TP Scilab-Latex : Compte-rendu

Michel Yoeung et Billy Ndihokubwayo (groupe 2)

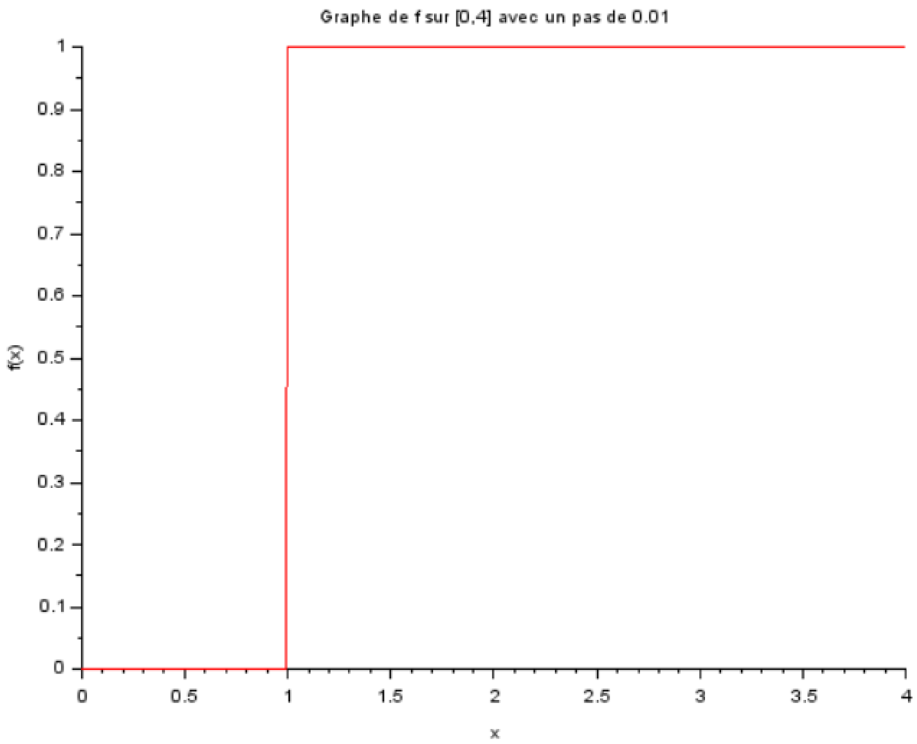
22 Novembre 2017

1 Sensibilisation à l'arithmétique machine

Exercice 1

On obtient $z = 0$ *et* $w = 1$.
Pour z, on évalue en premier $y + x$: $1e(30) + 1e(-8)$ *qui vaut toujours* $1e(30)$ *(pour Scilab) car le nombre de chiffres significatifs dépasse la limite de chiffres que peut gérer Scilab. On aura par conséquent,* $1e(30) - 1e(30)$ *qui vaut 0 donc* $z = 0$.
Pour w, on évalue en premier $x - x$ *qui vaut 0 puis* $\frac{1e(-8)}{1e(-8)}$ *qui vaut 1 donc* $w = 1$.

Exercice 2



Lorsque $x \in [0, 1[, f(x) = 0$ *car lorsqu'on répète la racine, on va s'approcher de* 1 *mais sans jamais être égal à* 1 *pile (un moment donné, la valeur de la racine carrée sera bloquée à la valeur juste en dessous de* 1*). Donc lorsqu'on va répéter les carrés par la suite, le résultat va décroître jusqu'à atteindre* 0.

Lorsque $x = 1$, *enchainer les racines carrées et les carrées ne change rien et* $f(x) = 1$ *toujours. Lorsque* $x \in]1,4], f(x) = 1$ *car lorsqu'on répète la racine carrée, le résultat va décroître jusqu'à atteindre* 1. *Donc, lorsqu'on va répéter les carrés par la suite, le résultat va rester à* 1.

Exercice 3

1. *On a* $I_n = \int_0^1 x^n e^x \,\mathrm{d}x = e - n\int_0^1 x^{n-1}e^x \,\mathrm{d}x = e - nI_{n-1}$ *et* $I_0 = e - 1$.
   En utilisant une fonction récursive sur Scilab (probleme1.sce > suite(n)), on trouve $I_{20} \approx$ -129.26.
2. *On a* $I_n = \int_0^1 x^n \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{x^k}{k!}\right) \mathrm{d}x = \int_0^1 \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{x^{k+n}}{k!}\right) \mathrm{d}x = \int_0^1 \lim_{N\to+\infty} \sum_{k=0}^{N} \left(\frac{x^{k+n}}{k!}\right) \mathrm{d}x$.

   D'après le théorème de Beppo-Levi, on obtient $I_n = \lim_{N\to+\infty} \sum_{k=0}^{N} \left(\int_0^1 \frac{x^{k+n}}{k!} \,\mathrm{d}x\right)$
   $= \lim_{N\to+\infty} \sum_{k=0}^{N} \left(\frac{1}{k!}[\frac{x^{k+n+1}}{k+n+1}]_0^1\right) = \lim_{N\to+\infty} \sum_{k=0}^{N} \left(\frac{1}{k!(k+n+1)}\right)$.
   En calculant cette somme jusqu'à $N = 10000$ *sur Scilab (probleme1.sce > serie_ exp(n)), on trouve* $I_{20} \approx 0.1238$.
3. *Il vaut mieux donc utiliser la série exponentielle plutôt que la récurrence car en utilisant la fonction récursive, on cumule* 20 *fois les erreurs de précision de Scilab pour finalement obtenir un résultat incohérent de* I_{20}.

Exercice 4

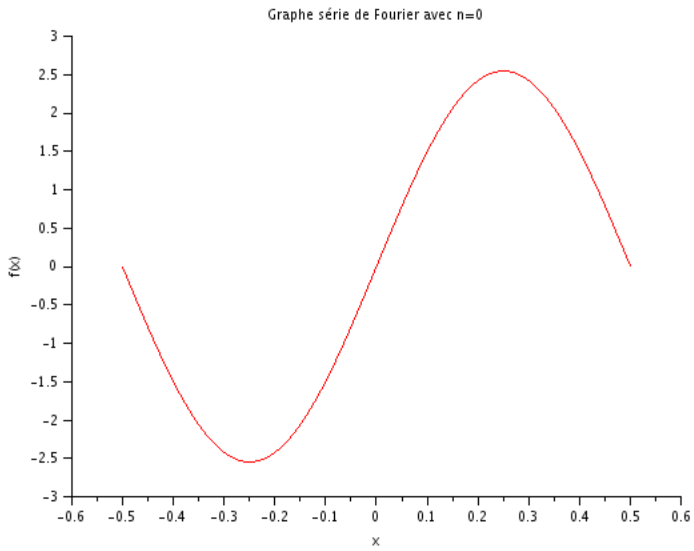
On sait que $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{N\to+\infty} \sum_{k=0}^{N} \left(\frac{b-a}{N} f(a + k\frac{b-a}{N})\right)$.
On a donc $I_{20} = \int_0^1 x^{20}e^x \,\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{n}(\frac{k}{n})^{20} e^{\frac{k}{n}}\right)$.
En calculant cette somme jusqu'à $n = 100000$ *sur Scilab (probleme1.sce > rectangle(n)), on trouve* $I_{20} \approx 0.1238$ *ce qui correspond au résultat trouvé en 3.2.*

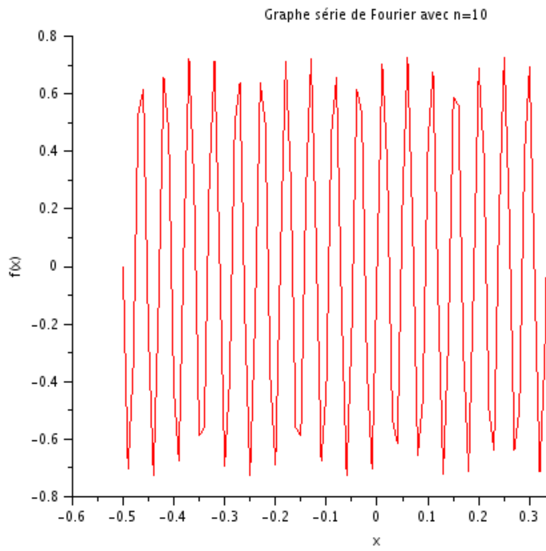
2 Etude du phénomène de Gibbs

Exercice 5

f *une fonction 1-périodique sur* $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$.
On calcule :
$a_0(f) = 1\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_{-\frac{1}{2}}^{0} \,\mathrm{d}x + \int_0^{\frac{1}{2}} \,\mathrm{d}x = 0$.
$a_n(f) = 2\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x)cos(2\pi nx)\,\mathrm{d}x = -2\int_{-\frac{1}{2}}^{0} cos(2\pi nx)\,\mathrm{d}x + 2\int_0^{\frac{1}{2}} cos(2\pi nx)\,\mathrm{d}x = 0$.
$b_n(f) = 2\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x)sin(2\pi nx)\,\mathrm{d}x = -2\int_{-\frac{1}{2}}^{0} sin(2\pi nx)\,\mathrm{d}x + 2\int_0^{\frac{1}{2}} sin(2\pi nx)\,\mathrm{d}x = \frac{-cos(\pi n)-cos(\pi n)+2}{\pi n}$
$= \frac{-2(-1)^n+2}{\pi n}$.
On obtient la série de Fourier $f(x) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{-(-1)^n+1}{n} sin(2\pi nx)\right)$.
$\frac{-(-1)^n+1}{n}$ *va s'annuler lorsque* n *est pair, donc il faut que* n *soit impair* ($n = 2n+1, n \in \mathbb{Z}$).
D'où $f(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{sin(2(2n+1)\pi x)}{2n+1}\right)$ *qui s'annule lorsque* $x = 0$.
Donc la formule ci-dessus est valide lorsque $x \in [-\frac{1}{2}, 0[\cup]0, \frac{1}{2}[$.

Exercice 6


Graphe série de Fourier avec n=0
f(x)
x
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
-2.5
-3
-0.6
-0.5
-0.4
-0.3
-0.2
-0.1
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6


Graphe série de Fourier avec n=10
f(x)
x
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-0.6
-0.5
-0.4
-0.3
-0.2
-0.1
0
0.1
0.2
0.3