Analysis: Uebung 1

Michel Heusser

October 4, 2012

1 Theorie

1.1 Mengen

Menge: Zusammenfassung von beliebig viele (endlich oder unendlich viele) beliebige Objekten, mit keiner bestimmten Ordnung. Diese Objekte heissen Elemente der Menge

$$\begin{aligned}
\text{Beispiele:}\quad & A = \{\text{Haus, Gitarre, } 5, 3.14\} \\
& A = \{3, 3, 1, 4\} = \{3, 1, 4\} \\
& A = \{1, 3, 5, 7, 9, ...\} \\
& A = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\} \\
& A = \{\{1, 2, 3\}, \{2, 3, 4\}, \{3, 4, 5\}\} \\
& A = \{1.5 \text{ CHF}, 20 \text{ CHF}, 3.5 \text{ CHF}\} \\
& A = \{\text{x : x = Student in diesem Zimmer der jünger ist als 19 Jahre}\} \\
& A = \{\} = \emptyset
\end{aligned}$$

Eine kann wie folgt definiert werden:

- Aufzählung: z.B. $A = \{\text{oben, unten, links, rechts}\}$
  oder $A = \{\text{Ein Elefant, zwei Elefanten, drei Elefanten, ...}\}$
- Eigenschaft z.B. $A = \{x : x = \text{Länder die EUR benutzen}\}$
  oder $A = \{x : x = \text{Eine Zelle in meinem Körper}\}$
  oder $A = \{x : 1 \leq x \leq 10, x = \text{gerade}\}$

Notation:

- $x \in A$: x ist Element von der Menge A
- $x \notin A$: x ist kein Element von der Menge A
- $A \subset B$: A ist eine Teilmenge von B, d.h., dass alle Elemente von A in B enthalten sind (Muss aber nicht umgekehrt sein)
- $A \not\subset B$: A ist keine Teilmenge von B, d.h., dass nicht alle Elemente von A in B enthalten sind (Können aber gemeinsame Elemente haben)

- $A \cap B := \{x : x \in A \text{ und } x \in B\} = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$ oder die Menge aller Elementen die zu A und (gleichzeitig) zu B gehören.
- $A \cup B := \{x : x \in A \text{ oder } x \in B\} = \{x : x \in A \vee x \in B\}$ oder die Menge aller Elementen die entweder zu A oder zu B gehören.
- $A^c := \{x : x \notin A\}$ oder die Menge aller Elementen die nicht zu A gehören
- $A \setminus B := \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$ oder die Menge aller Elementen die zu A und (gleichzeitig) nicht zu B gehören
- $A \times B := \{(a, b) : a \in A \wedge b \in B\}$ oder die Menge aller geordneten Paare wo der erste Element zu A und der zweite zu B gehört.

Bemerkung : Ein geordnetes Paar ist nichts anderes als eine Menge die zwei Elemente hat. Was man haben will ist jedoch eine Ordnung, d.h., dass es klar sein muss, welches das erste Element und welches das zweite Element. Wenn wir z.B. einen Paar bilden wollen wo a der erste Element ist und b der zweite Element ist dann genügt die definition einer Menge $P = \{a, b\} = \{b, a\}$ nicht. Man definiert dann $(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$, so dass $(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\} \neq \{\{b\}, \{a, b\}\} = (b, a)$. Diese ist nicht die einzige Sinnvolle definition, aber es genügt nur zu wissen, dass (a, b) nichts anderes als eine Art ist, Mengen darzustellen wobei die Elementen eine bestimmte Ordnung haben.

Bekannte Mengen:

- $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, ...\}$ (Natürliche Zahlen)
- $\mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, 3, ...\}$
- $\mathbb{Z} := \{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$ (Ganze Zahlen)
- $\mathbb{Q} := \{x : x = \frac{m}{n}, m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\}$ (Rationale Zahlen)
- $\mathbb{R} := \{...\}$ (Die Reele Zahlen)
- $\mathbb{R}^2 := \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) : x, y \in (R)\}$ (Der 2-dimensionale Raum, die Ebene)
- Irrationale Zahlen $:= \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

Intervalle:
Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $a < b$:

- $(a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ (Offen)
- $[a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$
- $(a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$
- $[a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ (Abgeschlossen)

- $[a, \infty) := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\}$
- $(a, \infty) := \{x \in \mathbb{R} : a < x\}$
- $(-\infty, a] := \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}$
- $(-\infty, a) := \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$
-

$Bemerkung$: Intervalle wo ∞ vorkommt, sind nur definiert als offen in der entsprechenden Seite, da ∞ nie "erreicht wird".

2 Tipps für Aufgabe 3

Zurück auf die Definition von Mengen gehen. Wie schreibt man streng Mathematisch jede Menge? Zuerst beweisst man die Ausdrücke für zwei Mengen A und B mit einfachen logischen Überlegungen, danach extrapoliert man die gleichen Gedanken für beliebig viele Mengen.

- $(A \cup B)^c$
  $= \{x : x \notin A \cup B\}$
  $=$ Logische Überlegung, z.B. mit Mengendiagramme
  $= \{x : x(\in \setminus \notin)A(\wedge\backslash\vee)x(\in \setminus \notin)B\}$
  $= \{x : x(\in \setminus \notin)A\}(\cup\backslash\cap)\{x : x(\in \setminus \notin)B\}$
  $= A^c \cap B^c$

- $(A \cap B)^c$
  $=$ Analog
  $= A^c \cup B^c$

- $(\bigcap_{i=1}^k A_i)^c = (A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_k)^c$
  $= \{x : x \notin (A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_k)\}$
  $= \{x : x(\in \setminus \notin)A_1(\wedge\backslash\vee)x(\in \setminus \notin)A_2(\wedge\backslash\vee)...(\wedge\backslash\vee)x(\in \setminus \notin)A_k\}$
  $= \{x : x(\in \setminus \notin)A_1\}(\cup\backslash\cap)\{x : x(\in \setminus \notin)A_2\}...(\cup\backslash\cap)\{x : x(\in \setminus \notin)A_k\}$
  $= (\bigcup_{i=1}^k \setminus \bigcap_{i=1}^k)\{x : x(\in \setminus \notin)A_i\}$
  $= \bigcup_{i=1}^k A_i^c$

- $(\bigcup_{i=1}^k A_i)^c = (A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_k)^c$
  $= \{x : x \notin (A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_k)\}$
  $= Analog$
  $= \bigcap_{i=1}^k A_i^c$