Analysis I: Übung 4

Michel Heusser

October 23, 2012

1 Theorie

1.1 Injektivität, Surjektivität, Bijektivität

Definition: Eine Funktion $f : X \to Y$, $x \to f(x)$ heisst **surjektiv** falls:

- Formal: $\forall y \in Y : \exists x \in X : f(x) = y$
  $(\Rightarrow W(f) = Y)$
- Formal wörtlich: Für jedes y in Y existiert (mindestens) ein x in X, so dass $f(x) = y$
- Intuitiv: Jedes Element vom Zielbereich (Y) wird von der Funktion "benutzt"... also der Wertebereich ist der ganze Zielbereich.

Definition: Eine Funktion $f : X \to Y$, $x \to f(x)$ heisst **injektiv** falls:

- Formal: $\forall x_1, x_2 \in X : (f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2)$
- Formal wörtlich: Der einzige Weg zwei stellen x_1 und x_2 (im Definitionsbereich von f) so zu wählen, dass man beide den gleichen Funktionswert bekommen ($f(x_1) = f(x_2)$) ist wenn beide genau die gleiche Stelle sind ($x_1 = x_2$). Anders gesagt, es existiert keine zwei stellen mit dem gleichen Funktionswert.
- Intuitiv: Jeder y hat einen "exklusiven" x.

Definition: Eine Funktion $f : X \to Y$, $x \to f(x)$ heisst **bijektiv** falls:

- Formal wörtlich: f ist surjektiv und bijektiv
- Intuitiv: Jedes element im Zielbereich hat einen eindeutigen Element im Definitionsbereich. Oder anders gesagt, alle werte vom Zielbereich und Definitionsbereich werden benutzt und haben einen eindeutigen Partner.

1.1.1 Beispiel

$f : A \to B$, $x \to f(x)$ mit

$A = \{a, b, c\}$
$B = \{x, y\}$

x	$f(x)$
a	x
b	x
c	y

- Surjektiv
- Nicht injektiv

1.1.2 Beispiele

$f : A \to B$, $x \to f(x)$ mit

$A = \{a, b\}$
$B = \{x, y, z\}$

x	$f(x)$
a	x
b	y

- Nicht Surjektiv
- Injektiv

1.1.3 Beispiele

$f : A \to B$, $x \to f(x)$ mit

$A = [1, 3]$
$B = [1, 28]$

$f(x) = x^3$

- Nicht Surjektiv ($W(f) = [1, 27] \neq [1, 28] = B$)
- Injektiv

$f : A \to B$, $x \to f(x)$ mit

$A = \mathbb{R}^+$
$B = (0, 1]$

$f(x) = \frac{1}{1+(x-1)^2}$

- Surjektiv ($W(f) = B$)
- Nicht injektiv (Graph! Keine "exklusivität")

$f : A \to B$, $x \to f(x)$ mit

$A = [0, 3]$
$B = [0, 3]$

$$f(x) = \begin{cases} \sin(x) & 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ x & \frac{\pi}{2} < x < 3 \end{cases}$$

- Nicht surjektiv ($W(f) \neq B$)
- Injektiv (Graph!)

1.2 Die Inverse Funktion

Definition: Die Funktion $f^{-1} : B \to A, x \to f^{-1}(x)$ heisst die **inverse Funktion** von einer bijektiven funktion $f : A \to B, x \to f(x)$ falls gilt:

- Formal: $\forall x \in D(f) = A : f^{-1}(f(x)) = x$ und $\forall x \in D(f^{-1}) = C : f(f^{-1}(x)) = x$
- Wörtlich Formal: Für jedes x im Definitionsbereich von f bzw. f^{-1} bekomme ich das gleiche x wenn ich zuerst f und dann f^{-1} bzw. f^{-1} und dann f anwende.
- Intuitiv: Wenn eine Funktion mir den Partner B im Wertebereich von einem Element A im Definitionsbereich gibt, dann gibt mir seine Inverse den ursprünglichen Partner A wenn ich ihr B gebe.

Bemerkung: Eine Inverse kann nur dann Definiert werden, wenn die Funktion $f : A \to B, x \to f(x)$ bijektiv ist

- Surjektivität: Man will dass der Definitionsbereich von f der Zielbereich von f^{-1} ist und umgekehrt (i.e. wenn $f : A \to B$, dann $f^{-1} : B \to A$), damit dass überhaupt möglich ist, müssen alle Werte von f dann definiert sein für den umgekehrten Funktionsterm. Falls es Elemente im Zielbereich existieren würden, die nicht Funktionswerte von f sind, wären diese dann nicht definiert für f^{-1}. Die

"Umkehrung" der Mengen, wäre dann nicht möglich. Damit das nicht passiert, muss die Bildmenge von f genau der Wertebereich sein ($B = W(f)$ und $A = W(f^{-1})$ und deswegen folgt $B = W(f) = D(f^{-1})$ und $A = D(f) = W(f^{-1})$. f muss also surjektiv sein.

- Injektivität: Kann mit der Definition einer Funktion verstehen werden. Eine Funktion ordnet jedem $x \in D(f) = A$ einen *einzigen* $y \in W(f) \subset B$ zu. Obwohl jedes x einen eindeutigen y hat, kann es im Allgemeinen sein, dass zwei Stellen x_1 und x_2 (natürlich $x_1 \neq x_2$) den gleichen Funktionswert haben ($f(x_1) = f(x_2)$). Wenn das tatsächlich der Fall wäre, dann würde die inverse Funktion f^{-1} bei einer Stelle zwei mögliche Funktionswerte haben, was die Definition einer Funktion widerspricht!

1.2.1 Beispiel

$f : A \to B$, $x \to f(x)$
A = {a,b,c,d} B= {w,x,y,z}

x	$f(x)$
a	w
b	x
c	y
d	z

Ist bijektiv. Man kann dann eine inverse definieren:

$f^{-1} : B \to A$, $x \to f^{-1}(x)$
A = {a,b,c,d} B= {w,x,y,z}

x	$f^{-1}(x)$
w	a
x	b
y	c
z	d

1.2.2 Beispiel

$f : A \to B$, $x \to f(x)$
A = {a,b,c,d} B= {w,x,y}

Ist surjektiv aber nicht injektiv. Also keine Inverse kann definiert werden.

x	$f(x)$
a	w
b	x
c	y
d	y

1.2.3 Beispiel

$f : A \to B,\, x \to f(x)$
A = {a,b,c} B= {w,x,y}

x	$f(x)$
a	x
b	x
c	z

Nicht surjektiv und nicht injektiv. Man kann keine Inverse definieren (Wie würde es sonst gehen?)

1.2.4 Beispiel

$f : A \to B,\, x \to f(x)$
A = {a,b,c} B= {w,x,y,z}

x	$f(x)$
a	w
b	x
c	y

Injektiv aber nicht surjektiv. Man könnte die umgekehrte Vorschrift eindeutig definieren (Tabelle umkehren), der Definitionsbereich der Umkehrfunktion müsste dann $D(f^{-1}) = \{w, x, y, z\}$ sein, aber für z gäbe es kein Funktionswert ($f^{-1}z = ?$) also kann man eine Umkehrfunktion nicht definieren.

1.3 Asymtoten

Definition: Die Funktion $g : A \to \mathbb{R},\, x \to g(x)$ heisst **Asymtote** von $f : (c, \infty) \to \mathbb{R}$, $x \to f(x)$ falls gilt:

- Formal: $\lim_{x \to \infty}(f(x) - g(x)) = 0$
- Intuitiv: Beide Funktionen sich immer mehr annähern (und im Unendlichen berühren)

Bemerkung: Die Frage hier ist: wie findet man Asymtoten zu einer Funkion f? Durch Polynomdivision kann man die Funktionen so Umformen, dass man anschaulich ein "Teil" der Funktion sehen kann, der im Unendlichen verschwindet, auch wenn die ursprüngliche Funktion f nicht konvergiert.

1.3.1 Beispiel

$f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R},\ x \to f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$

Da $\frac{2x+1}{x-1} = \frac{2x-2+3}{x-1} = 2+\frac{3}{x-1}$ (Genau, was man in der Polynomdivision macht), definieren wir $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \to g(x) := 2$.

Man kann dann leicht verifizieren, dass g eine Asymptote von f ist mit: $\lim_{x\to\infty}(f(x) - g(x)) = \lim_{x\to\infty}(2 + \frac{3}{x-1} - 2) = \lim_{x\to\infty} \frac{3}{x-1} = 0$

1.3.2 Beispiel

$f : \mathbb{R} \setminus \{3\} \to \mathbb{R},\ x \to f(x) = \frac{x^2+2x-8}{x-3}$

Da $\frac{x^2+2x-8}{x-3} = x + 5 + \frac{7}{x-3}$, definieren wir $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \to g(x) := x + 5$.

Wir sehen, dass g eine Asymptote von f ist: $\lim_{x\to\infty}(f(x) - g(x)) = \lim_{x\to\infty}(x + 5\frac{7}{x-3} - (x + 5)) = \lim_{x\to\infty} \frac{7}{x-3} = 0$ (*Bemerkung:* g ist eine Asymptote trotz Divergenz, g könnte auch z.B. periodisch sein, solange die Definition der Asymptote erfüllt ist!)

2 Tipps

2.1 Online-Teil

- Frage 1: Definition von Monotonie (Handout: Übung 2). Graph Anschauen!
- Frage 2: Definition von Monotonie. Bei $f(x) = x^r$ und $r \in \mathbb{R}$, wie ändert r die Kurve?
- Frage 3: Definition von Injektiv.
- Frage 4: Definition einer Funktion und injektivität. $f : A \to B, x \to f(x)$, hier ist A eine Menge von Zahlen und B eine Menge von Trippel $(\cdot, \cdot, \cdot)$ (Anschaulich: Punkte im 3D-Raum). Injektivität heisst, jeder Element von A hat einen "exklusiven" Element in B. Wann ist das erfüllt?

- Frage 5: Zur Berechnung einer inversen Funktion f^{-1} (falls die existiert!) Löst man die Gleichung $y = f(x)$ nach x auf, und vertauscht man y und x, man setzt dann das neue (vertauschte) $y = f^{-1}(x)$
- Frage 6: Voraussetzung einer Umkehrbare funktion: Bijektivität. Wann ist sie erfüllt?
- Frage 7: $W(\sin(x)) \to W(\sin^2(x)) \to W(\sin^2(x) + 1)$

2.2 Aufgabe 2

Damit man den Funktionsterm umkehren kann, muss man die substitution $z := 2^x \Rightarrow x = \frac{\log z}{\log 2}$ benutzen und dann nach z auflösen. Man bekommt zwei lösungen, aber $z = 2^x > 0$ ist nur eine relevant. Was ist $W(f), W(f^{-1}), D(f), D(f^{-1})$? Ist die Surjektivität erfüllt? (Wenn $W(f) = D(f^{-1})$ und $D(f) = W(f^{-1})$ gilt, dann ist f surjektiv)

2.3 Aufgabe 3

- a) Der Bruch konvergiert gegen c (c noch unbekannt). Deshalb ist g(x):=c eine Asymptote.
- b) Polynomdivision oder geeignete ergänzung

2.4 Aufgabe 4

Definition von injektivität, surjektivität, bijektivität. Kreativ sein!