TP méthodes numériques : Compte-rendu

Billy Ndihokubwayo et Michel Yoeung (ENSIMAG - 1A - Groupe 2)

Avril 2018

1 Introduction.

2 Simulation de la collision de deux billes par le schéma d'Euler explicite.

Question 1

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = -(x_1 - x_2)_+^{\frac{3}{2}} \tag{1}$$

$$\frac{d^2x_2}{dt^2} = (x_1 - x_2)_+^{\frac{3}{2}} \tag{2}$$

$$H = \frac{v_1^2}{2} + \frac{v_2^2}{2} + \frac{2}{5}(x_1 - x_2)_+^{\frac{5}{2}} \tag{3}$$

On a donc :

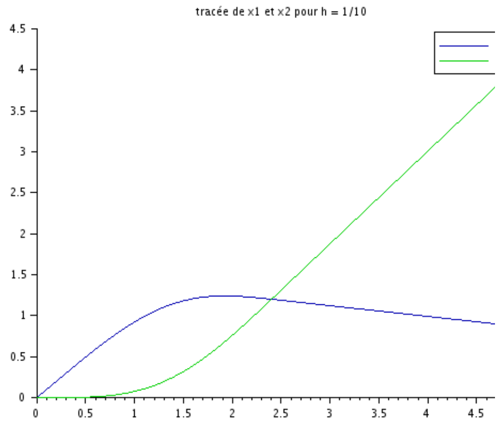
$$\begin{aligned}\frac{dH}{dt} &= \frac{1}{2}\frac{dv_1^2}{dt} + \frac{1}{2}\frac{dv_2^2}{dt} + (\frac{2}{5}(x_1 - x_2)_+^{\frac{5}{2}})' \\ &= \frac{2}{2}v_1\frac{dv_1}{dt} + \frac{2}{2}v_2\frac{dv_2}{dt} + (v_1 - v_2)_+(x_1 - x_2)_+^{\frac{3}{2}} \\ &= -v_1(v_1 - v_2)_+^{\frac{3}{2}} + v_2(v_1 - v_2)_+^{\frac{3}{2}} + (v_1 - v_2)_+(x_1 - x_2)_+^{\frac{3}{2}} \\ &= -(v_1 - v_2)_+(x_1 - x_2)_+^{\frac{3}{2}} + (v_1 - v_2)_+(x_1 - x_2)_+^{\frac{3}{2}} \\ &= 0\end{aligned} \tag{4}$$

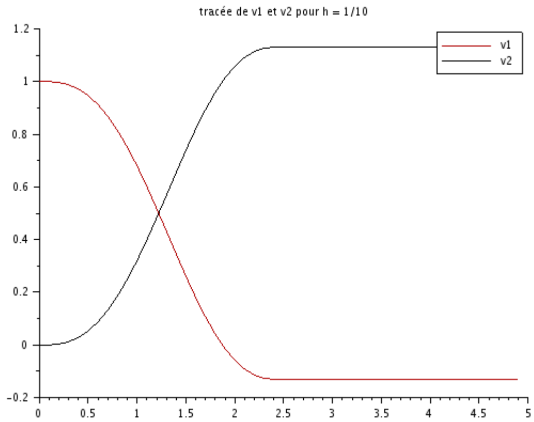
Question 2

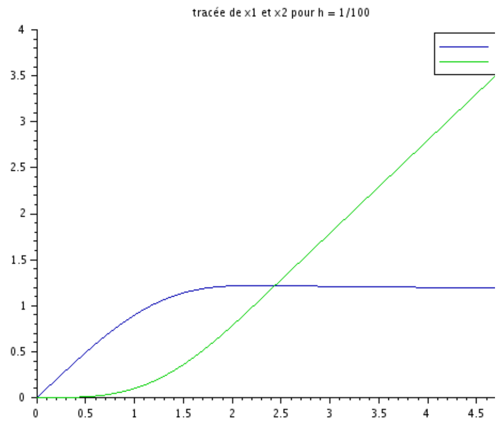
$$\begin{aligned}Y = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} F_1(Y) \\ F_2(Y) \\ F_3(Y) \\ F_4(Y) \end{pmatrix} avec \frac{dY}{dt} = F(Y) \Rightarrow Y &= \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ v_1(t) \\ v_2(t) \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt}(t) \\ \frac{dx_2}{dt}(t) \\ \frac{dv_1}{dt}(t) \\ \frac{dv_2}{dt}(t) \end{pmatrix} \\ \Rightarrow Y &= \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ v_1(t) \\ v_2(t) \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \\ -(x_1 - x_2)_+^{\frac{3}{2}} \\ +(x_1 - x_2)_+^{\frac{3}{2}} \end{pmatrix}\end{aligned} \tag{5}$$

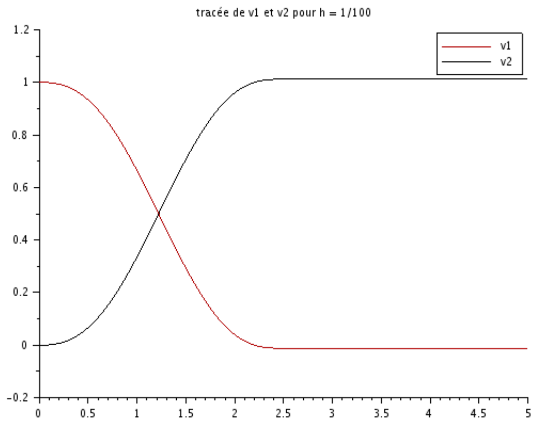
Question 3 *(Voir script Scilab)*

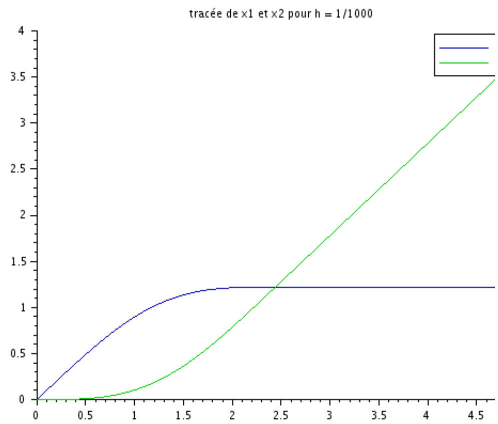
Question 4

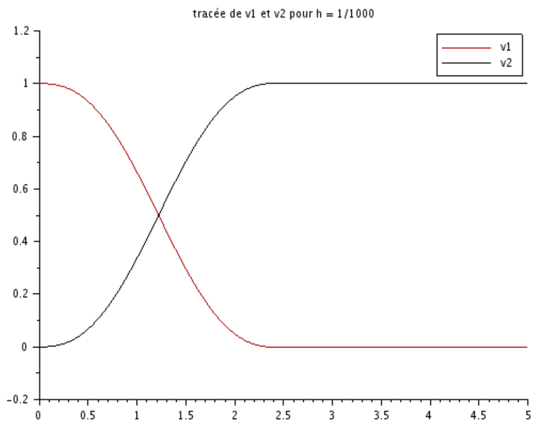












Pour $h_1 = \frac{1}{10}$ *:*
$v_1(0) = 1$
$v_2(0) = 0$
$v_{1,finale} = -0.13$
$v_{2,finale} = 1.13$

Pour $h_2 = \frac{1}{100}$ *:*
$v_1(0) = 1$
$v_2(0) = 0$
$v_{1,finale} = -0.012$
$v_{2,finale} = 1.012$

Pour $h_3 = \frac{1}{1000}$ *:*
$v_1(0) = 1$
$v_2(0) = 0$
$v_{1,finale} = -0.0011$
$v_{2,finale} = 1.0011$

On peut donc remarquer que $v_{2,finale} > v_1(0)$ *pour les trois valeurs de* h*.*
Ces résultats ne me semble pas réalistes étant donné que la deuxième bille aura au finale une plus grande vitesse que la vitesse initiale de la première bille l'ayant touché. Ce qui vaudrait dire que si que le mouvement des billes ne s'arrêterait jamais.
Et si on prend $h \to 0$*, on remaque que* $v_{2,finale} \to v_1(0)$*.*

3 Simulation de la collision de n billes par le schéma d'Euler implicite.

On se place d'abord dans le cadre d'un modèle non linéaire.

Question 5

$$\text{On a : } \begin{cases} m_1 \frac{d^2x_1}{dt^2} = -(x_1 - x_2)_+^{\frac{3}{2}} \\ \\ m_i \frac{d^2x_i}{dt^2} = (x_{i-1} - x_i)_+^{\frac{3}{2}} - (x_i - x_{i+1})_+^{\frac{3}{2}} \text{ pour } 2 \leq i \leq n-1 \\ \\ m_n \frac{d^2x_n}{dt^2} = -(x_{n-1} - x_n)_+^{\frac{3}{2}} \end{cases}$$

qui modlise la collision de n billes

et $H = \sum_{i=1}^{n}(\frac{1}{2}m_i(\frac{dx_i}{dt})^2) + \frac{2}{5}\sum_{i=1}^{n-1}(x_i - x_{i+1})_+^{\frac{5}{2}}$

On a donc :

$$\begin{aligned}
\frac{dH}{dt} &= \frac{d(\sum_{i=1}^{n}(\frac{1}{2}m_i(\frac{dx_i}{dt})^2))}{dt} + \frac{d(\frac{2}{5}\sum_{i=1}^{n-1}(x_i - x_{i+1})_+^{\frac{5}{2}})}{dt} \\
&= \frac{2}{2}\sum_{i=1}^{n}(\frac{1}{2}m_i(\frac{dx_i}{dt}\frac{d^2x_i}{dt^2})) + \frac{2}{5} * \frac{5}{2}\sum_{i=1}^{n-1}((v_i - v_{i+1})_+(x_i - x_{i+1})_+^{\frac{3}{2}}) \\
&= -\sum_{i=1}^{n}(v_i m_i \frac{d^2x_i}{dt^2}) + \sum_{i=1}^{n-1}(v_i(x_i - x_{i+1})_+^{\frac{3}{2}} - v_{i+1}(x_i - x_{i+1})_+^{\frac{3}{2}}) \\
&= -v_1(x_1 - x_2)_+^{\frac{3}{2}} + \sum_{i=2}^{n-1}(v_i((x_{i-1} - x_i)_+^{\frac{3}{2}} - (x_i - x_{i+1})_+^{\frac{3}{2}})) + v_n(x_{n-1} - x_n)_+^{\frac{3}{2}} + \\
&\quad v_1(x_1 - x_2)_+^{\frac{3}{2}} - v_2(x_1 - x_2)_+^{\frac{3}{2}} + \sum_{i=2}^{n-2}(v_i(x_i - x_{i+1})_+^{\frac{3}{2}} - v_{i+1}(x_i - x_{i+1})_+^{\frac{3}{2}}) + \\
&\quad v_n(x_{n-1} - x_n)_+^{\frac{3}{2}} - v_n(x_{n-1} - x_n)_+^{\frac{3}{2}} \\
&= \sum_{i=2}^{n-1}(v_i(x_{i-1} - x_i)_+^{\frac{3}{2}} - v_i(x_i - x_{i+1})_+^{\frac{3}{2}}) - v_2(x_1 - x_2)_+^{\frac{3}{2}} + \\
&\quad \sum_{i=2}^{n-2}(v_i(x_i - x_{i+1})_+^{\frac{3}{2}} - v_{i+1}(x_i - x_{i+1})_+^{\frac{3}{2}}) + v_{n-1}(x_{n-1} - x_n)_+^{\frac{3}{2}} \\
&= 0 \quad \textit{car les termes s'annulent}
\end{aligned} \tag{6}$$

Question 6

On a : $M = \begin{pmatrix} m_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & m_2 & ... & ... \\ ... & ... & ... & 0 \\ 0 & ... & 0 & m_n \end{pmatrix}$ *et* $Mx = \begin{pmatrix} m_1x_1 \\ m_2x_2 \\ ... \\ m_nx_n \end{pmatrix}$

Et en se basant sur le schéma d'Euler implicite :

$$\begin{pmatrix} m_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & m_2 & ... & ... \\ ... & ... & ... & 0 \\ 0 & ... & 0 & m_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{(k+1)} - 2x_1^{(k)} + x_1^{(k-1)} \\ x_2^{(k+1)} - 2x_2^{(k)} + x_2^{(k-1)} \\ ... \\ x_n^{(k+1)} - 2x_n^{(k)} + x_n^{(k-1)} \end{pmatrix} \text{ - } h^2 f(x^{(k+1)})$$

$$= \begin{pmatrix} m_1(x_1^{(k+1)} - 2x_1^{(k)} + x_1^{(k-1)}) \\ m_2(x_2^{(k+1)} - 2x_2^{(k)} + x_2^{(k-1)}) \\ ... \\ m_n(x_n^{(k+1)} - 2x_n^{(k)} + x_n^{(k-1)}) \end{pmatrix} - h^2 f(x^{(k+1)})$$

$$= h^2 \begin{pmatrix} \frac{m_1(x_1^{(k+1)} - 2x_1^{(k)} + x_1^{(k-1)})}{h^2} \\ \frac{m_2(x_2^{(k+1)} - 2x_2^{(k)} + x_2^{(k-1)})}{h^2} \\ ... \\ \frac{m_n(x_n^{(k+1)} - 2x_n^{(k)} + x_n^{(k-1)})}{h^2} \end{pmatrix} - h^2 f(x^{(k+1)}) \qquad \textit{avec le vecteur qui designe f(}x^{(k+1)})$$

$= h^2 f(x^{(k+1)}) - h^2 f(x^{(k+1})$

$= 0$

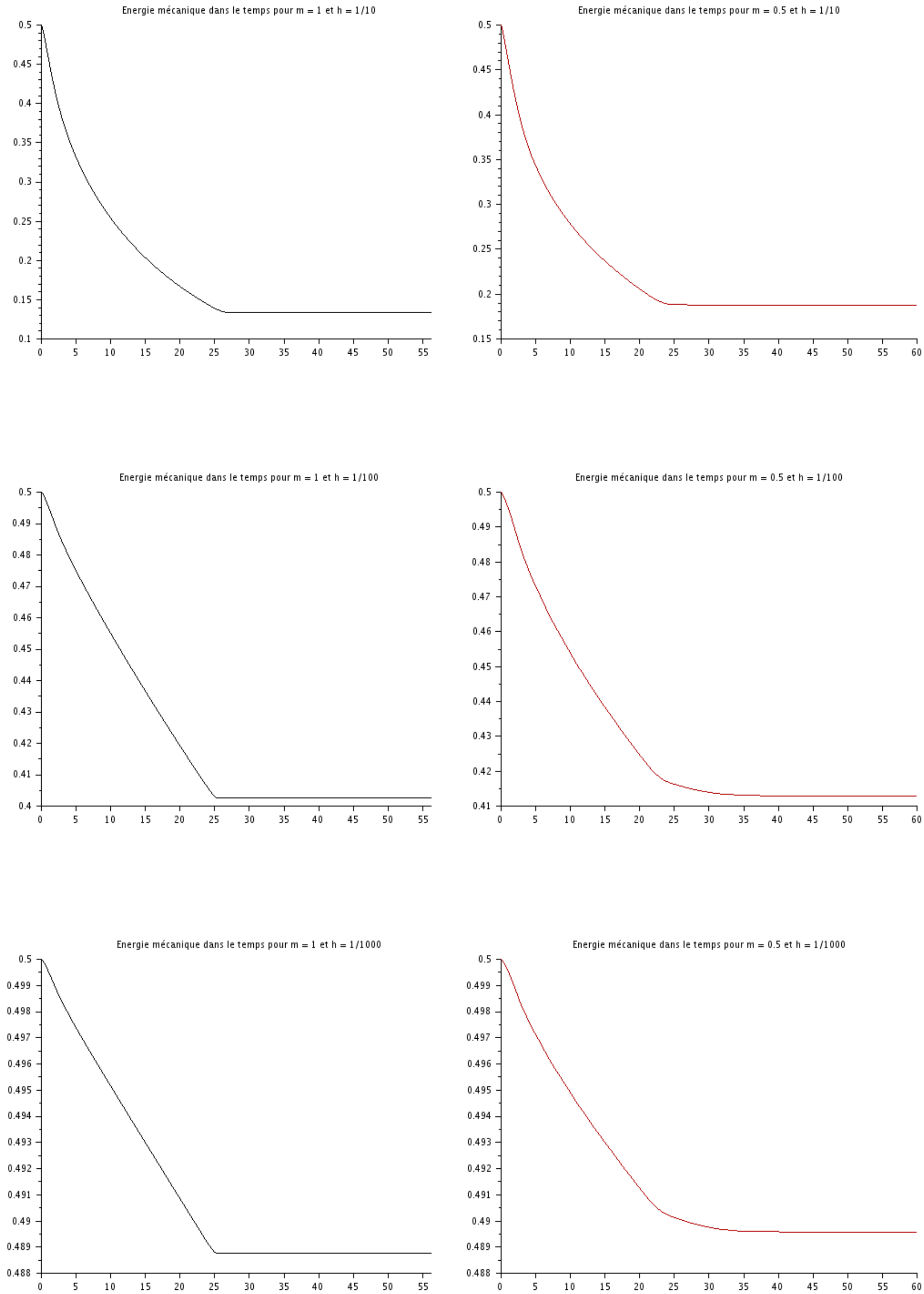
$Donc\ le\ schma\ d'Euler\ implicite\ s'crit\ bien\ :$

$M(x^{(k+1)} - 2x^{(k)} + x^{(k-1)}) - h^2 f(x^{(k+1)}) = 0$

Question 7 *(Voir script Scilab)*

Question 8 *(Voir script Scilab)*

Question 9



L'énergie mécanique diminue en effet avec le temps.
Et plus on prend h petit, plus l'énergie mécanique diminue lentement.

Question 10

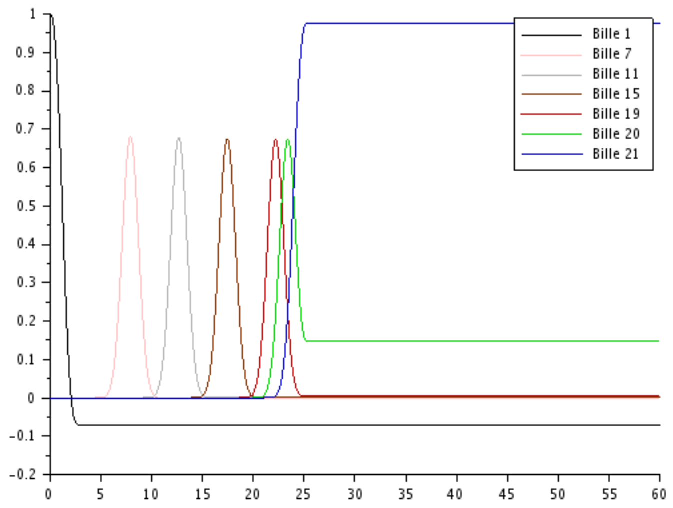


FIGURE 1 – Tracé du graphe des vitesses des 7 billes

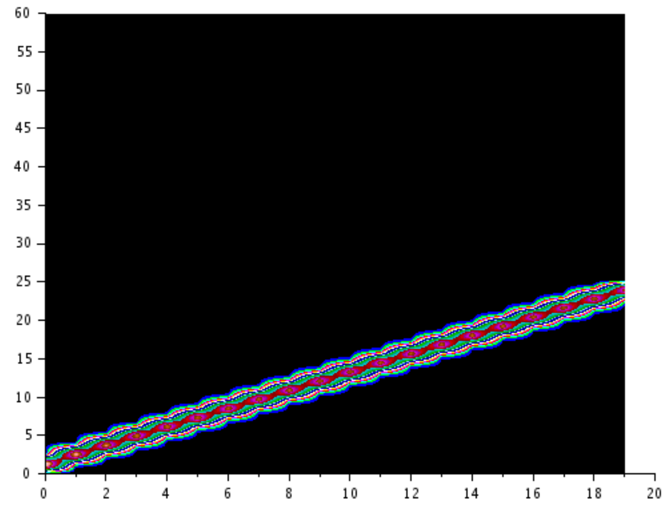
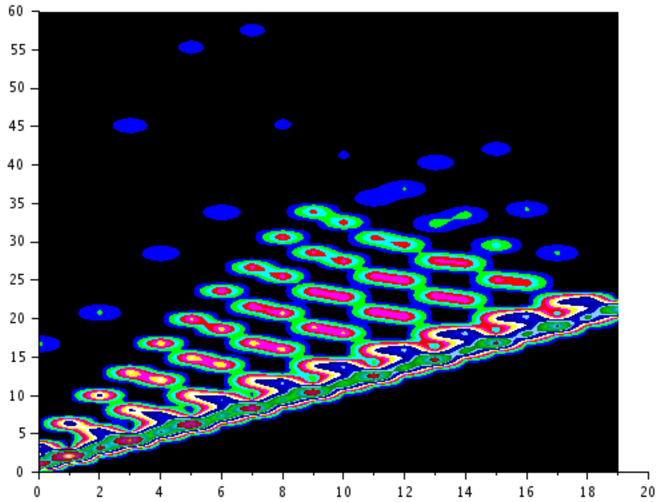


FIGURE 2 – Graphe en niveaux de gris

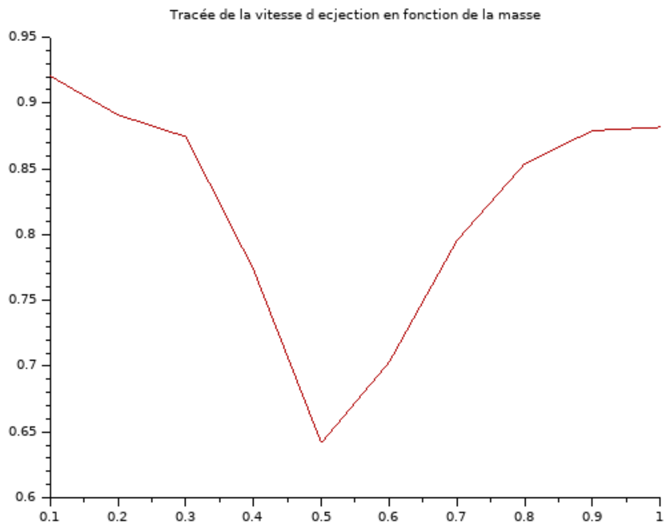
Avec le graphe en niveaux de gris (Sgrayplot), on peut constater que les forces de contacts entre deux billes vont en s'amplifiant jusqu'à un certain moment puis diminuenent et viennent à s'annuler une fois pour toutes. Toutefois ce cycle ne se remarque pas au même instant pour tous les couples de billes voisines. En effet par exemple, une fois que les forces de contact entre la première et la deuxième bille commencent à diminuer, le cycle débute pour la deuxième et la troisième bille et ainsi de suite.

Question 11



Les résultats obtenus pour $m = 0.5$ montrent que l'évolution des forces de contacts entre 2 billes ne suit plus le cycle observé sur les résultats pour $m = 1$. En effet pour $m = 0.5$, les forces de contacts entre 2 billes données peuvent augmenter puis s'annuler puis par la suite augmenter encore(ceci peut se répéter plusieurs fois) ce qui n'était pas le cas pour $m = 1$ où les forces de contact entre 2 billes données ne pouvaient réaugmenter une fois après avoir été annulées.

Question 12



Il faut choisir $m = 0.5$ pour avoir une vitesse d'ejection minimale.

On s'interesse cette fois à un modèle linéaire.

Question 13

$$\textit{On rappelle : } M = \begin{pmatrix} m_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & m_2 & ... & ... \\ ... & ... & ... & 0 \\ 0 & ... & 0 & m_n \end{pmatrix}$$

$$\textit{On a : } \begin{pmatrix} \frac{m_1(u_1^{(k+1)}-2u_1^{(k)}+u_1^{(k-1)})}{h^2} \\ ... \\ \frac{m_i(u_i^{(k+1)}-2u_i^{(k)}+u_i^{(k-1)})}{h^2} \\ ... \\ \frac{m_n(u_n^{(k+1)}-2u_n^{(k)}+u_n^{(k-1)})}{h^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2^{(k+1)} - 2u_1^{(k+1)} + f_1((k+1)h) \\ ... \\ u_{i+1}^{(k+1)} - 2u_i^{(k+1)} + u_{i-1}^{(k+1)} \\ ... \\ u_{n-1}^{(k+1)} - 2u_n^{(k+1)} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} m_1(u_1^{(k+1)} - 2u_1^{(k)} + u_1^{(k-1)}) \\ ... \\ m_i(u_i^{(k+1)} - 2u_i^{(k)} + u_i^{(k-1)}) \\ ... \\ m_n(u_n^{(k+1)} - 2u_n^{(k)} + u_n^{(k-1)}) \end{pmatrix} = h^2 \begin{pmatrix} u_2^{(k+1)} - 2u_1^{(k+1)} + f_1((k+1)h) \\ ... \\ u_{i+1}^{(k+1)} - 2u_i^{(k+1)} + u_{i-1}^{(k+1)} \\ ... \\ u_{n-1}^{(k+1)} - 2u_n^{(k+1)} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} m_1 u_1^{(k+1)} \\ ... \\ m_i u_i^{(k+1)} \\ ... \\ m_n u_n^{(k+1)} \end{pmatrix} + M \begin{pmatrix} -u_1^{(k)} \\ ... \\ -u_i^{(k)} \\ ... \\ u_n^{(k)} \end{pmatrix} - M \begin{pmatrix} hv_1^{(k)} \\ ... \\ hv_i^{(k)} \\ ... \\ hv_n^{(k)} \end{pmatrix} = h^2 \begin{pmatrix} u_2^{(k+1)} - 2u_1^{(k+1)} + f_1((k+1)h) \\ ... \\ u_{i+1}^{(k+1)} - 2u_i^{(k+1)} + u_{i-1}^{(k+1)} \\ ... \\ u_{n-1}^{(k+1)} - 2u_n^{(k+1)} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} m_1 u_1^{(k+1)} \\ ... \\ m_i u_i^{(k+1)} \\ ... \\ m_n u_n^{(k+1)} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} m_1(u_1^{(k)} + hv_1^{(k)}) + h^2 f_1((k+1)h) \\ ... \\ m_i(u_i^{(k)} + hv_i^{(k)}) \\ ... \\ m_n(u_n^{(k)} + hv_n^{(k)}) \end{pmatrix} = -h^2 \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & ... & ... & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & ... & ... \\ 0 & -1 & 2 & ... & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & -1 \\ 0 & ... & ... & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} u_1^{(k+1)} \\ ... \\ u_i^{(k+1)} \\ ... \\ u_n^{(k+1)} \end{pmatrix}$$

$$\textit{avec } \; Mu^{(k+1)} = \begin{pmatrix} m_1 u_1^{(k+1)} \\ ... \\ m_i u_i^{(k+1)} \\ ... \\ m_n u_n^{(k+1)} \end{pmatrix}, \; b^{(k)} = \begin{pmatrix} m_1(u_1^{(k)} + hv_1^{(k)}) + h^2 f_1((k+1)h) \\ ... \\ m_i(u_i^{(k)} + hv_i^{(k)}) \\ ... \\ m_n(u_n^{(k)} + hv_n^{(k)}) \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & ... & ... & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & ... & ... \\ 0 & -1 & 2 & ... & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & -1 \\ 0 & ... & ... & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \; et \; u^{(k+1)} = \begin{pmatrix} u_1^{(k+1)} \\ ... \\ u_i^{(k+1)} \\ ... \\ u_n^{(k+1)} \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow Mu^{(k+1)} + h^2 Du^{(k+1)} = b^{(k)}$

$\Rightarrow (M+h^2 - D)u^{(k+1)} = b^{(k)}$

$\Rightarrow Au^{(k+1)} = b^{(k)}$ *avec* $A = M + h^2 D$

Question 14

$$A = \begin{pmatrix} m_1 + h^2 & -1 & ... & 0 \\ -1 & m_i + 2h^2 & ... & ... \\ ... & ... & ... & -1 \\ 0 & ... & -1 & m_n + 2h^2 \end{pmatrix}$$

Avec i = 2...n-1

$A^t = (M + h^2 D) = M^t + h^2 D^t = M + h^2 D = A$

Donc A est bien une matrice symétrique

Soit $X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{C})$

$$^tXAX = \begin{pmatrix} x_1 & ... & x_i & ... & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1 + h^2 & -1 & ... & 0 \\ -1 & m_i + 2h^2 & ... & ... \\ ... & ... & ... & -1 \\ 0 & ... & -1 & m_n + 2h^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ ... \\ x_i \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$^tXAX = \begin{pmatrix} (x_1(m1_1 + h^2) - x_2) & ... & (-x_{i-1} + (m_i + 2h^2)x_i - x_{i+1}) & ... & (-x_{n-1} + (mn + 2h^2)x_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ ... \\ x_i \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}$$

$^tXAX = (x_1^2(m1_1 + h^2) - x_1x_2) + ... + (-x_{i-1}x_i + (m_i + 2h^2)x_i^2 - x_ix_{i+1}) + ... + (-x_{n-1}x_n + (mn + 2h^2)x_n^2)$

Avec i = 2...n

$^tXAX = m_1x_1^2 + ... + h^2x_{k-1}^2 - 2x_{k-1}x_k + h^2x_k^2 + m_kx_k^2 + ... + h^2x_{n-1}^2 - 2x_{n-1}x_n + h^2x_n^2$

Avec k = 2...n

$^tXAX = \sum_{i=2}^{n}(x_{j-1} - x_j)^2 + \sum_{j=1}^{n} m_jx_j^2 + x_n^2$

La matrice A symétrique est définie positive car tous les expressions de ${}^tXAX$ ne peuvent qu'être nul ou supérieurs à zero. De plus pour que l'expression ${}^tXAX$ soit nulle, il faut que X soit un vecteur nul.

Question 15 *(Voir script Scilab)*

Question 16 *(Voir script Scilab)*

Question 17 *(Voir script Scilab)*

Question 18 *(Voir script Scilab)*

Question 19 *(Voir script Scilab)*