

Analysis I: Übung 8

Michel Heusser

November 22, 2012

1 Theorie

1.1 Grössenordnung von Funktionen

Definition: Eine Funktion $f(x)$ heisst für $x \rightarrow a^+$ **von kleinerer Grössenordnung** als $g(x)$ falls gilt:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \quad (a^+ = \infty \text{ ist auch erlaubt!})$$

Man schreibt dann $f(x) = o(g(x))$ für $x \rightarrow a^+$ (wobei o das sog. Landau-Symbol ist).

Bemerkung: Der Landau-Symbol hilft uns Funktionen auf ihre Wachstumsrate miteinander vergleichen zu können.

1.1.1 Beispiel

$x^2 = o(x^3)$ für $x \rightarrow \infty$ gilt weil:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$$

Umgekehrt natürlich nicht!

1.1.2 Beispiel

$-\frac{1}{x} = o(\ln(x))$ für $x \rightarrow 0^+$ gilt weil:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\frac{1}{x}}{\ln(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = 0$$

Umgekehrt natürlich nicht!

1.2 Koordinatentransformation

Die Beschreibung eines Punktes/Vektors in der Ebene ist eindeutig definiert, wenn man der Ort in x und in y angibt mit dem Paar (x, y) in sog. **kartesische Koordinaten**. Man kann es aber auch mit einer Richtung ϕ und einer Länge r eindeutig beschreiben in sog. **Polarkoordinaten** mit dem Paar (r, ϕ) (wo r der Abstand zum Ursprung ist und ϕ der Winkel zur x -Achse ist. Die folgenden Beziehungen erlauben uns Koordinaten zu wechseln:

Polarkoordinaten \Rightarrow kartesische Koordinaten:

- $x = r \cos(\phi)$
- $y = r \sin(\phi)$

Kartesische Koordinaten \Rightarrow Polarkoordinaten:

- $r = \sqrt{x^2 + y^2}$
- $\phi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$

1.3 Ebene Kurven

Definition: Eine **Ebene Kurve** ist eine Menge von Punkten (also Paare oder Vektoren) (x, y) die eine bestimmte Vorschrift erfüllen und dazu noch "wie ein Faden aussehen" (kompliziertere Definition). Sie heißen Kurven weil man sie in einer kartesischen Ebene darstellen kann. Sie können in verschiedener Art beschrieben werden, solange es eine eindeutige Beschreibung ist. Γ ist eine Ebene Kurve und die kann wie folgt beschrieben werden:

Kartesische Koordinaten:

- *Parameterdarstellung:* $\Gamma = \{(x(t), y(t)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid t \in I \subset \mathbb{R}\}$
- *Implizite Darstellung:* $\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid f(x, y) = 0\}$
- *Explizite Darstellung:* $\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = f(x)\}$

Polarkoordinaten:

- Parameterdarstellung: $\Gamma = \{(r(t), \phi(t)) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \mid t \in I \subset \mathbb{R}\}$
- Implizite Darstellung: $\Gamma = \{(r, \phi) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \mid f(r, \phi) = 0\}$
- Explizite Darstellung: $\Gamma = \{(r, \phi) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \mid r = f(\phi)\}$

Man kann auch schreiben: $\Gamma : t \rightarrow \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, t \in [a, b]$ anstatt $\Gamma = \{(x(t), y(t)) \mid t \in [a, b]\}$

1.3.1 Beispiel

Der Kreis mit Radius R und Mittelpunkt $(0, 0)$:

Kartesische Koordinaten:

- *Parameterdarstellung 1*: $\Gamma = \{(R \cos(t), R \sin(t)) \mid t \in [0, 2\pi)\}$
- *Parameterdarstellung 2*: $\Gamma = \{(R \cos(2t), R \sin(2t)) \mid t \in [0, \pi)\}$
- *Parameterdarstellung 3*: $\Gamma = \{(R \cos(2t), R \sin(2t)) \mid t \in [-\pi, \pi)\}$
- *Implizite Darstellung*: $\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 - R^2 = 0\}$
(Kreisgleichung: $x^2 + y^2 = R^2$)
- *Explizite Darstellung*: $\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R} \mid y = \sqrt{R^2 - x^2} \text{ oder } y = -\sqrt{R^2 - x^2}\}$

Polarkoordinaten:

- *Parameterdarstellung*: $\Gamma = \{(r(t) = R, \phi(t) = t) \mid t \in [0, 2\pi)\}$
- *Implizite Darstellung*: $\Gamma = \{(r, \phi) \in \mathbb{R} \mid r - R = 0\}$ ($r = R$ unabhängig vom Winkel)
- *Explizite Darstellung*: $\Gamma = \{(r, \phi) \in \mathbb{R} \mid r = R\}$

1.3.2 Beispiel

Die Ellipse mit horizontalen Halbachse a ("Radius" in x -Richtung) und vertikalen Halbachse b ("Radius" in y -Richtung).

- *Parameterdarstellung 1*: $\Gamma = \{(a \cos(t), b \sin(t)) \mid t \in [0, 2\pi)\}$
- *Parameterdarstellung 2*: $\Gamma = \{(a \cos(2t), b \sin(2t)) \mid t \in [0, \pi)\}$
- *Parameterdarstellung 3*: $\Gamma = \{(a \cos(2t), b \sin(2t)) \mid t \in [-\pi, \pi)\}$
- *Implizite Darstellung*: $\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R} \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0\}$
(Ellipsengl: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$)
- *Explizite Darstellung*: $\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R} \mid y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \text{ oder } y = -b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\}$

1.3.3 Beispiel

Eine Spirale mit Verstärkungsfaktor λ

- *Parameterdarstellung 1*: $\Gamma = \{(x(t) = \lambda t \cos(t), y(t) = \lambda t \sin(t)) \mid t \in [0, \infty)\}$
- *Parameterdarstellung 2*: $\Gamma = \{(r(t) = \lambda t, \phi(t) = t) \mid t \in [0, \infty)\}$

1.3.4 Beispiel

Kreis mit Radius R und Mittelpunkt $(0, R)$

- *Parameterdarstellung 1:* $\Gamma = \{(x(t) = R \cos(t), y(t) = R \sin(t) + R) \mid t \in [0, 2\pi)\}$
- *Parameterdarstellung 2:* $\Gamma = \{(r(t) = 2R \cdot \sin(t), \phi(t) = t) \mid t \in [0, \pi)\}$
- *Explizite Darstellung 2:* $\Gamma = \{(r, \phi) \mid r = 2R \cdot \sin(\phi) \text{ und } \phi \in [0, \pi)\}$

1.3.5 Beispiel

Kreis mit Radius R und Mittelpunkt $(R, 0)$

- *Parameterdarstellung 1:* $\Gamma = \{(x(t) = R \cos(t) + R, y(t) = R \sin(t)) \mid t \in [0, 2\pi)\}$
- *Parameterdarstellung 2:* $\Gamma = \{(r(t) = 2R \cdot \cos(t), \phi(t) = t) \mid t \in [0, \pi)\}$
- *Explizite Darstellung 2:* $\Gamma = \{(r, \phi) \mid r = 2R \cdot \cos(\phi) \text{ und } \phi \in [0, \pi)\}$

1.3.6 Beispiel

Ellipse mit h. Halbachse a und v. Halbachse b und Mittelpunkt (m_x, m_y)

- *Parameterdarstellung 1:* $\Gamma = \{(a \cos(t) + m_x, b \sin(t) + m_y) \mid t \in [0, 2\pi)\}$

1.3.7 Beispiel

die Parameterdarstellung lautet: $\Gamma : t \rightarrow \begin{pmatrix} A \cdot e^{\lambda t} \\ B \cdot (t^3 + t^2) \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$

Finde die Explizite Darstellung:

$$\begin{aligned} x(t) &= A \cdot e^{\lambda t} \Rightarrow t = \frac{1}{\lambda} \ln\left(\frac{x}{A}\right) \\ \Rightarrow y(t) &= B \cdot (t^3 + t^2) = B \cdot \left(\ln\left(\frac{x}{A}\right)^3 + \ln\left(\frac{x}{A}\right)^2\right) \\ y &= B \cdot \left(\ln\left(\frac{x}{A}\right)^3 + \ln\left(\frac{x}{A}\right)^2\right) \end{aligned}$$

1.3.8 Beispiel

die Parameterdarstellung lautet: $\Gamma : t \rightarrow \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(2t) \end{pmatrix}, t \in [0, 2\pi)$

Finde die Explizite Darstellung:

$$x(t) = \cos(t) \Rightarrow t_1 = \arccos(x), t_2 = \arccos(x) + \pi$$

Oben sieht man, dass $t \in [0, 2\pi)$ gilt. Weil $\arccos(x)$ den Wertebereich $[0, \pi]$ hat, sind nur t_1 und t_2 Lösungen von $x(t) = \cos(t)$ und nicht auch $t_k = \arccos(x) + k \cdot \pi, k = 2, 3, 4, \dots$ (was "normalerweise" gelten würde)

Wir bekommen dann zwei explizite Vorschriften:

$$\text{Es gilt: } y(t) = \sin(2t) = 2 \cdot \sin(t) \cos(t) = 2 \cdot \sqrt{1 - \cos^2(t)} \cos(t)$$

Durch einsetzen von t_1 und t_2 :

$$y_1 = y(t_1) = 2 \cdot \sqrt{1 - \cos^2(t_1)} \cos(t_1) = 2 \cdot \sqrt{1 - \cos^2(\arccos(x))} \cos(\arccos(x)) = 2 \cdot \sqrt{1 - x^2} \cdot x$$

$$\text{Mit } \cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha) \cos(\beta) - \sin(\alpha) \sin(\beta) \text{ folgt: } \cos(\arccos(x) + \pi) = -x$$

Es folgt:

$$\begin{aligned} y_2 = y(t_2) &= 2 \cdot \sqrt{1 - \cos^2(t_2)} \cos(t_2) = 2 \cdot \sqrt{1 - \cos^2(\arccos(x) + \pi)} \cos(\arccos(x) + \pi) = \\ &= -2 \cdot \sqrt{1 - x^2} \cdot x \\ \Rightarrow \Gamma &= \{(x, y) | y = 2 \cdot \sqrt{1 - x^2} \cdot x \text{ oder } y = -2 \cdot \sqrt{1 - x^2} \cdot x\} \end{aligned}$$

Durch graphische Darstellung wird klar, warum "zwei Vorschriften" nötig sind.

1.4 Normierung, Tangente, Negativer Reziprok

Definition aus einem Vektor \vec{u} kann man den **normierter Vektor** \vec{v} von \vec{u} wenn es gilt:

$$\vec{v} = \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} \text{ mit } |\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$$

Folglich gilt $|\vec{v}| = 1$. Normierte Vektoren sind sehr Hilfreich wenn man nur eine Richtung beschreiben will.

Satz: Der Vektor $(\frac{d}{dt}x(t), \frac{d}{dt}y(t))$ einer Kurve $\Gamma = \{(x(t), y(t)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid t \in I \subset \mathbb{R}\}$ zeigt in Richtung der Tangente der Kurve im Punkt $(x(t), y(t))$

1.4.1 Beispiel

$$\Gamma = \{(x(t) = e^{\lambda t}, y(t) = \ln(t)) \mid t \in [0, \infty)\}$$

Der Vektor: $(\frac{d}{dt}x(t), \frac{d}{dt}y(t)) = (\lambda e^{\lambda t}, \frac{1}{t})$ steht zu jedem t tangential zur Kurve im Punkt $(x(t), y(t))$. Falls wir nur an der Richtung interessiert sind, können wir den neuen Vektor normieren damit es immer die Länge (bei jedem t) behaltet:

Zuerst berechnen wir die Länge vom Vektor (zu jedem t): $\sqrt{(\lambda^2 e^{2\lambda t} + \frac{1}{t^2})}$, dann bilden wir unseren neuen normierten Vektor:

$$\vec{v} = (\frac{1}{\sqrt{(\lambda^2 e^{2\lambda t} + \frac{1}{t^2})}} \cdot \lambda e^{\lambda t}, \frac{1}{\sqrt{(\lambda^2 e^{2\lambda t} + \frac{1}{t^2})}} \cdot \ln(t))$$

Satz: Der Vektor $(-y, x)$ heisst **negativer Reziprok** von (x, y) und beide stehen senkrecht aufeinander. (Beweis: mit Skalarprodukt)

2 Tipps zur Übung

2.1 Online-Teil

- Frage 1: Die Funktion ist in 3 Punkte "fixiert", was kann zwischen den Punkten passieren? Was muss passieren? (Mindestens ein Berg/Tal, usw.)
- Frage 2: Aus der definition der Monotonie folgt, dass eine Funktion eine Nullstelle bei der Ableitung haben und trotzdem streng monoton fallend/wachsend sein (z.B. x^3 hat keine Steigung bei $x = 0$ aber trotzdem bei jedem Paar von x_1 und x_2 (und $x_1 < x_2$) gilt $f(x_1) < f(x_2)$ (streng monoton wachsend).
- Frage 3: Definition von Grössenordnung
- Frage 4: Definition von Grössenordnung
- Frage 5: Ableitung \rightarrow Steigung, 2. Ableitung \rightarrow Krümmung

2.2 Aufgabe 2

Man nimmt an $P(x, y)$ ist irgendein Punkt der die Bedingung erfüllt. Dafür stellt man den Vektor von Punkt F_1 zum Punkt $P(x, y)$, $\vec{F_1P} = \vec{OP} - \vec{OF_1}$ und vom Punkt F_2 $\vec{F_2P} = \vec{OP} - \vec{OF_2}$. Danach multipliziert man die Beträge von den ermittelten Vektoren zur Gleichung $|\vec{F_2P}| \cdot |\vec{F_1P}| = a^4$ und vereinfacht man (Für jeden Vektor gilt $|(u, v)| = \sqrt{u^2 + v^2}$). Diese Gleichung beschreibt schon alle Punkte auf der Kurve (Keine anschauliche Formel!). Durch benutzen der Transformation zur Polarkoordinaten ($x = r \cdot \cos(\phi)$ und $y = r \cdot \sin(\phi)$), eingesetzt in der vorherigen Gleichung, bekommt man die Beschreibung in Polarkoordinaten.

2.3 Aufgabe 3

Der gesuchte Vektor $\vec{x}(t)$ zum Punkt auf der Kreisenvelope zur Zeit t findet man indem man durch Superposition von Vektor zu Kreispunkt (zur Zeit t) $\vec{x}_0(t)$ und den senkrechten Vektor mit einer wachsenden Länge $\vec{p}(t) = L(t) \cdot \vec{n}(t)$ (wobei $\vec{n}(t)$ die senkrechte Richtung ist und $L(t)$ die wachsende Länge ist). $\vec{x}_0(t)$ ist bekannt und $\vec{n}(t)$ kann man leicht finden (negativer Reziprok). Die Länge $L(t)$ ist die "abgewickelte" (oder durchgefahrene) Strecke auf dem Kreis bis Zeit t (Wenn der Radius a ist und der Winkel t ist, was ist dann diese Strecke, also der Umfang bis dann?). Durch

2.4 Aufgabe 4

Man sucht den Vektor vom Ursprung zum Mittelpunkt von rollenden Kreis. Dieser Vektor ist die Superposition vom Vektor vom Ursprung zu irgendeinem Punkt auf der Ellipse, also $\vec{x}_0(t) = (a \cdot \cos(t), b \cdot \sin(t))$ mit dem Vektor (der Länge 1) von diesem Punkt, senkrecht nach draussen $\vec{n}(t)$ multipliziert mit $R = 1$. Also $\vec{x}(t) = \vec{x}_0(t) + R \cdot \vec{n}(t)$. Um $\vec{n}(t)$ zu finden muss man erst die Richtung der Tangente der Ellipse im Punkt $(a \cdot \cos(t), b \cdot \sin(t))$ finden.

Die Richtung der Tangente ist die gleiche Richtung wie die von der Ableitung von $\vec{x}_0(t)$ (Im moment interessiert uns nur die Richtung, egal wie lang unser Vektor ist, da wir sowieso am Ende $\vec{n}(t)$ normieren werden). Wenn man diese Richtung hat, kann man die senkrechte Richtung davon Finden (Theorie) und diesen Vektor dann normieren. Der resultierende Vektor ist $\vec{n}(t)$