Aula 14 - Combinação de Variáveis Aleatórias

Combinações de variáveis aleatórias

Lembremos que:

Se $f(x)$ for uma função de densidade de probabilidade contínua

$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$

E que a variância:

$V(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x) dx$

E que ainda vale a propriedade:

$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = E(X^2) - \mu^2$

Propriedades da esperança

Lembremos da aula 08 que, para o valor esperado ou esperança, vale, se c e d forem constantes:

$E(X + d) = E(X) + d$

$E(cX) = cE(X)$

Combinando as expressões acima:

$E(cX + d) = cE(X) + d$

E para a variância vale:

$V(X + d) = V(X)$

$V(cX) = c^2 V(X)$

$V(cX + d) = c^2 V(X)$

Propriedades de combinações de variáveis aleatórias

Propriedades da esperança

Sejam a e b constantes e X e Y variáveis aleatórias

$E(X + Y) = E(X) + E(Y)$

$E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$

Estes resultados são sempre válidos, sejam X e Y dependentes ou independentes

Propriedades da variância

Sejam X e Y variáveis aleatórias

$V(X+Y) = V(X) + V(Y) + 2Cov(X, Y)$

$V(X-Y) = V(X) + V(Y) - 2Cov(X, Y)$

Sendo que, como visto nas aulas de análise bidimensional, a covariância é definida como:

$Cov(X, Y) = E[(X - \mu_X))(Y - \mu_Y)] = E(XY) - \mu_X \mu_Y$

Dado que $\mu_X = E(X)$ e $\mu_Y = E(Y)$

Variáveis independentes

X e Y independentes $\implies Cov(X, Y) = 0$

Entretanto:

$Cov(X, Y) = 0 \nRightarrow X$ e Y independentes

Se as variáveis X e Y forem independentes:

$V(X+Y) = V(X) + V(Y)$

$V(X-Y) = V(X) + V(Y)$

$E(X)E(Y) = \mu_X \mu_Y$

$Cov(X, Y) = E(XY) - \mu_X \mu_Y$

Variância com coeficientes:

Sejam a e b constantes e X e Y variáveis aleatórias:

$V(aX + bY) = a^2V(X) + b^2V(X) + 2abCov(X, Y)$

$V(aX - bY) = a^2V(X) + b^2V(X) - 2abCov(X, Y)$

Se as variáveis X e Y forem independentes:

$V(aX + bY) = a^2V(X) + b^2V(Y)$

$V(aX - bY) = a^2V(X) + b^2V(Y)$

Exemplo - soma de v.a

Um semicondutor tem 3 camadas. Supondo que as variâncias de espessura da primeira, segunda e terceira camada sejam 25, 40 e 30 nm^2, respectivamente, e que as espessuras sejam independentes, qual é o desvio padrão da espessura do produto final?

Sejam X_1, X_2 e X_3 as variáveis aleatórias que denotam as espessuras.

Então:

$X = X_1 + X_2 + X_3$

Temos então que:

$V(X) = V(X_1) + V(X_2) + V(X_3) = 95nm^2$

Consequentemente, o desvio padrão do produto final é: $9.747nm$

Exemplo

Um processo industrial pode ser executado em duas etapas independentes. O tempo gasto em cada etapa segue uma distribuição com média de 5 horas e desvio-padrão de 10 horas.

Um engenheiro resolveu modificar o processo de produção fazendo com que seja executado numa única fase, cujo tempo de execução é o dobro da primeira etapa do processo atual.

Vale a pena adotar o processo proposto pelo engenheiro?

Média e variância de uma média

Seja $\overline{X} = (X_1 + X_2 + \cdots + X_n)/n$, com $E(X_i) = \mu$ para todo $i = 1, 2, \cdots, n$

Temos que $E(\overline{X}) = \mu$

Se $X_1, X_2, \cdots, X_n$ forem indepententes com $V(X_i) = \sigma^2$ para todo $i = 1, 2, \cdots, n$, temos:

$V(\overline{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$

Propriedade reprodutiva da normal

Sejam $X_1, X_2, \cdots, X_n$ variáveis aleatórias normais com $E(X_i) = \mu_i$ e $V(X_i) = \sigma_i^2$, para $i = 1, 2, \cdots, n$

Então:

$Y = c_1X_1 + c_2X_2 + \cdots + c_nX_n$ **será uma variável aleatória normal**, com $E(Y)$ e $V(Y)$ definidos conforme

$$E(Y) = c_1\mu_1 + c_2\mu_2 + \cdots + c_n\mu_n$$

$$V(Y) = c_1^2\sigma_1^2 + c_2^2\sigma_2^2 + \cdots + c_n^2\sigma_n^2$$