Universität Klagenfurt
Informatik – Systemsicherheit
M. Morak · R. Wigoutschnigg

UE Algorithmen und Datenstrukturen
SS 2019
Übungstermine: siehe ZEUS

Übungsblatt 6

Aufgabe 6.1: Darstellungsformen für Graphen

Für einen ungerichteten Graph $G = (V, E)$ sei $A = A(G)$ die Adjazenzmatrix (diese ist immer symmetrisch), und $I = I(G)$ die Inzidenzmatrix.

a) Man zeige, dass das Element in der i-ten Zeile und j-ten Spalte von A^k genau die Anzahl der Wege der Länge k vom Knoten i zum Knoten j angibt.

b) Beweisen Sie: $I \cdot I^T = A + D$, wobei D eine Diagonalmatrix ist, deren Einträge genau den Knotengraden entsprechen.

c) Bestimmen Sie die Adjazenzmatrix und Inzidenzmatrix für den ungerichteten Graph $G = (V, E)$ mit der Knotenmenge $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ und der Kantenmenge $E = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}, \{5, 1\}\}$ und verifizieren Sie ihr Ergebnis aus b).

Hinweis: Die Inzidenzmatrix eines ungerichteten Graphen enthält anders als die Inzidenzmatrix eines gerichteten Graphen je zwei 1-Einträge je Spalte (für beide verbundenen Knoten).

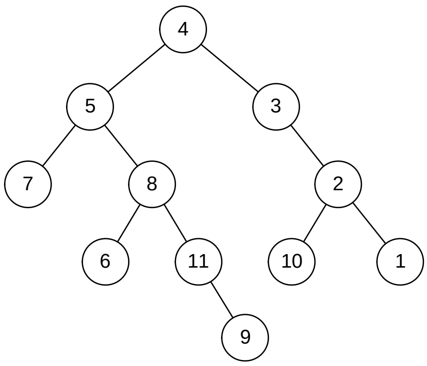
Aufgabe 6.2: Eigenschaften binärer Wurzelbäume

a) Zeigen Sie: Ist $T = (V, E)$ ein Wurzelbaum mit Wurzel v_0, dann existiert für alle $v \in V \setminus \{v_0\}$ genau ein Pfad $w \in W(G)$ mit $\alpha(w) = v_0$ und $\omega(w) = v$.

b) Zeigen Sie: Ist T aus a) ein binärer Wurzelbaum der Höhe h mit m Blättern, dann gilt:
$h \geq \log_2(m)$ sowie $h + 1 \geq \log_2(|V| + 1)$.

Aufgabe 6.3: Ordnung & Fädelung

Bestimmen Sie die WRL-, LRW- sowie LWR-Ordnung sowie die symmetrische Fädelung des folgenden binären Wurzelbaumes:



Bitte wenden!

Aufgabe 6.4: Rekonstruktion von Wurzelbäumen

a) Von einem geordneten binären Wurzelbaum $T = (V, R)$ seien die LWR- und die WLR-Ordnung der Knoten gegeben. Zeigen Sie, dass durch diese Angaben der Baum eindeutig bestimmt ist.
b) Bestimmen Sie einen Algorithmus, der aus der LWR- und der WLR-Ordnung den zugehörigen binären Wurzelbaum erzeugt. Wenden Sie den Algorithmus auf die Ordnungen aus Beispiel 6.3 an.
c) Beweisen oder widerlegen Sie: Aus der LRW-Ordnung eines sortierten binären Wurzelbaums kann dieser eindeutig rekonstruiert werden.
d) Beweisen oder widerlegen Sie: Jede beliebige Anordnung der Elemente $\{v_1, \ldots, v_n\}$ (beispielsweise die natürlichen Zahlen $\{1, \ldots, n\}$) stellt eine LRW-Ordnung eines sortierten binären Wurzelbaumes dar.

Aufgabe 6.5: Eigenschaft sortierter binärer Wurzelbäume

Gegeben sei ein sortierter binärer Wurzelbaum (Duplikate sind erlaubt). Man verfolgt nun von der Wurzel ausgehend einen Weg zu einem (beliebigen) Blatt, und definiert die Menge A als alle die Schlüsselwerte, welche links von diesem Weg liegen, die Menge B als die Menge aller Schlüsselwerte, welche genau auf dem Weg liegen und C als die Menge aller Schlüsselwerte die rechts von dem Weg liegen. Zeigen oder widerlegen Sie: $\forall a \in A, b \in B, c \in C$ gilt $a \leq b \leq c$. Sollte diese Aussage falsch sein, so geben Sie das kleinste Gegenbeispiel an.