TP Scilab-Latex : Compte-rendu

Michel Yoeung et Billy Ndihokubwayo (groupe 2)

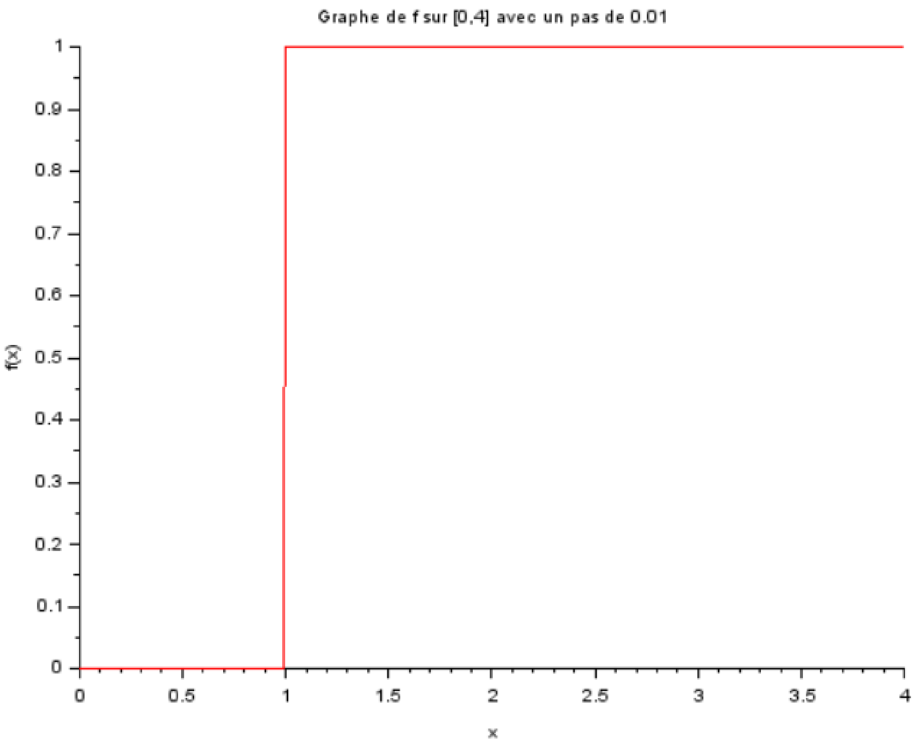
22 Novembre 2017

1 Sensibilisation à l'arithmétique machine.

Exercice 1

On obtient $z = 0$ *et* $w = 1$*.*
Pour z, on évalue en premier $y + x$ *:* $1e(30) + 1e(-8)$ *qui vaut toujours* $1e(30)$ *(pour Scilab) car le nombre de chiffres significatifs dépasse la limite de chiffres que peut gérer Scilab. On aura par conséquent,* $1e(30) - 1e(30)$ *qui vaut 0 donc* $z = 0$*.*
Pour w, on évalue en premier $x - x$ *qui vaut 0 puis* $\frac{1e(-8)}{1e(-8)}$ *qui vaut 1 donc* $w = 1$*.*

Exercice 2



Lorsque $x \in [0, 1[, f(x) = 0$ *car lorsqu'on répète la racine, on va s'approcher de* 1 *mais sans jamais être égal à* 1 *pile (un moment donné, la valeur de la racine carrée sera bloquée à la valeur juste en dessous de* 1*). Donc lorsqu'on va répéter les carrés par la suite, le résultat va décroître jusqu'à atteindre* 0*.*

Lorsque $x = 1$, enchainer les racines carrées et les carrées ne change rien et $f(x) = 1$ toujours. Lorsque $x \in]1, 4], f(x) = 1$ car lorsqu'on répète la racine carrée, le résultat va décroître jusqu'à atteindre 1. Donc, lorsqu'on va répéter les carrés par la suite, le résultat va rester à 1.

Exercice 3

1. *On a $I_n = \int_0^1 x^n e^x \,\mathrm{d}x = e - n\int_0^1 x^{n-1}e^x \,\mathrm{d}x = e - nI_{n-1}$ et $I_0 = e - 1$.*
   En utilisant une fonction récursive sur Scilab (probleme1.sce > suite(n)), on trouve $I_{20} \approx$ -129.26.
2. *On a $I_n = \int_0^1 x^n \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{x^k}{k!}\right) \mathrm{d}x = \int_0^1 \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{x^{k+n}}{k!}\right) \mathrm{d}x = \int_0^1 \lim_{N\to+\infty} \sum_{k=0}^{N} \left(\frac{x^{k+n}}{k!}\right) \mathrm{d}x$.*

   D'après le théorème de Beppo-Levi, on obtient $I_n = \lim_{N\to+\infty} \sum_{k=0}^{N} \left(\int_0^1 \frac{x^{k+n}}{k!} \,\mathrm{d}x\right)$
   $= \lim_{N\to+\infty} \sum_{k=0}^{N} \left(\frac{1}{k!}[\frac{x^{k+n+1}}{k+n+1}]_0^1\right) = \lim_{N\to+\infty} \sum_{k=0}^{N} \left(\frac{1}{k!(k+n+1)}\right)$.
   En calculant cette somme jusqu'à $N = 10000$ sur Scilab (probleme1.sce > serie_ exp(n)), on trouve $I_{20} \approx 0.1238$.
3. *Il vaut mieux donc utiliser la série exponentielle plutôt que la récurrence car en utilisant la fonction récursive, on cumule 20 fois les erreurs de précision de Scilab pour finalement obtenir un résultat incohérent de I_{20}.*

Exercice 4

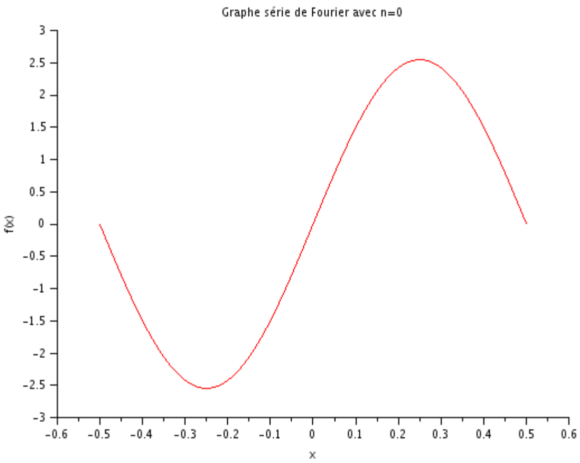
On sait que $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{N\to+\infty} \sum_{k=0}^{N} \left(\frac{b-a}{N} f(a + k\frac{b-a}{N})\right)$.
On a donc $I_{20} = \int_0^1 x^{20}e^x \,\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{n}(\frac{k}{n})^{20} e^{\frac{k}{n}}\right)$.
En calculant cette somme jusqu'à $n = 100000$ sur Scilab (probleme1.sce > rectangle(n)), on trouve $I_{20} \approx 0.1238$ ce qui correspond au résultat trouvé en 3.2.

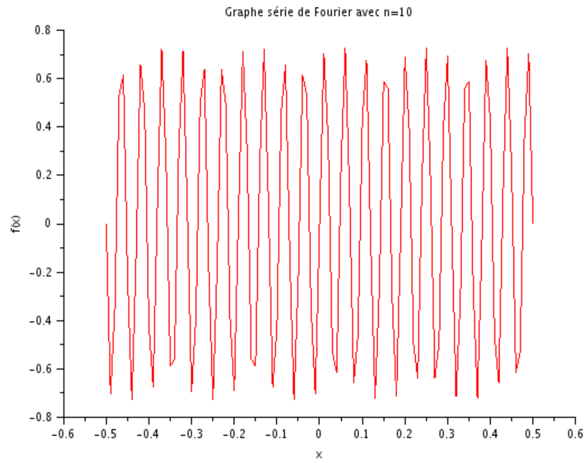
2 Etude du phénomène de Gibbs.

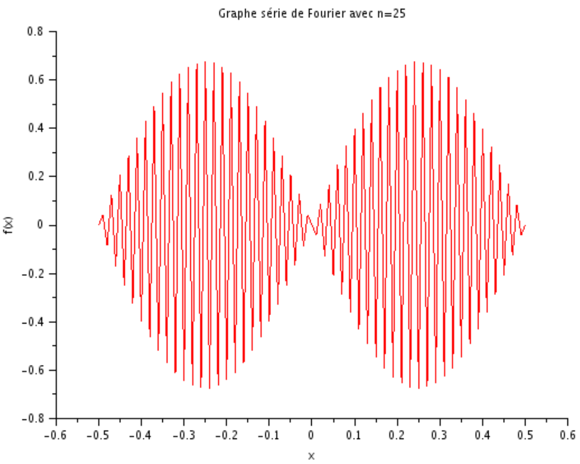
Exercice 5

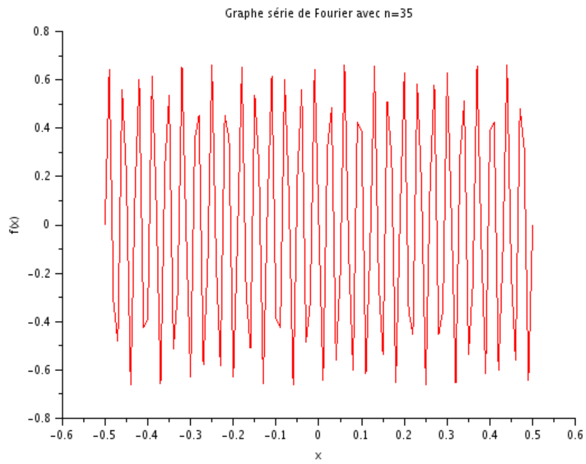
f une fonction 1-périodique sur $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$.
On calcule :
$a_0(f) = 1\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_{-\frac{1}{2}}^{0} \mathrm{d}x + \int_0^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}x = 0$.
$a_n(f) = 2\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x)cos(2\pi nx)\,\mathrm{d}x = -2\int_{-\frac{1}{2}}^{0} cos(2\pi nx)\,\mathrm{d}x + 2\int_0^{\frac{1}{2}} cos(2\pi nx)\,\mathrm{d}x = 0$.
$b_n(f) = 2\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x)sin(2\pi nx)\,\mathrm{d}x = -2\int_{-\frac{1}{2}}^{0} sin(2\pi nx)\,\mathrm{d}x + 2\int_0^{\frac{1}{2}} sin(2\pi nx)\,\mathrm{d}x = \frac{-cos(\pi n) - cos(\pi n) + 2}{\pi n}$
$= \frac{-2(-1)^n + 2}{\pi n}$.
On obtient la série de Fourier $f(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{-(-1)^n + 1}{n} sin(2\pi nx)\right)$.
$\frac{-(-1)^n+1}{n}$ va s'annuler lorsque n est pair, donc il faut que n soit impair ($n = 2n+1, n \in \mathbb{Z}$).
D'où $f(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{sin(2(2n+1)\pi x)}{2n+1}\right)$ qui s'annule lorsque $x = 0$.
Donc la formule ci-dessus est valide lorsque $x \in [-\frac{1}{2}, 0[\cup]0, \frac{1}{2}[$.

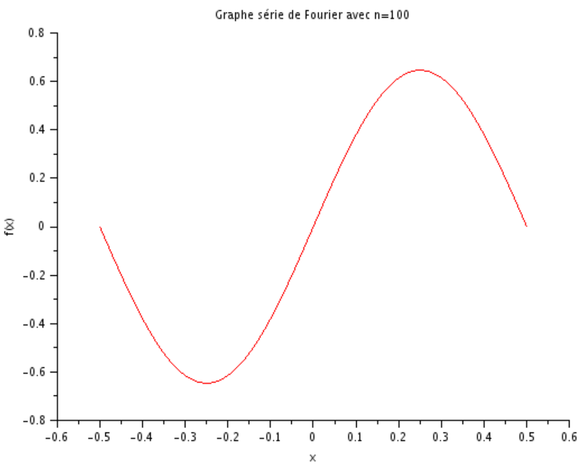
Exercice 6

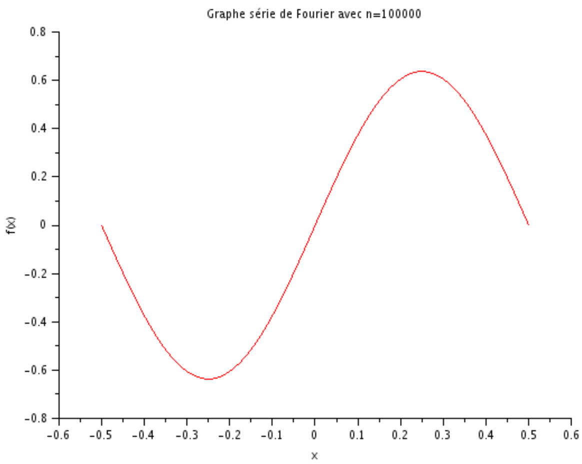

Graphe série de Fourier avec n=0
f(x)
x


Graphe série de Fourier avec n=10
f(x)
x


Graphe série de Fourier avec n=25
f(x)
x


Graphe série de Fourier avec n=35
f(x)
x


Graphe série de Fourier avec n=100
f(x)
x


Graphe série de Fourier avec n=100000
f(x)
x

En traçant la série de Fourier sur Scilab (probleme2.sce > fourier(x,n)), on observe que :
Tout d'abord, la courbe de f est sinusoïdale quelque soit n.
Lorsque n varie de 0 jusqu'à 25, la fréquence des changements de variation augmente.
Lorsque n varie de 25 jusqu'à n très grand, la fréquence des changements de variation diminue.
On peut donc en conclure que la série de Fourier converge vers une fonction sin de période $T = 1$.

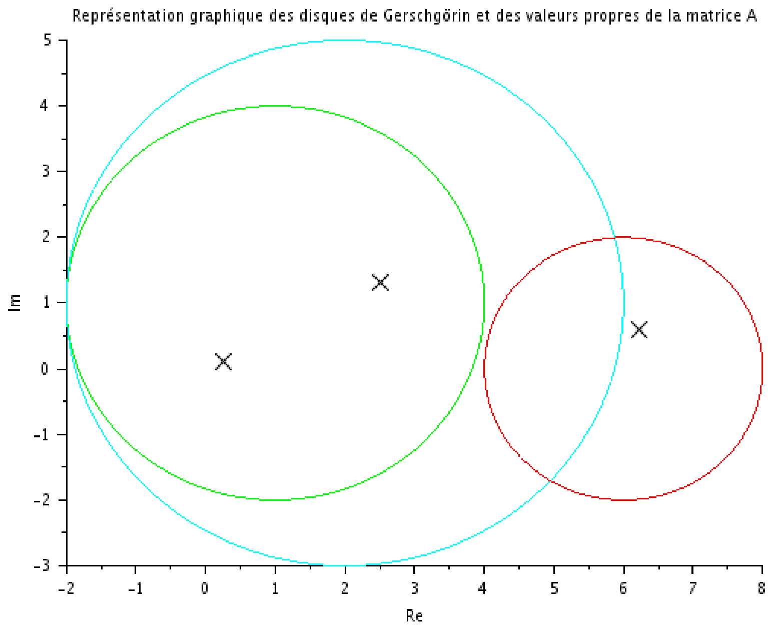
3 Théorème de Gerschgörin.

Exercice 7

1. *Soit A une matrice d'ordre $N \in \mathbb{N}$ et λ une valeur propre de A, alors il existe un vecteur propre X tel que $AX = \lambda X$.*
   Comme les coordonnées $x_1, ..., x_N \neq 0$ de X sont en nombre fini, alors $\exists k \in 1, ..., N$ tel que $|x_k| = max(|x_i|, i \in 1, ..., N)$ et $|x_k| > 0$.
   Si on considère la k-ième ligne de $AX = \lambda X$, on a :

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{N} a_{kj}x_j = \lambda x_k \Rightarrow \sum_{j=1, j\neq k}^{N} a_{kj}x_j &= x_k(\lambda - a_{kk}) \\ \Rightarrow |x_k|\,|\lambda - a_{kk}| &= \left|\sum_{j=1, j\neq k}^{N} a_{kj}x_j\right| \leq \sum_{j=1, j\neq k}^{N} |a_{kj}x_j| \qquad (1) \\ \Rightarrow |\lambda - a_{kk}| &\leq \sum_{j=1, j\neq k}^{N} |a_{kj}| \frac{|x_j|}{|x_k|} \leq \sum_{j=1, j\neq k}^{N} |a_{kj}|\end{aligned}$$

   car $x_k \neq 0$ et $\forall j \in 1, ..., N, |x_k| \geq |x_j|$.
   On a donc $\lambda \in D_k \subset \bigcup_{k=1}^{N} D_k$.
2. *En écrivant une fonction sur Scilab (probleme3.sce > disques(A)), on peut visualiser les disques de Gerschgörin pour une matrice carrée A donnée en paramètre.*



3. *En représentant graphiquement les disques de Gerschgörin de la matrice A avec ses valeurs propres dans le plan complexe sur Scilab (probleme3.sce > valeurs_propres(A)), on peut voir et vérifier que ces valeurs propres (en l'occurrence ses 3 valeurs propres) sont bien toutes dans l'union des disques (voir figure ci-dessus).*

4. *Soit $\mathbb{K}$ un sous-corps de $\mathbb{C}$ et n un entier strictement positif.*
On veut montrer que :
$M \in \mathbf{M}_n(\mathbb{K})$ est à diagonale strictement dominante $\Rightarrow$ M est inversible.
Travaillons par contraposée :
M n'est pas inversible $\Rightarrow$ M n'est pas à diagonale strictement dominante.
Supposons $M \in \mathbf{M}_n(\mathbb{K})$ non inversible alors 0 = Det(M) $\Rightarrow$ 0 est valeur propre de M.
Alors il existe $M = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \backslash \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$
tel que $MX = 0$.
Comme les coordonnées de X sont en nombre fini non nul et sont non toutes nulles, il existe $i_0 \in 1, ..., n$ *tel que* $|x_k| = max(|x_i|, i \in [1; n])$ *et on remarque que* $|x_k| > 0$.
En considérant la k-ième ligne de $MX = 0$*, on a :*

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} a_{kj}x_j = 0 \Rightarrow & \sum_{j=1, j\neq k}^{n} a_{kj}x_j = a_{kj}x_k \\ & \Rightarrow |a_{kj}|\,|x_k| = \left| \sum_{j=1, j\neq k}^{n} a_{kj}x_j \right| \leq \sum_{j=1, j\neq k}^{n} |a_{kj}x_j| \\ & \Rightarrow |a_{kj}| \leq \sum_{j=1, j\neq k}^{n} |a_{kj}| \frac{|x_j|}{|x_k|} \leq \sum_{j=1, j\neq k}^{n} |a_{kj}| \end{aligned} \tag{2}$$

Car $x_k \neq 0$ *et* $\forall j \in 1, ..., n$, $|x_k| \geq |x_j|$.
M n'est donc pas à diagonale strictement dominante.