

## TRANSFORMAÇÃO DE COORDENADAS E *DATUM* COM PROPAGAÇÃO DE COVARIÂNCIAS

CLAUDINEI RODRIGUES DE AGUIAR<sup>1</sup>

PAULO DE OLIVEIRA CAMARGO

MAURICIO GALO

Universidade Estadual Paulista - UNESP

Faculdade de Ciências e Tecnologia - FCT

Departamento de Cartografia, Presidente Prudente - SP

<sup>1</sup>Bolsista IC - CNPq/PIBIC, Curso de Graduação em Eng. Cartográfica  
{paulo, galo}@prudente.unesp.br

---

**RESUMO** - Atualmente, a maneira mais prática de se obter coordenadas num sistema global é através do posicionamento utilizando os satélites do sistema GPS (Sistema de Posicionamento Global), obtendo-se as coordenadas geodésicas cartesianas (X,Y,Z) ou, após uma transformação, as coordenadas geodésicas ( $\phi, \lambda, h$ ) referidas ao *datum* WGS-84 (Sistema Geodésico Mundial). Além do WGS-84, há uma série de diferentes referenciais geodésicos que são utilizados. Dentre eles pode-se citar o SAD-69, que oficialmente, a Geodésia e a Cartografia nacional utilizam, e o *datum* Córrego Alegre, referencial precursor do SAD-69. Portanto, independente das coordenadas desejadas e do *datum* especificado, é freqüente a necessidade de realizar transformações de coordenadas e de *datum*. Visto que não é comum a disponibilidade de aplicativos que permitem determinar a matriz variância-covariância das coordenadas transformadas, no *datum* desejado, e que é fundamental o conhecimento das covariâncias das coordenadas, bem como a correlação entre elas, este trabalho visa a derivação dos modelos matemáticos que possibilitam a propagação de covariâncias na transformação de coordenadas e *datum*, sejam em transformações no qual a solução seja direta ou iterativa.

**ABSTRACT** – Nowadays, the most popular system used to obtain point positions in a global reference system is GPS (Global Position System). The positions obtained in the adjustment of GPS observables are the Cartesian Coordinates (X,Y,Z). The Geodetic Coordinates ( $\phi, \lambda, h$ ), refereed to the World Reference System WGS-84, is obtained by applying appropriated transformation. Besides WGS-84, others reference systems are used in practical applications. In Brazil, one can consider the *Córrego Alegre Datum* and the South American *Datum* - SAD-69. The latest one is the official reference system adopted by IBGE. Therefore, independently of the coordinates and the *datum* considered, it is frequently necessary to make transformations of coordinates and *datum*. Since software that performs the covariance propagation for the coordinates and *datum* transformations is not frequently available, the aim of this paper is to develop the equations that allow computing the variance-covariance matrix, after the coordinate and *datum* transformations is performed, for both, direct and iterative transformations models.

---

### 1 INTRODUÇÃO

Com o advento da tecnologia de posicionamento por satélite, os levantamentos geodésicos tornaram-se menos onerosos, mais precisos e mais rápidos do que os levantamentos executados com procedimentos clássicos da Geodésia. O GPS permite a obtenção das coordenadas geodésicas cartesianas (X,Y,Z) ou, após uma transformação, as coordenadas geodésicas ( $\phi, \lambda, h$ ) referidas ao *datum* WGS-84, que utiliza o Sistema de Referência Geodésico GRS-80 como elipsóide de referência.

Além do WGS-84, há uma série de diferentes referenciais geodésicos utilizados na prática. Dentre eles, pode-se citar o SAD-69, que oficialmente, a Geodésia e a

Cartografia nacional utilizam, com exceção da marinha e aeronáutica que empregam o WGS-84, por força de acordos internacionais. No entanto, parte da produção cartográfica oficial ainda é apresentada no *datum* Córrego Alegre, referencial precursor do SAD-69 (Santos, 1999). Portanto, independente das coordenadas desejadas e do *datum* especificado, freqüentemente existe a necessidade de realizar transformações de coordenadas e de *datum*.

Associado à transformação de coordenadas e de *datum* tem-se a questão da propagação de covariância, que permite obter a matriz variância-covariância (MVC) das coordenadas transformadas, no *datum* desejado. A disponibilidade de aplicativos que permite a transformação de coordenadas e de *datum* é grande, no entanto de propagação de covariâncias é menor. Dentre os

sistemas e aplicativos podem-se considerar aqueles comerciais que tratam, dentre várias outras opções, da transformação de coordenadas e aqueles não comerciais, e de uso restrito, tais como: TransCor (Oliveira e Silva, 1999) e TCD (Galo, 1992).

Justamente devido ao fato de se ter um número restrito de aplicativos que permitam a determinação da MVC no processo de transformação de coordenadas e de *datum*, este trabalho visa apresentar a derivação dos modelos matemáticos que possibilitam a propagação de covariâncias neste processo.

## 2 SISTEMAS DE REFERÊNCIA E DATA ADOTADOS NO BRASIL

Os sistemas de referência são utilizados para descrever de modo unívoco as posições de objetos. Em atividades ligadas às Ciências Cartográficas, quando é necessário definir a posição de um determinado objeto na superfície da Terra são utilizados os Sistemas de Referência Geodésicos. Além dos Sistemas de Referência Geodésicos, as informações posicionais podem ser apresentadas em um sistema de coordenadas plano, associados a uma determinada projeção cartográfica.

Independente do método utilizado para se representar ou projetar uma determinada superfície no plano, deve-se adotar uma superfície que sirva de referência (elipsóide de revolução, por exemplo).

No Brasil, por um certo período, adotou-se o elipsóide de Hayford como figura geométrica para os trabalhos geodésicos. Atualmente, no entanto, utiliza-se com mais frequência o elipsóide da União Astronômica Internacional, homologado em 1967 pela Associação Internacional de Geodésia, denominado GRS-67, cujos parâmetros são apresentados na Tabela 1.

**Tabela 1** – Parâmetros dos elipsóides atualmente utilizados no Brasil (IBGE, 2001).

Elipsóide	Semi-eixo maior - a (m)	Achatamento - f
Hayford	6.378.338,00	1/297
GRS-67	6.378.160,00	1/298,25
GRS-80	6.378.137,00	1/298,257223563

O *datum* Córrego Alegre, utilizado em uma série de produtos por diversas instituições, considera como figura geométrica o elipsóide de Hayford e o *datum* SAD-69 utiliza o GRS-67. O elipsóide de referência GRS-80, apresentado na Tabela 1, é adotado como superfície de referência para o *datum* WGS-84.

### 2.1 Sistema Geodésico Brasileiro

Define-se por Sistema Geodésico Brasileiro (SGB) o conjunto de pontos geodésicos implantados na porção da superfície terrestre delimitada pelas fronteiras do país. Em outras palavras é o sistema ao qual estão referenciadas todas as informações espaciais no Brasil (IBGE, 2001).

O Brasil atualmente adota o Sistema Geodésico Sul-Americano SAD-69. O SAD-69 é um sistema

geodésico regional de concepção clássica que tinha como objetivo a unificação do referencial para os trabalhos geodésicos e cartográficos na América do Sul (Costa, 2000). A sua adoção no Brasil se deu no final da década de 70. A materialização do SAD-69 foi realizada por técnicas e métodos de posicionamento terrestre, destacando-se a triangulação e poligonização.

Como já mencionado, para o *datum* SAD-69 a imagem geométrica da Terra é definida pelo Elipsóide de Referência Internacional de 1967, aceito pela Assembléia Geral da Associação Geodésica Internacional. Para o posicionamento espacial do GRS-67 utilizou-se de parâmetros topocêntricos obtidos no ponto origem, vértice geodésico Chuá, localizado no estado de Minas Gerais.

O referencial altimétrico coincide com a superfície equipotencial que contém o nível médio do mar, definido pelas observações maregráficas tomadas na baía de Imbituba, no Estado de Santa Catarina.

Na Tabela 2 são apresentados alguns dos parâmetros definidores deste sistema (IBGE, 2001):

**Tabela 2** – Parâmetros definidores do Sistema Geodésico Brasileiro - SGB.

<b>Superfície de referência:</b>	Elipsóide Internacional de 1967 (GRS-67)
<b>Ponto datum</b>	Vértice Chuá
<b>Coordenadas geodésicas do ponto datum:</b>	Latitude = 19° 45' 41",6527S Longitude = 48° 06' 04",0639W Azimute (Chuá-Uberaba)=271° 30' 04",05 SWNE
<b>Altitude ortométrica:</b>	763,28 metros
<b>Orientação elipsóide-geóide no ponto datum:</b>	N=0 metros (Ondulação Geoidal) $\xi=0''$ ,31 (componente meridiana do desvio da vertical) $\eta=-3''$ ,52 (componente primeiro vertical do desvio da vertical)

### 3 APLICATIVO TCD

O aplicativo TCD – Transformação de Coordenadas e *Datum* (Galo, 1992), trata-se de um aplicativo não comercial, de uso interno nas atividades de ensino e pesquisas desenvolvidas junto ao Departamento de Cartografia da FCT/UNESP. Este aplicativo foi desenvolvido em linguagem de programação FORTRAN 77, e realiza as transformações entre os sistemas geodésicos Córrego Alegre, SAD-69 e WGS 84. Além disto, permite realizar transformações envolvendo as coordenadas geodésicas cartesianas (X,Y,Z), as coordenadas geodésicas ( $\phi, \lambda, h$ ) e o sistema de coordenadas planas na projeção UTM - Universal Transversa de Mercator (E, N).

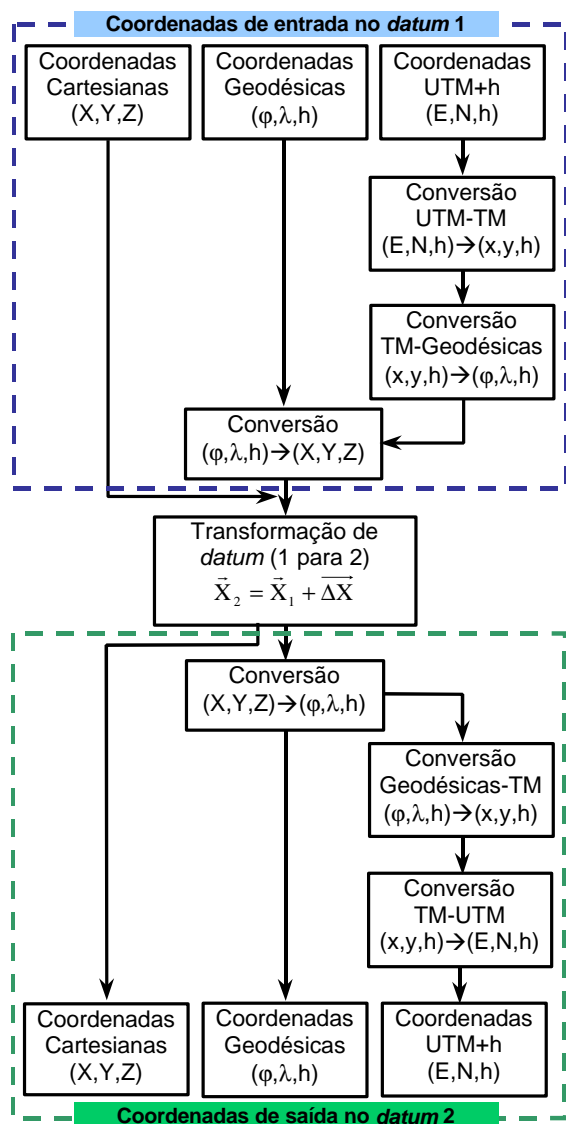
As transformações entre *data* são efetuadas diretamente no sistema cartesiano tridimensional, utilizando-se os parâmetros estabelecidos pelo IBGE (1983, 1989). Na Tabela 3 são apresentados os parâmetros utilizados pelo TCD para efetuar a transformação entre o SAD-69 e os sistemas de referências que são adotados no Brasil, do ponto de vista prático.

**Tabela 3** – Parâmetros de translação entre SAD-69 e outros sistemas (IBGE, 2001).

Sistemas		
Parâmetros	Córrego Alegre	WGS-84
$\Delta x$ (m)	138,70	-66,87
$\Delta y$ (m)	-164,40	4,37
$\Delta z$ (m)	-34,40	-38,52

Deve-se salientar que não se dispõe de parâmetros de transformação direta entre o sistema Córrego Alegre e o WGS-84, portanto realiza-se uma transformação intermediária para SAD-69.

Na Figura 1 é apresentado um fluxograma que apresenta as coordenadas de entrada e saída pelo aplicativo, além de todas as transformações disponíveis.

**Figura 1** – Fluxograma mostrando as transformações disponíveis no aplicativo TCD.

Pode-se observar que nesse fluxo não se considera a transformação direta entre as coordenadas geodésicas em coordenadas no sistema UTM. Considera-se no entanto uma transformação intermediária para o sistema de projeção TM - Transverso de Mercado. Esta escolha se

deve ao fato de que a partir das coordenadas no sistema TM pode-se transformar para uma série de sistemas modificados derivados da projeção TM, entre eles o Regional Transverso de Mercator (RTM) e o Local Transverso de Mercator (LTM), ainda não implementados no aplicativo. Para mais detalhes sobre a conversão entre as coordenadas TM, e alguns sistemas modificados, sugere-se Blachut et al. (1979) e Galo (2001).

#### 4 PROPAGAÇÃO DE COVARIÂNCIAS

Muitas vezes torna-se necessária a disponibilidade de coordenadas transformadas, para o sistema desejado, acompanhadas de suas respectivas variâncias. Para se conhecer a matriz variância-covariância (MVC) das coordenadas transformadas, deve-se dispor da MVC das coordenadas no sistema inicial e realizar a propagação de variância-covariância, ou simplesmente a propagação de covariância.

Através da propagação de covariâncias pode-se obter as características estocásticas das variáveis funcionalmente dependentes, conhecendo as características das variáveis independentes e a relação funcional entre os dois conjuntos de variáveis (Camargo, 2000). No caso de transformação de coordenadas, a tarefa da propagação consiste em determinar as propriedades estocásticas das coordenadas transformadas, a partir das propriedades das coordenadas originais. Mesmo considerando que eventualmente as coordenadas originais sejam independentes, não correlacionadas, não significa que o mesmo ocorra com as coordenadas transformadas, já que o próprio modelo matemático que interliga as coordenadas, as correlaciona (Gemael, 1994).

A partir dos modelos matemáticos utilizados, pelo aplicativo TCD, foram derivados os modelos que permitem a propagação de covariâncias. Os modelos matemáticos utilizados na transformação de coordenadas são descritos principalmente em Blachut et al. (1979) e Vanícek e Krakiwsky (1986).

Durante o desenvolvimento das derivações de tais modelos pode-se observar alguns aspectos importantes e que foram definidores nos caminhos adotados para realizar a propagação de covariâncias nas respectivas transformações. Tais aspectos se referem aos modelos de solução iterativa utilizados em algumas transformações.

As transformações de coordenadas geodésicas em cartesianas e de coordenadas geodésicas em TM são realizadas por modelos de solução direta, o que facilita a aplicação da derivação e consequentemente a propagação de covariâncias. Já a transformação de coordenadas cartesianas em geodésicas pode ser realizada por modelos de solução não rigorosa (direta) e de solução iterativa. Devido a complexidade em obter as derivadas nos casos iterativos, pode-se adotar, a princípio, duas soluções: a partir da derivação dos modelos de solução direta, ou adotar o inverso do modelo de propagação empregado na transformação de coordenadas geodésicas em cartesianas, como será apresentado nas próximas seções.

Finalmente, a transformação de coordenadas TM em geodésicas é dependente de modelos iterativos, o que

dificulta a obtenção das derivadas. Logo, uma solução coerente é a aplicação da propagação de covariâncias adotando o inverso do modelo de propagação obtido na transformação de coordenadas geodésicas em TM, evitando-se deste modo a derivação de modelos não rigorosos bem como de modelos iterativos.

#### 4.1 Lei de Propagação das Covariâncias

Nesta seção aborda-se alguns aspectos básicos da lei de propagação de covariância, sendo consideradas as seguintes referências básicas: Camargo (2000), Gemael (1994) e Strang & Borre (1997).

A demonstração da lei de propagação é de grande importância para este trabalho uma vez que serve para a derivação das operações realizadas nas próximas seções.

Considerando os vetores  $X$  e  $Y$ , cujos componentes são variáveis aleatórias, pode-se considerar que eles são relacionados por um modelo linear na forma:

$$Y = GX + C, \quad (1)$$

onde:

$Y$ : vetor das quantidades calculadas;

$G$ : matriz dos coeficientes;

$X$ : vetor das observações, com média  $U_x$  e MVC  $\Sigma_x$ ;

$C$ : vetor de constantes.

Ao ser aplicando o operador esperança  $E\{\cdot\}$  a ambos os membros da Equação 1 tem-se que:

$$U_Y = E\{Y\} = E\{GX + C\} = GE\{X\} + C,$$

$$U_Y = GU_X + C. \quad (2)$$

A MVC de  $Y$ , por definição, é dada por:

$$\Sigma_Y = E\{(Y - U_Y)(Y - U_Y)^T\}. \quad (3)$$

Substituindo as Equações 1 e 2 em 3 e desenvolvendo a expressão obtida pode-se obter a função que permite fazer a propagação das covariâncias para funções lineares:

$$\Sigma_Y = G\Sigma_X G^T, \quad (4)$$

cujas demonstração pode ser vista em Gemael (1994).

A Equação 4 pode ser generalizada para o caso de equações não lineares. Admitindo que o modelo não linear seja escrito por:

$$Y = F(X), \quad (5)$$

o desenvolvimento de  $F(X)$  em série de Taylor, desprezando-se os termos de ordem superior à primeira, possibilita escrever:

$$Y = F(X) \cong F(X^0) + \left. \frac{\partial F}{\partial X} \right|_{X^0} (X - X^0). \quad (6)$$

De modo análogo ao utilizado na obtenção da Equação 4 pode-se obter a lei de propagação das covariâncias para funções não lineares. Assim, pode-se escrever:

$$\Sigma_Y = D\Sigma_X D^T, \quad (7)$$

onde  $D$  representa a matriz Jacobiana formada pelas derivadas parciais, ou seja:

$$D = \left. \frac{\partial F}{\partial X} \right|_{X^0} = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial y_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1} & \frac{\partial y_m}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial y_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}. \quad (8)$$

#### 4.2 Propagação das covariâncias na transformação de coordenadas geodésicas em cartesianas

As Equações utilizadas na conversão de coordenadas geodésicas em cartesianas ( $X, Y, Z$ ), são dadas por:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (N + h) \cos \varphi \cos \lambda \\ (N + h) \cos \varphi \sin \lambda \\ [N(1 - e^2) + h] \sin \varphi \end{bmatrix}, \quad (9)$$

onde  $N$  é a grande normal, calculada por  $(N=a/(1-e^2 \sin^2 \varphi)^{1/2})$ , sendo  $e$  a excentricidade do elipsóide de referência.

A propagação de covariância, na conversão de coordenadas geodésicas em cartesianas, pode ser realizada aplicando a seguinte fórmula:

$$\Sigma_{XYZ} = D \Sigma_{\varphi\lambda h} D^T, \quad (10)$$

onde:

$D$ : é a matriz Jacobiana;

$\Sigma_{\varphi\lambda h}$ : é a matriz variância-covariância das coordenadas geodésicas;

$\Sigma_{XYZ}$ : é a matriz variância-covariância das coordenadas cartesianas.

Os elementos da matriz  $D$  são obtidos a partir das derivadas parciais da Equação 9 em relação a  $(\varphi, \lambda, h)$ , obtendo-se:

$$D = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial \lambda} & \frac{\partial x}{\partial h} \\ \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \lambda} & \frac{\partial y}{\partial h} \\ \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \lambda} & \frac{\partial z}{\partial h} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(M + h) \sin \varphi \cos \lambda & -(N + h) \cos \varphi \sin \lambda & \cos \varphi \cos \lambda \\ -(M + h) \sin \varphi \sin \lambda & (N + h) \cos \varphi \cos \lambda & \cos \varphi \sin \lambda \\ (M + h) \cos \varphi & 0 & \sin \varphi \end{bmatrix} \quad (11)$$

onde  $M$  é o raio de curvatura da seção meridiana, dado por  $M=a(1-e^2)/(1-e^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}$ .

#### 4.3 Propagação das covariâncias na transformação de coordenadas cartesianas em geodésicas

A fórmula que expressa a propagação de covariâncias para este caso pode ser escrita da seguinte forma:

$$\Sigma_{\phi\lambda h} = D' \Sigma_{XYZ} D'^T, \quad (12)$$

onde  $D'$  é a matriz Jacobiana, calculada em função de modelos que permitem calcular  $(\phi, \lambda, h)$  a partir de  $(X, Y, Z)$ .

A propagação de covariâncias para este caso é mais complexa do que aquela exposta na seção anterior. Esta complexidade se deve aos modelos matemáticos utilizados na transformação de coordenadas cartesianas em geodésicas, que podem ser realizadas utilizando modelos de solução direta ou iterativa (Vanícek e Krakiwsky, 1986; Monico, 2000).

Existem dois caminhos a serem considerados para a propagação de covariância, segundo a Equação 12. Uma opção consiste em determinar os elementos da matriz Jacobiana, a partir dos modelos matemáticos utilizados na solução iterativa. Porém, como é complexo o desenvolvimento das derivadas parciais para modelos iterativos, uma alternativa é a determinação dos elementos da matriz  $D$  utilizando-se os modelos matemáticos de solução direta, que não são rigorosos.

Contudo, uma terceira alternativa pode ser empregada. Considerando que a transformação de coordenadas cartesianas em geodésicas tenha sido realizada, pode-se calcular todos os elementos que compõem a matriz Jacobiana dada em 11. Logo, pode-se isolar na Equação 10 a MVC das coordenadas geodésicas. Para isolar a MVC das coordenadas geodésicas  $(\phi, \lambda, h)$  deve-se pré-multiplicar os dois membros da Equação 10 por  $D^{-1}$  e pós-multiplicar por  $D^{T^{-1}}$ , sem que a igualdade seja modificada, obtendo-se:

$$D^{-1} \Sigma_{XYZ} D^{T^{-1}} = D^{-1} D \Sigma_{\phi\lambda h} D^T D^{T^{-1}}$$

e

$$\Sigma_{\phi\lambda h} = D^{-1} \Sigma_{XYZ} D^{T^{-1}} \quad (13)$$

onde  $D^{-1}$  é o inverso da matriz Jacobiana ( $D$ ), obtida pela Equação 11.

A Equação 13 permite portanto a propagação de covariâncias para a transformação de coordenadas cartesianas em geodésicas. Esta solução possibilita o uso da Matriz  $D$ , obtida na propagação inversa (geodésicas em cartesianas), sem no entanto ter que se utilizar derivações que se baseiam em soluções não rigorosas e em modelos iterativos.

#### 4.4 Propagação das covariâncias na transformação de coordenadas geodésicas em TM

As Equações básicas utilizadas na conversão de coordenadas geodésicas  $(\phi, \lambda)$  em TM  $(x, y)$ , são dadas por (Blachut et al., 1979):

$$x = B_{\phi} + a_2 \Delta\lambda^2 + a_4 \Delta\lambda^4 + a_6 \Delta\lambda^6 + \dots \quad (14)$$

$$y = a_1 \Delta\lambda + a_3 \Delta\lambda^3 + a_5 \Delta\lambda^5 + \dots \quad (15)$$

onde:

$\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0$  (em radianos), sendo  $\lambda_0$  a longitude do meridiano central;

$B_{\phi}$ : comprimento de arco meridiano calculado em função da latitude do ponto considerado;

$a_1, a_2, \dots, a_6$ : são os coeficientes calculados em função de  $\phi$  e dos parâmetros do elipsóide.

A propagação de covariâncias pode ser realizada aplicando a seguinte expressão:

$$\Sigma_{xy} = D \Sigma_{\phi\lambda} D^T \quad (16)$$

onde:

$\Sigma_{\phi\lambda}$ : é a matriz variância-covariância das coordenadas geodésicas;

$\Sigma_{xy}$ : é a matriz variância-covariância das coordenadas TM.

A matriz  $D$  da Equação 16 é formada pelas derivadas parciais das Equações 14 e 15, ou seja:

$$D = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \phi} & \frac{\partial x}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial y}{\partial \phi} & \frac{\partial y}{\partial \lambda} \end{bmatrix} \quad (17)$$

onde:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial \phi} = & B' + \frac{\Delta\lambda}{2} [-M \sin^2 \phi + a_1 \cos \phi] \Delta\lambda^2 \\ & + \frac{\Delta\lambda^4}{24} (-M \sin^2 \phi + a_1 \cos \phi) (-1 + 6 \cos^2 \phi + 9 e^2 \cos^4 \phi + 4 e^4 \cos^6 \phi) \\ & - \frac{\Delta\lambda^4 a_2}{12} (12 \cos \phi \sin \phi + 36 e^2 \cos^3 \phi \sin \phi + 24 e^4 \cos^5 \phi \sin \phi) \\ & + \frac{\Delta\lambda^6}{720} (-M \sin^2 \phi + a_1 \cos \phi) (-1 + 60 \cos^2 \phi + 120 \cos^4 \phi) \\ & + \frac{\Delta\lambda^6 a_2}{360} (120 \cos \phi \sin \phi - 480 \cos^3 \phi \sin \phi) \end{aligned} \quad (18)$$

$$\frac{\partial x}{\partial \lambda} = 2 a_2 (\lambda - \lambda_0) + 4 a_4 (\lambda - \lambda_0)^3 + 6 a_6 (\lambda - \lambda_0)^5 \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial \phi} = & -M \sin \phi \Delta\lambda - \frac{M \sin \phi \Delta\lambda^3}{6} (-1 + 2 \cos^2 \phi + e^2 \cos^4 \phi) \\ & - \frac{a_1 \Delta\lambda^3}{6} (4 \cos \phi \sin \phi + 4 e^2 \cos^3 \phi \sin \phi) - \frac{M \sin \phi \Delta\lambda^5}{120} [1 - 20 \cos^2 \phi \\ & + (24 - 58 e^2) \cos^4 \phi + 72 e^2 \cos^6 \phi] - \frac{a_1 \Delta\lambda^5}{120} [40 \cos \phi \sin \phi \\ & + (96 - 232 e^2) \cos^3 \phi \sin \phi + 432 e^2 \cos^5 \phi \sin \phi] \end{aligned} \quad (20)$$

$$\frac{\partial y}{\partial \lambda} = a_1 + 3 a_3 (\lambda - \lambda_0)^2 + 5 a_5 (\lambda - \lambda_0)^4 \quad (21)$$

Na Equação 18 pode-se observar que é necessário conhecer  $B'$ , ou seja, a derivada do comprimento do arco

de meridiano B em relação a  $\phi$ , chegando-se a seguinte expressão:

$$B' = \frac{\partial B}{\partial \phi} = A_0 c + A_1 c (\sin^2 \phi - \cos^2 \phi) + A_1 A_2 c \sin^2 \phi (\sin^2 \phi - 3 \cos^2 \phi) + A_1 A_4 c \sin^4 \phi (\sin^2 \phi - 5 \cos^2 \phi) + A_1 A_6 c \sin^6 \phi (\sin^2 \phi - 7 \cos^2 \phi) + A_1 A_8 c \sin^8 \phi (\sin^2 \phi - 9 \cos^2 \phi) \quad (22)$$

onde:

$A_0, \dots, A_8$ : coeficientes calculados em função da segunda excentricidade ( $e'$ ) do elipsóide de revolução;

$c$ : raio polar de curvatura calculado em função dos semi-eixos  $a$  e  $b$  do elipsóide por  $c = a^2/b$ .

#### 4.5 Propagação das covariâncias na transformação de coordenadas TM em geodésicas

As equações utilizadas na transformação de coordenadas TM em geodésicas, descritas em Blachut et al. (1979), podem ser dadas por:

$$\phi = \phi_1 + b_2 y^2 + b_4 y^4 + b_6 y^6 + \dots \quad (23)$$

$$\lambda = \lambda_0 + b_1 y + b_3 y^3 + b_5 y^5 + \dots \quad (24)$$

onde  $\lambda_0$  é a longitude do meridiano central e  $\phi_1$  é a latitude correspondente ao arco de meridiano de comprimento  $x$ , ambos dados em radianos; e  $b_1, \dots, b_6$  são os coeficientes calculados em função da latitude  $\phi_1$  e da segunda excentricidade do elipsóide adotado como referência.

A propagação de covariâncias na transformação de coordenadas TM em geodésicas, podem ser obtidas de duas maneiras diferentes. A primeira opção é aplicar a lei de propagação de covariâncias através da equação:

$$\Sigma_{\phi\lambda} = D' \Sigma_{xy} D'^T \quad (25)$$

A matriz  $D'$  na Equação 25 é obtida através das derivadas parciais das Equações 23 e 24 em relação a  $x$  e  $y$ , podendo ser escrita da seguinte forma:

$$D = \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x} & \frac{\partial \phi}{\partial y} \\ \frac{\partial \lambda}{\partial x} & \frac{\partial \lambda}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial \phi_1} \frac{\partial \phi_1}{\partial x} & \frac{\partial \phi}{\partial \phi_1} \frac{\partial \phi_1}{\partial y} \\ \frac{\partial \lambda}{\partial \phi_1} \frac{\partial \phi_1}{\partial x} & \frac{\partial \lambda}{\partial \phi_1} \frac{\partial \phi_1}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (26)$$

$$= \begin{bmatrix} \left( 1 + b'_2 y^2 + b'_4 y^4 + b'_6 y^6 \right) \frac{\partial \phi_1}{\partial x} & 2 b_2 y + 4 b_4 y^3 + 6 b_6 y^5 \\ \left( b'_1 y + b'_3 y^3 + b'_5 y^5 \right) \frac{\partial \phi_1}{\partial x} & b_1 + 3 b_3 y^2 + 5 b_5 y^4 \end{bmatrix}$$

onde  $b'_1, \dots, b'_6$ , representam as derivadas parciais dos coeficientes  $b_1, \dots, b_6$ , em relação a  $\phi_1$ .

No entanto, deve-se salientar que há uma dificuldade no cálculo da derivada de  $\phi_1$  em relação a  $x$ , pois  $\phi_1$  é obtido por um processo iterativo, o que dificulta o cálculo da matriz  $D'$  pela Equação 26. Uma alternativa é realizar um procedimento análogo ao mostrado na seção 4.3.

Logo, considerando-se que a transformação de coordenadas TM em geodésicas tenha sido realizada, torna-se possível o cálculo dos elementos que compõem a matriz 17. Assim, a MVC das coordenadas geodésicas pode ser obtida por:

$$\Sigma_{\phi\lambda} = D^{-1} \Sigma_{xy} D^{T^{-1}}, \quad (27)$$

onde  $D^{-1}$  é o inverso da matriz Jacobiana calculada a partir da Equação 17.

A Equação 27 expressa portanto a propagação de covariâncias para a transformação de coordenadas do sistema TM em geodésicas.

#### 4.6 Propagação das covariâncias na transformação de coordenadas TM em UTM e vice-versa

Normalmente as coordenadas referidas a um determinado Sistema de Referência Geodésico são representadas numa determinada projeção, sendo a projeção UTM uma das mais utilizadas em diversos países.

No Brasil a projeção UTM é a mais utilizada pela comunidade cartográfica. Trata-se de uma projeção derivada do sistema TM, cuja principal propriedade é a conformidade. Assim, as coordenadas (E,N) no sistema UTM podem ser obtidas a partir das coordenadas (x,y) no sistema TM, por:

Hemisfério Sul:

$$N = N' + m_0 x \quad (28)$$

$$E = E' + m_0 y \quad (29)$$

Hemisfério Norte:

$$N = m_0 x \quad (30)$$

$$E = E' + m_0 y \quad (31)$$

onde o valor  $m_0=0,9996$  corresponde ao fator de redução de escala ao longo do meridiano central ( $\lambda_0$ ),  $N'=10.000.000m$  e  $E'=500.000m$ .

Nas Equações 28 a 31 os modelos são lineares, o que simplifica a propagação de covariâncias. Logo, a propagação de covariâncias para as coordenadas UTM pode ser obtida por:

$$\Sigma_{NE} = G \Sigma_{xy} G^T \quad (32)$$

onde:

$G$ : é a matriz dos coeficientes;

$\Sigma_{xy}$ : é a matriz variância-covariância das coordenadas no sistema TM;

$\Sigma_{NE}$ : é a matriz variância-covariância das coordenadas UTM.

Portanto, a matriz variância-covariância das coordenadas E e N, pode ser obtida por:

$$\Sigma_{NE} = \begin{bmatrix} m_0 & 0 \\ 0 & m_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_y^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_0 & 0 \\ 0 & m_0 \end{bmatrix} \quad (33)$$

onde:

$m_0=0,9996$ ;

$\sigma_x^2$  e  $\sigma_y^2$ : correspondem às variâncias das coordenadas x e y, respectivamente;

$\sigma_{xy}$ : covariância entre x e y.

Deve-se lembrar que se for de interesse a determinação da MVC para as coordenadas nos sistemas RTM, LTM, Gauss Tardi, etc, basta atribuir os valores do fator de redução de escala ( $m_0$ ) no meridiano central e as constantes E' e N', para cada um dos sistemas modificados.

A propagação no sentido inverso permite calcular a MVC das coordenadas TM por:

$$\Sigma_{xy} = G^{-1} \Sigma_{NE} G^T, \quad (34)$$

onde  $G^{-1}$  é o inverso da matriz dos coeficientes. Logo, a partir da Expressão 34 pode-se obter:

$$\Sigma_{xy} = \begin{bmatrix} m_0^{-1} & 0 \\ 0 & m_0^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_N^2 & \sigma_{NE} \\ \sigma_{NE} & \sigma_E^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_0^{-1} & 0 \\ 0 & m_0^{-1} \end{bmatrix}. \quad (35)$$

#### 4.6 Propagação das covariâncias na transformação de Datum

De posse das coordenadas cartesianas, a transformação de data pode ser realizada aplicando os parâmetros de translação, podendo-se escrever:

$$\begin{bmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{bmatrix}, \quad (36)$$

onde os vetores  $[X_1 \ Y_1 \ Z_1]^T$  e  $[X_2 \ Y_2 \ Z_2]^T$  representam as coordenadas cartesianas nos data de entrada (1) e de saída (2), respectivamente. Os valores de translação ( $\Delta X \ \Delta Y \ \Delta Z$ ) adotados no Brasil estão apresentados na Tabela 3.

A matriz variância-covariância das coordenadas cartesianas no datum de saída (2) é dada por:

$$\Sigma_{X_2 Y_2 Z_2} = G \Sigma_{X_1 Y_1 Z_1 \Delta X \Delta Y \Delta Z} G^T, \quad (37)$$

onde G é a matriz dos coeficientes dada por,

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (38)$$

Na Equação 37  $\Sigma_{X_1 Y_1 Z_1 \Delta X \Delta Y \Delta Z}$  representa a matriz variância-covariância das coordenadas cartesianas, no datum 1, e dos parâmetros de translação entre os data considerados,

$$\Sigma_{X_1 Y_1 Z_1 \Delta X \Delta Y \Delta Z} = \begin{bmatrix} \Sigma_{X_1 Y_1 Z_1} & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & \Sigma_{\Delta X \Delta Y \Delta Z} \end{bmatrix}. \quad (39)$$

#### 4 CONSIDERAÇÕES E CONCLUSÕES

Neste trabalho procurou-se apresentar os modelos matemáticos envolvidos nas operações de transformação de coordenadas e de datum, bem como as derivações necessárias para a realização da propagação de covariâncias.

Um aspecto relevante na derivação das equações envolvidas na propagação se refere à natureza iterativa de algumas transformações mostradas no fluxograma da Figura 1. Dentre elas tem-se: a transformação de coordenadas TM para Geodésicas e a transformação de coordenadas Cartesianas para Geodésicas.

Como a idéia é realizar a propagação de covariâncias aliada a transformação de coordenadas optou-se por usar a matriz Jacobiana obtida no processo inverso, e não iterativo, para a obter a propagação no qual são envolvidos modelos iterativos. Desta forma pode-se observar os seguintes aspectos da solução apresentada:

- na derivação da propagação de covariâncias para os modelos iterativos evita-se o uso de modelos não rigorosos;
- evita-se a determinação da matriz Jacobiana para modelos de transformação que são iterativos.

Finalizando, foram apresentadas as equações que permitem a propagação de covariâncias resultantes da derivação dos modelos matemáticos utilizados na transformação de coordenadas e na mudança de datum. Como consequência deste desenvolvimento estão sendo implementadas estas propagações no aplicativo TCD, prevendo-se como continuação a inclusão de mais sistemas de projeção.

#### AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem ao CNPq/PIBIC pela concessão da bolsa de Iniciação Científica para o desenvolvimento deste trabalho.

#### REFERÊNCIAS

BLACHUT, T. J.; CHRZANOWISKI, A.; SAASTAMOINEN, J. H.. **Urban Surveying and Mapping**. Springer-Verlag, New York, 1979. p. 372.

CAMARGO, P. O.. **Ajustamento de Observações** (versão preliminar). Presidente Prudente, 2000. Notas de aulas do Curso de Graduação em Engenharia Cartográfica - FCT/UNESP.

COSTA, S. M. A.. **Solução na compatibilização de diferentes materializações de Sistemas de Referência**. 1º Seminário sobre Referencial Geocêntrico no Brasil, IBGE, Rio de Janeiro, 2000. Disponível em <<http://www.ibge.gov.br/home/geografia/geodesico/srg>>. Acesso: 18 dezembro 2001

GALO, M. **Sistema para processamento de dados em geodésia e cartografia**. Presidente Prudente, 1992. Relatório interno, Departamento de Cartografia, FCT/UNESP.

GALO, M. **Sistemas de projeção derivados da projeção Transversa de Mercator: conceitos básicos e formulação** (versão preliminar). Presidente Prudente, 2001. Notas de aulas do Curso de Graduação em Engenharia Cartográfica - FCT/UNESP.

IBGE. **Sistemas de Referência**, Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística. Disponível em: [www.ibge.gov.br/ibge/geografia/geodesico](http://www.ibge.gov.br/ibge/geografia/geodesico). Acessado em: 18 de dezembro de 2001.

IBGE. **Resolução PR Nº 22, de 21-07-83**. Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística, Rio de Janeiro, 1983.

IBGE. **Resolução e PR nº 23, de 21-02-89**. Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística, Rio de Janeiro, 1989.

GEMAEL, C.. **Introdução ao Ajustamento de Observações: Aplicações Geodésicas**. Curitiba: Ed. UFPR, 1994. 319p.

MONICO, J. F. G. M.. **Posicionamento pelo NAVSTAR-GPS: descrição, fundamentos e aplicações**. São Paulo: Editora UNESP, 2000. 287p.

OLIVEIRA, J. C.; SILVA, A. S.. **TransCor – Um software para lidar com o sistema UTM**. In: *XIX Congresso Brasileiro de Cartografia (CDROM)*, Recife/PE, 1999.

SANTOS, M. C.. **Precisamos de mais um sistema de coordenadas no Brasil?** *infoGEO – Revista de Geoinformação*, n. 10, coluna GPS 21, p.22, nov/dez 1999.

STRANG, G.; BORRE, K.. **Linear Algebra. Geodesy, and GPS**. Wellesley MA: Wellesley-Cambridge Press, 1997. 624p.

VANÍCEK, P; KRAKIWSKY, E. J.. **GEODESY: The Concepts**. 2<sup>nd</sup> edition, Amsterdam, New York, Oxford, Tokio: Elsevier Science Publishers B.V., 1986. 714p.