Analysis: Uebung 2

Michel Heusser

October 4, 2012

1 Theorie

1.1 Mengenlehre

Menge: Zusammenfassung von beliebig viele (endlich oder unendlich viele) beliebige Objekten, mit keiner bestimmten Ordnung. Diese Objekte heissen Elemente der Menge

Beispiele:
$$A = \{\text{Haus, Gitarre, } 5, 3.14\}$$
$$A = \{3, 3, 1, 4\} = \{3, 1, 4\}$$
$$A = \{1, 3, 5, 7, 9, ...\}$$
$$A = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$$
$$A = \{\{1, 2, 3\}, \{2, 3, 4\}, \{3, 4, 5\}\}$$
$$A = \{1.5 \text{ CHF}, 20 \text{ CHF}, 3.5 \text{ CHF}\}$$
$$A = \{\text{x : x = Student in diesem Zimmer der jünger ist als 19 Jahre}\}$$
$$A = \{\} = \emptyset$$

Eine kann wie folgt definiert werden:

- Aufzählung: z.B. $A = \{\text{oben, unten, links, rechts}\}$
  oder $A = \{\text{Ein Elefant, zwei Elefanten, drei Elefanten, ...}\}$
- Eigenschaft z.B. $A = \{x : x = \text{Länder die EUR benutzen}\}$
  oder $A = \{x : x = \text{Eine Zelle in meinem Körper}\}$
  oder $A = \{x : 1 \leq x \leq 10, x = \text{gerade}\}$

Notation:

- $x \in A$: x ist Element von der Menge A
- $x \notin A$: x ist kein Element von der Menge A
- $A \subset B$: A ist eine Teilmenge von B, d.h., dass alle Elemente von A in B enthalten sind (Muss aber nicht umgekehrt sein)

- $A \not\subset B$: A ist keine Teilmenge von B, d.h., dass nicht alle Elemente von A in B enthalten sind (Können aber gemeinsame Elemente haben)
- $A \cap B := \{x : x \in A \text{ und } x \in B\} = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$ oder die Menge aller Elementen die zu A und (gleichzeitig) zu B gehören.
- $A \cup B := \{x : x \in A \text{ oder } x \in B\} = \{x : x \in A \vee x \in B\}$ oder die Menge aller Elementen die entweder zu A oder zu B gehören.
- $A^c := \{x : x \notin A\}$ oder die Menge aller Elementen die nicht zu A gehören
- $A \setminus B := \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$ oder die Menge aller Elementen die zu A und (gleichzeitig) nicht zu B gehören
- $A \times B := \{(a, b) : a \in A \wedge b \in B\}$ oder die Menge aller geordneten Paare wo der erste Element zu A und der zweite zu B gehört.

Bemerkung : Ein geordnetes Paar ist nichts anderes als eine Menge die zwei Elemente hat. Was man haben will ist jedoch eine Ordnung, d.h., dass es klar sein muss, welches das erste Element und welches das zweite Element. Wenn wir z.B. einen Paar bilden wollen wo a der erste Element ist und b der zweite Element ist dann genügt die definition einer Menge $P = \{a, b\} = \{b, a\}$ nicht. Man definiert dann $(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$, so dass $(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\} \neq \{\{b\}, \{a, b\}\} = (b, a)$. Diese ist nicht die einzige Sinnvolle definition, aber es genügt nur zu wissen, dass (a, b) nichts anderes als eine Art ist, Mengen darzustellen wobei die Elementen eine bestimmte Ordnung haben.

Bekannte Mengen:

- $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, ...\}$ (Natürliche Zahlen)
- $\mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, 3, ...\}$
- $\mathbb{Z} := \{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$ (Ganze Zahlen)
- $\mathbb{Q} := \{x : x = \frac{m}{n}, m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\}$ (Rationale Zahlen)
- $\mathbb{R} := \{...\}$ (Die Reele Zahlen)
- $\mathbb{R}^2 := \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) : x, y \in (R)\}$ (Der 2-dimensionale Raum, die Ebene)
- Irrationale Zahlen $:= \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

Intervalle:
Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $a < b$:

- $(a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ (Offen)
- $[a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$
- $(a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$

- $[a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ (Abgeschlossen)
- $[a, \infty) := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\}$
- $(a, \infty) := \{x \in \mathbb{R} : a < x\}$
- $(-\infty, a] := \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}$
- $(-\infty, a) := \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$
-

Bemerkung : Intervalle wo ∞ vorkommt, sind nur definiert als offen in der entsprechenden Seite, da ∞ nie "erreicht wird".

1.2 Definition einer Funktion

Eine Funktion (oder Abbildung) ist eine Vorschrift die jedes Element $x \in A$ einen eindeutigen Element $f(x) \in B$ zuordnet.
Schreibweise: $f : x \in A \to f(x) \in B$

Nomenklatur (bezüglich f):

- $f(x)$: Funktionswert an der Stelle x (auch Bild von x)
- $D(f) = A$: Definitionsbereich
- B: Zielbereich
- $W(f) = \{f(x) : x \in A\}$: Wertebereich (i.A $W(f) \subset B$)

Bemerkung: da A und B allgemeine Mengen sind, sind Funktionen nicht nur für "Zahlen" definiert, sondern für jede beliebige Menge/Elemente.Die Vorschrift (also die Funktion) muss nicht unbedingt durch eine mathematische "Formel" gegeben werden, jede beliebige Art die eine eindeutige Vorschrift definiert (z.B. eine Tabelle, ein rekursiver Ausdruck) ist erlaubt!

1.2.1 Beispiel

$T :=$ {Personenwagen, LKW, Segelschiff, Kampfjet, Paraglider}
$A :=$ {Erde, Luft, Wasser, Weltall}

- $D(f) = T$
- $W(f) =$ {Erde,Wasser, Luft} $= A \setminus$ {Weltall}

$x \in D(f)$	$f(x) \in W(f)$
Peronenwagen	Erde
LKW	Erde
Segelschiff	Wasser
Kampfjet	Luft
Paraglider	Luft

1.2.2 Beispiel

$T : [0, 24] \to \mathbb{R}, t \to T(t)$ T(t) = Die mittlere Temperatur des Wassers im Zürichsee um t Uhr

Angenommen wir hätten ein Gerät, das den reelen Wert $T(t)$ messen könnte, ist dann $T(t)$ bei jedem t eindeutig. D(f) und W(f) sind dann eindeutig, die Vorschrift T ist streng genommen auch eine Funktion. Ob man, eine Formel oder Ausdruck für $T(t)$ finden könnte ist eine andere Frage, aber es ist immernoch eine Funktion.

1.3 Reelwertige Funktionen

Eine Funktion der Art: $f : A \to B$ mit $A \subset \mathbb{R}$ und $B \subset \mathbb{R}$ heisst reelwertige Funktion einer reelen Variablen. Jeder solchen Funktionen gehört ihr Graph $\Gamma(f)$:

$$\Gamma(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \ : x \in A, y = f(x)\}$$

Oft (aber nicht immer!) ist der Graph eine Kurve. Hier Kurve heisst nur "etwas, dass man Zeichnen kann".

1.3.1 Beispiel

$f : A = \mathbb{N} \to B = \mathbb{N}, f(x) := x^2$ (f ist reelwertig einer reelen Variable weil $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$)

- $D(f) = \mathbb{N}$
- $W(f) = 0, 1, 4, 9, ...$ $(\neq \mathbb{N})$
- $\Gamma = \{(0, 0), (1, 1), (2, 4), (3, 9), ...\}$
  (Kann auch mit Punkten auf der $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ - Ebene dargestellt werden).

1.3.2 Beispiel

$f : A = \mathbb{R} \to B = \mathbb{R}, f(x) := \sin(x)$

- $D(f) = \mathbb{R}$
- $W(f) = [-1, 1]$
- $\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \ : x \in A, y = \sin(x)\}$

1.3.3 Beispiel

$f : A = \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

- $D(f) = \mathbb{R}$
- $W(f) = 0, 1$
- $\Gamma(f) = ...$

Bemerkung: Obwohl es ein Graph $\Gamma(f)$ existiert, kann man die Funktion nicht in einer Kurve darstellen (Wie würde man so eine Funktion denn anschaulich Zeichnen?)

1.3.4 Beispiel

$f : [0, 2\pi) \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}, t \to (r \cos(t) + m_x, r \sin(t) + m_y)$

- $D(f) = [0, 2\pi)$
- $W(f) = \{(x, y) : x = r \cos(t) + m_x, y = r \sin(t) + m_y$ und $t \in [0, 2\pi)\}$
  (Kreis in der $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$-Ebene mit Mittelpunkt $M = (m_x, m_y)$

1.3.5 Beispiel

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x, y) \to (3x + 1y, 2y)$

- $D(f) = \mathbb{R}$
- $W(f) = \mathbb{R}$

Bemerkung :Hier um $W(f)$ herauszufinden braucht man Grundlagen in Lineare Algebra weil es hier eben um eine lineare Abbildung (lineare Funktion) geht.

1.3.6 Beispiel

$a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}, n \to a(n) := \frac{1-q^n}{1-q}$

- $D(f) = \mathbb{N}$
- $W(f) = ...$
- $\Gamma(f) = ...$

Bemerkung : Eine reele Zahlenfolge $\langle a_n \rangle$ kann als Function beschrieben werden: $\mathbb{N} \to \mathbb{R}, n \to f(n) := a_n$

1.4 Eigenschaften von Funktionen

Eine Funktion $f : A \to \mathbb{R} ist$:

- Gerade: Falls $f(-x) = f(x)$ gilt (Spiegelung an der y-Achse)
- Ungerade: Falls $f(-x) = -f(x)$ gilt (Punktspiegelung im Ursprung)
- Monoton wachsend: Falls $x_1 < x_2$ und $f(x_1) < f(x_2)$, $\forall x_1, x_2 \in A$
- Strikt monoton wachsend: Falls $x_1 < x_2$ und $f(x_1) \leq f(x_2)$, $\forall x_1, x_2 \in A$
- Monoton wachsend: Falls $x_1 < x_2$ und $f(x_1) > f(x_2)$, $\forall x_1, x_2 \in A$
- Strikt monoton wachsend: Falls $x_1 < x_2$ und $f(x_1) \geq f(x_2)$, $\forall x_1, x_2 \in A$

Rechenregeln:

- $f(x)$ gerade, $g(x)$ gerade $\Rightarrow f(x)g(x)$ gerade
- $f(x)$ gerade, $g(x)$ ungerade $\Rightarrow f(x)g(x)$ ungerade
- $f(x)$ ungerade, $g(x)$ ungerade $\Rightarrow f(x)g(x)$ gerade
- $f(x)$ gerade, $g(x)$ gerade $\Rightarrow f(x) + g(x)$ gerade
- $f(x)$ ungerade, $g(x)$ ungerade $\Rightarrow f(x) + g(x)$ ungerade

Bemerkung: Eine Funktion kann gerade oder ungerade sein, muss aber nicht!

1.5 Elementare Funktionen

- Potenzfunktion: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \to x^n$ mit $(n \in \mathbb{R})$
- Polynome n-ten Grades: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \to p(x) := a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n$

- Rationale Funktionen: $\mathbb{R} \setminus 0 \to \mathbb{R}, x \to R(x) := \frac{a_0+a_1x+...+a_nx^n}{b_0+b_1x+...+b_nx^n} = \frac{p(x)}{q(x)}$
- Exponentialfunktion: $e^x := \exp(x) := 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + ... = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

  Bemerkung: In der regel benutzt man e^x als Notation für die Exponentialfunktion $\exp(x)$. Man muss aber klar haben, dass die eulerische Zahl e selber durch die Exponentialfunktion definiert ist!: $e := exp(1) = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + ...$ Deswegen benutzt man die anschaulichere Form e^x für $\exp(x)$

- Natürlicher Logaritmus: $\ln(x) :=$ Umkehrfunktion von e^x
- Exponentialfunktion $a^x := e^{\ln(a)x}$
- Logaritmus: $\log_a(x) :=$ Umkehrfunktion von a^x
- Trigonometrische Funktionen:
  $\sin(x) := \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})$
  $\cos(x) := \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$
  $\tan(x) := \frac{\sin(x)}{\cos x}$

  Bemerkung: Man muss hier nur wissen, dass i (die sog. imaginäre Einheit) das mathematische Objekt ist, dass die Gleichung $x^2 = -1$ erfüllt (d.h. $i^2 = -1$)

1.6 Koordinatentransformation

Für die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \to f(x)$ gilt:

- $f(x) + b$ mit $b > 0$ verschiebt $f(x)$ um b in positiver y-Richtung
- $bf(x)$ mit $b > 1$ streckt $f(x)$ um b in positiver x-Richtung
- $-f(x)$ spiegelt $f(x)$ in der x-Achse
- $f(x + a)$ mit $a > 0$ verschiebt $f(x)$ um a in negativer x-Richtung
- $f(ax)$ mit $a > 1$ staucht $f(x)$ um a in negativer x-Richtung
- $f(-x)$ spiegelt $f(x)$ in der y-Achse

Bemerkung : Durch kombination von den obigen eigenschaften kann man jede Koordinatentransformation konstruieren auch wenn a und b nicht die Eigenschaften von oben erfüllen.

2 Tipps

2.1 Online Teil

- Frage 1:
- Frage 2: Zurück auf die definition von Graph und Funktion. Zu jedem x-Element gehört einen eindeutigen y-Element um den entsprechenden Paar (x, y) zu bilden
- Frage 3: die Funktion $f(x) = x^r$ analysieren. Wie ändert sich die Kurve mit verschiedenen r, was für eine eigenschaft muss r haben um so eine Form zu haben?
- Frage 4: Additionstheoreme der Trigonometrie benutzen:
  $\sin a + b = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$
  $\cos(a + b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$
  $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1, \forall x$

  $\sin(x)$ und $\cos(x)$ sind Funktionen die entweder gerade oder ungerade sind. Diese Eigenschaften helfen die Terme zu vereinfachen indem man negative Vorzeichen im Argument wegnehmen kann: $f(-x) = -f(x)$ falls ungerade und $f(-x) = f(x)$ falls gerade.
- Frage 5: Faktorisieren und Rechenregel für gerade/ungerade Funktionen benutzen
- Frage 6: Rechenregel für gerade/ungerade Funktionen benutzen
- Frage 7: Durch Umformungen die Definition von gerade oder ungerade zu erfüllen. Sich durch graphische Hilfsmitteln unterstützen lassen
- Frage 8: Definition der Exponentialfunktion a^x benutzen und Koordinatentransformationen anschauen. Versuchen e_b durch e_a zu beschreiben.
- Frage 9: $]0, \infty[\Leftrightarrow (0, \infty)$. Rechenregel der Logaritmus benutzen: $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$ und versuchen $\log_b x$ durch $\log_a x$ zu beschreiben
- Frage 10: Koordinatentransformation, Gerade/Ungerade Eigenschaft von $\sin(x)$ und Periodizität beachten!
- Mit der Funktion spielen und experimentieren! Was passiert wenn x oder y vertauscht/negativ gesetzt werden?
- Koordinatentransformation in x und y anschauen!

2.2 Aufgabe 2

- a) Zeichnen

- b) Da $\text{sgn}(x)$ und $|x|$ das Verhalten ändern, je nach Region von x muss man zeigen, dass jede Gleichung für jede Bereiche von x gilt (d.h. bei $x < 0$, $x > 0$ und $x = 0$). Bei jedem Bereich von x lassen sich die Terme vereinfachen, so dass man die Gleichungen auf beiden Seiten das Gleiche aufweisen.) Wenn y auch vorkommt muss man alle mögliche kombinationen Probieren (insgesammt 9 Kombinationen!).

2.3 Aufgabe 3

In dieser Aufgabe muss man auch eine Fallunterscheidung benutzen um zu Zeigen, dass $f(x)$ die gezeichnete Form hat. Man muss Anfangen mit der Definition vom Betrag: $|x+1| = x+1$ wenn $x+1 > 0$ ist (also für $x > -1$). Wenn $x+1 < 0$ ist (also $x < -1$ dann ist $|x+1| = -(x+1)$. Was passiert mit dem Term $|x-1|$? Wie viele Bereiche muss man Betrachten um die Funktion ohne Betragstriche schreiben zu können?

2.4 Aufgabe 4

In dieser Aufgabe kann jede funktion $f_i(x)$ (i = 1,2,3,4,5) als eine transformierte Version von $f_0(x)$ umgeformt werden (Koordinatentransformation). Man kann, deshalb zuerst f_0 zeichnen und dann die entsprechende Transformierte version benutzen um die anderen Kurven zu zeichnen.