CVIČENÍ MODELOVÁNÍ A SIMULACE

Cvičení 4 - LS 2014 – Michel Kana

Co uděláme ve dnešním cvičení?

1. **Shrnuti minulého cvičeni**
2. **Model populací s věkovou strukturou**
3. **Model dvoudruhových populací dravec – kořist**
4. **Model dvoudruhových populací s konkurence**
5. **Model dvoudruhových populací se spolupráce**
6. **Epidemiologické modely**
7. **Shrnuti**

Shrnutí minulého cvičení

*[**Modely populací**]*
Model populací s věkovou strukturou

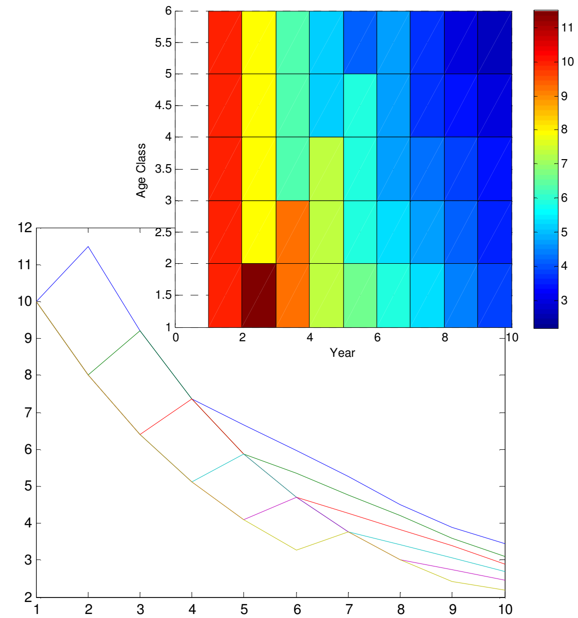
Modely populací s věkovou strukturou

- 6 věkových skupin.
- 10 jedinců ve každé věkové skupině v čase 0.
- Věková skupina 0 a 1 nejsou plodné.
- Ve věkové skupině 2 až 4 je plodnost 0.35 potomku za jednotlivec.
- Ve věkové skupině 5 je plodnost 0.1 potomku za jednotlivec.
- Ve každé věkové skupině, kromě skupina 5 přežije 80% jednotlivců.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.35 & 0.35 & 0.35 & 0.10 \\ 0.8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.8 & 0 \end{bmatrix} X_0 = \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \\ 10 \\ 10 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$A^t \cdot X_0 = X_t$$

```
A = [ 0.00 0.00 0.35 0.35 0.35 0.10; 0.8 0 0 0 0 0; 0 0.8 0 0 0 0; 0 0 0.8 0 0 0; 0 0 0 0.8 0 0; 0 0 0 0 0.8 0]
X = [10;10;10;10;10;10]
A^10 * X
Population = X
for x=1:10, X= A * X; Population = [Population X], end
surf(Population)
view(0,90)
colormap(jet)
colorbar
xlabel('Year')
ylabel('Age Class')
plot(Population')
plot(sum(Population))
[v,lambda] = eig(A)
```



Modely populací s věkovou strukturou

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 20 & 60 \\ 0.05 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.6 & 0 \end{bmatrix}$$

$$X_0 = \begin{bmatrix} 500 \\ 50 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Populace 1

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1.5 & 1.2 \\ .8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & .5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & .25 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 45 \\ 18 \\ 11 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Populace 2

$$\begin{bmatrix} b_0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_{n-1} & b_n \\ p_0 & 0 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & p_1 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_2 & & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & p_{n-1} & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_{0,t} \\ x_{1,t} \\ x_{2,t} \\ x_{3,t} \\ \vdots \\ x_{n,t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{0,t+1} = \sum b_i . x_{i,t} \\ x_{1,t+1} = p_0 . x_{0,t} \\ x_{2,t+1} = p_1 . x_{1,t} \\ x_{3,t+1} = p_2 . x_{2,t} \\ \vdots \\ x_{n,t+1} = p_{n-1} . x_{n-1,t} \end{bmatrix}$$

$$A^t \cdot X_0 = X_t$$

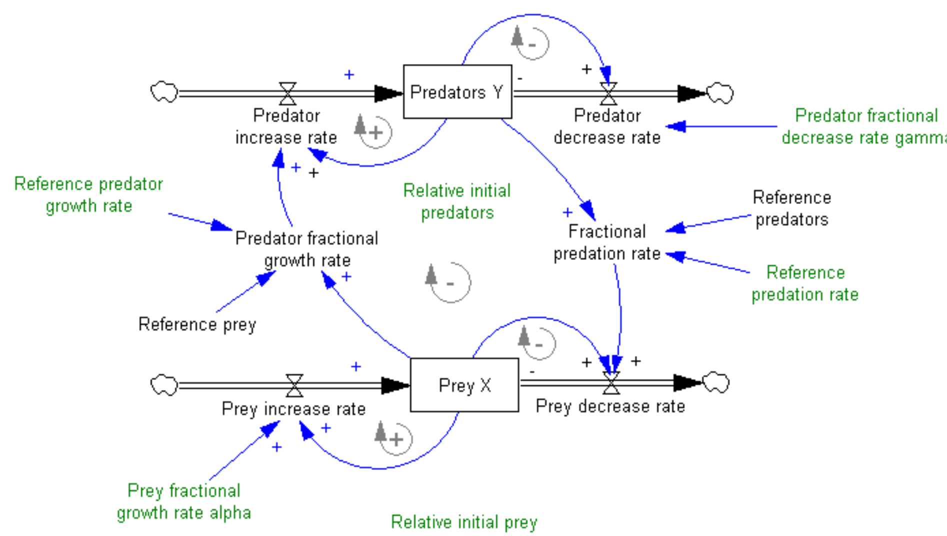
- Vypočítávat vektor stabilní věkové rozložení v a souvislý poměrný exponenciální růst λ.

Model dvoudruhových populací dravec – kořist

- Jedna populace prospívá, druhá chřadne.
- $X(t)$ představuje počet kořistí v čase t.
- $Y(t)$ představuje počet dravců v čase t.
- k_1 představuje relativní porodnosti kořistí.
- $k_1 \cdot X(t)$ vyjadřuje počet kořistí, které se narodily během časového intervalu $\langle t-1 \cdots t \rangle$.
- k_2 představuje pravděpodobnost, že setkání dravce s kořistí skončí zahubením kořisti.
- $k_2 \cdot X(t) \cdot Y(t)$ vyjadřuje počet kořistí ulovených dravci během časového intervalu $\langle t-1 \cdots t \rangle$.
- k_3 představuje účinnost přeměny biomasy kořisti na biomasu dravce.
- $k_3 \cdot k_2 \cdot X(t) \cdot Y(t)$ vyjadřuje počet narozených dravců během časového intervalu $\langle t-1 \cdots t \rangle$.
- k_4 představuje relativní úmrtnost dravců.
- $k_4 \cdot Y(t)$ vyjadřuje úbytek v populaci dravců během časového intervalu $\langle t-1 \cdots t \rangle$.

$$\frac{dX(t)}{dt} = k_1 \cdot X(t) - k_2 \cdot X(t) \cdot Y(t)$$
$$\frac{dY(t)}{dt} = k_3 \cdot k_2 \cdot X(t) \cdot Y(t) - k_4 \cdot Y(t)$$

Rovnice modelu Lotky – Volterry



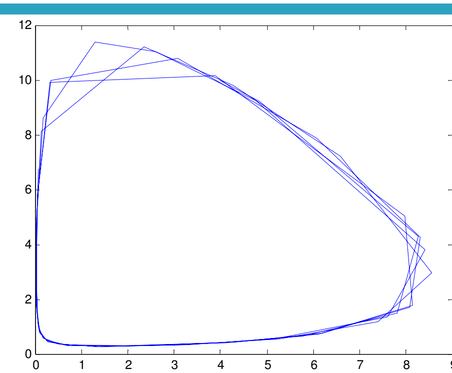
Model dvoudruhových populací dravec – kořist

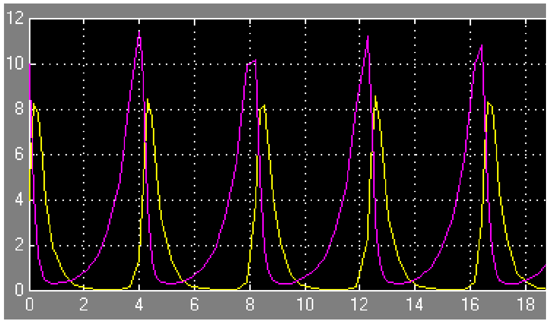
$$\frac{dX(t)}{dt} = k_1 \cdot X(t) - k_2 \cdot X(t) \cdot Y(t)$$

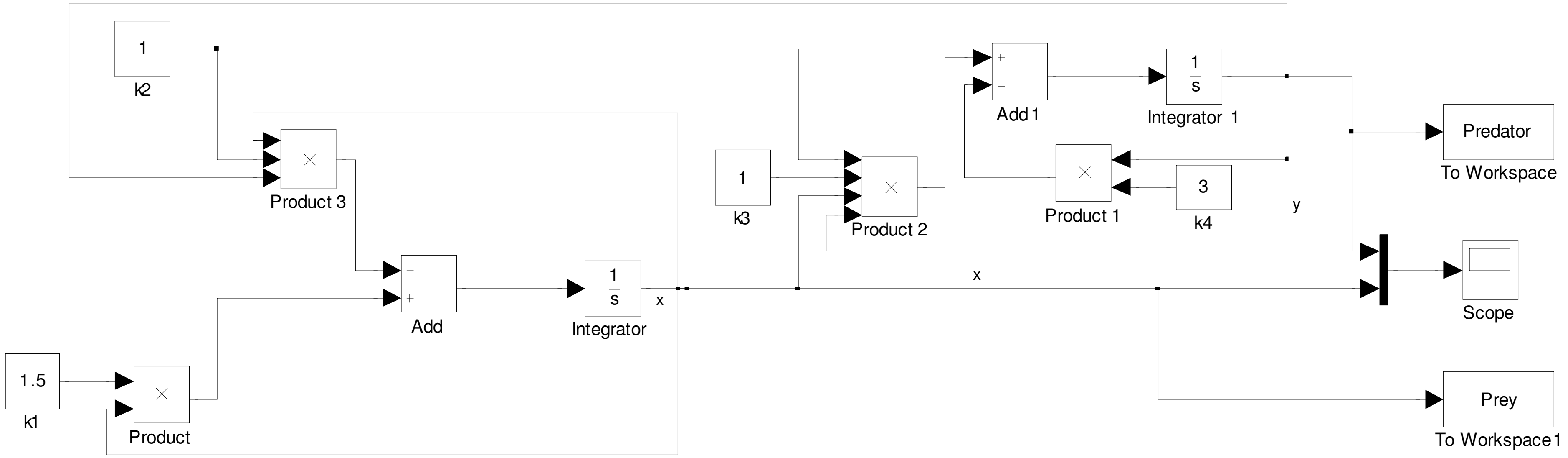
$$\frac{dY(t)}{dt} = k_3 \cdot k_2 \cdot X(t) \cdot Y(t) - k_4 \cdot Y(t)$$

In Matlab

plot(Predator.signals.values,Prey.signals.values)







Model dvoudruhových populací dravec – kořist se zpožděním

- Populace kořisti se vyvíjí podle logistické rovnice
  - ρ_1 představuje porodnosti kořistí
  - K_1 představuje kapacita životního prostředí kořistí.
  - τ_1 je střední doba dosažení reprodukční schopnosti pro kořistí.
  - $\rho_1 \cdot \tau_1 > \frac{\pi}{2}$ umožňující vznik oscilací
- Přírůstek populace dravců je definován vztahem $\frac{\rho_2}{K_1} \cdot X(t)$
  - $\frac{\rho_2}{K_1}$ je vliv vzájemné interakce a přeměny biomasy
  - τ_2 je střední doba dosažení reprodukční schopnosti dravců.
  - $\rho_2 \cdot \tau_2 > \frac{\pi}{2}$ umožňující vznik oscilací
- Úbytek populace dravců je definován vztahem $\frac{\rho_2}{K_2} \cdot Y(t - \tau_2)$.
  - K_2 představuje kapacita životního prostředí dravců .

$$\frac{dX(t)}{dt} = \rho_1 \cdot \left(1 - \frac{X(t-\tau_1)}{K_1}\right) \cdot X(t)$$

$$\frac{dY(t)}{dt} = \rho_2 \cdot \left(\frac{X(t)}{K_1} - \frac{Y(t-\tau_2)}{K_2}\right) \cdot Y(t)$$

Kolmogorovův model dravec – kořist

- Model Lotky – Volterry není realistické.
  - populace dravců a kořisti nekonečně cykluje bez stabilizace
  - populace kořisti v nepřítomnosti predátora poroste exponenciálně
- Funkce A reprezentuje relativní rychlost rozmnožování populace kořistí podle logistické rovnice.
  - ρ je porodnosti populace kořisti
  - K_1 je kapacita životního prostředí populace kořisti
- Funkce V určuje množství kořisti, které dravec uloví za jednotku času v závislosti na stavu populace kořisti.
  - p je maximální přírůstek dravce.
  - a udává množství kořisti potřebné k tomu, aby se dravec mohl rozmnožovat rychlostí $\frac{p}{2}$.
  - c je koeficient přeměny biomasy ∈ (0; 1).
- Funkce K udává celkový přírůstek populace dravce, který je záporný pro nízké stavy kořisti, která nestačí dravce uživit.
  - e a m jsou pozitivní konstanty

$$\frac{dX(t)}{dt} = A \cdot X(t) - V \cdot Y(t)$$
$$\frac{dY(t)}{dt} = K \cdot Y(t)$$
$$A = \rho \cdot \left(1 - \frac{X(t)}{K_1}\right)$$
$$V = \frac{p \cdot X(t)}{c \cdot \big(a + X(t)\big)}$$
$$K = e \cdot V - m$$

*Rovnice modelu **Kolmogorovův***

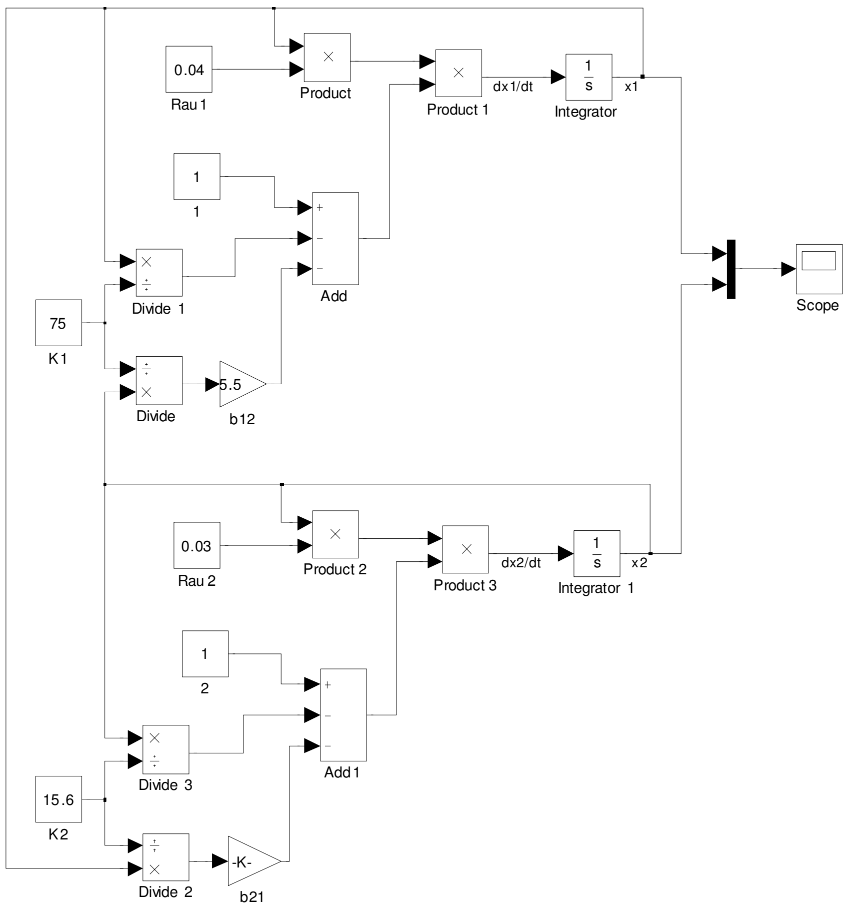
Model dvoudruhových populací s konkurence

- Obě populace vzájemným kontaktem trpí.
- $X_1(t)$ představuje počet jedinců v první populaci.
- $X_2(t)$ představuje počet jedinců v druhé populaci.
- ρ_1 představuje relativní porodnosti první populace.
- ρ_2 představuje relativní porodnosti druhé populace.
- K_1 je kapacita životního prostředí první populace.
- K_2 je kapacita životního prostředí druhé populace.
- b_{12} reprezentují vzájemný konkurenční vliv druhé populace na první.
- b_{21} reprezentují vzájemný konkurenční vliv první populace na druhou.

$$\frac{dX_1\,(t)}{dt} = \rho_1 \cdot \left(1 - \frac{X_1(t)}{K_1} - b_{12} \cdot \frac{X_2(t)}{K_1}\right) \cdot X_1(t)$$

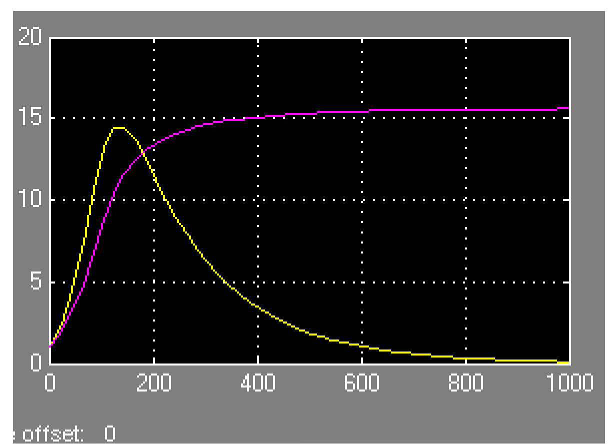
$$\frac{dX_2\,(t)}{dt} = \rho_2 \cdot \left(1 - \frac{X_2(t)}{K_2} - b_{21} \cdot \frac{X_1(t)}{K_2}\right) \cdot X_2(t)$$

Model dvoudruhových populací s konkurence

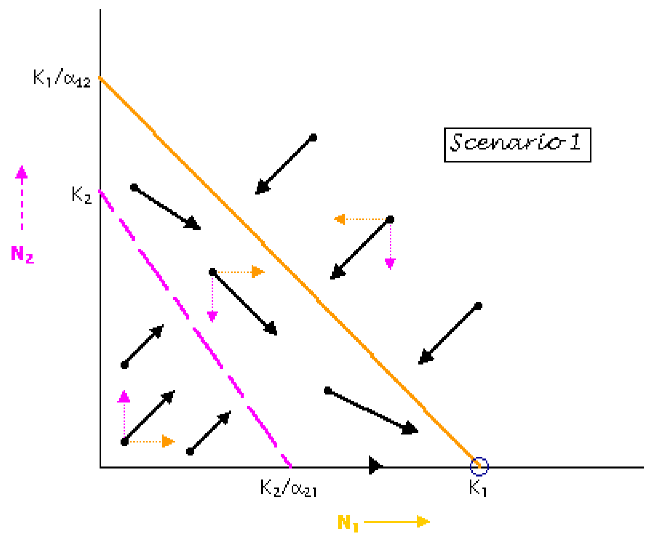


$$\frac{dX_1\,(t)}{dt} = \rho_1 \cdot \left(1 - \frac{X_1(t)}{K_1} - b_{12} \cdot \frac{X_2(t)}{K_1}\right) \cdot X_1(t)$$

$$\frac{dX_2\,(t)}{dt} = \rho_2 \cdot \left(1 - \frac{X_2(t)}{K_2} - b_{21} \cdot \frac{X_1(t)}{K_2}\right) \cdot X_2(t)$$

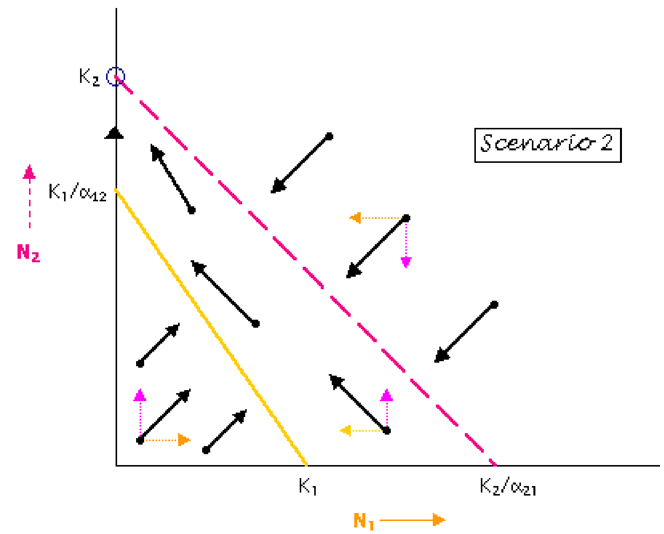


Model dvoudruhových populací s konkurence



Druh 2 zanikne a druh 1 se zmnoží, dokud nedosáhne nosnost K_1

$\frac{K_2}{b_{21}} < K_1$ and $\frac{K_1}{b_{12}} > K_2$

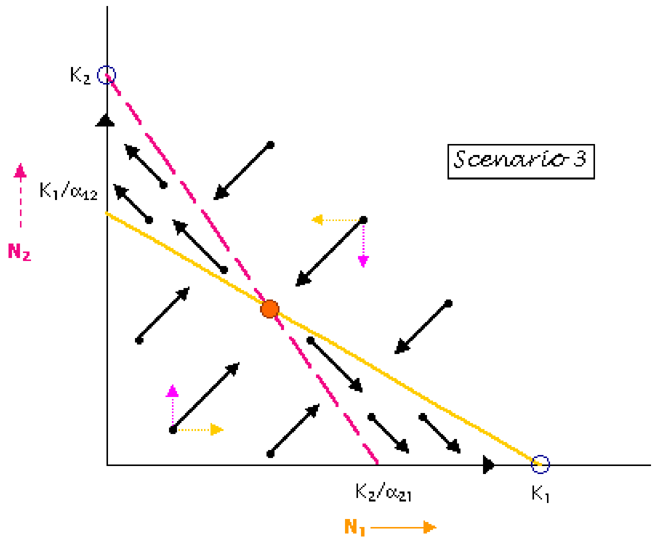


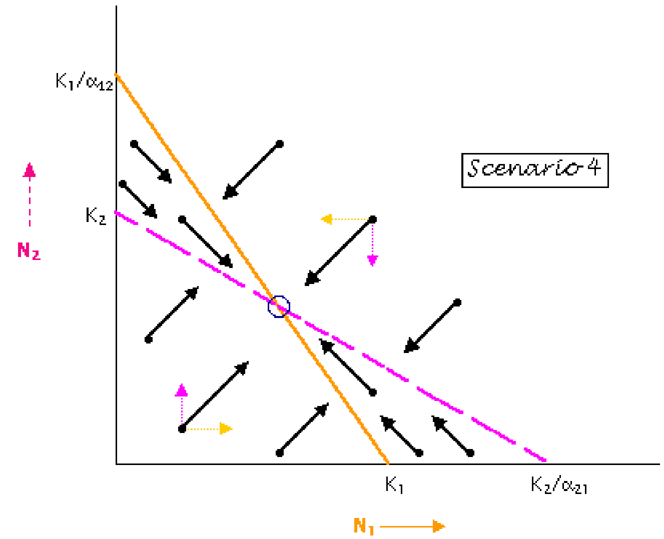
Druh 1 zanikne a druh 2 se zmnoží, dokud nedosáhne nosnost K_2

$\frac{K_2}{b_{21}} > K_1$ and $\frac{K_1}{b_{12}} < K_2$

Zdroj: http://www.tiem.utk.edu/~gross/bioed/bealsmodules/competition.html

Model dvoudruhových populací s konkurence





Výsledek závislí na výchozích počet jedinců pro oba druhů

$\frac{K_2}{b_{21}} < K_1$ and $\frac{K_1}{b_{12}} < K_2$

koexistence obou druhů

$\frac{K_2}{b_{21}} > K_1$ and $\frac{K_1}{b_{12}} > K_2$

Zdroj: http://www.tiem.utk.edu/~gross/bioed/bealsmodules/competition.html

Model dvoudruhových populací se spolupráce

- Vzájemně prospěšnou interakci dvou různých populací.
- $X_1(t)$ představuje počet jedinců v první populaci.
- $X_2(t)$ představuje počet jedinců v druhé populaci.
- ρ_1 představuje relativní porodnosti první populace.
- ρ_2 představuje relativní porodnosti druhé populace.
- K_1 je kapacita životního prostředí první populace.
- K_2 je kapacita životního prostředí druhé populace.
- b_{12} reprezentují vzájemný prospěšný vliv první populace na druhou.
- b_{21} reprezentují vzájemný prospěšný vliv druhé populace na první.

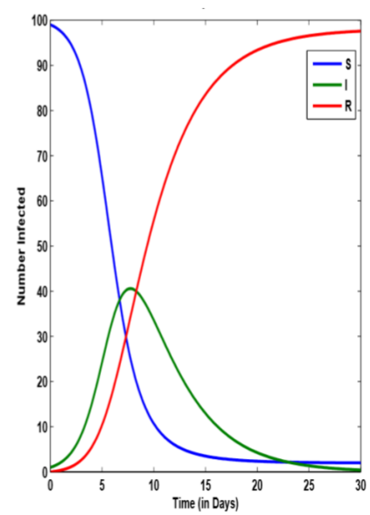
$$\frac{dX_1\,(t)}{dt} = \rho_1 \cdot \left(1 - \frac{X_1(t)}{K_1} + b_{12} \cdot \frac{X_2(t)}{K_1}\right) \cdot X_1(t)$$

$$\frac{dX_2\,(t)}{dt} = \rho_2 \cdot \left(1 - \frac{X_2(t)}{K_2} + b_{21} \cdot \frac{X_1(t)}{K_2}\right) \cdot X_2(t)$$

Epidemiologické modely - SIR

- Jednoduchý model pro mnoho infekčních chorob včetně spalničkám, příušnicím a zarděnkám
- $S(t)$ představuje počet jedinců náchylných k infekci.
- $I(t)$ představuje počet jedinců infikovaných. Jedinci, kteří vykazují známky onemocnění a šíří chorobu dále.
- $R(t)$ představuje počet jedinců v období izolace nebo odolných jedinců. Jedinci, kteří byli dříve infikováni, ale nyní již nemohou šířit chorobu.
- r určuje průměrný rychlost šíření infekce, t.z. počet adekvátních kontaktů (které jsou dostatečné pro přenos infekce) jedince s ostatními.
- a určuje rychlost izolace nebo léčení infikovaných jedinců.
- N představuje celkový počet jedinců v populaci.
- $\frac{r \cdot I(t)}{N}$ představuje průměrný počet kontaktů jednoho náchylného jedince s nakažlivými jedinci za jednotku času.
- $\frac{r \cdot I(t)}{N} \cdot S(t)$ představuje počet nových nakažených případů za jednotku času.
- $\frac{r}{a} \cdot S(0)$ představuje základní reprodukční číslo
  - $\frac{r}{a} \cdot S(0) > 1$: počet nakažených zvyšuje a nemoc se rozšiřuje.
  - $\frac{r}{a} \cdot S(0) < 1$: nemoc vytrácí.

$$\frac{dS\,(t)}{dt} = -r \cdot S(t) \cdot I(t)$$
$$\frac{dI\,(t)}{dt} = r \cdot S(t) \cdot I(t) - a \cdot I(t)$$
$$\frac{dR\,(t)}{dt} = a \cdot I(t)$$
$$S(t) + I(t) + R\,(t) = N$$



Shrnutí dnešního cvičení

[Modely populací]
Model dvoudruhových populací dravec – kořist: *Lotky – Volterry* se zpožděním, Kolmogorovův model
Model dvoudruhových populací s konkurence
Model dvoudruhových populací se spolupráce
Epidemiologické modely

[Co bude dál?]
Příští týden představíme **kompartmentové modely.**