Analysis I: Übung 5

Michel Heusser

October 31, 2012

1 Theorie

1.1 Differenzierbarkeit

<u>Definition</u>: Eine Funktion $f : X \to Y$, $x \to f(x)$ heisst **differenzierbar in** $x_0 \in D(f)$ falls:

- Formal: $\exists c = \lim_{d\to 0} \frac{f(x_0+d)-f(x_0)}{d}$ mit $c \in \mathbb{R}$
- Formal wörtlich: Der sogenannte <u>Differentialquotient</u> $\frac{f(x_0+d)-f(x)}{d}$ zur Funktion f hat den gleichen eindeutigen endlichen (reelen) Grenzwert c wenn man d gegen null von links <u>und</u> rechts streben lässt.

Erinnerung: Wenn man $\lim_{d\to 0} h(d)$ schreibt, impliziert man dass $\lim_{d\to 0} h(d) = \lim_{d\to 0^+} h(d) = \lim_{d\to 0^-} h(d)$

1.1.1 Beispiel

$f : [0,2] \to \mathbb{R}$, $x \to f(x) = x^2 + 2x$

Ist $f(x)$ differenzierbar in $x_0 = 1$?

$\frac{f(x_0+d)-f(x_0)}{d} = \frac{f(1+d)-f(1)}{d} = \frac{((1+d)^2+2(1+d))-(1^2+2\cdot 1)}{d} = \frac{2d+d^2+2d}{d} = 4 + d$

$\lim_{d\to 0^-} \frac{f(x_0+d)-f(x_0)}{d} = \lim_{d\to 0^-} 4 + d = 4$
$\lim_{d\to 0^+} \frac{f(x_0+d)-f(x_0)}{d} = \lim_{d\to 0^+} 4 + d = 4$
$\Rightarrow \lim_{d\to 0} \frac{f(x_0+d)-f(x_0)}{d} = 4$ (Es konvergiert!)

Die Funktion f ist in $x_0 = 1$ differenzierbar

1.1.2 Beispiel

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \to f(x)$

$$f(x) = \begin{cases} \sin(x) & x > 0 \\ -x & x \leq 0 \end{cases}$$

Ist f in $x_0 = 0$ differenzierbar?

$$\frac{f(0+d)-f(0)}{d} = \begin{cases} \frac{\sin(0+d)-\sin(0)}{d} = \frac{\sin d}{d} & d > 0 \\ \frac{-(0+d)-(-(0))}{d} = -1 & d \leq 0 \end{cases}$$

$\lim_{d\to 0^-} \frac{f(0+d)-f(0)}{d} = -1$
$\lim_{d\to 0^+} \frac{f(0+d)-f(0)}{d} = \lim_{d\to 0^+} \frac{\sin(d)}{d} = 1$

Die Funktion f ist nicht in $x_0 = 0$ differenzierbar

1.1.3 Beispiel

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \to f(x)$

$$f(x) = \begin{cases} \sin(x) & x > 0 \\ x & x \leq 0 \end{cases}$$

Ist f in $x_0 = 0$ differenzierbar?

$$\frac{f(0+d)-f(0)}{d} = \begin{cases} \frac{\sin(0+d)-\sin(0)}{d} = \frac{\sin d}{d} & d > 0 \\ \frac{(0+d)-(0)}{d} = 1 & d \leq 0 \end{cases}$$

$\lim_{d\to 0^-} \frac{f(0+d)-f(0)}{d} = 1$
$\lim_{d\to 0^+} \frac{f(0+d)-f(0)}{d} = \lim_{d\to 0^+} \frac{\sin(d)}{d} = 1$

Die Funktion f ist in $x_0 = 0$ differenzierbar

Definition: Eine Funktion $f : X \to Y$, $x \to f(x)$ heisst **differenzierbar** falls:

- Formal: $\forall x_0 \in D(f) : \exists c = \lim_{d\to 0} \frac{f(x_0+d)-f(x_0)}{d}$ mit $c \in \mathbb{R}$
- Formal wörtlich: Der Term $\frac{f(x_0+d)-f(x_0)}{d}$ hat bei jedem x den gleichen eindeutigen endlichen (reelen) Grenzwert c wenn man d gegen null von links und rechts streben

lässt.

1.1.4 Beispiel

$f : [0,2] \to \mathbb{R},\, x \to f(x) = x^2 + 2x$

Ist f differenzierbar? (Also ist f differenzierbar in alle $x_0 \in [0,2]$?)

$\frac{f(x_0+d)-f(x_0)}{d} = \frac{((x_0+d)^2+2(x_0+d))-(x_0^2+2x_0)}{d} = \frac{2x_0d+d^2+2d}{d} = 2x_0 + d + 2$

$\lim_{d\to 0^-} \frac{f(x_0+d)-f(x_0)}{d} = \lim_{d\to 0^-} 2x_0 + d + 2 = 2x_0 + 2$
$\lim_{d\to 0^+} \frac{f(x_0+d)-f(x_0)}{d} = \lim_{d\to 0^+} 2x_0 + d + 2 = 2x_0 + 2$
$\Rightarrow \lim_{d\to 0} \frac{f(x_0+d)-f(x_0)}{d} = 2x_0 + 2$ (Es konvergiert für jeden x_0!)

Die Funktion f ist differenzierbar

1.1.5 Beispiel

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\, x \to f(x) = 1 + \sin(x)$

Ist f differenzierbar?

$\frac{f(x_0+d)-f(x_0)}{d} = \frac{(\sin(x_0+d)+1)-(sin(x_0)+1)}{d} = \frac{(\sin(x_0)\cos(d)+\sin(d)\cos(x_0)+1)-(\sin(x_0)+1)}{d}$
$= \frac{(\sin(x_0)\cos(d)+\sin(d)\cos(x_0))-\sin(x_0)}{d} = \frac{\sin x_0(\cos(d)-1)+\sin(d)\cos(x_0)}{d}$
$= \sin(x_0) \cdot \frac{(\cos(d)-1)}{d} + \cos(x_0) \cdot \frac{\sin(d)}{d}$

$\lim_{d\to 0^-} \frac{f(x_0+d)-f(x_0)}{d} = \lim_{d\to 0^-} (\sin(x_0)\frac{(\cos(d)-1)}{d} + \cos(x_0)\frac{\sin(d)}{d})$
$= \sin(x_0) \cdot \lim_{d\to 0^-} \frac{(\cos(d)-1)}{d} + \cos(x_0) \cdot \lim_{d\to 0^-} \frac{\sin(d)}{d} = \sin(x_0) \cdot 0 + \cos(x_0) \cdot 1$
$= \cos(x_0)$

$\lim_{d\to 0^+} \frac{f(x_0+d)-f(x_0)}{d} =$ ...Analog...$= \sin(x_0) \cdot 0 + \cos(x_0) \cdot 1$
$= \cos(x_0)$

$\Rightarrow \lim_{d\to 0} \frac{f(x_0+d)-f(x_0)}{d} = \cos(x_0)$ (Es konvergiert für jeden x_0!)

Die Funktion f ist differenzierbar

1.2 Ableitung

<u>Definition</u>: Die Funktion $f' : X \to Y$, $x \to f'(x)$ heisst **Ableitung** der differenzierbaren Funktion $f : X \to Y$, $x \to f(x)$ und ist wie folgt definiert:

$$f'(x) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} := \lim_{d\to 0} \frac{f(x+d)-f(x)}{d}$$

Bemerkung: Die Ableitung ist der Grenzwert zu jedem x vom Term $\frac{f(x+d)-f(x)}{d}$ wenn man d gegen 0 streben lässt (x ist hier dann nicht die "Variable" die sich bewegt!). Damit man eine Funktion von Grenzwerten überhaupt definieren kann, müssen die Grenzwerte existieren (also muss der erwähnte Term bei jedem x immer konvergieren und zwar gegen den gleichen Grenzwert von beiden Seiten!), deswegen definiert man genau den Begriff von Differenzierbarkeit!

Seien $f : A \to B$, $x \to f(x)$ und $g : A \to C$, $x \to f(x)$ und in einem bestimmten x differenzierbare Funktionen, dann gilt:

- $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$
- $(C \cdot f(x))' = C \cdot f'(x)$
- $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
- $(\frac{(f(x)}{g(x)})' = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g(x)^2}$

Sei $f : A \to B$, $x \to f(x)$ eine invertierbare Funktion.

- $(f^{-1}(x))' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$

Sei $g : A \to B$, $x \to g(x)$ eine in einem bestimmten x differenzierbare Funktion und $f : C \to D$, $x \to f(x)$ eine in jedem $g(x)$ differenzierbare Funktion dann gilt die **Kettenregel**:

- $(f(g(x))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

1.3 Tangente (Linearisierung)

<u>Definition</u>: Die (lineare) Funktion $t_{x_0}(x) = a \cdot x + b$ ist eine Tangente zu einer Funktion $f(x)$ an der stelle x_0 falls gilt:

- $t'_{x_0}(x = x_0) = f'(x = x_0)$
- $t_{x_0}(x = x_0) = f(x = x_0)$

$\Rightarrow t_{x_0}(x) = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$

Bemerkung: $t_{x_0}(x)$ ist die Linearisierung (oder Approximation 1. Ordnung) von f an der Stelle x_0, weil es ähnliche werte hat als $f(x)$ in der Umgebung von x_0.

1.4 Bekannte Ableitungen

$f : A \to B$, $x \to f(x)$ und f' ist ihre Ableitung:

$f(x)$	$f'(x)$
c	0
x^r mit $r \in \mathbb{R}$	$r \cdot x^{r-1}$
e^x	e^x
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\tan(x)$	$1 + \tan^2(x)$
$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos(x)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\sinh(x)$	$\cosh(x)$
$\cosh(x)$	$\sinh(x)$

2 Tipps zur Übung

2.1 Online-Teil

- Frage 1: Definition von Asymptote benutzen, falls erfüllt $\to$ Asymptote
- Frage 2: Wie Frage 1
- Frage 3: Definition: von Tangente benutzen
- Frage 4: Nullstellen der Ableitung von f sind stellen wo f die Steigung gleich Null ist. Lokale Minimale- und Maximalstellen haben keine Steigung gleich Null.
- Frage 5: Definition einer Tangente: Parameter a und b mit der Bedingung einer Tangente ermitteln
- Frage 6: Definition von a^x? Wie kann man x^x dann anders Schreiben (eigentlich seine Definition)? Kettenregel benutzen!
- Frage 7: Rechenregeln von Ableitungen benutzen!

- Frage 8: Kettenregel und Ableitung von e^x.

2.2 Aufgabe 2

Rechenregeln und bekannte Ableitungen benutzen.

2.3 Aufgabe 3

$f(x) = \ln(x)$ Tangente $t_{x_0}(x)$ zu einem beliebigen festen x_0 berechnen (x_0 als Variable lassen). Danach berechnet man die Seiten des Dreieckes:

- Seite 1: Von der Höhe von Schnitt von $t_{x_0}x$ mit der y-Achse bis $f(x = x_0)$
- Seite 2: Von 0 bis x_0

2.4 Aufgabe 4

Sich fragen: Was will man Beweisen? Was ist die Definition von "ungerade"? Irgendmal x durch $f(f^{-1}(x))$ ersetzen...