Algebra liniowa - laboratorium nr 4, macierze

Przydatne funkcje

- sort(L) - sortuje niemalejąco listę L

  ```
  (%i1) sort([3,7,1,-2,12]);
  (%o1) [-2,1,3,7,12]
  ```

- floor(x) - zwraca część całkowitą liczby x

  ```
  (%i1) floor(sqrt(2));
  (%o1) 1
  ```

- definiowanie ciągów rekurencyjnych:

  ```
  (%i1) F[0]:1$
  (%i2) F[1]:1$
  (%i3) F[n]:=F[n-1]+F[n-2]$
  (%i4) print(F[5]);
  (%o4) 8
  ```

- matrix($a_1, a_2, \ldots, a_n$) - tworzy macierz której wierszami są listy $a_1, a_2, \ldots, a_n$,
- transpose(A) - transpozycja macierzy A, inaczej A^T
- submatrix($i_1, i_2, \ldots, i_m, A, j_1, j_2, \ldots, j_n$) - zwraca macierz powstałą w wyniku usunięcia z macierzy A wierszy $i_1, i_2, \ldots, i_m$ oraz kolumn $j_1, j_2, \ldots, j_n$.

  ```
  (%i1) A:matrix([1,2],[3,4])$
  (%i2) submatrix(2,A);
  (%o2) matrix([1,2])
  ```

- `A^^n`
  podnosi macierz A do potęgi n
- `A^n`
  podnosi każdy element macierzy A do potęgi n
- A.B - mnożenie macierzy A i B
- addrow(M,L) - dodaje wiersz L do macierzy M
- addcol(M,L) - dodaje kolumnę L do macierzy M
- rowswap(M, i, j) - zamienia miejscami wiersze i oraz j w macierzy M
- columnswap(M, i, j) - zamienia miejscami kolumny i oraz j w macierzy M
- determinant(A) - zwraca wyznacznik macierzy A,
- apply("+", L) - zwraca sumę elementów listy L
- apply("*", L) - zwraca iloczyn elementów listy L
- ptriangularize(A,x) - zwraca macierz górnotrójkątną powstałą z macierzy A poprzez operacje elementarne na wierszach
- rowop(A,i,j,k) - w macierzy A od wiersza i odejmuje k razy wiersz j

Zadania

1. Utworzyć listy $a_1, a_2, \ldots, a_6$, gdzie;

   - a_1 to lista 6 kolejnych parzystych wielokrotności 7, począwszy od 14,
   - a_2 to lista kolejnych 6 liczb naturalnych dających resztę 4 przy dzieleniu przez 9, począwszy od 4,
   - a_3 to lista 6 kolejnych potęg o parzystym wykładniku liczby 2i, począwszy od potęgi 2
   - a_4 to lista pierwiastków wielomianu

     `x^6-(283*x^5)/150-(791*x^4)/150+(479*x^3)/150+(363*x^2)/50+(42*x)/25`

     uporządkowanych rosnąco,
   - a_5 to lista części całkowitych kolejnych 6 potęg liczby będącej dodatnim pierwiastkiem równania kwadratowego

     `x^2+61*x-654=0`
   - a_6 to lista 6 kolejnych liczb danych wzorem rekurencyjnym $b_n = 3b_{n-1} - b_{n-2}, b_0 = 0, b_1 = 1$, zaczynając od $n = 4$

   Utworzyć macierz A, której wierszami są listy a_1, a_2, a_3 oraz macierz B, której wierszami są listy a_4, a_5, a_6, a następnie wykonać poniższe polecenia.

   (a) Utworzyć macierz $C = A^T \cdot B$. Obliczyć iloczyn elementów $C_{2,4}$ i $C_{3,2}$. Odp. -172659630.

   (b) Utworzyć:
   - macierz D o wierszach $a_1, a_2, \ldots, a_6$,
   - macierz $E = C + 2D$

   Następnie z macierzy E wydobyć podmacierz F, otrzymaną po usunięciu z macierzy E 1 i 6 wiersza oraz 2 i 4 kolumny.

   Odp. $\begin{bmatrix} \frac{1271}{3} & \frac{320129}{25} & 921585 & 8466722 \\ -1210 & \frac{208856}{25} & 1467521 & 14100966 \\ \frac{16733}{3} & \frac{1545069}{25} & 2412436 & 20752530 \\ -\frac{63658}{3} & -\frac{568328}{5} & 1915431 & 24574058 \end{bmatrix}$

   (c) Wyznacz macierz F^4, a następnie oblicz sumę elementów na głównej przekątnej (ślad macierzy). Odp. $\frac{1485351367471640853520184115905195940 1}{31640625} \approx 46944438280585192407551497984 2$

2. Dana jest macierz $A = \begin{bmatrix} a-3 & 2i & 3i+1 \\ 4 & 2 & a+5 \\ 2-i & i & -2 \end{bmatrix}$. Utworzyć macierz B poprzez:

   - dodanie na końcu wiersza złożonego z 3 kolejnych potęg liczby $(2-2i)$ zapisanych w postaci algebraicznej, począwszy od potęgi 1. Następnie zamienić ten wiersz miejscami z wierszem 2.
   - dodanie na końcu kolumny złożonej z 4 kolejnych potęg liczby $(1+i)$ zaczynając od potęgi 2. Następnie zamienić tę kolumnę miejscami z kolumną 1.

   Ustalić, dla jakich rzeczywistych wartości parametru a wyznacznik macierzy B:

   (a) jest równy 0, odp. Brak rozwiązań rzeczywistych

   (b) jest liczbą rzeczywistą, odp. $[a = -\frac{2\sqrt{705}+7}{17}, a = \frac{2\sqrt{705}-7}{17}]$

   (c) leży na płaszczyźnie zespolonej na prostej $y = x + 3$, odp. $[a = -\frac{\sqrt{3866}+46}{8}, a = \frac{\sqrt{3866}-46}{8}]$

3. Za pomocą operacji elementarnych na wierszach doprowadzić macierz do macierzy górnotrójkątnej, a następnie obliczyć jej wyznacznik jako iloczyn elementów na głównej przekątnej.

   (a)
   ```
   A: matrix(
   [1,3,8],
   [5,6,4],
   [-8,-2,6]
   );
   ```
   odp. 162,

(b)
```
B: matrix(
[2,3,8,4,5],
[2,-3,4,1,-3],
[2,-4,0,3,7],
[4,-8,0,6,14],
[1,-9,2,3,4]
);
```
odp. 0

(c)
```
C: matrix(
[6,4,-7,2,3,5,4,7],
[3,2,1,-2,0,4,-6,5],
[4,8,0,1,-2,6,-4,2],
[3,4,1,2,9,8,-4,5],
[2,-3,5,4,7,3,6,2],
[1,-1,1,-1,5,0,-6,2],
[3,8,4,7,5,6,-4,6],
[-2,3,1,-5,7,9,3,2]
);
```
odp. 5104742