TP Statistiques : Compte-rendu

Michel Yoeung, Charles-Frédérick Amaudruz, Alexandre Berrada (ENSIMAG - 1A - Groupe 2)

Avril 2018

1 Première stratégie.

Question 1

$$\forall i = 1, ..., n, X_i = \begin{cases} 1 & \textit{si le } i^{eme} \textit{ poisson est bagué} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

De plus, les résultats des pêches successives sont indépendants et la probabilité que le i^{me} poisson soit bagué est $p = \frac{n_0}{\theta}$.
Donc les X_i sont indépendants et identiques (iid) car suivent tous une loi de Bernoulli de paramètre de succès $p = \frac{n_0}{\theta}$.
Soit $\theta = 1000$ et $n_0 = 50$. On choisit $n = 60$ pour notre simulation sur R.
On obtient l'échantillon de données suivant :

```
[1] "échantillon :"
 [1] 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
[60] 0
```

On calcule ensuite sur R les moyennes et les variances (empiriques et théoriques) :

```
> source('~/ensimag1/Statistiques/projet/premiere_strategie.R')
[1] "moyenne empirique :"
[1] 0.06666667
[1] "moyenne théorique :"
[1] 0.05
[1] "variance empirique :"
[1] 0.06222222
[1] "variance empirique :"
[1] 0.0475
```

On constate que pour ce jeu de données la moyenne empirique est assez proche de la moyenne théorique et de même pour les variances.

Question 2

T est une variable aléatoire qui compte le nombre de poissons bagués parmi les n poissons pêchés donc $T = \sum_{i=1}^{n} X_i$ avec X_i qui suit une loi de Bernoulli.
Donc T suit une loi binomiale de paramètres n et $p = \frac{n_0}{\theta}$.
On donne ainsi avec R t le nombre de poissons pêchés sur notre échantillon de données :

```
[1] "nombre de poissons bagués parmi les n poissons pêchés :"
[1] 4
```

Question 3

Estimateur des moments :
Soit $\overline{X_n}$ la moyenne empirique,

$$\begin{aligned} E[X] \simeq \overline{X_n} &\Rightarrow p \simeq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \\ &\Rightarrow \frac{n_0}{\theta} \simeq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \\ &\Rightarrow \theta \simeq \frac{n_0 * n}{\sum_{i=1}^{n} x_i} \end{aligned} \tag{1}$$

Donc l'estimateur des moments (d'ordre 1) vaut $\tilde{\theta_n} = \frac{n_0 * n}{\sum_{i=1}^{n} x_i}$.

Estimateur de maximum de vraisemblance :

$$\begin{aligned} \mathscr{L}(X_1 = x_1, ..., X_n = x_n, \theta) &= \prod_{i=1}^{n} \mathrm{P}(X_i = x_i, \theta) \\ &= p^{\sum_{i=1}^{n} x_i}(1-p)^{n-\sum_{i=1}^{n} x_i} \\ &= (\frac{n_0}{\theta})^{\sum_{i=1}^{n} x_i}(1-\frac{n_0}{\theta})^{n-\sum_{i=1}^{n} x_i} \end{aligned} \tag{2}$$

$\ln(\mathscr{L}(X_1 = x_1, ..., X_n = x_n, \theta)) = (\sum_{i=1}^{n} x_i)(\ln(n_0) - \ln(\theta)) + (n - \sum_{i=1}^{n} x_i)\ln(1 - \frac{n_0}{\theta})$

En dérivant par rapport à θ *:*

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln(\mathscr{L}(X_1 = x_1, ..., X_n = x_n, \theta))}{\partial \theta} &= -(\sum_{i=1}^{n} x_i)\frac{1}{\theta} + (n - \sum_{i=1}^{n} x_i)\frac{\frac{n_0}{\theta^2}}{1-\frac{n_0}{\theta}} \\ &= -(\sum_{i=1}^{n} x_i)\frac{1}{\theta} + (n - \sum_{i=1}^{n} x_i)\frac{n_0}{\theta^2 - \theta n_0} \\ &= 0 \Rightarrow \theta = \frac{n_0 * n}{\sum_{i=1}^{n} x_i} \end{aligned} \tag{3}$$

Donc l'estimateur de maximum de vraisemblance vaut $\hat{\theta_n} = \frac{n_0 * n}{\sum_{i=1}^{n} x_i}$.
Donc ces deux estimateurs sont confondus.
On calcule ainsi sur R la valeur de ces estimateurs sur notre échantillon de données :

```
[1] "estimateur des moments :"
[1] 750
[1] "estimateur de maximum de vraisemblance :"
[1] 750
```

Sur l'échantillon simulée, on observe un estimateur de θ *qui vaut* 750 *soit* 25% *de moins que la vraie valeur de* θ *pour la simulation (*1000*).*
Cet estimateur n'est pas très précis.

Question 4

intervalle de confiance exact de seuil α pour θ :
On a $p = \frac{n_0}{\theta} \Rightarrow \theta = \frac{n_0}{p}$ donc en estimant p (avec la formule du cours), on obtient directement une estimation de θ.

$$\left[n_0(1 + \frac{n-T}{T+1} f_{2(n-T),2(T+1),1-\frac{\alpha}{2}}), n_0(1 + \frac{n-T+1}{T} f_{2(n-T+1),2T,\frac{\alpha}{2}})\right] \tag{4}$$

avec $T = n\overline{X_n} = \sum_{i=1}^{n} x_i$ et $f_{\nu_1,\nu_2,\alpha} = F_{\mathscr{F}}^{-1}(1-\alpha, \nu_1, \nu_2)$, $F_{\mathscr{F}}^{-1}$ étant ici la fonction quantile de la loi de Fisher-Snedecor.
intervalle de confiance asymptotique de seuil α pour θ :
On obtient l'intervalle associée avec la même démarche que précédement.

$$\left[\frac{n_0}{\overline{X_n} + u_\alpha \sqrt{\frac{\overline{X_n}(1-\overline{X_n})}{n}}}, \frac{n_0}{\overline{X_n} - u_\alpha \sqrt{\frac{\overline{X_n}(1-\overline{X_n})}{n}}}\right] \tag{5}$$

avec $u_\alpha = F_{\mathscr{N}}^{-1}(1 - \frac{\alpha}{2})$, $F_{\mathscr{N}}^{-1}$ étant ici la fonction quantile de la loi normale.
On calcule ainsi ces intervalles de confiance (exacts puis asymptotiques) associés aux valeurs de nos paramètres fixés sur R pour les différentes valeurs de α spécifiées dans l'énoncé :

```
[1] "intervalle de confiance exact pour theta de seuil"
[1] 0.01
[1] 255.9594
[1] 4375.487
[1] "intervalle de confiance exact pour theta de seuil"
[1] 0.05
[1] 308.6672
[1] 2708.298
[1] "intervalle de confiance exact pour theta de seuil"
[1] 0.1
[1] 342.2379
[1] 2165.389
[1] "intervalle de confiance exact pour theta de seuil"
[1] 0.2
[1] 388.1135
[1] 1701.15
```

On remarque que les intervalles exacts fournissent un encadrement plus précis de la vraie valeur de θ que les intervalles asymptotiques ce qui semble logique car les intervalles symptotiques sont plus efficaces pour un n très grand, or ici on a fixé $n = 60$ seulement.

Question 5

$\mathrm{P}(\hat{\theta_n} = +\infty) = \mathrm{P}(\frac{n_0 * n}{\sum_{i=1}^{n} x_i} = +\infty) = \mathrm{P}(\sum_{i=1}^{n} x_i = 0) = \mathrm{P}(T = 0) = (1-p)^n = (1 - \frac{n_0}{\theta})^n$
Cet estimateur n'est pas convergent.
$Biais(\hat{\theta_n}) = E[\hat{\theta_n}] - \theta$
Comme $\hat{\theta_n}$ a une probabilité non nulle de valoir $+\infty$ alors $E[\hat{\theta_n}] = +\infty \Rightarrow E[\hat{\theta_n}] - \theta = +\infty$ (car θ est une constante) $\Rightarrow Biais(\hat{\theta_n}) = +\infty$.
Donc on peut en déduire que le biais de cet estimateur vaut $+\infty$. Sur notre échantillon de données, on peut calculer la probabilité $\mathrm{P}(\hat{\theta_n} = +\infty)$:

```
[1] "intervalle de confiance asymptotique pour theta de seuil"
[1] 0.01
[1] 334.1883
[1] -3070.703
[1] "intervalle de confiance asymptotique pour theta de seuil"
[1] 0.05
[1] 385.257
[1] 14085.18
[1] "intervalle de confiance asymptotique pour theta de seuil"
[1] 0.1
[1] 417.9345
[1] 3650.342
[1] "intervalle de confiance asymptotique pour theta de seuil"
[1] 0.2
[1] 463.2351
[1] 1968.753
```

```
[1] "probabilité que l'estimateur vale +infini :"
[1] 0.0460698
```

Question 6

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(\hat{\theta_n} = +\infty) > \frac{1}{2} &\Rightarrow (1 - \frac{n_0}{\theta})^n > \frac{1}{2} \\
&\Rightarrow n \ln(1 - \frac{n_0}{\theta}) > \ln(\frac{1}{2}) \\
&\Rightarrow n < -\frac{\ln(2)}{\ln(1 - \frac{n_0}{\theta})} \\
&\Rightarrow n \leq \lfloor -\frac{\ln(2)}{\ln(1 - \frac{n_0}{\theta})} \rfloor
\end{aligned} \tag{6}$$

Toujours avec notre échantillon de données, on calcule sur R cette valeur de n pour laquelle la probabilité $\mathrm{P}(\hat{\theta_n} = +\infty)$ *:*

```
[1] "pour que la probalilité que l'estimateur vale +infini soit strictement supérieure à 1/2, n doit être inférieur à :"
[1] 13
[1] "probabilité que l'estimateur vale +infini avec cette valeur de n :"
[1] 0.5133421
```

2 Deuxième stratégie.

Question 1

$\forall j = 1, ..., m, Y_j$ représente le nombre de poissons pêchés entre le j^{eme} poisson bagué et le $(j+1)^{eme}$. On répète successivement l'expérience "on pêche un poisson" jusqu'à ce qu'il soit bagué, de probabilité $\frac{n_0}{\theta}$. Les Y_i suivent donc tous une loi géométrique de paramètre $\frac{n_0}{\theta}$.
D'autre part, ils concernent des pêches différentes, donc ils sont de plus indépendants.

```
> ech
 [1]   3  36   6  15  16   3   9   8  36  15   6   7 105   3  39  48   6  16   5  21  15   1   9  17  20   3   5   1  42
[30]  28  15  12  13  15   1  42  23  17  13  10  18   4   8   7  11  38  58  24   9   5  15   4   6   3   5  66  27  48
[59]  72  15  14   8  14   1  11   9  32   1   6  11   8  16   6  71  10  10   6  20   1  68
```

En théorie, la moyenne et la variance d'une loi géométrique $G(p)$ sont données par $\frac{1}{p}$ et $\frac{1-p}{p^2}$, soit pour $n_0 = 50$ et $\theta = 1000$, $\mathbb{E}(Y) = 20$ et $Var(Y) = 380$. Pour notre échantillon, nous calculons :

```
> mean(ech)
[1] 18.3875

> var(ech)
[1] 392.6201
```

Les résultats que nous obtenons sont proches des résultats théoriques.

Question 2

En notant N le nombre de poissons pêchés, on a $N = \sum_{j=1}^{m} Y_j$ Ici,

```
> n
[1] 1471
```

Question 3

L'estimateur par la méthode des moments est $\overline{\theta}'_m = n_0\bar{Y}$
On cherche à annuler la dérivée de la fonction de vraisemblance $\mathcal{L}$:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\theta; y_1, ..., y_n) &= \prod_{j=1}^{m} P(Y_j = y_j; \theta) \\ &= \prod_{j=1}^{m} (1 - \frac{n_0}{\theta})^{y_i - 1} \frac{n_0}{\theta} \\ &= (\frac{n_0}{\theta})^m \prod_{j=1}^{m} (1 - \frac{n_0}{\theta})^{y_i - 1}\end{aligned} \tag{7}$$

On calcule donc $\frac{\partial \ln \mathcal{L}}{\partial t}$ et on cherche ensuite à l'annuler pour maximiser la log-vraisemblance :

$$\begin{aligned}\ln \mathcal{L}(\theta; y_1, ..., y_n) &= m \ln \frac{n_0}{\theta} + \sum_{j=1}^{m} (y_i - 1) \ln 1 - \frac{n_0}{\theta} \\ \frac{\ln \partial \mathcal{L}}{\partial \theta} &= \frac{-m}{\theta} + \sum_{j=1}^{m} (y_i - 1) \frac{-\frac{n_0}{\theta^2}}{1 - \frac{n_0}{\theta}} \\ &= \frac{-m}{\theta} - \sum_{j=1}^{m} (y_i - 1) \frac{n_0}{\theta^2 - \theta n_0}\end{aligned} \tag{8}$$

Avant simplification, on trouve $\hat{\theta}'_m = n_0 \frac{\sum_{j=1}^{m}(y_i-1)+m}{m}$*, puis le* $+m$ *au numérateur compense les -1, et on retrouve* $\hat{\theta}'_m = n_0\bar{Y}$
Ainsi, pour notre échantillon, nous calculons :

```
> est
[1] 919.375
```

Question 4

Les Y_i *sont indépendantes et suivent la même loi, on a donc :*

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_m &= m\mathcal{I}_1 \\
&= mVar(\frac{\partial}{\partial\theta}\ln\mathcal{L}(\theta, Y_1)) \\
&= mVar(\frac{\partial}{\partial\theta}[\ln\frac{n_0}{\theta}] + (Y_1-1)\ln(1-\frac{n_0}{\theta})) \\
&= mVar(\frac{-1}{\theta} + (Y_1-1)\frac{n_0}{\theta^2-\theta n_0}) \\
&= m(\frac{n_0}{\theta^2-\theta n_0})^2((\frac{\theta}{n_0})^2 - \frac{\theta}{n_0})
\end{aligned} \tag{9}$$

Finalement, $\mathcal{I}_m = \frac{m}{\theta^2-\theta n_0}$
$\mathbb{E}(\hat{\theta}'_m) = n_0\mathbb{E}(\bar{Y}) = \theta$ *donc* $\hat{\theta}'_m$ *est sans biais. À présent, on déduit de l'inégalité FDCR que cet estimateur est de variance minimale si et seulement si sa variance est égale à* $\frac{1}{\mathcal{I}_m(\theta)}$*, donc égale à* $\frac{\theta^2}{m} - \frac{\theta n_0}{m}$.

$$\begin{aligned}
Var(\hat{\theta}'_m) &= Var(\frac{n_0}{m}\sum_{j=1}^{m}Y_i) \text{ (où les } Y_i \text{ sont indépendantes)} \\
&= \frac{n_0^2}{m}Var(Y_1) \\
&= \frac{n_0^2}{m}[(\frac{\theta}{n_0})^2 - \frac{\theta}{n_0}] \\
&= \frac{\theta^2}{m} - \frac{\theta n_0}{m}
\end{aligned} \tag{10}$$

$\hat{\theta}'_m$ *est donc effectivement de variance minimale.*

Question 5 *On obtient le tableau suivant :*

α	*Intervalle de confiance*
1%	*[à remplir]*
5%	*[à remplir]*
10%	*[à remplir]*
20%	*[à remplir]*

3 Application et comparaison des stratégies.

Question 1

La première stratégie consiste à évaluer le ratio $\frac{nombredepoissonsbagus}{nombretotaldepoisson}$*, puis, connaissant le nombre exact de poissons bagués, en déduire une estimation du nombre total de poissons. Sur 1000 poissons pêchés, 35 sont bagués. Il y a donc une proportion* $p = \frac{35}{1000} = 0.035$ *de poissons bagués parmi les poissons pêchés. On peut donc estimer* $\theta = 0.035$.
On calcule les intervalles de confiances :

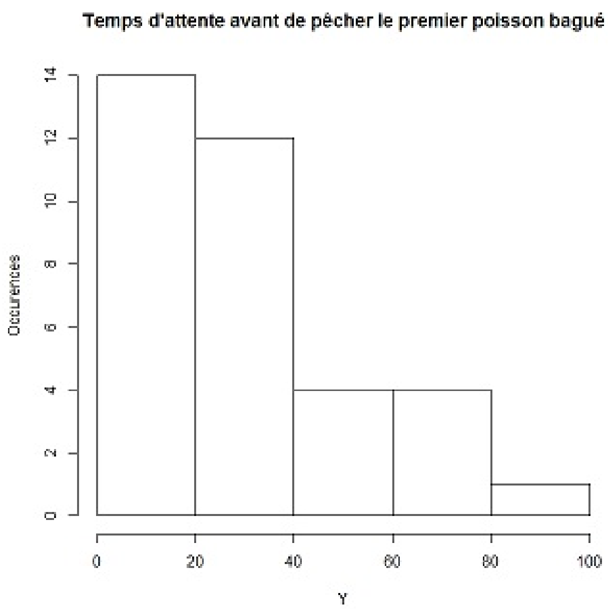
1. *Intervalle de confiance exact :* $[0.02449753, 0.02533891]$
2. *Intervalle de confiance asymptotuque de seuil à 5% :* $[0.02544073, 0.04455927]$

Question 2

La deuxième stratégie repose sur la supposition suivante : le nombre de poissons pêchés avant de tomber sur un poisson bagué suit une loi géométrique de paramètre λ *à déterminer. Ce paramètre est le ratio précédant, donc :*
$\lambda = \frac{nombre_{d}e_{p}oissons_{b}agus}{nombre_{t}otal_{d}e_{p}oissons}$.
Donc une estimation de λ *conduira de façon inévitable à une estimation du ratio. La deuxième stratégie consiste à évaluer* λ.
On trouve $\lambda = 0.03521127$. *Calculons l'intervalle de confiance asymptotique de seuil à 5% :*
$[0.00000000, 0.08645611]$

Question 3

Le logiciel R nous permet de tracer cet histogramme :



Cet histogramme ressemble fort à la représentation d'une variable aléatoire qui suit une loi géométrique. On peut donc considérer que l'hypothèse d'une loi géometrique est vérifiée. En tout cas, elle n'est pas absurde.

Question 4

Pour décider de la meilleure stratégie, comparons les intervalles de confiance asymptotiques. Intéréssons nous plus particulièrement aux longueurs de ces intervalles :

1. *Stratégie 1 : 0.01911855*
2. *Stratégie 2 : 0.08645611*

Il apparaît que la longueur pour la deuxième stratégie est presque 5 fois plus important que celui de la première stratégie.

Il et donc préférable de choisir la première stratégie.

4 Vérifications expérimentales à base de simulations.

Question 1

On calcule R les différentes proportions d'appartenance de θ pour les intervalles de confiance établis en variant les paramètres.

```
[1] "proportions (en pourcentage) en fonction de l'augmentation de theta (intervalles de confiance exacts) :"
[1] 98 95 96 94 98 96
[1] "proportions (en pourcentage) en fonction de l'augmentation de theta (intervalles de confiance asymptotiques) :"
[1] 93 89 91 89 80 74
```

Lorsqu'on augmente θ, on remarque que la proportion d'appartenance aux intervalles de θ diminue lorsqu'on choisit l'intervalle de confiance asymptotique.
En effet, lorsqu'on augmente θ, la probabilité p diminue donc l'intervalle asymptotique a une plus grande probabilité de se "tromper" car le nombre n d'essais n'est pas grand.

```
[1] "proportions (en pourcentage) en fonction de l'augmentation de n0 (intervalles de confiance exacts) :"
[1] 95 96 99 97 99 97
[1] "proportions (en pourcentage) en fonction de l'augmentation de n0 (intervalles de confiance asymptotiques) :"
[1] 87 94 88 97 95 89
```

Lorsqu'on augmente n_0, on remarque que la proportion d'appartenance augmente très légèrement.
En effet, comme n_0 est proportionnel à p et pour la même raison que précédemment, cela paraît cohérent.

```
[1] "proportions (en pourcentage) en fonction de l'augmentation de n (intervalles de confiance exacts) :"
[1] 94 98 97 91 97 94
[1] "proportions (en pourcentage) en fonction de l'augmentation de n (intervalles de confiance asymptotiques) :"
[1] 95 96 97 96 96 93
```

Lorsqu'on augmente n, on ne constate pas de changement particulier, ce qui peut paraître incohérent car concernant l'intervalle asymptotique, ce dernier devrait être plus précis lorsque n est grand.

```
[1] "proportions (en pourcentage) en fonction de l'augmentation de m (intervalles de confiance exacts) :"
[1] 95.00 94.00 95.20 94.60 95.02 95.62
[1] "proportions (en pourcentage) en fonction de l'augmentation de m (intervalles de confiance asymptotiques) :"
[1] 95.00 93.50 93.80 93.60 92.74 93.31
```

Lorsqu'on augmente m, on constate une stabilisation au niveau des proportions donc de la précision des intervalles.
En effet, augmenter m permet juste de rendre la simulation plus précise puisqu'on se base sur un plus grand nombre d'essais pour établir les proportions.

```
[1] "proportions (en pourcentage) en fonction de l'augmentation de alpha (intervalles de confiance exacts) :"
[1] 98 96 90 85 48 36
[1] "proportions (en pourcentage) en fonction de l'augmentation de alpha (intervalles de confiance asymptotiques) :"
[1] 85 93 88 79 50  8
```

Lorsqu'on augmente α, quel que soit le type d'intervalle (exact ou asymptotique), il est cohérent que la proportion diminue car on baisse le niveau de confiance donc la précision de ces intervalles.

Question 2

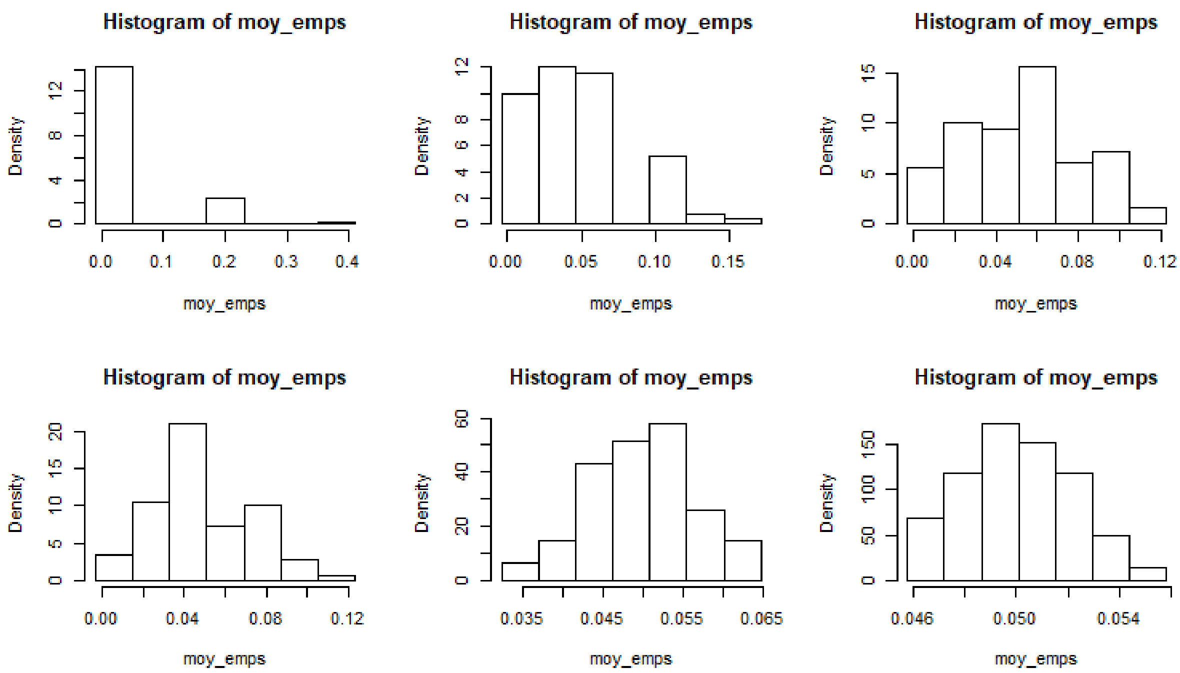
On simule $m = 100$ échantillons de taille $n = 5, 10, 100, 1000, 10000, 100000$ de loi de Bernoulli, puis on compare les m moyennes empiriques avec les espérances (avec une erreur de $\epsilon = 0.01$) pour illustrer la loi faible des grands nombres :

```
[1] "valeur de n :"
[1] 5e+00 1e+01 1e+02 1e+03 1e+04 1e+05
[1] "proportions (en pourcentage) en fonction de n :"
[1]   0   0  24  85 100 100
```

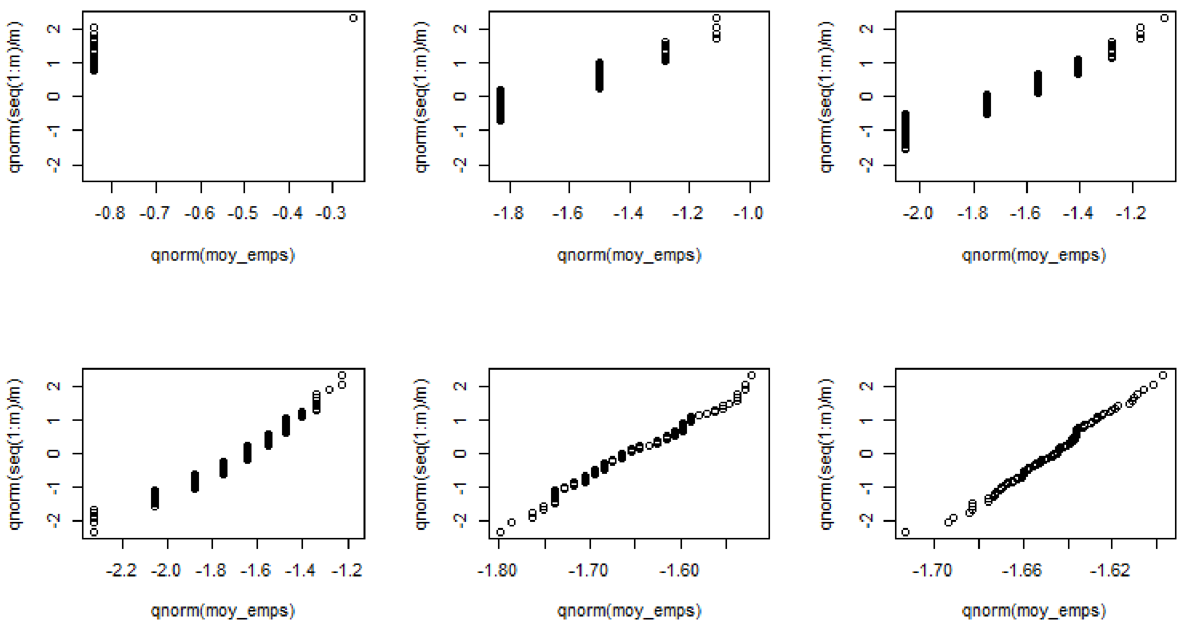
Lorsque n augmente, on remarque que l'écart entre la moyenne empirique et l'espérance diminue. A partir de $n = 1000$ environ, on peut dire que la moyenne empirique peut être approximée par l'espérance. La loi faible des grands nombres est ainsi illustrée.

Question 3

De la même manière que précédement, on va faire la même simulation avec $m = 100$ et en faisant varier $n = 5, 30, 50, 100, 1000, 10000$, sauf qu'on va tracer les histogrammes (de même largeur en l'occurrence) des moyennes empiriques pour chaque valeur de n ainsi que les graphes de probabilités associés pour la loi normale :



On remarque que la courbe associée à l'histogramme s'apparente à celle modélisant la fonction de densité de la loi normale à partir de $n = 50$ environ.



De même, en traçant les graphes de probabilité $(F_{\mathcal{N}}^{-1}(\overline{x_i}),\ F_{\mathcal{N}}^{-1}(\frac{i}{m})$ avec $\overline{x_i} \forall i = 1, ..., n$ les moyennes empiriques de l'échantillon de données. On remarque de même que l'apparence d'une droite se forme à partir de $n = 50$ ce qui confirme le fait qu'à partir de cette valeur de $n = 50$ environ, la moyenne empirique des x_i (iid suivant une loi de Bernoulli) suit une loi normale. Le théorème centrale limite est ainsi illustrée.