Analysis I: Übung 3

Michel Heusser

November 1, 2012

1 Theorie

1.1 Grenzwerte

Eine Funktion (nicht unbedingt eine "schöne" Kurve) $f(x)$ hat einen sog. Grenzwert von links an der stelle ξ, falls für jede Folge $\langle x_n \rangle$ die gegen ξ Konvergiert ($x_n < \xi$ und $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \xi$) die zugehörige (induzierte) Folge $\langle f(x_n) \rangle$, einen Grenwert a hat (anders gesagt, $\exists a$ s.d. $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = a$). Analog gilt für den Grenzwert von Rechts.

Notation:

- Linke Grenzwert a_L von f gegen ξ: $a_L = \lim\limits_{x\to\xi^-} f(x)$ (Annäherung von links)
- Rechte Grenzwert a_R von f gegen ξ: $a_R = \lim\limits_{x\to\xi^+} f(x)$ (Annäherung von rechts)

Bemerkung: Die Definition eines Grenzwertes hier ist mächtiger als man denkt und man muss sie entsprechend respektieren. Der linke/rechte Grenzwert einer Funktion gegen eine gewisse Stelle ξ muss nicht unbedingt etwas zu tun haben mit dem Funktionswert $f(\xi)$ an dieser Stelle!

1.1.1 Beispiel

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x < 0 \\ -x & 0 \le x < 1 \\ \pi & x = 1 \\ e^x & x > 1 \end{cases}$$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 0$
$f(x = 0) = 0$
$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0$

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -1$
$\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = e$
$f(x = 1) = \pi$

Falls der linke und rechte Grenzwert einer Funktion $f(x)$ an einer gewissen Stelle ξ übereinstimmen, dann redet man vom Grenzwert von $f(x)$ an der Stelle ξ und wird wie folgt definiert:

$$\lim_{x \to \xi} f(x) := \lim_{x \to \xi^-} f(x) = \lim_{x \to \xi^+} f(x)$$

Bemerkung: Man muss Aufpassen mit der folgenden Notation: Der Term $\lim\limits_{x \to \xi} f(x) = \pm\infty$ will nur besagen, dass der Term gegen $\pm\infty$ divergiert! Das heisst auf keinen Fall, dass der Grenzwert $\pm\infty$ ist (weil, das keine "fixe" endliche Zahl ist) die Funktion hat deswegen <u>keinen</u> Grenzwert, oder anders gesagt, es existiert kein Grenzwert!

1.1.2 Beispiel

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x < 0 \\ \sqrt{2} & x = 0 \\ x^3 & x > 0 \end{cases}$$

$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} x^2 = 0$
$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} x^3 = 0$

oder einfacher geschrieben: $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$
Aber: $f(x = 0) = \sqrt{2}$

1.2 Stetigkeit

Eine Funktion $f(x)$ mit $\xi \in D(f)$ heisst <u>stetig in ξ</u> falls die folgende Bedingung stimmt:

$$\lim_{x \to \xi^-} f(x) = f(\xi) = \lim_{x \to \xi^+} f(x)$$

Eine Funktion $f(x)$ mit $\xi \in D(f)$ heisst <u>stetig</u> falls $f(x)$ in alle ξ von $D(f)$ stetig ist:

$$\lim_{x \to \xi^-} f(x) = f(\xi) = \lim_{x \to \xi^+} f(x), \forall \xi \in D(f)$$

Bemerkung: Die Mathematik hat diese Definition erfunden um solche "spezielle" Funktionen zu beschreiben, deren Graphen gezeichnet werden können "ohne den Bleistift vom Papier wegzuheben". Allerdings gibt es Funktionen, natürlich, die stetige bereiche haben aber selber nicht stetig sind.

Zur stetigen Fortsetzung: Wenn der Definitionsbereich $D(f)$ einer Funktion $f(x)$ erweitert wird, so, dass die ursprüngliche Vorschrift (also die Funktion) stetig ist im neuen Bereich, dann hat man $f(x)$ stetig fortgesetzt.

1.2.1 Beispiel

$f : x \in [1, 4]\backslash 3 \to f(x) = x^2+ln(x)$ kann fortgesetzt auf $f : x \in [1, 4] \to f(x) = x^2+\ln(x)$ werden, weil $f(x = 3) = 3^2 + ln(3)$ kein Problem ("generiert").

1.2.2 Beispiel

$f : x \in [0, 2]\backslash 1 \to f(x) = \frac{1}{x-1}$ kann NICHT fortgesetzt auf $f : x \in [0, 2] \to f(x) = \frac{1}{x-1}$ werden, weil $f(x = 1)$nicht definiert ist.

1.3 Zwischenwertsatz

Der Zwischenwertsatz besagt, dass eine Funktion die in einem stetigen Intervall zwei stellen hat wo eine einen negativen Funktionswert hat und die andere einen positiven hat, dann muss irgenwo die Funktion zwischen diesen Stellen die x-Achse geschnitten haben. Oder mehr Mathematisch formuliert:

$$\text{Falls } \exists a, b, \text{ so dass } f(x) \text{ in alle } \xi \in [a, b] \subset D(f) \text{ stetig ist und } f(a) \cdot f(b) \leq 0, \text{ dann}$$
$$\exists x_0 \in [a, b] \text{ mit } f(x_0) = 0$$

1.4 Rechenregeln für Grenzwerte

für $\lim\limits_{x\to\xi^\pm} f(x) = a$, $\lim\limits_{x\to\xi^\pm} g(x) = b$ gilt:

- $\lim\limits_{x\to\xi^\pm} (f(x) \pm g(x)) = a \pm b$
- $\lim\limits_{x\to\xi^\pm} (f(x) \cdot g(x)) = a \cdot b$
- $\lim\limits_{x\to\xi^\pm} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{b}$ (Natürlich nur für $g(x) \neq 0$ und $b \neq 0$)
- $\lim\limits_{x\to\xi^\pm} h(f(x)) = h(\lim\limits_{x\to\xi^\pm} f(x)) = h(a)$ (wenn $\pm$ weggenommen wird, muss h stetig in a sein!)

Bemerkung: Wenn $f(x)$ einen endlichen Grenzwert a hat, aber $\lim_{x \to \xi^+} g(x) = \infty$, dann ist $\lim_{x \to \xi^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \pm\infty$. Wenn $a = 0$ und $b = 0$ (die Grenzwerte von $f(x)$ und $g(x)$) sind, dann funktioniert die obige Regel nicht. Man muss sehr aufpassen NIE annehmen, dass $\lim_{x \to \xi^+} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ oder $\lim_{x \to \xi^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \pm\infty$ ist. Man muss nicht vergessen wie ein Grenzwert definiert ist: Die Tatsache, dass beide Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ gegen null konvergieren, heisst nicht, dass sie nicht auf einer gewissen Art miteinander "interagieren" könnten, so, dass $\frac{f(x)}{g(x)}$ tatsächlich konvergiert. (*Beispiel*: $\frac{\sin(x)}{x}$).

1.4.1 Beispiel

$\lim_{x \to \infty} (\frac{1}{x} + \arctan(x)) = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} + \lim_{x \to \infty} \arctan(x) = 0 + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$

1.4.2 Beispiel

$\lim_{x \to \infty} (e^{-x} \cdot \arctan(x)) = \lim_{x \to \infty} e^{-x} \cdot \lim_{x \to \infty} \arctan(x) = 0 \cdot \frac{\pi}{2} = 0$

1.4.3 Beispiel

$\lim_{x \to 0} \arccos(\frac{1}{\ln(x)}) = \arccos(\lim_{x \to 0} \frac{1}{\ln(x)}) = \arccos(0) = \frac{\pi}{2}$

1.5 Tipps zur Übung

1.6 Online-Teil

- Frage 1: Rechenregeln zu Grenzwerte benutzen.
- Frage 2: Polynomdivision, dann Rechenregeln zu Grenwerte.
- Frage 3: Definition von Stetigkeit benutzen
- Frage 4: Definition von Stetigkeit benutzen
- Frage 5: Definition von der stetigen Fortsetzung und stetigkeit
- Frage 6: Für Vereinigung: Bemerkungen im Theorieteil. Für Schnittmenge: Überlegung $I_1 \cap I_2$ ist selber eine Teilmenge von I_1 und I_2
- Frage 7: Mit der Definition von Stetigkeit und Grenzwerte arbeiten, kreative Beispiele sich überlegen.
- Frage 8: $f(x) = 1/2 \to g(x) := f(x) - 1/2 = 0$ Mittelwertsatz, sich kreative Beispiele überlegen, $g(x) = f(x) - x$, ...

1.7 Aufgabe 2

Für diesen Teil braucht man nur die Rechenregel von Grenzwerte und kreative Umformungen zu machen

1.8 Aufgabe 3

Definition von stetigkeit

1.9 Aufgabe 4

Man will Beweisen, dass es ein x existiert, die die Gleichung $g(x) = f(x) \Leftrightarrow ax + 2 = e^x$ oder $ax + 2 - e^x = 0$ löst. Dafür definiert man $h(x) := ax + 2 - e^x$ und man benutzt den Mittelwertsatz (kreativ sein) zu zeigen, dass $h(x)$ mindestens in zwei Punkte die x-Achse schneidet.