

1 Appendix

1.1 $\tilde{\mathbb{E}}^{(2,1)}$

$$\begin{bmatrix} \tilde{s}_{0,0} \\ \tilde{s}_{1,0} \\ \tilde{s}_{2,0} \\ \tilde{s}_{0,1} \\ \tilde{s}_{1,1} \\ \tilde{s}_{2,1} \\ \tilde{s}_{0,2} \\ \tilde{s}_{1,2} \\ \tilde{s}_{2,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & -1 & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . \\ . & -1 & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & -1 & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . \\ . & . & -1 & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & -1 & . & . & 1 & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & -1 & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & -1 & . & . & 1 & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & -1 & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & -1 & . & . & 1 & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & -1 & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & -1 & . & . & 1 & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & -1 & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & -1 & . & . & 1 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & -1 & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & -1 & . & . & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{u}_{0,0} \\ \tilde{u}_{1,0} \\ \tilde{u}_{2,0} \\ \tilde{u}_{3,0} \\ \tilde{u}_{0,1} \\ \tilde{u}_{1,1} \\ \tilde{u}_{2,1} \\ \tilde{u}_{3,1} \\ \tilde{u}_{0,2} \\ \tilde{u}_{1,2} \\ \tilde{u}_{2,2} \\ \tilde{u}_{3,2} \\ \tilde{v}_{0,0} \\ \tilde{v}_{1,0} \\ \tilde{v}_{2,0} \\ \tilde{v}_{0,1} \\ \tilde{v}_{1,1} \\ \tilde{v}_{2,1} \\ \tilde{v}_{0,2} \\ \tilde{v}_{1,2} \\ \tilde{v}_{2,2} \\ \tilde{v}_{0,3} \\ \tilde{v}_{1,3} \\ \tilde{v}_{2,3} \end{bmatrix} \quad (1.1)$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{s}_{0,0} \\ \tilde{s}_{1,0} \\ \tilde{s}_{2,0} \\ \tilde{s}_{0,1} \\ \tilde{s}_{1,1} \\ \tilde{s}_{2,1} \\ \tilde{s}_{0,2} \\ \tilde{s}_{1,2} \\ \tilde{s}_{2,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & -1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & -1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & -1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & 1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{u}_{1,0} \\ \tilde{u}_{2,0} \\ \tilde{u}_{1,1} \\ \tilde{u}_{2,1} \\ \tilde{u}_{1,2} \\ \tilde{u}_{2,2} \\ \tilde{v}_{0,1} \\ \tilde{v}_{1,1} \\ \tilde{v}_{2,1} \\ \tilde{v}_{0,2} \\ \tilde{v}_{1,2} \\ \tilde{v}_{2,2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & -1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{u}_{0,0} \\ \tilde{u}_{3,0} \\ \tilde{u}_{0,1} \\ \tilde{u}_{3,1} \\ \tilde{u}_{0,2} \\ \tilde{u}_{3,2} \\ \tilde{v}_{0,0} \\ \tilde{v}_{1,0} \\ \tilde{v}_{2,0} \\ \tilde{v}_{0,3} \\ \tilde{v}_{1,3} \\ \tilde{v}_{2,3} \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

$$\tilde{\mathbf{s}}^{(2)} = \tilde{\mathbb{E}}^{(2,1)} \tilde{\mathbf{u}}^{(1)} + \tilde{\mathbb{E}}_{\text{known}}^{(2,1)} \tilde{\mathbf{u}}_{\text{known}}^{(1)} \quad (1.3)$$

1.2 $\mathbb{E}^{(1,0)}$

$$\begin{bmatrix} u_{1,1} \\ u_{2,1} \\ u_{1,2} \\ u_{2,2} \\ u_{1,3} \\ u_{2,3} \\ v_{1,1} \\ v_{2,1} \\ v_{3,1} \\ v_{1,2} \\ v_{2,2} \\ v_{3,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & -1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & -1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & 1 & \cdot & \cdot \\ -1 & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & -1 & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & -1 & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & -1 & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{1,1} \\ p_{2,1} \\ p_{3,1} \\ p_{1,2} \\ p_{2,2} \\ p_{3,2} \\ p_{1,3} \\ p_{2,3} \\ p_{3,3} \end{bmatrix} \quad (1.4)$$

$$\mathbf{u} = \mathbb{E}^{(1,0)} \mathbf{p} \quad (1.5)$$

$$\mathbb{E}^{(1,0)} = - \left(\tilde{\mathbb{E}}^{(2,1)} \right)^T \quad (1.6)$$

1.3 $\mathbb{E}^{(2,1)}$

$$\xi^{(2)} = \mathbb{E}^{(2,1)} \mathbf{u}^{(1)} \tag{1.7}$$

$$\xi^{(2)} = \mathbb{E}^{(2,1)} \mathbf{u}^{(1)} + \mathbb{E}_{\text{known}}^{(2,1)} \mathbf{u}_{\text{known}}^{(1)} \tag{1.8}$$

$$\xi^{(2)} = \mathbb{E}^{(2,1)} \mathbf{u}^{(1)} + \mathbf{u}_{\text{prescribed}}^{(1)} \tag{1.9}$$

[illegible]

1.4 $\tilde{\mathbb{E}}^{(1,0)}$

$$\begin{bmatrix} \tilde{u}_{1,0} \\ \tilde{u}_{2,0} \\ \tilde{u}_{1,1} \\ \tilde{u}_{2,1} \\ \tilde{u}_{1,2} \\ \tilde{u}_{2,2} \\ \tilde{v}_{0,1} \\ \tilde{v}_{1,1} \\ \tilde{v}_{2,1} \\ \tilde{v}_{0,2} \\ \tilde{v}_{1,2} \\ \tilde{v}_{2,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot & -1 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & -1 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & -1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & -1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & -1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & -1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & -1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & -1 & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_{0,0} \\ \xi_{1,0} \\ \xi_{2,0} \\ \xi_{3,0} \\ \xi_{0,1} \\ \xi_{1,1} \\ \xi_{2,1} \\ \xi_{3,1} \\ \xi_{0,2} \\ \xi_{1,2} \\ \xi_{2,2} \\ \xi_{3,2} \\ \xi_{0,3} \\ \xi_{1,3} \\ \xi_{2,3} \\ \xi_{3,3} \end{bmatrix} \quad (1.12)$$

$$\tilde{\mathbf{u}} = \tilde{\mathbb{E}}^{(1,0)} \tilde{\psi} \quad (1.13)$$

$$\tilde{\mathbb{E}}^{(1,0)} = \left(\mathbb{E}^{(2,1)} \right)^T \quad (1.14)$$

1.5 $\mathbb{H}^{(\tilde{1},1)}$ and $\mathbb{H}^{(1,\tilde{1})}$

[illegible]

$$\begin{bmatrix} u_{0,1} \\ u_{1,1} \\ u_{2,1} \\ u_{3,1} \\ u_{0,2} \\ u_{1,2} \\ u_{2,2} \\ u_{3,2} \\ u_{0,3} \\ u_{1,3} \\ u_{2,3} \\ u_{3,3} \\ v_{1,0} \\ v_{2,0} \\ v_{3,0} \\ v_{1,1} \\ v_{2,1} \\ v_{3,1} \\ v_{1,2} \\ v_{2,2} \\ v_{3,2} \\ v_{1,3} \\ v_{2,3} \\ v_{3,3} \end{bmatrix} = \mathbb{I} \begin{bmatrix} h_0/\tilde{h}_0 \\ h_1/\tilde{h}_0 \\ h_2/\tilde{h}_0 \\ h_3/\tilde{h}_0 \\ h_0/\tilde{h}_1 \\ h_1/\tilde{h}_1 \\ h_2/\tilde{h}_1 \\ h_3/\tilde{h}_1 \\ h_0/\tilde{h}_2 \\ h_1/\tilde{h}_2 \\ h_2/\tilde{h}_2 \\ h_3/\tilde{h}_2 \\ h_0/\tilde{h}_0 \\ h_0/\tilde{h}_1 \\ h_0/\tilde{h}_2 \\ h_1/\tilde{h}_0 \\ h_1/\tilde{h}_1 \\ h_1/\tilde{h}_2 \\ h_2/\tilde{h}_0 \\ h_2/\tilde{h}_1 \\ h_2/\tilde{h}_2 \\ h_3/\tilde{h}_0 \\ h_3/\tilde{h}_1 \\ h_3/\tilde{h}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{u}_{0,0} \\ \tilde{u}_{1,0} \\ \tilde{u}_{2,0} \\ \tilde{u}_{3,0} \\ \tilde{u}_{0,1} \\ \tilde{u}_{1,1} \\ \tilde{u}_{2,1} \\ \tilde{u}_{3,1} \\ \tilde{u}_{0,2} \\ \tilde{u}_{1,2} \\ \tilde{u}_{2,2} \\ \tilde{u}_{3,2} \\ \tilde{v}_{0,0} \\ \tilde{v}_{1,0} \\ \tilde{v}_{2,0} \\ \tilde{v}_{0,1} \\ \tilde{v}_{1,1} \\ \tilde{v}_{2,1} \\ \tilde{v}_{0,2} \\ \tilde{v}_{1,2} \\ \tilde{v}_{2,2} \\ \tilde{v}_{0,3} \\ \tilde{v}_{1,3} \\ \tilde{v}_{2,3} \end{bmatrix} \quad (1.16)$$

$$\mathbf{u}^{(1)} = \mathbb{H}^{(1,\tilde{1})} \tilde{\mathbf{u}}^{(1)} \quad (1.17)$$

1.6 $\mathbb{H}^{(\tilde{0},2)}$ and $\mathbb{H}^{(2,\tilde{0})}$

$$= \mathbb{I} \begin{bmatrix} (\tilde{\psi}_{0,0})^{-1} & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & (h_1 h_0)^{-1} & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & (h_2 h_0)^{-1} & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & (h_2 h_0)^{-1} & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ \tilde{\psi}_{0,1} & . & . & . & (h_2 h_0)^{-1} & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ \tilde{\psi}_{1,1} & . & . & . & . & (h_2 h_0)^{-1} & . & . & . & . & . & . & . & . \\ \tilde{\psi}_{2,1} & . & . & . & . & . & (h_2 h_0)^{-1} & . & . & . & . & . & . & . \\ \tilde{\psi}_{3,1} & . & . & . & . & . & . & (h_2 h_0)^{-1} & . & . & . & . & . & . \\ \tilde{\psi}_{0,2} & . & . & . & . & . & . & . & (h_2 h_0)^{-1} & . & . & . & . & . \\ \tilde{\psi}_{1,2} & . & . & . & . & . & . & . & . & (h_2 h_0)^{-1} & . & . & . & . \\ \tilde{\psi}_{2,2} & . & . & . & . & . & . & . & . & . & (h_2 h_0)^{-1} & . & . & . \\ \tilde{\psi}_{3,2} & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & (h_2 h_0)^{-1} & . & . \\ \tilde{\psi}_{1,3} & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & (h_2 h_0)^{-1} & . \\ \tilde{\psi}_{1,3} & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & (h_2 h_0)^{-1} \\ \tilde{\psi}_{2,3} & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & (h_2 h_0)^{-1} \\ \tilde{\psi}_{3,3} & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & (h_2 h_0)^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_{0,0} \\ \xi_{1,0} \\ \xi_{2,0} \\ \xi_{3,0} \\ \xi_{0,1} \\ \xi_{1,1} \\ \xi_{2,1} \\ \xi_{3,1} \\ \xi_{0,2} \\ \xi_{1,2} \\ \xi_{2,2} \\ \xi_{3,2} \\ \xi_{0,3} \\ \xi_{1,3} \\ \xi_{2,3} \\ \xi_{3,3} \end{bmatrix} \quad (1.18)$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{\psi}_{0,0} \\ \tilde{\psi}_{1,0} \\ \tilde{\psi}_{2,0} \\ \tilde{\psi}_{3,0} \\ \tilde{\psi}_{0,1} \\ \tilde{\psi}_{1,1} \\ \tilde{\psi}_{2,1} \\ \tilde{\psi}_{3,1} \\ \tilde{\psi}_{0,2} \\ \tilde{\psi}_{1,2} \\ \tilde{\psi}_{2,2} \\ \tilde{\psi}_{3,2} \\ \tilde{\psi}_{1,3} \\ \tilde{\psi}_{1,3} \\ \tilde{\psi}_{2,3} \\ \tilde{\psi}_{3,3} \end{bmatrix} = \mathbb{I} \begin{bmatrix} (h_0 h_0)^{-1} \\ (h_1 h_0)^{-1} \\ (h_2 h_0)^{-1} \\ (h_3 h_0)^{-1} \\ (h_0 h_1)^{-1} \\ (h_1 h_1)^{-1} \\ (h_2 h_1)^{-1} \\ (h_3 h_1)^{-1} \\ (h_0 h_2)^{-1} \\ (h_1 h_2)^{-1} \\ (h_2 h_2)^{-1} \\ (h_3 h_2)^{-1} \\ (h_0 h_3)^{-1} \\ (h_1 h_3)^{-1} \\ (h_2 h_3)^{-1} \\ (h_3 h_3)^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_{0,0} \\ \xi_{1,0} \\ \xi_{2,0} \\ \xi_{3,0} \\ \xi_{0,1} \\ \xi_{1,1} \\ \xi_{2,1} \\ \xi_{3,1} \\ \xi_{0,2} \\ \xi_{1,2} \\ \xi_{2,2} \\ \xi_{3,2} \\ \xi_{0,3} \\ \xi_{1,3} \\ \xi_{2,3} \\ \xi_{3,3} \end{bmatrix} \quad (1.19)$$

$$\tilde{\psi}^{(0)} = \mathbb{H}^{(\tilde{0},2)} \xi^{(2)} \tag{1.20}$$