

# Analysis I: Wiederholung 1

Michel Heusser

November 3, 2012

## 1 Theorie

### 1.1 Regel von Bernoulli-de l'Hôpital

Satz: Falls bei den (im relevanten Bereich) differenzierbaren Funktionen  $f$  und  $g$  eins der untenstehende Fälle gilt:

- $\lim_{x \rightarrow x_0^\pm} f(x) = 0$  und  $\lim_{x \rightarrow x_0^\pm} g(x) = 0$
- $|\lim_{x \rightarrow x_0^\pm} f(x)| = \infty$  und  $|\lim_{x \rightarrow x_0^\pm} g(x)| = \infty$

Und Zusätzlich:

- $c := \lim_{x \rightarrow x_0^\pm} \frac{f'(x)}{g'(x)}$  konvergiert oder divergiert gegen  $\pm\infty$

Dann gilt: 
$$\lim_{x \rightarrow x_0^\pm} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0^\pm} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

*Bemerkung*: Falls  $D(f)$  es erlaubt,  $x_0$  darf auch  $\pm\infty$  sein! Man muss auch im Kopf (oder eher im Bauch) behalten, dass  $x_0 = 0$  kein Spezialfall ist. Es ist (wie 1,999 oder  $\sqrt{2}$ ) irgendeine endliche reelle Zahl und hat keinen Einfluss auf die Entscheidung ob die obige Regel anwendbar ist.

#### 1.1.1 Beispiel

$f(x) := \frac{\sin(x)+2x}{\cos(x)+2x}$  (Falls nichts mehr steht ist  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  impliziert, ohne Definitionslücken, falls vorhanden)

Man sucht  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$

Voraussetzungen für Bernoulli - de l'Hôpital:

- $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sin(x) + 2x) = \infty$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} (\cos(x) + 2x) = \infty$
- $c = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sin(x)+2x)'}{(\cos(x)+2x)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos(x)+2}{-\sin(x)+2}$  Divergiert periodisch! (Also nicht endlich oder gegen  $\pm\infty$ )

$\Rightarrow$  B.H. nicht anwendbar! (Obwohl der ursprüngliche Term schon konvergiert!)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin(x)+2x}{\cos(x)+2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\sin(x)-\cos(x)}{\cos(x)+2x}\right) = 1$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} \neq \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$$

### 1.1.2 Beispiel

$$f : (-2, 0) \rightarrow \mathbb{R}, x \rightarrow f(x)$$

$$f(x) := \frac{1+\sin(x)-\cos(x)}{3x^2+6x}$$

Voraussetzungen für Bernoulli - de l'Hôpital:

- $\lim_{x \rightarrow 0^-} 1 + \sin(x) - \cos(x) = 0$
- $\lim_{x \rightarrow 0^-} (3x^2 + 6x) = 0$
- $c = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(1+\sin(x)-\cos(x))'}{(3x^2+6x)'} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\cos(x)+\sin(x)}{6x+6} = \frac{1+0}{0+6} = \frac{1}{6}$  (Konvergiert)

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1+\sin(x)-\cos(x)}{3x^2+6x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(1+\sin(x)-\cos(x))'}{(3x^2+6x)'} = \frac{1}{6}$$

## 1.2 Logik

Definition: Falls  $a$  und  $b$  zwei Aussagen sind und es gilt, dass wenn  $a$  wahr ist, dann ist sicher  $b$  auch wahr, aber wenn  $b$  wahr ist dann kann  $a$  (aber muss nicht) wahr sein. Dann schreibt man  $a \Rightarrow b$  und man sagt:

- $b$  ist eine **notwendige** bedingung (oder implikation) von  $a$
- $a$  ist eine **hinreichende** bedingung für  $b$ , weil  $a$  wahr sein kann (aber muss nicht) falls  $b$  wahr ist

### 1.2.1 Beispiel

$a$  = "Man kommt aus Zürich"

$b$  = "Man kommt aus der Schweiz"

Es gilt: "Man kommt aus Zürich"  $\Rightarrow$  "Man kommt aus der Schweiz" (also  $a \Rightarrow b$ )  
"Man kommt aus der Schweiz" ( $b$ ) ist **notwendig** damit "Man kommt aus Zürich" ( $a$ ) überhaupt gültig sein kann. Dafür ist  $a$  (nur) **hinreichend** für  $b$ , weil wenn "Man kommt aus der Schweiz" gültig ist, dann könnte es auch möglich sein, dass "Man kommt aus Zürich" muss aber nicht wahr sein. Aus der Schweiz zu kommen ist natürlich eine notwendige Bedingung um aus Zürich zu kommen. Aus Zürich zu kommen ist nur etwas "mögliches" wenn man aus der Schweiz kommt (also eine hinreichende Bedingung)

### 1.2.2 Beispiel

$a$  = "Gute Noten"

$b$  = "Viel lernen"

Es gilt (für die ETH): wenn man gute Noten hat (also  $a$  wahr), dann hat man sicher viel gelernt ( $b$  wahr). Wenn man aber viel lernt ( $b$  wahr) müssen nicht unbedingt gute Noten folgen ( $a$  kann, aber muss nicht sein!), man muss richtig lernen!

### 1.2.3 Beispiel

$a = (x = -3)$

$b = (x^2 = 9)$

Es gilt:  $x = -3 \Rightarrow x^2 = 9$ . Umgekehrt ( $x^2 = 9 \Rightarrow x = -3$ ) gilt es aber nicht (weil  $x = -3$  nicht die einzige mögliche "Folge" von  $x^2 = 9$  sondern auch  $x = 3$ )

Definition: Falls  $a$  und  $b$  zwei Aussagen sind und  $b$  ist wahr falls  $a$  wahr ist ( $a \Rightarrow b$ ) und  $a$  wahr falls  $b$  wahr ist ( $b \Rightarrow a$ ). Man sagt dann, dass  $a$  und  $b$  **äquivalente** Aussagen sind und man schreibt  $a \Leftrightarrow b$ .

### 1.2.4 Beispiel

Ich habe ein Schwimmbad und heute hat es sicher nicht geregnet:

$a$  = "Mein Hund ist nass"

$b$  = "Mein Hund war im Schwimmbad"

Es gilt, dass wenn mein Hund nass ist, dann war er mit Sicherheit sagen, dass er im Schwimmbad war ( $a \Rightarrow b$ ). Andererseits, wenn mein Hund ins Schwimmbad springt, dann kann ich kurz danach mit Sicherheit sagen, dass er nass ist ohne ihn direkt zu sehen ( $b \Rightarrow a$ ). Beide Aussagen sind in diesem Kontext äquivalent! ( $a \Leftrightarrow b$ )

### 1.2.5 Beispiel

$a = \text{"Gute Noten"}$

$b = \text{"Viel und richtig lernen"}$

Hier gilt (nochmal für die ETH): Wenn man Gute noten hat, kann man mit sicherheit sagen, dass man viel und richtig gelernt hat ( $a \Rightarrow b$ ). Umgekehrt, wenn man viel und richtig lernt, dann bekommt man bestimmt gute Noten ( $b \Rightarrow a$ ). Deswegen sind beide Aussagen äquivalent ( $a \Leftrightarrow b$ )

### 1.2.6 Beispiel

$a = (x - 3 = 5)$

$b = (x = 8)$

Hier gilt:  $x - 3 = 5 \Rightarrow x = 8$  (man kann von links auf rechts eindeutigweise "gehen") und  $x = 8 \Rightarrow x - 3 = 5$  auch (man kann hier von links auf rechts auch eindeutigweise "gehen") deswegen gilt:  $x - 3 = 5 \Leftrightarrow x = 8$

## 2 Beispiele

### 2.1 Grenzwerte

#### 2.1.1 Beispiel

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{x} \right) = 0$$

#### 2.1.2 Beispiel

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos(x)^{\frac{1}{x^2}}) = e^{-\frac{1}{2}}$$

### 2.1.3 Beispiel

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cot(x) \cdot \ln(1 + 3x)) \\ = 3$$

### 2.1.4 Beispiel

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin(\sqrt{1+x}-1)}{x} \right) \\ = \frac{1}{2}$$

### 2.1.5 Beispiel

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt[x]{1+x}) \\ = e$$

### 2.1.6 Beispiel

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sqrt{1-\cos(x)}}{x} \right) \\ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$