Universität Klagenfurt
Informatik – Systemsicherheit
M. Morak · R. Wigoutschnigg

UE Algorithmen und Datenstrukturen
SS 2019
Übungstermine: siehe ZEUS

Übungsblatt 2

Aufgabe 2.1: Rekursionsgleichungen und Fundamentalsatz 1

a) Wenden Sie den Fundamentalsatz an um zu einer Abschätzung für die Komplexität des Algorithmus zu gelangen, der durch die folgende Rekursionsgleichung gegeben ist:

$$T(1) = 2000, T(3n) = 10T(n) + (n \cdot \log(n^2))^2.$$

b) Geben Sie Beispiele für Rekursionsgleichungen an, sodass bei deren Lösung auch die anderen beiden Fälle des Fundamentalsatzes zur Anwendung kommen.

Aufgabe 2.2: Rekursionsgleichungen und Fundamentalsatz 2

Die Algorithmen A_1, A_2 und A_3 sind Algorithmen zur Lösung desselben Problems. Das Laufzeitverhalten T_i zugehörig zum Algorithmus A_i unterliegt der jeweils folgenden Rekursionsgleichung:

- $T_1(n) = 8T_1(n/2) + 9000n$, mit $T_1(1) = const.$
- $T_2(n) = 2T_2(n/3) + n^2$, mit $T_2(1) = const.$
- $T_3(n) = 3T_3(n/9) + (1 + \sqrt{n})$, mit $T_3(1) = const.$

a) Bestimmen Sie die Komplexitätsklassen $O(f_i)$ für die Algorithmen A_1, A_2 und A_3. Lösen Sie mindestens eine der Rekursionsgleichungen iterativ.
Hinweis: Verwenden Sie auch die Summenformel für die geometrische Reihe:

$$a \cdot \sum_{i=1}^{n} q^{i-1} = a \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \quad \text{bzw. für } q < 1: \quad a \cdot \sum_{i=1}^{\infty} q^{i-1} = \frac{a}{1-q}$$

b) Welchem der Algorithmen würden Sie den Vorzug geben, von welchem würden Sie abraten? Begründen Sie Ihre Antwort!

Aufgabe 2.3: Rekursionsgleichungen und Fundamentalsatz 3

Die Algorithmen A und A' sind Algorithmen zur Lösung desselben Problems. Algorithmus A besitzt eine Laufzeit von $T(2n) = 8 \cdot T(n) + 4n^3$, während A' eine Laufzeit von $T(2n) = a \cdot T(n/2) + 4n^2$ hat. Bestimmen Sie die größte ganze Zahl a, für die A' asymptotisch schneller als A ist.

Bitte wenden!

Aufgabe 2.4: Beschleunigte Matrizenmultiplikation

Der Algorithmus von Strassen dient zur schnellen Multiplikation zweier $(n \times n)$-Matrizen A und B mit der Ergebnismatrix $C = A \cdot B$. Die Matrizen werden auf folgende Weise in etwa gleich große Untermatrizen unterteilt:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}.$$

a) Zeigen Sie, dass die unten angegebene Berechnungsvorschrift das korrekte Ergebnis liefert.

b) Welche Beschleunigung wird gegenüber dem Standardverfahren ($O(n^3)$ Operationen) erreicht, wenn Strassen's Algorithmus rekursiv angewendet wird? Beachten Sie, dass in jedem Rekursionsschritt neben den Zahlenmultiplikationen auch $O(n^2)$ Zahlenadditionen erforderlich sind. (Sie können annehmen, dass $n = 2^k$ gilt.)

$$\begin{array}{llll}
s_1 = a_{21} + a_{22} & m_1 = s_2 s_6 & t_1 = m_1 + m_2 & c_{11} = m_2 + m_3 \\
s_2 = s_1 - a_{11} & m_2 = a_{11} b_{11} & t_2 = t_1 + m_4 & c_{12} = t_1 + m_5 + m_6 \\
s_3 = a_{11} - a_{21} & m_3 = a_{12} b_{21} & & c_{21} = t_2 - m_7 \\
s_4 = a_{12} - s_2 & m_4 = s_3 s_7 & & c_{22} = t_2 + m_5 \\
s_5 = b_{12} - b_{11} & m_5 = s_1 s_5 & & \\
s_6 = b_{22} - s_5 & m_6 = s_4 b_{22} & & \\
s_7 = b_{22} - b_{12} & m_7 = a_{22} s_8 & & \\
s_8 = s_6 - b_{21} & & &
\end{array}$$

Aufgabe 2.5: Listen und Arrays

Geben Sie für verkette Liste sowie für eindimensionale Arrays die Komplexitätsordnungen der folgenden Operationen an.

a) Wert an der Stelle i ändern

b) Wert an der Stelle i einfügen

c) Letztes Element löschen

d) Erstes Element löschen

e) Struktur in zwei möglichst gleich große Teile aufspalten

f) Zwei sortierte Strukturen zusammenfügen, sodass das Ergebnis wiederum sortiert ist