Analysis I: Übung 7

Michel Heusser

November 26, 2012

1 Theorie

1.1 Kurvendiskussion

<u>Definition:</u> x_0 ist eine **lokale Extremalstelle** von $f : A \in \mathbb{R} \to B \in \mathbb{R}$, $x \to f(x)$ falls es gilt:

- Formal: $\exists \epsilon > 0 : f(x) \leq f(x_0)$ oder $f(x) \geq f(x_0) \qquad \forall x \in (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$
- Formal wörtlich: Es existiert ein auf x_0 zentriertes Intervall, so, dass im Intervall alle Funktionswerte kleiner als $f(x_0)$ oder alle Funktionswerte grösser als $f(x_0)$ sind.

Bemerkung : Wenn x_0 eine lokale Extremalstelle ist und es den grössten Funktionswert $f(x_0)$ im Intervall hat, dann ist x_0 ein **lokales Maximum**, wenn x_0 eine Extremalstelle ist und es den kleinsten Funktionswert im Intervall hat, dann ist sie ein **lokales Minimum**.

1.1.1 Beispiel

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \to f(x)$

$$f(x) := \begin{cases} -x & x < 0 \\ 2x + 5 & 0 \leq x \leq 1 \\ \ln(x) & x > 1 \end{cases}$$

Ist $x_0 = 1$ eine lokale Extremalstelle?

Ja. Durch graphische Darstellung stellt man fest, dass es ein ϵ existiert (z.B. $\epsilon = 1$), so, dass $f(x_0) = 7 \geq f(x)$ für alle x im intervall $(x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon) = (0, 2)$. x_0 ist Ferner ein lokales Maximum

1.1.2 Beispiel

$f : [-3, 5] \to \mathbb{R},\ x \to f(x) := |x|$

Ist $x_0 = 5$ eine lokale Maximalstelle?

Nein. Es existiert kein $(x_0-\epsilon, x_0+\epsilon)$ mit $\epsilon > 0$, so, dass $f(x_0) \geq f(x)$ (oder $f(x_0) \leq f(x)$) für alle x im Intervall, weil $f(x)$ gar nicht definiert ist auf der Rechten seite von $x_0 = 5$

Definition: x_0 ist eine **globale Extremalstelle** von $f : A \in \mathbb{R} \to B \in \mathbb{R},\ x \to f(x)$ falls es gilt:

- Formal: $f(x_0) \leq f(x)$ oder $f(x_0) \geq f(x) \qquad \forall x \in D(f)$
- Formal wörtlich: $f(x_0)$ ist das grösste/kleinste Funktionswert der ganzen Funktion.

Bemerkung : Wenn x_0 eine globale Extremalstelle ist und es den grössten Funktionswert $f(x_0)$ der Funktion, dann ist x_0 ein **globales Maximum**, wenn x_0 eine globale Extremalstelle ist und es den kleinsten Funktionswert der Funktion hat, dann ist sie ein **lokales Minimum**.

1.1.3 Beispiel

$f : [-1, 1] \to \mathbb{R},\ x \to f(x)$

$$f(x) := \begin{cases} -x & x < 0 \\ 5 & x = 0 \\ x & x > 0 \end{cases}$$

Ist $x_0 = 0$ eine globale Extremalstelle?

Ja. Ein globales Maximum

1.1.4 Beispiel

$f : [-2, 2] \to \mathbb{R},\ x \to f(x)$

$$f(x) := \begin{cases} x & -2 \leq x \leq 0 \\ -x^2 & 0 < x \leq 2 \end{cases}$$

Ist $x_0 = 2$ eine lokale Extremalstelle?

Nein. Aber schon ein globales Minimum

1.1.5 Beispiel

$f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $x \to f(x) = x^2 - x^4 + 5$

Ist $x_0 = 0$ eine globale Extremalstelle?

Ja, ein globales (und lokales) Maximum

<u>Satz</u>: Für $f : A \in \mathbb{R} \to B \in \mathbb{R}$, $x \to f(x)$ und $x_0 \in D(f)$ gilt:

- f ist in x_0 **differenzierbar** und x_0 ist eine **lokale Extremalstelle** $\Rightarrow f'(x_0) = 0$

1.1.6 Beispiel

$f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $x \to f(x) = x^2 - x^4 + 5$

Hier ist f bei $x_0 = 0$ differenzierbar und x_0 ist eine lokale Extremalstelle $\Rightarrow f'(x_0) = 0$

Nachweis: $f'(x_0) = 2x_0 - 4x_0^3 = 0$

1.1.7 Beispiel

Obwohl für $f : A \in \mathbb{R} \to B \in \mathbb{R}$, $x \to f(x) = (x - 3)^3 + 5$,
$f'(x_0 = 3) = 0$ ist, heisst es nicht, dass x_0 eine lokale Extremalstelle ist (und es ist Tatsächlich keine!), weil eben nur "$\Rightarrow$" und *nicht* "$\Leftarrow$" gilt.

<u>Satz</u>: Für $f : A \in \mathbb{R} \to B \in \mathbb{R}$, $x \to f(x)$ und f differenzierbar in $x_0 \in D(f)$ gilt:

1. ($f'(x_0) = 0$ und $f'(x)$ wechselt sein Vorzeichen in x_0) $\Rightarrow$ (x_0 ist eine lokale Extremalstelle)
   Bemerkung: Wenn der Vorwechsel von + auf - ist, ist x_0 eine lokale Maximalstelle, umgekehrt eine lokale Minimalstelle (natürlich wenn x von der linken Seite von x_0 auf der rechten Seite sich bewegt)

2. ($f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) \neq 0$ (f muss 2 mal diff'bar sein!))$\Rightarrow$ (x_0 ist eine lokale Extremalstelle).
   Bemerkung: Hier gilt dann: $f''(x_0) > 0 \Rightarrow x_0$ lokales Minimum und $f''(x_0) < 0 \Rightarrow x_0$ lokales Maximum! Falls $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) = 0$ (also, die linke Seite von 2. gilt nicht), dann Kriterium 1. benutzen, es könnte schon sein dass x_0 eine lokale Extremalstelle ist!

1.1.8 Beispiel

$f : [-2, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R},\, x \to f(x)$

$f(x) := \begin{cases} -x^2 + 4 & -2 \leq x \leq 0 \\ 4\cos(x) & 0 < x \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$

Wir suchen globale Extremalstellen von f:

Man kann zeigen (oder sich graphisch überlegen), dass f differenzierbar ist. Wir suchen erst Stellen x_0 wo $f'(x_0) = 0$. Dann überprüfen wir ob es ein Vorzeigenwechsel in x_0 statt findet.

$f'(x_0) = 0 \Rightarrow x_0 = 0$

Wegen: $f'(x) = \begin{cases} -2x & -2 \leq x \leq 0 \\ -4\sin(x) & 0 < x \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$

Wir stellen klar fest, dass bei x_0 ein Vorzeichenwechsel statt findet! Deswegen ist x_0 eine lokale Extremalstelle. (Hier ist die Funktion in x_0 nicht zweimal Differenzierbar, und deswegen kann man die zweite Ableitung nicht benutzen!)

1.1.9 Beispiel

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\, x \to f(x)$

$f(x) := x^3 + 4x^2$

f ist zweimal Differenzierbar. Mit $f'(x_0) = 0$ suchen wir mögliche Extremalstellen. Daraus bekommen wir $x_{0,1} = 0$ und $x_{0,2} = -\frac{8}{3}$. Da $f''(x_{0,1}) = 8 > 0$ und $f''(x_{0,2} = -8) < 0$ folgt, dass $x_{0,1}$ eine lokale Minimalstelle ist und $x_{0,2}$ eine lokale Maximalstelle ist.

Definition: x_0 ist eine **Wendestelle** von der (in x_0) zweimal differenzierbaren Funktion $f : A \in \mathbb{R} \to B \in \mathbb{R},\, x \to f(x)$ falls f seine Krümmung in x_0 die Richtung ändert (linksgekrümmt $\to$ rechtsgekrümmt oder umgekehrt).

1.1.10 Beispiel

$f : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R},\, x \to f(x) := \sin(x)$

Wir sehen, dass f im Intervall $[-\frac{\pi}{2}, 0)$ rechtsgekrümmt ist und im Intervall $(0, \frac{\pi}{2}]$ sie Linksgekrümmt ist (in $x_0 = 0$ ist sie gar nicht gekrümmt). Aus der Symmetrie der

Funktion, wissen wir, dass die Funktion in der Symmetriestelle $x_0 = 0$ ihre Krümmung wechseln musste $\Rightarrow x_0$ ist eine Wendestelle!

Satz: für eine in x_0 zweimal differenzierbare Funktion $f : A \in \mathbb{R} \to B \in \mathbb{R}$, $x \to f(x)$ gilt:

1. x_0 ist eine Wendestelle $\Rightarrow f''(x_0) = 0$ (Umgekehrt aber nicht unbedingt!)
2. $f''(x_0) > 0 \Rightarrow f$ in x_0 linksgekrümmt
3. $f''(x_0) < 0 \Rightarrow f$ in x_0 rechtsgekrümmt
4. f'' hat in x_0 einen Vorzeichenwechsel $\Rightarrow x_0$ ist eine Wendestelle (ist mit 2. und 3. dann konsistent mit Definition einer Wendestelle!)
5. $(f''(x_0) = 0$ und $f'''(x_0) \neq 0) \Rightarrow (x_0$ ist eine Wendestelle)
   Bemerkung: Dieser Punkt ist eine andere Überprüfung von 4., weil es setzt voraus, dass f wirklich die Richtung der Krümmung wechselt und nicht nur auf keine Krümmung geht und dann zurrück in die ursprüngliche Krümmung geht (siehe Beispiel). Falls die linke Seite von Kriterium 5 nicht gilt ($f''(x_0) = 0$ und $f'''(x_0) = 0$) muss man Kriterium 4. benutzen, es könnte schon sein, dass x_0 eine Wendestelle ist!.

1.1.11 Beispiel

$f : [-4, 2] \to \mathbb{R}$, $x \to f(x) = x^3 + 4x^2$

Wir suchen Wendestellen:

Wir benutzen $f''(x_0) = 6x_0 + 8 = 0$ und wir bekommen $x_0 = -\frac{4}{3}$ als mögliche Wendestelle. Wir müssen, dann überprüfen, dass x_0 wirklich eine Wendestelle ist. Entweder mit Punkt 4. oder 5. vom obigen Satz.

Punkt 4.: Es ist leicht zu überprüfen, dass $f''(x) = 6x + 8$ links von $x_0 = -\frac{4}{3}$ negativ ist und rechts davon positiv $\Rightarrow x_0$ ist eine Wendestelle

Punkt 5: $f'''(x_0) = 6 \neq 0 \Rightarrow x_0$ ist eine Wendestelle!

2 Tipps

2.1 Online-Teil

Immer zurrück auf die Definition (Handouts): Für hyperbolische Funktionen:

$\sinh(x) := \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$
$\cosh(x) := \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$
$\tanh(x) := \frac{\sinh(x)}{\cosh x}$

2.2 Aufgabe 2

Globale Extremalstellen (Maximas und Minimas) finden einer Funktion:

1. $f'(x_0) = 0 \Rightarrow x_0$ (mögliche lokale Extremalstellen auftellen)
2. Überprüfen, dass sie wirklich lokale Extremalstellen sind.
3. Funktionswerte von Extremalstellen aufstellen (Kandidaten für globale Extremalstellen aufstellen)
4. Falls vorhanden, Funktionswerte der Rände anschauen (Kandidaten für globale Extremalstellen aufstellen)
5. Entscheiden welche Kandidaten (für globale Extremalstellen) die eigentliche globale Extremalstellen ist (falls es mehrere gibt)

Hier muss man Aufpassen weil es undendlich viele Extremalstellen gibt!

2.3 Aufgabe 3

Das einzige Gebebene ist der Radius r der Kugel. Skizze (2D) aufstellen und α (Öffnungswinkel der Kegel) als gegeben Annehmen). Durch Trigonometrische beziehungen die restlichen Grössen bestimmen und Volumen des Kegels (in abhängigkeit von α aufstellen), also $V(\alpha) = \frac{1}{3}\pi R^2(\alpha)h(\alpha)$. Minimum von $V(\alpha)$ bestimmen!

2.4 Aufgabe 4

In dieser Aufgabe, muss man die tiefste Höhe finden, die vom Punkt S überhaupt erreicht werden kann. Nach Figure 1 kann man alle geometrische relevante Daten in abhängigkeit des Winkels α bestimmen.

Die funktion $S(\alpha)$ muss also maximiert werden (da liegt S am tiefsten). Man muss erstmal den Definitionsbereich $D(S)$ bestimmen indem man die erlaubten α-Werten ermittelt. Folglich sucht man die lokale Maximalstellen, untersucht man die Rände und man stellt die Kandidaten für das globale Maximum auf. Nach dem Vergleich von Funktionswerten entscheidet man sich für die globale Maximalstelle mit ihrem entsprechenden Maximalwert.

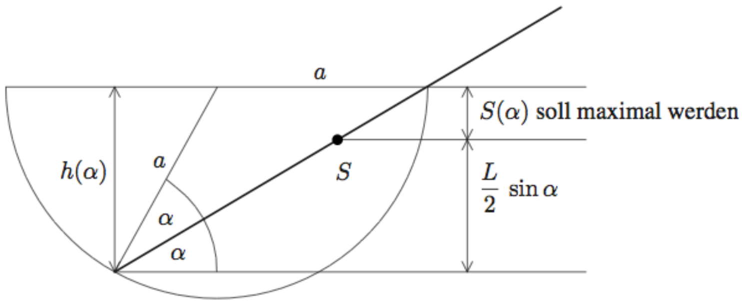

Figure 1: Skizze zur Aufgabe 4