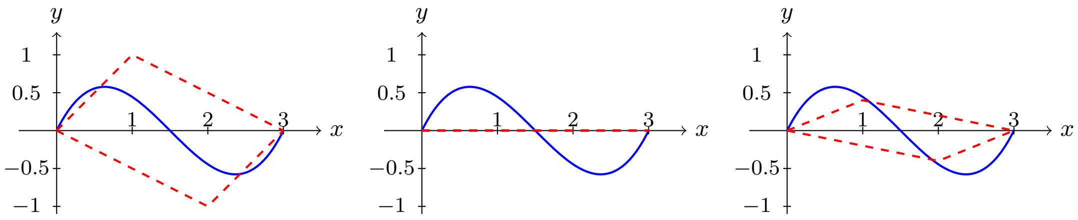
(iii) $P_0 = \left[\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right]$, $P_1 = \left[\begin{smallmatrix}1.5\\0\end{smallmatrix}\right]$, $P_2 = \left[\begin{smallmatrix}3\\0\end{smallmatrix}\right]$.

(iii) $P_0 = \left[\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right]$, $P_1 = \left[\begin{smallmatrix}1\\0.4\end{smallmatrix}\right]$, $P_2 = \left[\begin{smallmatrix}2\\-0.4\end{smallmatrix}\right]$, $P_3 = \left[\begin{smallmatrix}3\\0\end{smallmatrix}\right]$.

Per ciascuna delle tre curve, si dica se essa può avere il grafico rappresentato in figura, motivando adeguatamente la risposta. (Non è richiesto scrivere le equazioni delle curve.)



Soluzione. In tutti e tre i casi, la curva data non giace nell'inviluppo convesso dei punti di controllo, come da figura.



$\square$

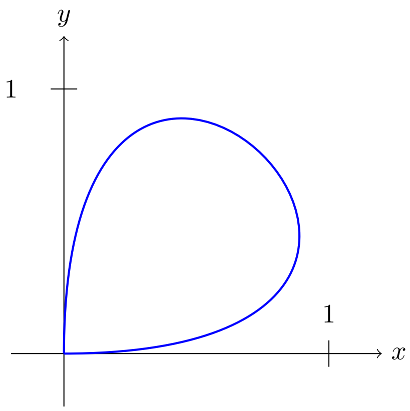
Esercizio 141. (*15 settembre 2015*) Si considerino le tre curve di Bézier corrispondenti ai seguenti punti di controllo.

(i) $P_0 = \left[\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right]$, $P_1 = \left[\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right]$, $P_2 = \left[\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right]$, $P_3 = \left[\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right]$.

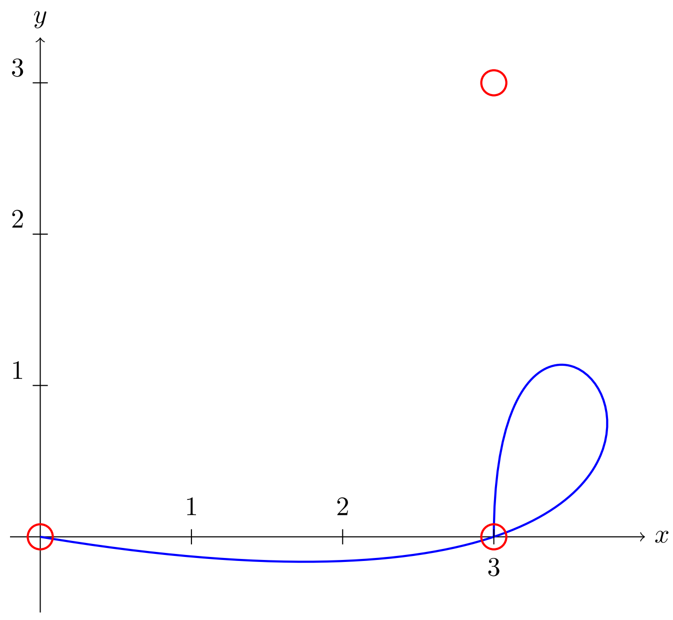
(ii) $P_0 = \left[\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right]$, $P_1 = \left[\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right]$, $P_2 = \left[\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right]$.

(iii) $P_0 = \left[\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right]$, $P_1 = \left[\begin{smallmatrix}0.2\\0.8\end{smallmatrix}\right]$, $P_2 = \left[\begin{smallmatrix}0.8\\0.2\end{smallmatrix}\right]$, $P_3 = \left[\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right]$.

Per ciascuna delle tre curve, si dica se essa può avere il grafico rappresentato in figura, motivando adeguatamente la risposta. (Non è richiesto scrivere le equazioni delle curve.)



Esercizio 142. *(14 giugno 2016)* Sia data la curva di Bézier con supporto rappresentato in figura.



(a) Spiegare, motivando la risposta, perché per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, la curva di Bézier con punti di controllo

$$v_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_1 = \begin{bmatrix} \alpha \\ -1 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix},$$

non può essere quella in figura.

(b) Spiegare, motivando la risposta, perché per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, la curva di Bézier con punti di controllo

$$v_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_1 = \begin{bmatrix} \alpha \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix},$$

non può essere quella in figura.

(c) Trovare il valore di α affinché la curva in figura rappresenti la curva di Bézier con punti di controllo

$$v_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_1 = \begin{bmatrix} \alpha \\ -1 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

(Hint: si osservi che la curva passa due volte per v_3).

Soluzione. (a) La curva di Bézier con i punti indicati termina nel punto v_3, ma la curva in figura non termina nel punto v_3.

(b) L'inviluppo convesso dei quattro punti, per ogni α, non contiene punti con ascissa negativa. La curva tracciata passa per punti con ascissa negativa quindi non può essere contenuta nell'inviluppo convesso dei quattro punti indicati.

(c) Calcolando l'equazione della curva di Bézier che ha vome punti di controllo i punti indicati si ottiene

$$B(t) = \begin{bmatrix} 3t\big((1-t)^2\alpha + 3t - 2t^2\big) \\ 3t(1-t)(4t-1) \end{bmatrix}, \qquad t \in [0,1].$$

La curva ha ordinata 0 quando $3t(1-t)(4t-1) = 0$ cioè per $t = 0$ (punto iniziale), $t = 1$ (punto finale) e $t = 1/4$. La curva è quella in figura se $B(1/4) = v_3$, che si ha quando

$$3\frac{1}{4}\Big(\frac{9}{16}\alpha + 3\frac{1}{4} - 2\frac{1}{16}\Big) = 3 \iff \alpha = 6.$$

□

Esercizio 143. *(9 settembre 2016)* Sia $B(t)$ la curva di Bézier relativa ai punti di controllo

$$v_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ a \end{bmatrix}, \qquad v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Si mostri che, per $t \in [0,1]$, il punto $B(1-t)$ è simmetrico di $B(t)$ rispetto alla retta $x = 1$ (cioè si mostri che se $B(t) = \left[\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right]$, allora $B(1-t) = \left[\begin{smallmatrix} 2-x \\ y \end{smallmatrix}\right]$).

(b) Si calcoli $B(1/2)$ in funzione di a.

(c) Si dica per quali valori di $a \in \mathbb{R}$, la curva interseca l'asse y.

(d*) Si dica per quali valori di $a \in \mathbb{R}$, la curva interseca l'asse x, motivando la risposta (si usi la proprietà (a)).

Soluzione. (a) Si ha

$$B(t) = (1-t)^2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 2t(1-t) \begin{bmatrix} 1 \\ a \end{bmatrix} + t^2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2t \\ 2t^2 - 2t + 1 + 2at(1-t) \end{bmatrix}, \qquad t \in [0,1].$$

Si ottiene

$$B(1-t) = \begin{bmatrix} 2(1-t) \\ 2(1-t)^2 - 2(1-t) + 1 + 2a(1-t)(1-(1-t)) \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 2-2t \\ 2 - 4t + 2t^2 - 2 + 2t + 1 + 2a(1-t)t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-2t \\ 2t^2 - 2t + 1 + 2at(1-t) \end{bmatrix},$$

che è quello che si voleva dimostrare.

(b) $B(1/2) = \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ (a+1)/2 \end{smallmatrix}\right]$.

(c) La curva interseca l'asse y (che ha equazione $x = 0$) per ogni valore di $a \in \mathbb{R}$, in quanto $B(0) = \left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right]$.

(d) Indichiamo con $B_x(t)$ e $B_y(t)$ le coordinate di $B(t)$, cioè $B(t) = \left[\begin{smallmatrix} B_x(t) \\ B_y(t) \end{smallmatrix}\right]$.

Ci sono vari modi di risolvere l'esercizio. Un modo prolisso consiste nell'imporre che $B_y(t)$ sia nulla con $t \in [0,1]$, cioè trovare per quali $a \in \mathbb{R}$ l'equazione $2t^2 - 2t + 1 + 2at(1-t) = 0$ ammette soluzioni comprese tra 0 e 1.

Riscrivendo l'equazione come $2t^2(1-a) - 2t(1-a) + 1 = 0$, essa ha soluzione se il suo discriminante non è negativo, cioè

$$\Delta = 4(1-a)^2 - 8(1-a) = 4 - 8a + 4a^2 - 8 + 8a = 4(a^2 - 1) \geq 0,$$

e quest'ultima disequazione è verificata per $a \geq 1$ e $a \leq -1$. Calcolando t e imponendo che $t \in [0,1]$ si scopre che le uniche soluzioni si hanno per $a \leq -1$.

Un'altra soluzione più elegante consiste nell'osservare $B_y(1/2)$ è non positiva se e solo se $a \leq -1$. In tal caso, siccome $B_y(0) > 0$ per il teorema dei valori intermedi, poiché $B_y(t)$ è continua si avrà che esiste un punto $t \in (0, 1/2)$ in cui $B_y(t)$ è nulla.

Viceversa, se $B_y(1/2) > 0$, allora la curva non intersecherà l'asse x. Per contraddizione, se esiste t_0 tale che $B_y(t_0) = 0$, allora per simmetria, anche $B_y(1-t_0) = 0$ e la curva avrà ordinata $B_y(1/2)/2$ in almeno 4 punti distinti (per il teorema dei valori intermedi) e questo è impossibile perché la curva ha grado 2.

Ne concludiamo che la curva interseca l'asse x se e solo se $a \leq -1$. □

Esercizio 144. *(22 dicembre 2016)* Siano date le curve di Bézier

$$B^{(1)}(t) = \begin{bmatrix} (1-t)^3 \\ (1-t)^3 \end{bmatrix}, \qquad B^{(2)}(t) = \begin{bmatrix} 1 - 9t + 9t^2 - t^3 \\ 3t - 9t^2 + 6t^3 \end{bmatrix},$$

per $t \in [0,1]$.

(a) Si trovino i punti di controllo di $B^{(1)}(t)$ e si descriva il loro inviluppo convesso;

(b) si trovino i punti di controllo di $B^{(2)}(t)$ e si disegni il loro inviluppo convesso;

(c) si tracci un grafico approssimativo di $B^{(1)}(t)$;

(d) si tracci un grafico approssimativo di $B^{(2)}(t)$.

Esercizio 145. *(16 gennaio 2017)* Siano dati i punti

$$v_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

e sia $B(t)$ la curva di Bézier relativa ai punti di controllo v_0, v_1, v_2, v_3.

(a) Scrivere l'equazione di $B(t)$.

(b) Descrivere l'inviluppo convesso dei punti.

(c) Disegnare un grafico quantitativo di $B(t)$ (cioè disegnare con precisione la curva $B(t)$).

Esercizio 146. *(30 gennaio 2017)* La circonferenza unitaria è l'insieme $\{x^2 + y^2 = 1 : x, y \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$.

(a) Si scriva l'equazione di una curva di Bézier cubica chiusa (cioè tale che $B(0) = B(1)$), specificandone i punti di controllo.

(b) Si dimostri che la circonferenza unitaria non può essere il supporto di una curva di Bézier cubica (si ricordi qual è la retta tangente a una circonferenza).

(c*) Si dimostri che l'arco di circonferenza $\{x^2 + y^2 = 1, : x, y \in \mathbb{R}, x \geq 0, y \geq 0\}$ non può essere una curva di Bézier.

Esercizio 147. *(24 febbraio 2017)* Siano dati i punti

$$P = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad Q = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad R = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

(a) Si scriva l'equazione di una curva di Bézier di grado 2 che passi per due dei tre punti scritti sopra e si dica quanto vale per $t = 1/3$;

(b) si scriva l'equazione di una curva di Bézier di grado 2 che passi per P, Q e R. (Hint: si può imporre che passi per il punto Q per $t = 1/2$.)

Esercizio 148. *(giugno 2017)* Dire, motivando la risposta, a quale delle figure in basso corrisponde la seguente curva di Bézier

$$B_{0123}(t) = \begin{bmatrix} 6t^2 - 4t^3 \\ 6t - 12t^2 + 6t^3 \end{bmatrix}, \qquad t \in [0, 1]$$