CVIČENÍ MODELOVÁNÍ A SIMULACE

Cvičení 3 - LS 2014 – Michel Kana

Co uděláme ve dnešním cvičení?

1. **Shrnuti minulého cvičeni**
2. **Model populací s věkovou strukturou**
3. **Model dvoudruhových populací dravec – kořist**
4. **Shrnuti**

Shrnutí minulého cvičení

[Modely populací]
Model změn v počtu obyvatelstva v důsledku interakcí organismů s životním prostředím, s jednotlivci jejich vlastního druhu, a s organismy jiných druhů.
Malthusův model: růst je neomezený
Logistický model: kapacita životního prostředí sledované populace
Logistický model se zpožděním: střední doba dosažení reprodukční schopnosti

[Simulink]
Simulaci dynamických systémů pomoci blokové schéma

Modely populací s věkovou strukturou

- Populace je skupina jednotlivců z určitého druhu.
- Populace je rozdělena podle $n+1$ věkových skupin.
- $X_{i,t}$ představuje počet jedinců ve věkové skupině i v čase t.
- Věkova skupina 0 určuje počet potomků.
- Věkova skupina n určuje počet nejstarší jednotlivců.
- b_i představuje plodnost (průměrný zlomek porodů) na jedince ve věkové třídě i.
- p_i představuje stárnutí (průměrný zlomek přežití) ve věkové třídy i.

- A je Lesliehová matice
- Vlastní číslo A, označené λ, představuje asymptotické růstu populací na stabilní věkové rozložení: $\mathrm{A} \cdot v = \lambda \cdot v$
- Odpovídající vlastní vektor v představuje stabilní věkové rozložení, podíl jedinců každého věku v populaci. Jakmile stabilní věkové rozložení bylo dosaženo, populace prochází exponenciální růst v poměru λ.

$$A \cdot X_t = X_{t+1}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{bmatrix} b_0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_{n-1} & b_n \\ p_0 & 0 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & p_1 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_2 & & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & p_{n-1} & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_{0,t} \\ x_{1,t} \\ x_{2,t} \\ x_{3,t} \\ \vdots \\ x_{n,t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{0,t+1} = \sum b_i . x_{i,t} \\ x_{1,t+1} = p_0 . x_{0,t} \\ x_{2,t+1} = p_1 . x_{1,t} \\ x_{3,t+1} = p_2 . x_{2,t} \\ \vdots \\ x_{n,t+1} = p_{n-1} . x_{n-1,t} \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$A^t \cdot X_0 = X_t$$

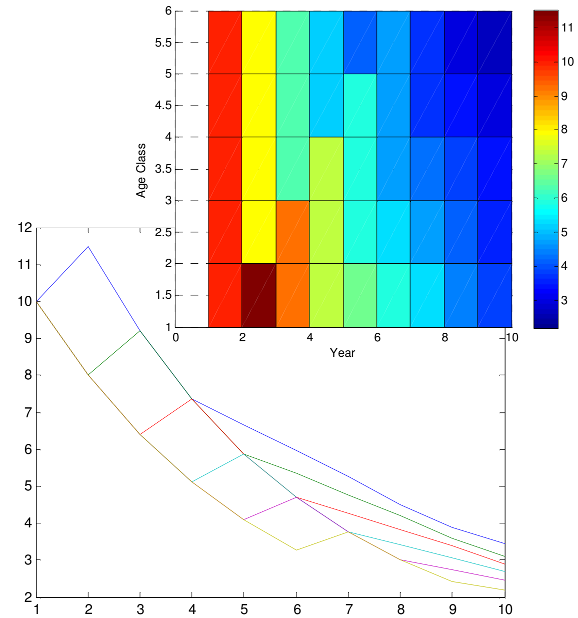
Modely populací s věkovou strukturou

- 6 věkových skupin.
- 10 jedinců ve každé věkové skupině v čase 0.
- Věková skupina 0 a 1 nejsou plodné.
- Ve věkové skupině 2 až 4 je plodnost 0.35 potomku za jednotlivec.
- Ve věkové skupině 5 je plodnost 0.1 potomku za jednotlivec.
- Ve každé věkové skupině, kromě skupina 5 přežije 80% jednotlivců.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.35 & 0.35 & 0.35 & 0.10 \\ 0.8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.8 & 0 \end{bmatrix} X_0 = \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \\ 10 \\ 10 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$A^t \cdot X_0 = X_t$$

```
A = [ 0.00 0.00 0.35 0.35 0.35 0.10; 0.8 0 0 0 0 0; 0 0.8 0 0 0 0;
0 0 0.8 0 0 0; 0 0 0 0.8 0 0; 0 0 0 0 0.8 0]
X = [10;10;10;10;10;10]
A^10 * X
Population = X
for x=1:10, X= A * X; Population = [Population X], end
surf(Population)
view(0,90)
colormap(jet)
colorbar
xlabel('Year')
ylabel('Age Class')
plot(Population')
plot(sum(Population))
[v,lambda] = eig(A)
```



Modely populací s věkovou strukturou

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 20 & 60 \\ 0.05 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.6 & 0 \end{bmatrix}$$

$$X_0 = \begin{bmatrix} 500 \\ 50 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Populace 1

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1.5 & 1.2 \\ .8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & .5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & .25 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 45 \\ 18 \\ 11 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Populace 2

$$\begin{bmatrix} b_0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_{n-1} & b_n \\ p_0 & 0 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & p_1 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_2 & & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & p_{n-1} & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_{0,t} \\ x_{1,t} \\ x_{2,t} \\ x_{3,t} \\ \vdots \\ x_{n,t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{0,t+1} = \sum b_i . x_{i,t} \\ x_{1,t+1} = p_0 . x_{0,t} \\ x_{2,t+1} = p_1 . x_{1,t} \\ x_{3,t+1} = p_2 . x_{2,t} \\ \vdots \\ x_{n,t+1} = p_{n-1} . x_{n-1,t} \end{bmatrix}$$

$$A^t \cdot X_0 = X_t$$

- Vypočítávat vektor stabilní věkové rozložení v a souvislý poměrný exponenciální růst λ.

Model dvoudruhových populací dravec – kořist

- Jedna populace prospívá, druhá chřadne.
- $X(t)$ představuje počet kořistí v čase t.
- $Y(t)$ představuje počet dravců v čase t.
- k_1 představuje relativní porodnosti kořistí.
- $k_1 \cdot X(t)$ vyjadřuje počet kořistí, které se narodily během časového intervalu $\langle t-1 \cdots t \rangle$.
- k_2 představuje pravděpodobnost, že setkání dravce s kořistí skončí zahubením kořisti.
- $k_2 \cdot X(t) \cdot Y(t)$ vyjadřuje počet kořistí ulovených dravci během časového intervalu $\langle t-1 \cdots t \rangle$.
- k_3 představuje účinnost přeměny biomasy kořisti na biomasu dravce.
- $k_3 \cdot k_2 \cdot X(t) \cdot Y(t)$ vyjadřuje počet narozených dravců během časového intervalu $\langle t-1 \cdots t \rangle$.
- k_4 představuje relativní úmrtnost dravců.
- $k_4 \cdot Y(t)$ vyjadřuje úbytek v populaci dravců během časového intervalu $\langle t-1 \cdots t \rangle$.

$$\frac{dX(t)}{dt} = k_1 \cdot X(t) - k_2 \cdot X(t) \cdot Y(t)$$
$$\frac{dY(t)}{dt} = k_3 \cdot k_2 \cdot X(t) \cdot Y(t) - k_4 \cdot Y(t)$$

Rovnice modelu Lotky – Volterry

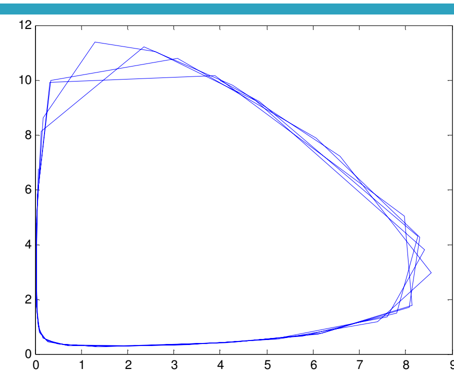
Model dvoudruhových populací dravec – kořist

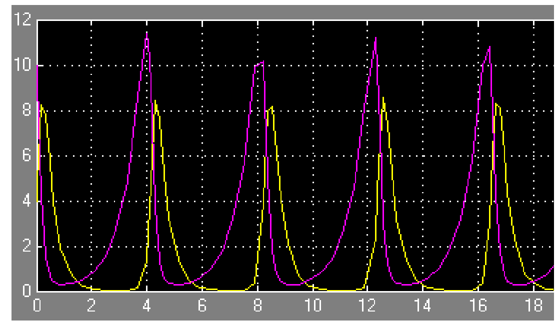
$$\frac{dX(t)}{dt} = k_1 \cdot X(t) - k_2 \cdot X(t) \cdot Y(t)$$

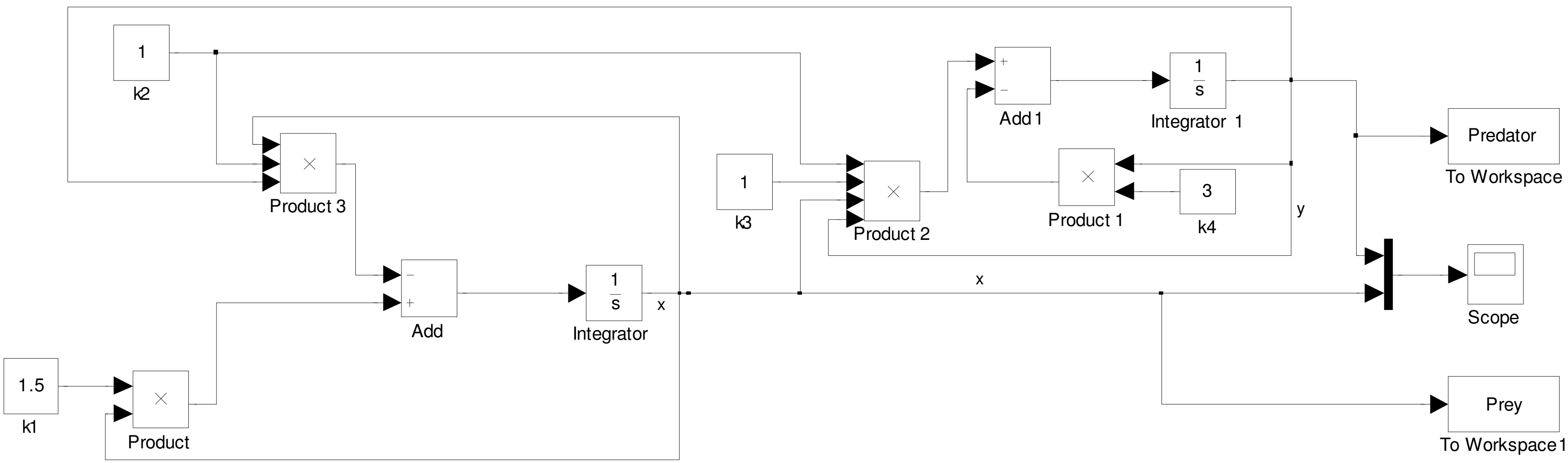
$$\frac{dY(t)}{dt} = k_3 \cdot k_2 \cdot X(t) \cdot Y(t) - k_4 \cdot Y(t)$$

In Matlab

plot(Predator.signals.values,Prey.signals.values)







Shrnutí dnešního cvičení

[Modely populací]
Model populací s věkovou strukturou
Model dvoudruhových populací dravec – kořist: *Lotky – Volterry*

[Co bude dál?]
Model dvoudruhových populací dravec – kořist se zpožděním, Kolmogorovův model
Model dvoudruhových populací s konkurence
Model dvoudruhových populací se spolupráce
Epidemiologické modely.