Fiche de Revision Algèbre - Chap 1

Polynôme charactéristique

- Polynôme P :
- $P(u) = \sum_{k=0}^{m} a_k u^k$ où $u^0 = e$ // $P(A) = \sum_{k=0}^{m} a_k A^k$ où $A^0 = I$
- $(PQ)(u) = P(u) \circ Q(u) = Q(u) \circ P(u)$ → si m̂ endo
  → idem pr A
- χ_A : $A \in M_n(\mathbb{K})$
- $\chi_A(T) = \det(A - TI)$
- formule incomplète :
  $\chi_A(T) = (-1)^n T^n + (-1)^{n-1} T^{n-1} tr(A) + \dots + \det(A)$
- $\chi_A(T)$ est invariant par changement de base
- $A \in M_n(\mathbb{K})$ est matrice nilpotente si $\exists p \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^p = 0$ ⇒ $\chi_A(t) = (-t)^n$
- $\chi_A(A) = 0$
- Matrices semblables :
- 2 matrices sont semblables si $\exists U \in GL(\mathbb{K})$ tel que $B = U^{-1}AU$

Valeurs propres et vecteurs propres

- Valeurs propres
- λ est valeur propre de A si $\det(A - \lambda I) = 0$
- des λ sont les racines de χ_A. Si $\deg(\chi_A) = n$ alors A a au ⊕ n λ ds $\mathbb{K}$.
- χ_A peut se scinder en produit de facteur 1 : $\chi_A = \prod_{i=1}^{p} (\lambda_i - T)^{m_i}$
  avec λ_i = valeurs propres distinctes
- $Tr(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n$
- $Det(A) = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n$
- l'ensemble des valeurs propres de A se note $Sp(A)$
- Vecteurs propres
- $X \in E \setminus \{0\}$ est un vecteur propre si $\exists \lambda \in \mathbb{K}$ tq : $AX = \lambda X$
- Sous-espace propre
- $E_\lambda = Ker(u - \lambda e)$

→ le sous espace propre generalisé : $N_\lambda = Ker(u - \lambda e)^m$
- $E_\lambda \subset N_\lambda$
- Dimension
- Si λ est une valeur propre de u alors $E_\lambda \neq 0$ et $\dim(E_\lambda) \geq 1$
- λ = valeur propre de u de multiplicité m : $\dim(N_\lambda) \leq m$

Sous espace invariant

- F = sous espace de E est sous invariant de u si $u(F) \subset F$: $u_{|F} \in \mathcal{L}(F)$
- $u \in \mathcal{L}(E)$ et $P \in \mathbb{K}[T]$. $Ker(P(u))$ et $Im(P(u))$ sont des sous espaces invariants sous u : E_λ et N_λ sont invariants sous u.
- $\chi_{u_{|F}}$ divise χ_u
- $\dim N_{\lambda_i} \leq m_i$

Diagonalisation

- Matrice diagonalisable
- A = diagonalisable si $\exists U \in GL_n(\mathbb{K})$ tel que $U^{-1}AU$ est diagonalisable → A doit être semblable à une matrice diagonale
- A est diagonalisable (ssi) $\exists b$, une base de E constitué des vecteurs propres de u.
- C.S. : A est diagonalisable si elle a n valeurs propres distinctes
- Théorème important : $\chi_A(t) = \prod_{i=1}^{p} (\lambda_i - t)^m$ avec λ_i distinctes

Equivalents :
- → A = diagonalisable
- → $\prod_{i=1}^{p} (A - \lambda_i I) = 0$ ie $\prod_{i=1}^{p} (u - \lambda_i e) = 0$
- → $\forall i \in \{1, \dots, p\}$ $\dim E_{\lambda_i} = m_i$
- → $\forall i \in \{1, \dots, p\}$ $Rg(A - \lambda_i I) = n - m_i$
- → $\sum_{i=1}^{n} \dim(E_{\lambda_i}) = n$

- A = diagonalisable sur $\mathbb{K}$ si $\exists P \in \mathbb{K}(T)$ qui se scinde sur $\mathbb{K}$ en racine distincte et qui satisfait : $P(A) = 0$
- si $u \in \mathcal{L}(E)$ et $P(t) = \prod_{i=1}^{p} (\lambda_i - t)^{m_i}$ avec λ_i distinctes
  alors $Ker(P(u)) = \bigoplus_{i=1}^{p} Ker(u - \lambda_i e)^{m_i}$

- Cas des matrices dans $\mathbb{C}$

$^t\bar{A} = A$ alors A est hermitian et A est diagonalisable ds base orthogonale.
→ $^t\bar{A} = A^*$

- Matrice réelle symétrique B
- λ_i de B sont réelles
- ttes matrices sym Re = diagonalisable
- ∀ toute λ_i ∃ au moins un $\vec{x}$ ds $\mathbb{R}^n$
- si λ, b = v.p distinctes : $E_\lambda \perp E_b$

Triangulisation

- A = triangulable sur $\mathbb{K}$ si $\exists\, U \in GL_n(\mathbb{K})$ tel que $U^{-1}AU$ est une matrice superieure $\Rightarrow$ A soit semblables à matrice triangulaire sup.

- A = triangulable si χ_A se scinde : $\chi_A(T) = \prod_{i=1}^{p} (\lambda_i - T)^{m_i}$ avec λ_i distinctes
  ↳ fonctionne aussi pour $\mathbb{C}$ $= 0$

- si $U \in \mathcal{L}(E)$ $\chi_U(T) = \prod_{i=1}^{p} (\lambda_i - t)^{m_i}$ avec λ_i distinctes : $E = \bigoplus_{i=1}^{p} N_{\lambda_i}$ et $\dim(N_{\lambda_i}) = m_i$

- Si $A \in M_n(\mathbb{K})$, $\chi_A(t) = \prod_{i=1}^{p} (\lambda_i - t)^{m_i}$ avec λ_i distinctes alors $\exists$ $U \in GL_n(\mathbb{K})$ tel que : $U^{-1}AU = \begin{pmatrix} A_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_p \end{pmatrix} \Leftrightarrow (A_i - \lambda_i I) = 0$

- $A \in M_n(\mathbb{K})$ tel que $A^n = 0$ et $A^{n-1} \neq 0$: $\exists\, U \in GL_n(\mathbb{K})$ tel que : $U^{-1}AU = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$

Theoreme de Jordan :

~ A tel que $\chi_A(t) = \prod_{i=1}^{p} (\lambda_i - t)^{m_i}$ λ_i distinctes. $\ell = \sum_{1}^{p} \dim(E_\lambda)$

Alors A est semblable a un une matrice block diagonale de la forme : $J = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & J_\ell \end{pmatrix}$ où $\forall$ les J_k sont des matrices carrées de la forme :

$\begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_i \end{bmatrix} \in M_{k_i}(\mathbb{K}), 1 \leq k_i \leq m_i$ ~ Jordan block

~ nbr de Jordan Block $= \dim(E_{\lambda_i})$

~ nbr de Jordan block de taille au moins k $= \dim(\ker(A - \lambda_i I_n)^k) - \dim(\ker(A - \lambda_i I_n)^{k-1})$

~ nbr de JB de taille k = $2\dim(\ker(A - \lambda_i I_n)^k) - \dim(\ker(A - \lambda_i I)^{k+1}) - \dim(\ker(A - \lambda_i I)^{k-1})$

~ λ_i apparait m_i fois

~ la taille k_i de JB peut être $< m_i$

~ $\sum k_i = m_i$