Cvičení pro modelování a simulace – Michel Kana, PhD - Test – 06.05.2014

Jméno: ____________________________

1. **Napište diferenciální rovnice pro následující modely populací, krátce popište proměnné a parametry**
    - Logistický model **2**

$$\frac{dX(t)}{dt} = \rho \cdot \left(1 - \frac{X(t)}{K}\right) \cdot X(t)$$

- Model dvoudruhových populací dravec – kořist **4**

$$\frac{dX(t)}{dt} = k_1 \cdot X(t) - k_2 \cdot X(t) \cdot Y(t)$$
$$\frac{dY(t)}{dt} = k_3 \cdot k_2 \cdot X(t) \cdot Y(t) - k_4 \cdot Y(t)$$

- Model dvoudruhových populací se spoluprací **4**

$$\frac{dX_1\,(t)}{dt} = \rho_1 \cdot \left(1 - \frac{X_1(t)}{K_1} + b_{12} \cdot \frac{X_2(t)}{K_1}\right) \cdot X_1(t)$$
$$\frac{dX_2\,(t)}{dt} = \rho_2 \cdot \left(1 - \frac{X_2(t)}{K_2} + b_{21} \cdot \frac{X_1(t)}{K_2}\right) \cdot X_2(t)$$

- Epidemiologické modely – SIR **5**

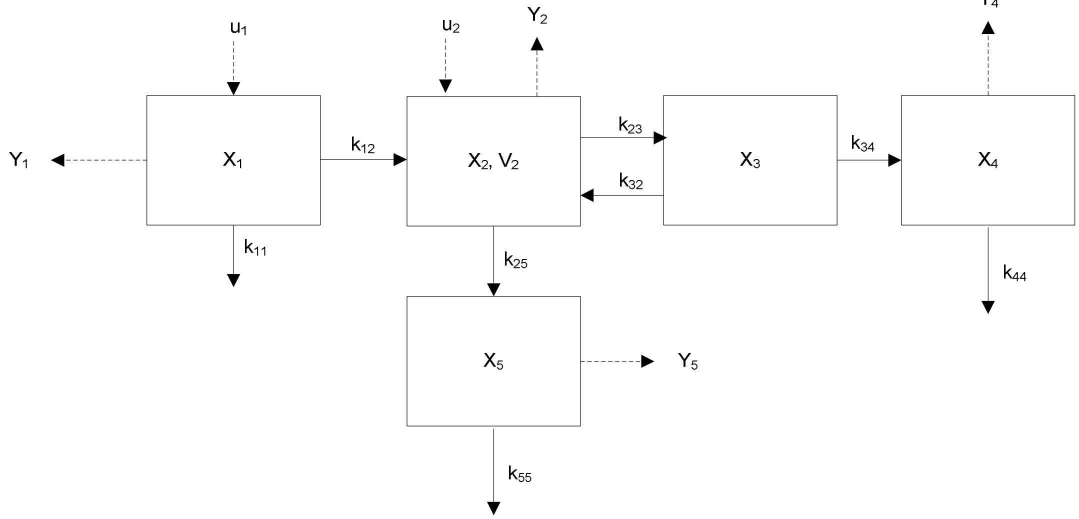
$$\frac{dS\,(t)}{dt} = -r \cdot S(t) \cdot I(t)$$
$$\frac{dI\,(t)}{dt} = r \cdot S(t) \cdot I(t) - a \cdot I(t)$$
$$\frac{dR\,(t)}{dt} = a \cdot I(t)$$
$$S(t) + I(t) + R\,(t) = N$$

2. **Popište následující model populací s věkovou strukturou pomoci Lesliehové notace 5**

6 věkových skupin. 10 jedinců v každé věkové skupině v čase 0. Věková skupina 0 a 1 nejsou plodné. Ve věkové skupině 2 až 4 je plodnost 0.35 potomku za jednotlivce. Ve věkové skupině 5 je plodnost 0.1 potomku za jednotlivce. V každé věkové skupině, kromě skupiny 5 přežije 80% jednotlivců.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.35 & 0.35 & 0.35 & 0.10 \\ 0.8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.8 & 0 \end{bmatrix} X_0 = \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \\ 10 \\ 10 \\ 10 \end{bmatrix}$$

3. Popište diferenciální rovnice a matice X, Y, U, A, B, C pro následující kompartmentový model 20



$$
\begin{aligned}
\dot{X}_1 &= (-k_{11} - k_{12}) \cdot X_1 + 0 \cdot X_2 + 0 \cdot X_3 + 0 \cdot X_4 + 0 \cdot X_5 + u_1 \\
\dot{X}_2 &= k_{12} \cdot X_1 + (-k_{23} - k_{25}) \cdot X_2 + k_{32} \cdot X_3 + 0 \cdot X_4 + 0 \cdot X_5 + u_2 \\
\dot{X}_3 &= 0 \cdot X_1 + k_{23} X_2 + (-k_{32} - k_{34}) \cdot X_3 + 0 \cdot X_4 + 0 \cdot X_5 + 0 \\
\dot{X}_4 &= 0 \cdot X_1 + 0 \cdot X_2 + k_{34} \cdot X_3 + (-k_{44}) \cdot X_4 + 0 \cdot X_5 + 0 \\
\dot{X}_5 &= 0 \cdot X_1 + k_{25} X_2 + 0 \cdot X_3 + 0 \cdot X_4 + (-k_{55}) \cdot X_5 + 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Y_1 &= 0 \cdot X_1 + 0 \cdot X_2 + 0 \cdot X_3 + 0 \cdot X_4 + 0 \cdot X_5 \\
Y_2 &= 0 \cdot X_1 + \tfrac{1}{V_2} \cdot X_2 + 0 \cdot X_3 + 0 \cdot X_4 + 0 \cdot X_5 \\
Y_3 &= 0 \cdot X_1 + 0 \cdot X_2 + 0 \cdot X_3 + 0 \cdot X_4 + 0 \cdot X_5 \\
Y_4 &= 0 \cdot X_1 + 0 \cdot X_2 + 0 \cdot X_3 + 1 \cdot X_4 + 0 \cdot X_5 \\
Y_5 &= 0 \cdot X_1 + 0 \cdot X_2 + 0 \cdot X_3 + 0 \cdot X_4 + 1 \cdot X_5
\end{aligned}
$$

$$
X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \end{bmatrix} \qquad
Y = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ Y_4 \\ Y_5 \end{bmatrix} \qquad
U = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
$$

$$
A = \begin{bmatrix}
-k_{11} - k_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
k_{12} & -k_{23} - k_{25} & k_{32} & 0 & 0 \\
0 & k_{23} & -k_{32} - k_{34} & 0 & 0 \\
0 & 0 & k_{34} & -k_{44} & 0 \\
0 & k_{25} & 0 & 0 & -k_{55}
\end{bmatrix}
$$

$$
B = \begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
$$

$$
C = \begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{1}{V_2} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}
$$

Cvičení pro modelování a simulace - Test – 06.05.2014

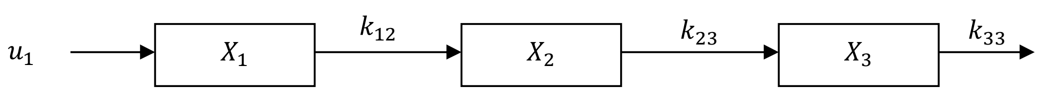
Jméno: ______________________________

4. Pomoci Simulink/Matlab navrhujte matematicky model k řešeni následující problémy.

Červené krevní buňky jsou produkovány v kostní dřeni v poměru 200 miliardy buněk za den. Rychlost úmrtí je 0.2% za den. Za předpokladu že tělo obsahuje 30 bilionů buňky v času t = 0, kolik jich budou za 365 dnů? **15**

$$\frac{dN}{dt} = m - d \cdot N$$
$$m = 200 \cdot 10^9, d = 0.002, N(0) = 30 \cdot 10^{12}$$
$$\boldsymbol{N(365) = \textbf{počet buněk v času t } = 365}$$

Před menší operaci se aplikuje určité množství anestezie ve svalu jednorázově. Odtamtud se to pomalu vlévá do krve, kde se uplatňuje svůj sedativní účinek. Z krve se to vyzvedne v játrech, kde je nakonec degradován. Pro libovolné hodnoty parametrů, jak dlouho trvá, než polovina podané množství anestezie je převezen ze svalu do krve? **15**



$$\frac{dX_1}{dt} = -k_{12} \cdot X_1$$

$$\frac{dX_2}{dt} = k_{12} \cdot X_1 - k_{23} \cdot X_2$$

$$\frac{dX_3}{dt} = k_{23} \cdot X_2 - k_{33} \cdot X_3$$

$$X_1(0) = u_1, X_2(0) = 0, X_3(0) = 0$$

$\boldsymbol{X_2\left(t_{1/2}\right) = \frac{u_1}{2}}$, $\quad \boldsymbol{t_{1/2}}$ **je čas kdy polovina podané množství anestezie je převezen ze svalu do krve**

Máme populaci hmyzu, která se skládá z larev (L) a dospělých (A). Předpokládáme, že se dospělí rodí larvy (asexuální), a že tyto larvy se stanou dospělými. Dospělí mají úmrtnost nezávislé na hustotu larev. Larvy mají úmrtnost, která je závislá na hustotě dospělých. Najděte hodnoty parametrů a počáteční velikost populace, pro které v nejbližší budoucnost zůstane populace larev v ustáleném stavu. **15**

$$\frac{dL}{dt} = r \cdot A - m \cdot L - d_1 \cdot L \cdot A$$

$$\frac{dA}{dt} = m \cdot L - d_2 \cdot A$$

populace larev v ustáleném stavu $\Longrightarrow \frac{dL}{dt} = 0 \Longrightarrow \frac{d(r \cdot A - m \cdot L - d_1 \cdot L \cdot A)}{dt} = 0 \Longrightarrow \hat{L} = \frac{r \cdot A}{m + d_1 \cdot A}$

$\boldsymbol{\hat{L}}$ **je velikost populaci larev v ustáleném stavu**

Máme druh N2, kteří se přistěhuje do oblasti, v níž další dva druhy N1 a N3 jsou přítomny, ale navzájem nekonkurují. Každý z těchto dvou druhů proto má hustotu, která se rovná kapacita životního prostředí a nechává nový druh soutěžit stejně s dalšími z dvou přítomný druhy. Předpokládejme, že kapacita životního prostředí je stejná pro všechny tři druhy. Najděte podmínek pro úspěšnou invazi třetího druhu. **15**

$$\frac{dN_1}{dt} = r \cdot N_1 \cdot (1 - N_1 - \alpha \cdot N_2)$$
$$\frac{dN_2}{dt} = r \cdot N_2 \cdot (1 - N_2 - \alpha \cdot N_1 - \alpha \cdot N_3)$$
$$\frac{dN_3}{dt} = r \cdot N_3 \cdot (1 - N_3 - \alpha \cdot N_2)$$

úspěšna invaze třetího druhu $\boldsymbol{\Longrightarrow \frac{dN_1}{dt} = 0, \frac{dN_3}{dt} = 0, \frac{dN_2}{dt} > 0 \Longrightarrow 1 - 2\alpha > 0 \Longrightarrow \alpha < {}^{1}/_{2}}$