Mini-EP 01

Equação de Onda Unidimensional

Enunciado

Neste primeiro Mini-EP, você deverá implementar a solução da equação de onda unidimensional utilizando o método de integração numérica *leapfrog*, conforme o pseudocódigo fornecido (ver Código 1). A implementação deve ser feita em pelo menos duas linguagens diferentes, e você deve medir o tempo de execução do seu código. Você não precisa otimizar o código, apenas implemente o pseudocódigo.

Há várias maneiras de medir o tempo de execução. Recomendamos o uso do comando `time` no Linux (ou um equivalente no seu sistema operacional). Registre o tempo real. Além disso, é necessário aplicar um mínimo de rigor estatístico: realize as medições pelo menos 20 vezes e calcule a média e o desvio padrão.

Submeta o código-fonte das suas implementações e um arquivo texto contendo seu número USP, o nome das linguagens, o número de execuções, médias e desvios padrão. Para o arquivo texto, se possível, utilize o seguinte formato:

```
12167971
python,100,0.333,0.021
julia,100,0.021,0.001
```

Descrição do Problema

Considere $u = u(x, t)$ uma função escalar que descreve uma onda em uma dimensão. Seu comportamento é descrito pela equação

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Uma breve descrição dos termos e notação:

- u é um campo escalar que descreve o deslocamento da onda em relação a posição de equilíbrio.
- x é a dimensão espacial.
- t é a dimensão temporal.
- $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ mede quão vigorosamente o deslocamento está sendo alterado num determinado ponto.
- $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ mede como o deslocamento está variando num determinado ponto na dimensão x.

O método *leapfrog* é uma técnica de integração de equações diferenciais que aprimora o método de Euler para cálculo de posição e velocidade. Neste método, as velocidades são calculadas com uma janela de meio passo de tempo em relação às posições. Isso é alcançado atualizando-se primeiro todas as velocidades a cada passo de tempo, antes de atualizar as posições, utilizando as novas velocidades para calcular as posições. Para assegurar que as velocidades permaneçam no meio passo de tempo, um passo de $\Delta t/2$ é aplicado exclusivamente às velocidades no primeiro passo.

Sozinha a equação de onda não especifica uma solução física; uma solução única é determinada através de condições iniciais e condições de contorno. O problema a ser resolvido avalia x e t no intervalo $[0, 10]$. As condições iniciais são:

$$\begin{aligned} u(x,0) &= e^{-(x-5)^2}, \\ v(x,0) &= 0. \end{aligned}$$

Já as condições de contorno são:

$$\begin{aligned} u(0,t) &= 0, \\ u(10,t) &= 0, \\ v(0,t) &= 0, \\ v(10,t) &= 0. \end{aligned}$$

Ao final, a solução computada deve ser comparada com a seguinte solução exata:

$$u(x,10) = -e^{-(x-5)^2}.$$

Pseudocódigo

$n_x \leftarrow 500$, $x_0 = t_0 \leftarrow 0$, $x_f = t_f \leftarrow 10$

defina vetores u, v, a, e x de tamanho n_x

$\Delta x \leftarrow (x_f - x_0)/(n_x - 1)$, $\Delta t \leftarrow \Delta x/2$

$n_t \leftarrow [(t_f - t_0)/\Delta t] + 1$

$x \leftarrow$ números com espaçamento uniforme em $[x_0, x_f]$ com passos Δx

\# Condições de contorno e iniciais

$u_i = e^{-(x_i-5)^2}$, para toda posição i na malha x

$v_i = 0$, para toda posição i na malha x

$a_i = 0$, para toda posição i na malha x

para todo tempo t **faça**

- **se** $t = t_0$ **então**
  - $\Delta t_{\text{leapfrog}} \leftarrow \Delta t/2$
- **senão**
  - $\Delta t_{\text{leapfrog}} \leftarrow \Delta t$
- **para toda** posição i na malha x (sem as bordas) **faça**
  - $a_i \leftarrow (u_{i-1} + u_{i+1} - 2u_i)/(\Delta x)^2$ # obtido através de diferenças finitas
- **para toda** velocidade **faça**
  - $v_i \leftarrow v_i + a_i \Delta t_{\text{leapfrog}}$
- **para todo** deslocamento **faça**
  - $u_i \leftarrow u_i + v_i \Delta t$

\# Imprima a solução para determinar convergência (verificando que $u(5, 10) = -1$)

para todo i variando de $(n_x/2) - 10$ até $(n_x/2) + 10$ **faça**

- print(x_i, u_i)

Código 1: Pseudocódigo com a resolução da equação de onda unidimensional através do método *leapfrog*.