

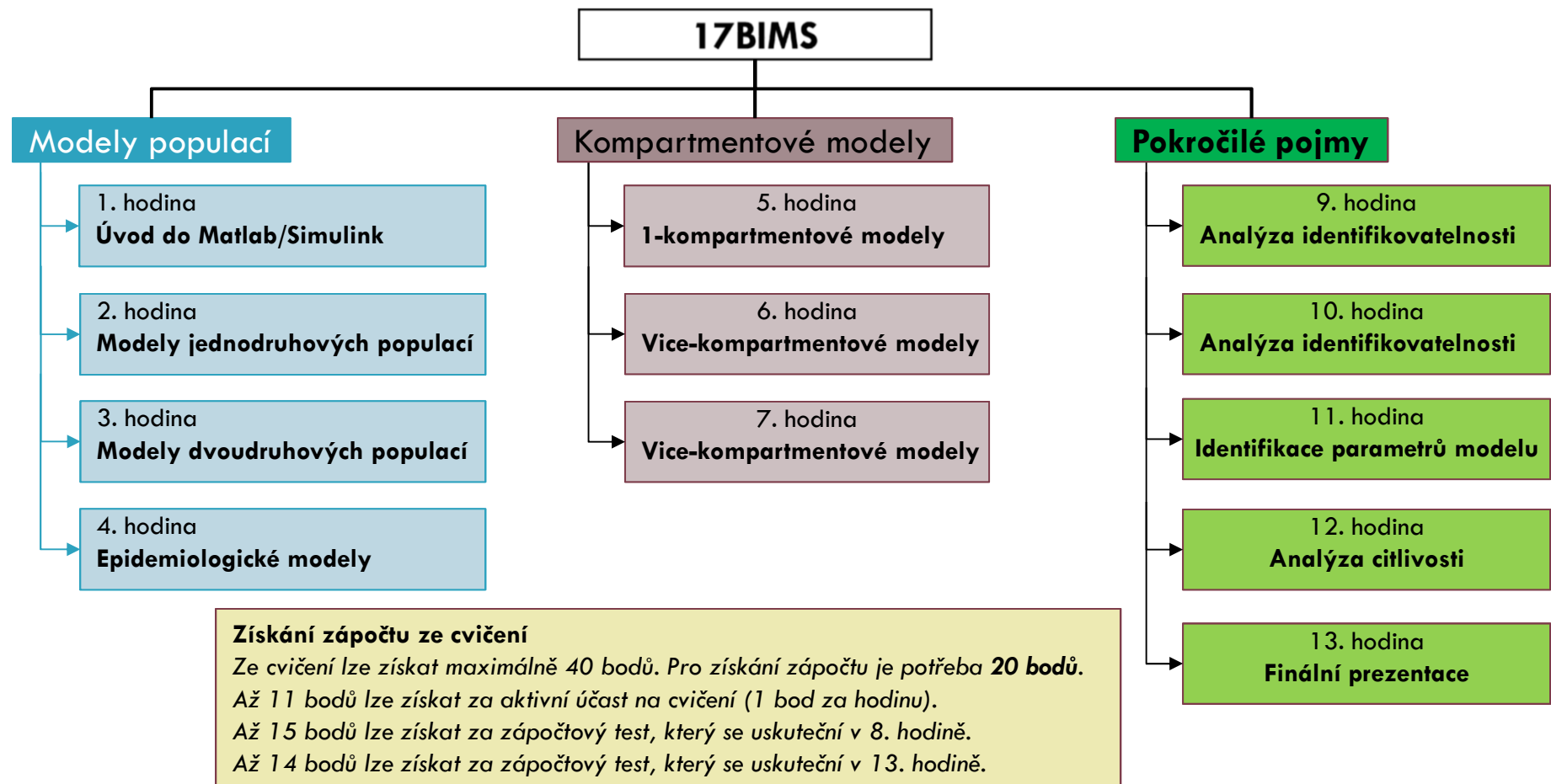
CVIČENÍ MODELOVÁNÍ A SIMULACE

Cvičení 7 - LS 2014 – Michel Kana

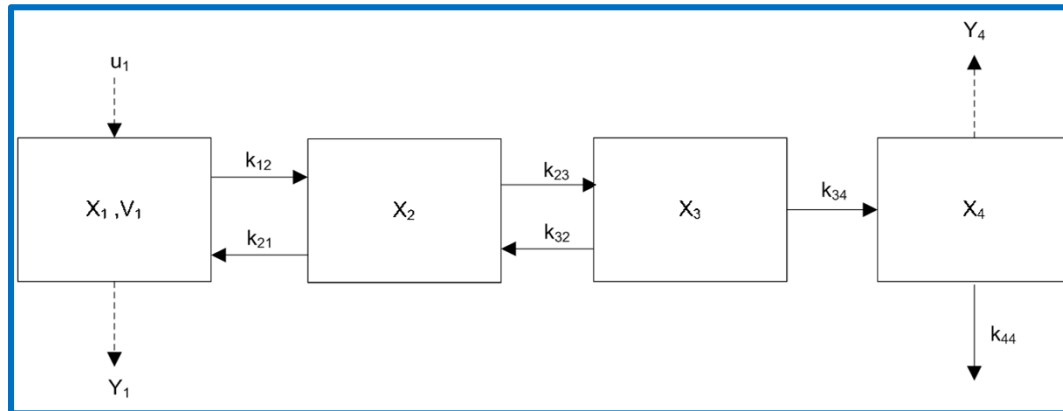
Co uděláme ve dnešním cvičení?

1. **Maticový popis kompartmentové modely**
2. **Přenosová funkce kompartmentové modely**
3. **Shrnutí**

Co budete cvičit po celém semestru?



Maticový popis 4-Kompartmentové modely

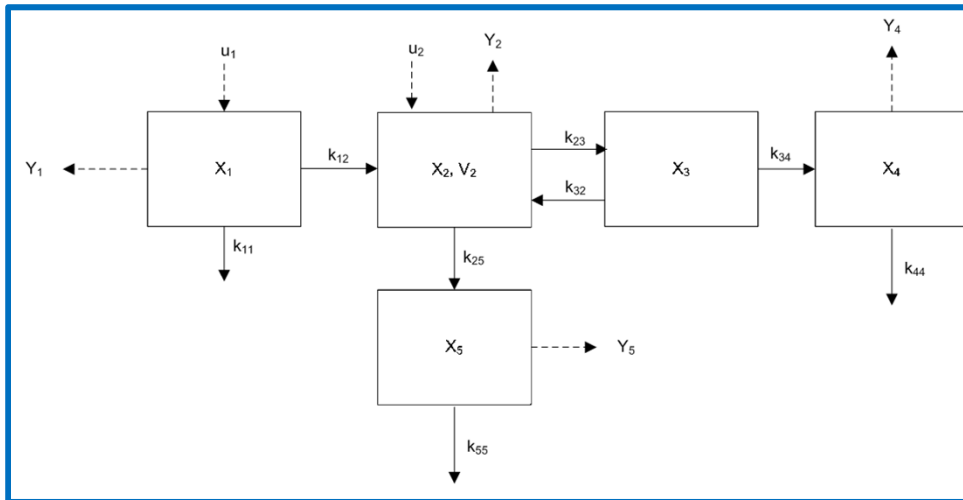


$$\begin{aligned}
 \dot{X}_1 &= (-k_{12}) \cdot X_1 + k_{21} \cdot X_2 + 0 \cdot X_3 + 0 \cdot X_4 + u_1 \\
 \dot{X}_2 &= k_{12} \cdot X_1 + (-k_{21} - k_{23}) \cdot X_2 + k_{32} \cdot X_3 + 0 \cdot X_4 + 0 \\
 \dot{X}_3 &= 0 \cdot X_1 + k_{23} \cdot X_2 + (-k_{32} - k_{34}) \cdot X_3 + 0 \cdot X_4 + 0 \\
 \dot{X}_4 &= 0 \cdot X_1 + 0 \cdot X_2 + k_{34} \cdot X_3 + (-k_{44}) \cdot X_4 + 0 \\
 Y_1 &= \frac{1}{V_1} \cdot X_1 + 0 \cdot X_2 + 0 \cdot X_3 + 0 \cdot X_4 \\
 Y_2 &= 0 \cdot X_1 + 0 \cdot X_2 + 0 \cdot X_3 + 0 \cdot X_4 \\
 Y_3 &= 0 \cdot X_1 + 0 \cdot X_2 + 0 \cdot X_3 + 0 \cdot X_4 \\
 Y_4 &= 0 \cdot X_1 + 0 \cdot X_2 + 0 \cdot X_3 + 1 \cdot X_4
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 X &= \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{bmatrix} & Y &= \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ Y_4 \end{bmatrix} & U &= \begin{bmatrix} u_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
 A &= \begin{bmatrix} -k_{12} & k_{21} & 0 & 0 \\ k_{12} & (-k_{21} - k_{23}) & k_{32} & 0 \\ 0 & k_{23} & (-k_{32} - k_{34}) & 0 \\ 0 & 0 & k_{34} & -k_{44} \end{bmatrix} \\
 B &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 C &= \begin{bmatrix} \frac{1}{V_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Maticový popis 5-Kompartmentové modely



$$X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \end{bmatrix} \quad Y = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ Y_4 \\ Y_5 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

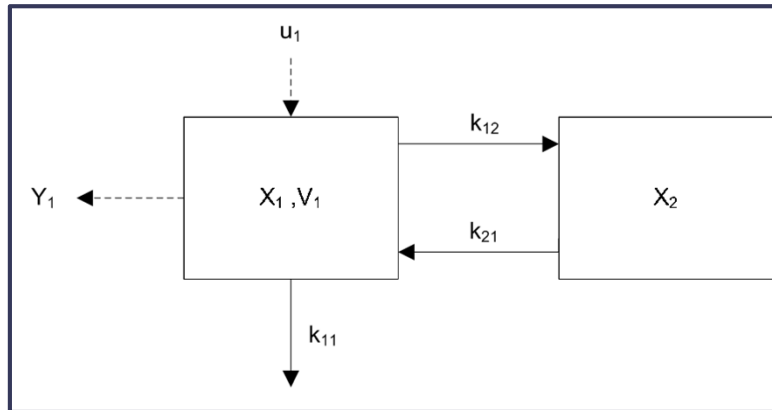
$$A = \begin{bmatrix} -k_{11} & -k_{12} & 0 & 0 & 0 \\ k_{12} & -k_{23} - k_{25} & k_{32} & 0 & 0 \\ 0 & k_{23} & -k_{32} - k_{34} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{34} & -k_{44} & 0 \\ 0 & k_{25} & 0 & 0 & -k_{55} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{V_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \dot{X}_1 &= (-k_{11} - k_{12}) \cdot X_1 + 0 \cdot X_2 + 0 \cdot X_3 + 0 \cdot X_4 + 0 \cdot X_5 + u_1 \\ \dot{X}_2 &= k_{12} \cdot X_1 + (-k_{23} - k_{25}) \cdot X_2 + k_{32} \cdot X_3 + 0 \cdot X_4 + 0 \cdot X_5 + u_2 \\ \dot{X}_3 &= 0 \cdot X_1 + k_{23} \cdot X_2 + (-k_{32} - k_{34}) \cdot X_3 + 0 \cdot X_4 + 0 \cdot X_5 + 0 \\ \dot{X}_4 &= 0 \cdot X_1 + 0 \cdot X_2 + k_{34} \cdot X_3 + (-k_{44}) \cdot X_4 + 0 \cdot X_5 + 0 \\ \dot{X}_5 &= 0 \cdot X_1 + k_{25} \cdot X_2 + 0 \cdot X_3 + 0 \cdot X_4 + (-k_{55}) \cdot X_5 + 0 \\ Y_1 &= 0 \cdot X_1 + 0 \cdot X_2 + 0 \cdot X_3 + 0 \cdot X_4 + 0 \cdot X_5 \\ Y_2 &= 0 \cdot X_1 + \frac{1}{V_2} \cdot X_2 + 0 \cdot X_3 + 0 \cdot X_4 + 0 \cdot X_5 \\ Y_3 &= 0 \cdot X_1 + 0 \cdot X_2 + 0 \cdot X_3 + 0 \cdot X_4 + 0 \cdot X_5 \\ Y_4 &= 0 \cdot X_1 + 0 \cdot X_2 + 0 \cdot X_3 + 1 \cdot X_4 + 0 \cdot X_5 \\ Y_5 &= 0 \cdot X_1 + 0 \cdot X_2 + 0 \cdot X_3 + 0 \cdot X_4 + 1 \cdot X_5 \end{aligned}$$

Kompartimentové modely jako LTI systém



$$\begin{aligned}\dot{X} &= A \cdot X + B \cdot U \\ Y &= C \cdot X\end{aligned}$$

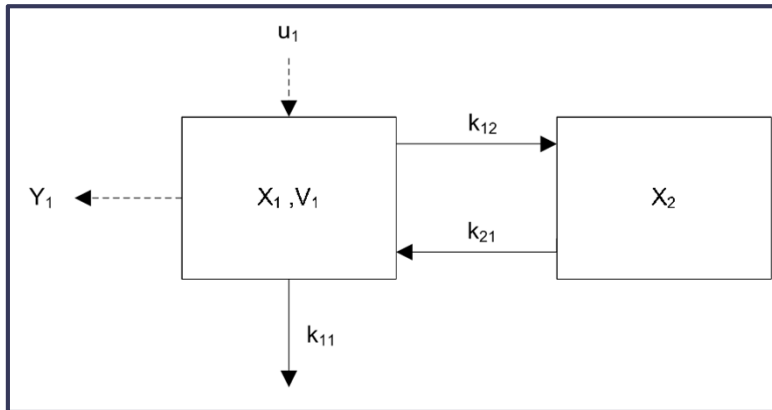
lineární t-invariantní dynamický systém
LTI systém



$$\frac{L\{Y\}}{L\{U\}} = C \cdot (s \cdot I - A)^{-1} \cdot B$$

Přenosová funkce je závislost mezi výstupem a vstupem LTI systému

Přenosová funkce 2-Kompartmentové modely



$$X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} \quad Y = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} u_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} (-k_{11} - k_{12}) & k_{21} \\ k_{12} & -k_{21} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} \frac{1}{V_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

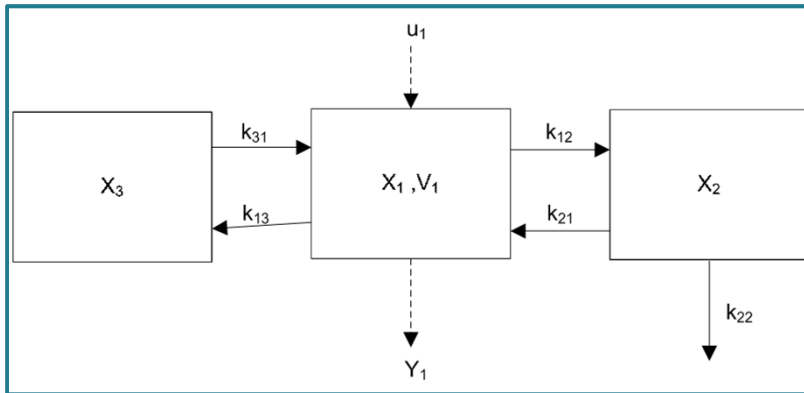
```
syms s k11 k12 k21 v1;
A=[-k11-k12 k21; k12 -k21];
B=[1 0; 0 0];
C=[1/v1 0; 0 0];
I=eye(2);
TF=C*inv(s*I-A)*B;
Collect(TF(1,1),s);
```

$$\frac{L\{Y\}}{L\{U\}} = C \cdot (sI - A)^{-1} \cdot B$$

$$\begin{bmatrix} \frac{L\{Y_1\}}{L\{u_1\}} & \frac{L\{Y_1\}}{L\{u_2\}} \\ \frac{L\{Y_2\}}{L\{u_1\}} & \frac{L\{Y_2\}}{L\{u_2\}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{V_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} (-k_{11} - k_{12}) & k_{21} \\ k_{12} & -k_{21} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{L\{Y_1\}}{L\{u_1\}} = \frac{\frac{1}{V_1}s + \frac{1}{V_1}k_{21}}{s^2 + (k_{11} + k_{12} + k_{21})s + k_{21}k_{11}}$$

Přenosová funkce 3-Kompartmentové modely

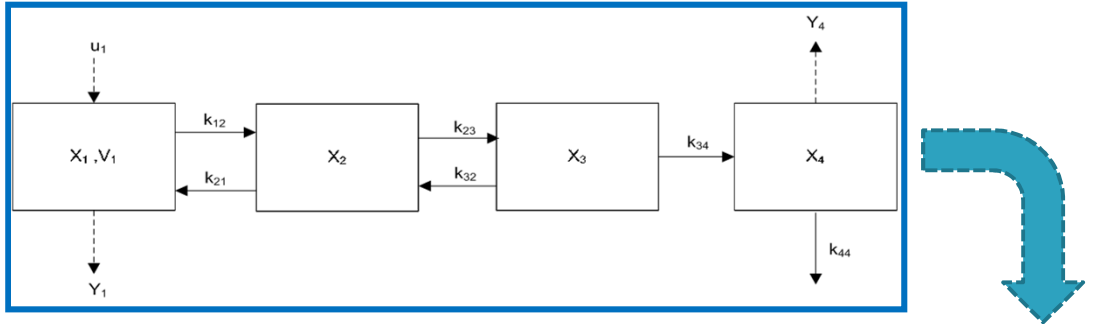


$$\frac{L\{Y\}}{L\{U\}} = C \cdot (s.I - A)^{-1} \cdot B$$

$$\begin{bmatrix} \frac{L\{Y_1\}}{L\{u_1\}} & \frac{L\{Y_1\}}{L\{u_2\}} & \frac{L\{Y_1\}}{L\{u_3\}} \\ \frac{L\{Y_2\}}{L\{u_1\}} & \frac{L\{Y_2\}}{L\{u_2\}} & \frac{L\{Y_2\}}{L\{u_3\}} \\ \frac{L\{Y_3\}}{L\{u_1\}} & \frac{L\{Y_3\}}{L\{u_2\}} & \frac{L\{Y_3\}}{L\{u_3\}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{V_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -k_{12} - k_{13} & k_{21} & k_{31} \\ k_{12} & -k_{21} - k_{22} & 0 \\ k_{13} & 0 & -k_{31} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{L\{Y_1\}}{L\{u_1\}} = \frac{\frac{1}{V_1} (s + k_{21} + k_{22})(s + k_{31})}{(s + k_{12} + k_{13})(s + k_{21} + k_{22})(s + k_{31}) - k_{13}k_{31}(s + k_{21} + k_{22}) - k_{12}k_{21}(s + k_{31})}$$

Přenosová funkce 4-Kompartmentové modely



$$\frac{L\{Y\}}{L\{U\}} = C \cdot (sI - A)^{-1} \cdot B$$

$$\begin{bmatrix} \frac{L\{Y_1\}}{L\{u_1\}} & \frac{L\{Y_1\}}{L\{u_2\}} & \frac{L\{Y_1\}}{L\{u_3\}} & \frac{L\{Y_1\}}{L\{u_4\}} \\ \frac{L\{Y_2\}}{L\{u_1\}} & \frac{L\{Y_2\}}{L\{u_2\}} & \frac{L\{Y_2\}}{L\{u_3\}} & \frac{L\{Y_2\}}{L\{u_4\}} \\ \frac{L\{Y_3\}}{L\{u_1\}} & \frac{L\{Y_3\}}{L\{u_2\}} & \frac{L\{Y_3\}}{L\{u_3\}} & \frac{L\{Y_3\}}{L\{u_4\}} \\ \frac{L\{Y_4\}}{L\{u_1\}} & \frac{L\{Y_4\}}{L\{u_2\}} & \frac{L\{Y_4\}}{L\{u_3\}} & \frac{L\{Y_4\}}{L\{u_4\}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{v_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -k_{12} & k_{21} & 0 & 0 \\ k_{12} & (-k_{21} - k_{23}) & k_{32} & 0 \\ 0 & k_{23} & (-k_{32} - k_{34}) & 0 \\ 0 & 0 & k_{34} & -k_{44} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{L\{Y_1\}}{L\{u_1\}} = \frac{\frac{1}{v_1} (s^2 + (k_{34} + k_{32} + k_{23} + k_{21})s + k_{21}k_{32} + k_{21}k_{34} + k_{23}k_{34})}{s^3 + (k_{34} + k_{12} + k_{32} + k_{23} + k_{21})s^2 + (k_{21}k_{34} + k_{12}k_{34} + k_{23}k_{34} + k_{21}k_{32} + k_{12}k_{32} + k_{12}k_{23})s + k_{12}k_{23}k_{34}}$$

$$\frac{L\{Y_4\}}{L\{u_1\}} = \frac{k_{12} \cdot k_{23} \cdot k_{34}}{s^4 + (k_{21} + k_{23} + k_{12} + k_{32} + k_{44} + k_{34})s^3 + (k_{21}k_{44} + k_{12}k_{23} + k_{23}k_{44} + k_{32}k_{44} + k_{34}k_{44} + k_{21}k_{32} + k_{12}k_{44} + k_{21}k_{34} + k_{23}k_{34} + k_{12}k_{32} + k_{12}k_{34})s^2 + (k_{23}k_{34}k_{44} + k_{21}k_{32}k_{44} + k_{21}k_{34}k_{44} + k_{12}k_{23}k_{34} + k_{12}k_{34}k_{44} + k_{12}k_{23}k_{44} + k_{12}k_{32}k_{44})s + k_{12}k_{23}k_{34}k_{44}}$$

Týmový Projekt

□ Projekt 1 – Simulátor modely populace

- ▣ Uživatel si vybere model
- ▣ Uživatel zadává hodnoty parametrů a počáteční velikost populace
- ▣ Systém zobrazí vývoj populace v casu

□ Projekt 2 – Simulator kompartmentové modely

- ▣ Uživatel zadává popis modelu
- ▣ Uživatel zadává hodnoty parametrů a počáteční množství látku.
- ▣ Systém vygeneruje diferenciální rovnice
- ▣ Systém vypočítává a zobrazí vývoj množství a koncentraci látku v čase

Týmový Projekt

- **Projekt 3 – Analyzátor kompartmentové modely**
 - ▣ Uživatel zadává popis modelu
 - ▣ Systém vygeneruje matice A , B , C , U , X , Y
 - ▣ Systém vypočítává a zobrazí přenosovou funkci
 - ▣ Systém vypočítává a zobrazí pozorovací parametru
 - ▣ Systém udělá analýzu identifikatelnosti a zobrazí výsledky

- **Projekt 4 – Identifikace kompartmentové modely**
 - ▣ Uživatel zadává popis modelu
 - ▣ Uživatel zadává hodnoty měření
 - ▣ Systém vygeneruje diferenciální rovnice
 - ▣ Systém udělá identifikaci parametrů a zobrazí výsledky

Shrnutí dnešního cvičení

[Modely populací]

Maticový popis kompartmentové modely

[Co bude dál?]

test