

# Formelsammlung MRT + A

Michi Fallegger  
Mario Felder  
Kurmann Simon

7. Januar 2015



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Matrizen</b>	<b>7</b>
1.1	Grundlagen . . . . .	7
1.2	Rang . . . . .	11
1.2.1	Rang von Vektoren . . . . .	11
1.2.2	Rang einer Matrix . . . . .	11
1.3	Adjunkte . . . . .	12
1.4	Inverse einer Matrix . . . . .	13
1.5	Eigenwerte und Eigenvektoren . . . . .	13
<b>2</b>	<b>Zustandsraum</b>	<b>15</b>
2.1	Zustandsvariabel . . . . .	15
2.1.1	Laplace-Transformation auf Zustandsgleichung . . . . .	15
2.2	Regelungsnormalform der Zustandsgleichung . . . . .	16
2.2.1	Signalflussbild . . . . .	17
2.2.2	Regelungsnormalform . . . . .	17
2.2.3	Beobachtungsnormalform . . . . .	18
2.2.4	Jordanische Normalform . . . . .	18
2.3	Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit . . . . .	20
2.3.1	Steuerbarkeit . . . . .	20
2.3.2	Beobachtbarkeit . . . . .	20
2.4	Transformation . . . . .	21
2.4.1	Transformation in Regelungsnormalform (Steuer- normalform) . . . . .	21
2.4.2	Transformation auf Beobachtungsnormalform . . . . .	22
2.4.3	Transformation auf Jordansche Normalform . . . . .	22
2.5	Reglersynthese im Zustandsraum . . . . .	23

2.5.1	Polvorgabe . . . . .	23
2.5.2	Vorfilter / Vorverstärker . . . . .	24
2.5.3	Beobachter . . . . .	25
2.6	LQ - Regler . . . . .	26
2.6.1	Liapanov - Gleichung . . . . .	26
2.6.2	Riccati - Gleichung . . . . .	26
2.7	PI - Zustandsregler . . . . .	27
<b>3</b>	<b>Digitale Regelung</b>	<b>29</b>
3.1	Schematische Darstellung . . . . .	29
3.2	Wahl der Taktzeit . . . . .	29
3.3	Anti-Aliasing Filter . . . . .	30
3.4	Direkter/Indirekter Regler . . . . .	30
3.5	Digitaler Regler . . . . .	30
3.5.1	I Anteil . . . . .	30
3.5.2	D Anteil . . . . .	31
3.5.3	Antireset-Windup . . . . .	31
3.6	z-Transformation . . . . .	31
3.6.1	Definition . . . . .	32
3.6.2	Signale . . . . .	32
3.6.3	Eigenschaften der z-Transformation . . . . .	32
3.7	z-Übertragungsfunktion . . . . .	33
3.7.1	Übertragung der Regelstrecke . . . . .	33
3.8	Laplace- $\rightarrow$ z-Übertragungsfunktion . . . . .	33
3.8.1	Transformation . . . . .	33
3.9	Stabilität . . . . .	34
3.9.1	Analyse mit der Impulsantwort . . . . .	34
3.10	Zusammenhang Pole Laplace $\leftrightarrow$ z . . . . .	34
3.10.1	Periodizität . . . . .	35
3.11	Wichtige Übertragungsfunktionen . . . . .	35
3.11.1	z-Übertragung des offenen Regelkreises . . . . .	35
3.11.2	Führungsübertragungsfunktion . . . . .	36
3.11.3	Störübertragungsfunktion . . . . .	36
3.12	Diskrete Zustandsraumdarstellung . . . . .	36
3.13	Diskreter Frequenzgang . . . . .	37
3.13.1	Eigenschaften . . . . .	37
3.13.2	Nyquist Frequenz . . . . .	37
3.13.3	Bode-Diagramm . . . . .	37

<b>4</b>	<b>Umformungstabelle</b>	<b>39</b>
----------	--------------------------	-----------



# Kapitel 1

# Matrizen

## 1.1 Grundlagen

$m \times n$  Matrize

$$A = [a_{jk}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

m = Zeilen

n = Spalten

## Vektoren

Zeilenvektor:

$$\underline{a} = [a_j] = [a_1 \quad a_2 \quad \dots \quad a_m]$$

Spaltenvektor:

$$\underline{b} = [b_k] = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

### Transponierte

$$A^T = [a_{kj}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & & a_{m2} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$A^T = A$  ist eine symmetrische Matrix

$A^T = -A$  ist eine schief-symmetrische Matrix

### Addition

Ist nur für Matrizen derselben Dimension  $A = [a_{jk}]$ ,  $B = [b_{jk}]$  definiert.

$$C = A + B = [a_{jk} + b_{jk}]$$

### Multiplikation

**Definition:** Das Produkt  $C = A \cdot B$  einer  $m \times n$ -Matrix  $A = [a_{jk}]$  und einer  $r \times p$ -Matrix  $B = [b_{jk}]$  ist nur definiert wenn  $r = n$  ist.

$$c_{jk} = \sum_{l=1}^n a_{jl} \cdot b_{lk} = a_{j1}b_{1k} + a_{j2}b_{2k} + \dots + a_{jn}b_{nk}$$



wobei  $j = 1, 2, \dots, m$  und  $k = 1, 2, \dots, p$ .

$$\begin{aligned}
 C = A \cdot B &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & & b_{2p} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{np} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + \dots + a_{1n}b_{n1} & \dots & a_{11}b_{1n} + \dots + a_{1n}b_{nn} \\ a_{21}b_{11} + \dots + a_{2n}b_{n1} & & a_{21}b_{1n} + \dots + a_{2n}b_{nn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}b_{11} + \dots + a_{mn}b_{n1} & \dots & a_{m1}b_{1n} + \dots + a_{mn}b_{nn} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

**Transponierung eines Produkts:**

$$(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$$

## Spezielle Matrizen

Eine Quadratische Matrix, deren Elemente oberhalb der Hauptdiagonale sämtlich Null sind, heisst **untere Dreiecksmatrix**.

Wenn die Elemente unterhalb der Hauptdiagonalen sämtlich Null sind, dann heisst sie **obere Dreiecksmatrix**.

$$T_1 = \begin{bmatrix} t_{11} & 0 & 0 \\ t_{21} & t_{22} & 0 \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{bmatrix} \quad T_2 = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{21} & t_{31} \\ 0 & t_{22} & t_{32} \\ 0 & 0 & t_{33} \end{bmatrix}$$

Eine quadratische Matrix  $A = [a_{jk}]$  deren Elemente unter- und oberhalb der Hauptdiagonalen sämtlich null sind, heisst **Diagonalmatrix**. ( $a_{jk} = 0$  für alle  $j \neq k$ )

$$D = \begin{bmatrix} d_{11} & 0 & 0 \\ 0 & d_{22} & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} \end{bmatrix} \quad S = \begin{bmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$$

$S$  ist eine **Skalarmatrix**, da:  $A \cdot S = S \cdot A = cA$

Eine Skalarmatrix, deren Elemente der Hauptdiagonale sämtlich 1 sind, heisst **Einheitsmatrix**.

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

### Orthogonal

Vektor  $\underline{a}$  ist zum Vektor  $\underline{b}$  orthogonal, wenn das Skalarprodukt  $\underline{a} \bullet \underline{b} = 0$  ist. Dann ist auch  $\underline{b}$  orthogonal zu  $\underline{a}$  und wir sprechen daher von zwei orthogonalen Vektoren  $\underline{a}$  und  $\underline{b}$ .

Zwei orthogonale Nichtnullvektoren sind aufeinander senkrecht ( $\cos(\alpha) = 0, \alpha = \frac{\pi}{2}$ ).

### Determinante

$$D = \det A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a \cdot d - b \cdot c$$

#### Wichtige Eigenschaften:

1.  $\det A = \det A^T$
2. Sind zwei Zeilen oder Spalten linear abhängig, so ist die Determinante = 0
3. Vertauscht man zwei Zeilen oder Spalten, so wird die Determinante mit -1 multipliziert
4.  $\det AB = \det BA = \det A \cdot \det B$

#### Lineares Gleichungssystem:

$$A \cdot \underline{x} = \underline{b}$$

hat die Lösungen:  $x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D}$ , wobei  $D = \det A$  und

$$D_1 = \begin{bmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{bmatrix} \quad D_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{bmatrix}$$

## 1.2 Rang

### 1.2.1 Rang von Vektoren

Beschreibt die lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit von Vektoren. Eine Menge von  $m$  Vektoren  $a_1, a_2, \dots, a_m$  ( mit derselben Anzahl von Komponenten ) bildet die folgende lineare Kombination:

$$c_1 a_1 + c_2 a_2 + \dots + c_m a_m$$

Daraus folgt:

$$c_1 a_1 + c_2 a_2 + \dots + c_m a_m = 0$$

Falls die einzige Möglichkeit darin besteht,  $c = 0$  zu setzen um die Gleichung zu erfüllen, sind die Vektoren linear unabhängig.

Zwei Vektoren in der Ebene sind linear abhängig, wenn sie parallel sind.

$$\underline{a} - c \cdot \underline{b} = 0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Drei Vektoren in Anschauungsraum (3D) sind linear abhängig, wenn sie in einer Ebene liegen.

$$c_1 \cdot \underline{a}_1 + c_2 \cdot \underline{a}_2 + c_3 \cdot \underline{a}_3 = 0$$

### 1.2.2 Rang einer Matrix

Die maximale Zahl der linear unabhängigen Zeilenvektoren einer Matrix  $\underline{A}$  heisst Rang. Es gilt:

$$r = \text{Rang}(A) \leq m, n$$

**Vorgehen (Horizontal):**

1. Erste Zeile (oder die mit der tiefsten Zahlen) stehen lassen.
2. Dieser Schritt für alle Zeilen machen:

$$c_j \cdot a_{11} + a_{j1} = 0 \quad \rightarrow \quad c_j \cdot \begin{bmatrix} a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \end{bmatrix}$$

3. Entstehen in der Matrix horizontale gleiche Vektoren, so sind diese linear abhängig.

## 1.3 Adjunkte

Ist nur für quadratische Matrizen definiert.

$$\text{adj}(A) = \text{Cof}(A)^T = \tilde{A}^T = \begin{bmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} & \dots & \tilde{a}_{1n} \\ \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{22} & & \tilde{a}_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \tilde{a}_{n1} & \tilde{a}_{n2} & \dots & \tilde{a}_{nn} \end{bmatrix}^T$$

An der Stelle  $(j, k)$  steht der Cofaktor  $\tilde{a}_{jk}$ , welcher sich folgendermaßen berechnet:

$$\tilde{a}_{jk} = (-1)^{j+k} \cdot M_{jk} = (-1)^{j+k} \cdot \det \begin{bmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,k-1} & a_{1,k+1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j-1,1} & \dots & a_{j-1,k-1} & a_{j-1,k+1} & \dots & a_{j-1,n} \\ a_{j+1,1} & \dots & a_{j+1,k-1} & a_{j+1,k+1} & \dots & a_{j+1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,k-1} & a_{n,k+1} & \dots & a_{n,n} \end{bmatrix}$$

### 2×2 Matrix

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Adjunkte:

$$\text{adj}(A) = \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

## 1.4 Inverse einer Matrix

Ist nur für quadratische Matrizen definiert.

Die Inverse einer  $n \times n$ -Matrix ist gegeben durch:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \text{adj}(A) = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{bmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{21} & \dots & \tilde{a}_{n1} \\ \tilde{a}_{12} & \tilde{a}_{22} & & \tilde{a}_{n2} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \tilde{a}_{1n} & \tilde{a}_{2n} & \dots & \tilde{a}_{nn} \end{bmatrix}$$

Es gilt:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$$

## 1.5 Eigenwerte und Eigenvektoren

$$A \cdot \underline{x} = \lambda \cdot \underline{x}$$

Derjenige Wert  $\lambda$  für welchen die obige Gleichung eine Lösung  $\underline{x} \neq 0$  hat heisst der Eigenwert der Matrix  $\underline{A}$ .

Die korrespondierende Lösung  $\underline{x} \neq 0$  heisst der Eigenvektor der Matrix  $\underline{A}$ .

$$A \cdot \underline{x} = \lambda \cdot \underline{x}$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Homogenes, lineares Gleichungssystem

$$(A - \lambda \cdot I)\underline{x} = \underline{0}$$

**Lösung nach Cramer: Eigenwert bestimmen**

$$D(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0 \qquad \lambda I = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$$


---

Eigenvektor

$$\underline{x} = A - \lambda \cdot I$$

# Kapitel 2

## Zustandsraum

### 2.1 Zustandsvariabel

Es gibt allgemeine Untersuchungen über das Systemverhalten, beispielsweise über die Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit von Systemen, die sich nur im Zeitbereich durchführen lassen.

Aus diesem Grund ist es angebracht im Zeitbereich zu bleiben. Es ist zweckmässig, die auftretende Differentialgleichung durch Einführen von Zwischengrössen in Systeme von Differentialgleichungen erster Ordnung zu verwandeln.

$$a_n \cdot y^n + a_{n-1} \cdot y^{n-1} + \dots + a_2 \ddot{y} + a_1 \dot{y} + a_0 y = b_0 u \quad a_n \neq 0$$

Dann kann man als Zwischengrössen  $x_1, x_2, \dots, x_n$  die Ausgangsgrösse  $y$  und ihre Ableitungen nehmen:

$$x_1 = y, \quad x_2 = \dot{y}, \quad x_3 = \ddot{y}, \dots, \quad x_{n-1} = y^{n-2} \quad x_n = y^{n-1}$$

Aus der Definition folgen die einfachen Differentialgleichungen.:

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = x_3, \quad \dots, \quad \dot{x}_{n-1} = x_n$$

#### 2.1.1 Laplace-Transformation auf Zustandsgleichung

Zustandsdifferentialgleichung:

$$\dot{x} = A \cdot x + b \cdot u$$

Laplace-Tranformation:

$$\begin{aligned} sX(s) - x_0 &= A \cdot X(s) + b \cdot U(s) \\ X(s) &= (sI - A)^{-1} \cdot b \cdot U(s) + (sI - A)^{-1} x_0 \end{aligned}$$

Die inverse Matrix zu  $sI - A$  existiert nur wenn  $\det(sI - A) \neq 0$ :

$$\det(sI - A) = \begin{vmatrix} s - a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & s - a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & s - a_{nn} \end{vmatrix}$$

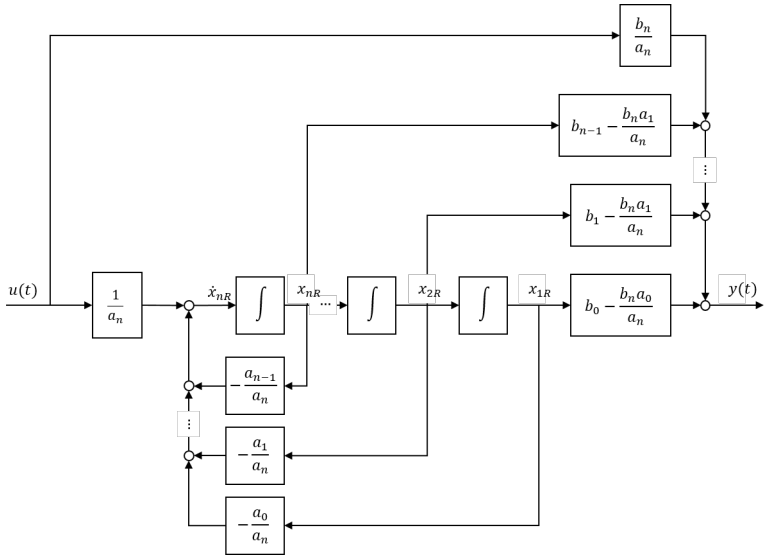
## 2.2 Regelungsnormalform der Zustandsgleichung

$$Y(s) = G(s) \cdot U(s)$$

$$G(s) = \frac{Z(s)}{N(s)} = \frac{b_0 + b_1 s + b_2 s^2 + \dots + b_n s^n}{a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \dots + a_n s^n}$$



### 2.2.1 Signalflussbild



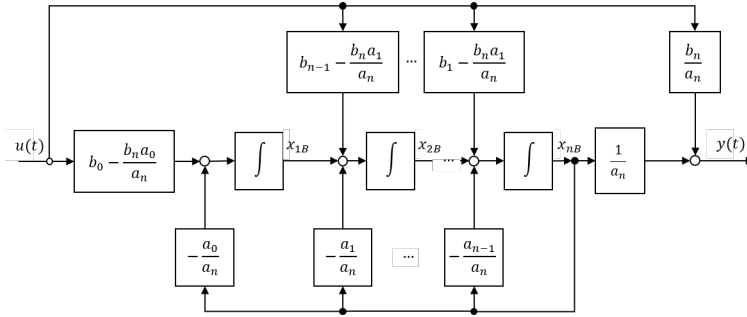
### 2.2.2 Regelungsnormalform

$$\dot{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -\frac{a_0}{a_n} & -\frac{a_1}{a_n} & -\frac{a_2}{a_n} & \dots & -\frac{a_{n-1}}{a_n} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \cdot x + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{1}{a_n} \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}} \cdot u$$

$$y = \underbrace{\left[ b_0 - a_0 \cdot \frac{b_n}{a_n} \quad b_1 - a_1 \cdot \frac{b_n}{a_n} \quad \dots \quad b_{n-1} - a_{n-1} \cdot \frac{b_n}{a_n} \right]}_{\mathbf{c}^T} \cdot x + \underbrace{\left[ \frac{b_n}{a_n} \right]}_{\mathbf{d}} \cdot u$$

## 2.2.3 Beobachtungsnormalform

### Signalflussbild



### Systemmatrizen

$$\dot{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & -\frac{a_0}{a_n} \\ 1 & 0 & 0 & \dots & -\frac{a_1}{a_n} \\ 0 & 1 & 0 & \dots & -\frac{a_2}{a_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -\frac{a_{n-1}}{a_n} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \cdot x + \underbrace{\begin{bmatrix} b_0 - b_n \frac{a_0}{a_n} \\ b_1 - b_n \frac{a_1}{a_n} \\ b_2 - b_n \frac{a_2}{a_n} \\ \vdots \\ b_{n-1} - b_n \frac{a_{n-1}}{a_n} \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}} \cdot u$$

$$y = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{a_n} \end{bmatrix}}_{\mathbf{c}^T} \cdot x + \underbrace{\begin{bmatrix} b_n \\ a_n \end{bmatrix}}_{\mathbf{d}} \cdot u$$

## 2.2.4 Jordanische Normalform

- Bevorzugte Verwendung, wenn Pole vom System bekannt sind
- System ist vollständig entkoppelt, wenn alle Pole reell und einfach vorkommen
- A ist Diagonalmatrix mit  $\lambda_i$ : Pole

Es gilt:

$$Y(s) = \left( \sum_{i=1}^n \frac{r_i}{s - \lambda_i} + r_0 \right) \cdot U(s)$$

## 2.2. REGELUNGSNORMALFORM DER ZUSTANDSGLEICHUNG

---

Dabei ist  $r_0 \neq 0$  wenn Zähler und Nenner von  $G(s)$  den gleichen Grad haben.

$$\dot{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \cdot x + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}} \cdot u$$

$$y = \underbrace{\begin{bmatrix} r_1 & r_2 & \dots & r_n \end{bmatrix}}_{c^T} \cdot x + \underbrace{\begin{bmatrix} r_0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{d}} \cdot u$$

### Mehrfachpole

Wenn  $\lambda_1$  ein  $m$ -facher Pol ist gilt:

$$Y(s) = \left( \frac{r_1}{s - \lambda_1} + \dots + \frac{r_m}{(s - \lambda_m)^m} + \sum_{i=m+1}^n \frac{r_i}{s - \lambda_i} + r_0 \right) \cdot U(s)$$

Für die Matrix bedeutet dies:

$$\dot{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda_1 & & & & \\ 1 & \lambda_1 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & 1 & \lambda_1 & \\ & & & \lambda_{m+1} & \ddots \\ & & & & \lambda_n \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \cdot x + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}} \cdot u$$

$$y = \underbrace{\begin{bmatrix} r_1 & \dots & r_m & r_{m+1} & \dots & r_n \end{bmatrix}}_{c^T} \cdot x + \underbrace{\begin{bmatrix} r_0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{d}} \cdot u$$

## 2.3 Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit

### 2.3.1 Steuerbarkeit

Das System

$$\begin{aligned}\dot{x} &= A \cdot x + b \cdot u \\ y &= c^T \cdot x + d \cdot u\end{aligned}$$

heisst steuerbar, wenn sein Zustandspunkt  $x$  durch geeignete Wahl des Steuervektors  $u$  in endlicher Zeit aus einem beliebigen Anfangszustand  $x_0$  in den Endzustand  $0$  bewegt werden kann.

Es ist somit steuerbar, wenn die Vektoren  $b, Ab, \dots, A^{n-1}b$  linear unabhängig sind. ( $\text{Rang}(Q_S) = n$  oder  $\det(Q_S) \neq 0$ )

Steuerbarkeits-Matrix ( $n \times n$ ):

$$Q_S = [b \quad A \cdot b \quad \dots \quad A^{n-1} \cdot b]$$

### 2.3.2 Beobachtbarkeit

Das System

$$\begin{aligned}\dot{x} &= A \cdot x + b \cdot u \\ y &= c^T \cdot x + d \cdot u\end{aligned}$$

heisst beobachtbar, wenn dem bekannten  $u(t)$  aus der Messung von  $y(t)$  über eine endliche Zeitspanne der Anfangszustand  $x(t_0)$  eindeutig ermittelt werden kann, ganz gleich wo dieser liegt.

Das System ist beobachtbar, wenn die Beobachtungsmatrix  $Q_B$  ( $n \times n$  Matrix) regulär ist ( $\text{Rang}(Q_B) = n$  oder  $\det(Q_B) \neq 0$ ).

$$Q_B = \begin{bmatrix} c^T \\ c^T \cdot A \\ \vdots \\ c^T \cdot A^{n-1} \end{bmatrix}$$

## 2.4 Transformation

### 2.4.1 Transformation in Regelungsnormalform (Steuernormalform)

Ein Übertragungssystem

$$\dot{x} = A \cdot x + b \cdot u$$

wird mit der Transformation

$$z = T_R \cdot x$$

in die Regelungsnormalform

$$\dot{x} = A_R \cdot x + b_R \cdot u$$

überführt. Die Matrizen werden folgendermassen transformiert:

$$A_R = T_R \cdot A \cdot T_R^{-1}$$

$$b_R = T_R \cdot b$$

$$c^T_R = c^T \cdot T_R^{-1}$$

$$d_R = d$$

Die Transformationsmatrix  $T_R$  ( $n \times n$ ) wird wie folgt berechnet:

$$T_R = \begin{bmatrix} q_{S_n}^T \\ q_{S_n}^T \cdot A \\ \vdots \\ q_{S_n}^T \cdot A^{n-1} \end{bmatrix}$$

wobei  $q_{S_n}^T$  der  $n$ -te Zeilenvektor der inversen Steuerbarkeitsmatrix  $Q_S^{-1}$  ist

$$Q_S^{-1} = \begin{bmatrix} q_{S_{11}} & q_{S_{12}} & \cdots & q_{S_{1n}} \\ q_{S_{21}} & q_{S_{22}} & \cdots & q_{S_{2n}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{S_{n1}} & q_{S_{n2}} & \cdots & q_{S_{nn}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{S_1} \\ q_{S_2} \\ \vdots \\ q_{S_n} \end{bmatrix}$$

### 2.4.2 Transformation auf Beobachtungsnormalform

Ein Übertragungssystem

$$\dot{x} = A \cdot x + b \cdot u$$

wird mit der Transformation

$$z = T_B \cdot x$$

in die Beobachtungsnormalform

$$\dot{z} = A_B \cdot z + b_B \cdot u$$

überführt. Die Matrizen werden folgendermassen transformiert:

$$A_B = T_B \cdot A \cdot T_B^{-1}$$

$$b_B = T_B \cdot b$$

$$c_B^T = c^T \cdot T_B^{-1}$$

$$d_B = d$$

Die Transformationsmatrix  $T_B$  ( $n \times n$ ) wird wie folgt berechnet:

$$T_B = [q_{B_n} \quad A \cdot q_{B_n} \quad \dots \quad A^{n-1} \cdot q_{B_n}]$$

wobei  $q_{B_n}$  der  $n$ -te Spaltenvektor der inversen Beobachtungsmatrix  $Q_B^{-1}$  ist.

$$Q_B^{-1} = \begin{bmatrix} q_{B_{11}} & q_{B_{12}} & \dots & q_{B_{1n}} \\ q_{B_{21}} & q_{B_{22}} & \dots & q_{B_{2n}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{B_{n1}} & q_{B_{n2}} & \dots & q_{B_{nn}} \end{bmatrix} = [q_{B_1} \quad q_{B_2} \quad \dots \quad q_{B_n}]$$

### 2.4.3 Transformation auf Jordansche Normalform

Ein Übertragungssystem

$$\dot{x} = A \cdot x + b \cdot u$$

wird mit der Transformation

$$x = V \cdot z$$

in die Jordansche Normalform

$$\dot{x} = A_J \cdot x + b_J \cdot u$$

überführt. Die Matrizen werden folgendermassen Transformiert:

$$A_J = V^{-1} \cdot A \cdot V$$

$$b_J = V^{-1} \cdot b$$

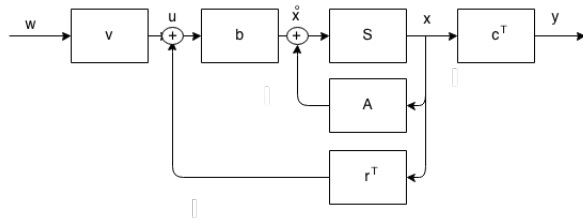
$$c^T_J = c^T \cdot V$$

$$d_J = d$$

Die Transformationsmatrix  $V$  ( $n \times n$ ) besteht aus den Eigenvektoren  $v_n$  der Matrix  $A$ :

$$V = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & \dots & v_{1n} \\ v_{21} & v_{22} & \dots & v_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{n1} & v_{n2} & \dots & v_{nn} \end{bmatrix} = [v_1 \quad v_2 \quad \dots \quad v_n]$$

## 2.5 Reglersynthese im Zustandsraum



### 2.5.1 Polvorgabe

Bei der Polvorgabe werden die Pole des geschlossenen Systems vorgegeben.

$$A_{CL} = A - b \cdot r^T$$

$$A_{CL,R} = A_R - b_R \cdot r^T_R \quad r^T_R = [r_{1,R} \quad r_{2,R} \quad \dots \quad r_{n,R}]$$

Daraus folgt:

$$A_{CL,R} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -\frac{a_0}{a_n} - r_{1,R} & -\frac{a_1}{a_n} - r_{2,R} & -\frac{a_2}{a_n} - r_{3,R} & \dots & \underbrace{-\frac{a_{n-1}}{a_n} - r_{n,R}}_{-c^{n-1}} \end{bmatrix}$$

Diese Matrix kann gerade in das Istpolynom überführt werden.

Istpolynom:

$$p_{Cl,r}(s) = s^n + \underbrace{(a_{n-1} + r_{n,R})}_{c^{n-1}} \cdot s^{n-1} + \dots + (a_1 + r_{2,R})a_1 \cdot s + (a_0 + r_{1,R})$$

Das Sollpolynom ist durch die Nullstellen vorgegeben:

$$\begin{aligned} p(s) &= (s - s_1)(s - s_2) \dots (s - s_n) \\ &= s^n + p_{n-1} \cdot s^{n-1} + \dots + p_1 \cdot s + p_0 \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich ergibt nun:

$$\begin{aligned} r_{1,R} &= p_0 - a_0 \\ r_{2,R} &= p_1 - a_1 \\ r_{n,R} &= p_{n-1} - a_{n-1} \end{aligned}$$

Die Reglermatrix ist somit gegeben durch:

$$r^T = r^T_R \cdot T_R$$

Die Reglermatrix kann auch direkt berechnet werden mit:

$$r^T = p_0 \cdot q_S^T + \dots + p_{n-1} \cdot q_S^T A^{n-1} + q_S^T A^n$$

## 2.5.2 Vorfilter / Vorverstärker

Der Vorfilter/Vorverstärker gewährleistet, dass im stationärem Zustand  $y$  mit dem gewünschtem, konstantem Vektor  $w$  übereinstimmt.

$$v = [c^T(b \cdot r^T - A)^{-1} \cdot b]^{-1}$$



### 2.5.3 Beobachter

Beobachter ist ein Nachbau des System für den Rechner. Er beinhaltet alle Punkte des realen System. Dafür werden keine Sensoren benötigt. Die Variablen werden geschätzt.

Das  $h$  muss derart bestimmt werden, dass  $\text{eig}W(A - h_c^T) < 0$  sind.

Falls das System in BNF vorliegt, gilt:

$$\begin{aligned} A_B &= T_B^{-1} \cdot A \cdot T_B \\ c_B^T &= c^T \cdot T_B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \\ b_B &= T_B^{-1} \cdot b \\ A_B &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & -\frac{a_0}{a_n} \\ 1 & 0 & 0 & \dots & -\frac{a_1}{a_n} \\ 0 & 1 & 0 & \dots & -\frac{a_2}{a_n} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -\frac{a_{n-1}}{a_n} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Folgende Gleichung wird für die Bestimmung des Istpolynoms benötigt. Da  $a_n = 1$ , kann folgende Vereinfachung gemacht werden:

$$\dot{e}_{x,B} = (A_B - h_B \cdot c_B^T) \cdot e_{x,B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & -a_0 - h_{B,1} \\ 1 & 0 & 0 & \dots & -a_1 - h_{B,2} \\ 0 & 1 & 0 & \dots & -a_2 - h_{B,3} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{n-1} - h_{B,n} \end{bmatrix}$$

Istpolynom:

$$u(s) = s^n + (a_{n-1} + h_{B,n})s^{n-1} + \dots + (a_1 + h_{B,2})s + (a_0 + h_{B,1})$$

Sollpolynom:

$$p(s) = s^n + p_{n-1}s^{n-1} + \dots + p_1s + p_0$$

Aus diesen beiden Gleichungen kann via Koeffizientenvergleich die Matrix  $h_B$  bestimmt werden.

$$\begin{aligned} h_{B,1} &= p_0 - a_0 & h_{B,2} &= p_1 - a_1 & \text{etc.} \\ h_B &= p - a \end{aligned}$$

## 2.6 LQ - Regler

Der Reglerentwurf kann mittels dem Gütekriterium bestimmt werden. Der Regler wird optimal, wenn die Funktion  $I(r^T)$  minimal wird.

$$I(r^T) = \int x^T \cdot Q \cdot x + u^T \cdot R \cdot dt$$

### 2.6.1 Liapanov - Gleichung

$$S \cdot A_{CL} + A_{CL}^T \cdot S = -Q_r$$

### 2.6.2 Riccati - Gleichung

Es gibt genau eine positiv-definite Lösung für  $S$ , wenn die Strecke steuerbar ist.

$$-A^T \cdot S - S \cdot A + S \cdot b \cdot R^{-1} \cdot b^T \cdot S - Q = 0$$

$r^T$  - Regelung

- $r = S \cdot b \cdot R^{-1}$
- $r^T = R^{-1} \cdot b^T \cdot S$

### LQ - Reglerentwurf

1. Vorgabe von Q und R
  - $Q = I$  und  $R = 1$
  - $Q = c \cdot c^T$  und  $R = \frac{1}{100}$
2. Lösungsmatrix S aus der Riccatigleichung bestimmen
3. Regelvektor  $r^T$  berechnen
4. Überprüfung der Eigenwerte

### Vorteile LQ - Regler

- Vorgabe Q, R statt Pole
- Phasenreserve  $\varphi_r \geq 60^\circ$
- Amplitudenreserve  $A_r \geq 2$

## 2.7 PI - Zustandsregler

Der PI - Zustandsregler kompensiert eine permanente Last(Störung)

$$\dot{x}_{PI} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_I \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} A & | & 0 \\ \hline c^T & | & 0 \end{bmatrix}}_{A_{PI}} \cdot \begin{bmatrix} x \\ x_I \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix}}_{b_{PI}} \cdot u$$

$$y = \underbrace{\begin{bmatrix} c^T & | & 0 \end{bmatrix}}_{c_{PI}^T} \cdot \begin{bmatrix} x \\ x_I \end{bmatrix}$$

### Entwurfsschritte

- Bildung des erweiterten Systems  $(A_{PI}, b_{PI}, c_{PI}^T)$
- Polvorgabe oder LQR für die Berechnung von  $r_{PI}^T$
- Der letzte Wert von  $r_{PI}^T$  ist  $-K_I$
- Vorgabe von  $K_p$  experimentell oder gemäss separatem Vorgehen
- $r^T$  kann aus den ersten  $n$ -Elementen von  $r_{PI}^T$  berechnet werden
- Kontrolle der Lage der Eigenwerte
  - $\det(\lambda I_{(n+1)} - (A_{PI} - b_{PI} \cdot r_{PI}^T)) = 0$
  - $\text{eig}(A_{PI} - b_{PI} \cdot r_{PI}^T)$

### Mögliche Bestimmung von $K_p$

$$K_p = \alpha \cdot [-c^T \cdot A^{-1} \cdot b]^{-1}$$

$\alpha$  ist frei wählbar und stellt den Bezug zur Stellgrösse  $u(0)$  bei schrittförmiger Änderung der Eingangsgrösse dar:

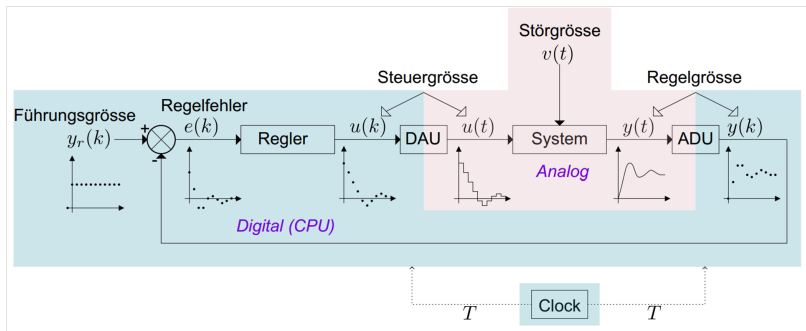
$$u(0) \leq \alpha \cdot u(\infty)$$



# Kapitel 3

## Digitale Regelung

### 3.1 Schematische Darstellung



$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} \quad \rightarrow \quad H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)}$$

### 3.2 Wahl der Taktzeit

Perfekte theoretische Rekonstruktion (unmöglich):

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} y(kh) \frac{\sin \frac{\omega_e(t-kh)}{2}}{\frac{\omega_e(t-kh)}{2}}$$

Wahl in der Praxis:

$$\omega_e > [10 - 20] \cdot \omega_{max}$$

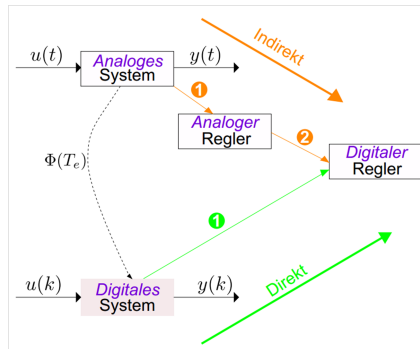
### 3.3 Anti-Aliasing Filter

$$G_{b,1} = \frac{1}{\frac{1}{\omega_b} s + 1}$$

$$G_{b,2} = \frac{1}{\frac{1}{\omega_b^2} s^2 + \frac{\sqrt{2}}{\omega_b} s + 1}$$

$$G_{b,3} = \frac{1}{\frac{1}{\omega_b^4} s^4 + \frac{2.6131}{\omega_b^3} s^3 + \frac{3.4142}{\omega_b^2} s^2 + \frac{2.6131}{\omega_b} s + 1}$$

### 3.4 Direkter/Indirekter Regler



### 3.5 Digitaler Regler

#### 3.5.1 I Anteil

Rückwärts-Rechteckregel

$$u_{i,d,r}(e[k]) = u_{i,d,r}(e[k-1]) + \frac{K_a}{T_{i,a}} e[k] \cdot T$$

Trapezregel

$$u_{i,d,t}(e[k]) = u_{i,d,t}(e[k-1]) + \frac{K_a}{T_{i,a}} \cdot \frac{e[k] + e[k-1]}{2} \cdot T$$

### 3.5.2 D Anteil

$$u_{d,d}(e[k]) = K_a T_{d,a} \cdot \frac{e[k] - e[k-1]}{T}$$

### 3.5.3 Antireset-Windup

$$u_{nosat}[k] = u_p[k] + u_i[k-1] + u_d[k]$$

$$\text{if } u_{nosat}[k] > u_{sat,max} \rightarrow u[k] = u_{sat,max}$$

$$\text{else if } u_{nosat}[k] < u_{sat,min} \rightarrow u[k] = u_{sat,min}$$

$$u_i[k] = u_i[k-1] + K_a \frac{T}{T_i} \cdot \frac{e[k] + e[k-1]}{2} + \frac{T}{T_r} (u[k] - u[k]_{nosat})$$

Ohne ARW:

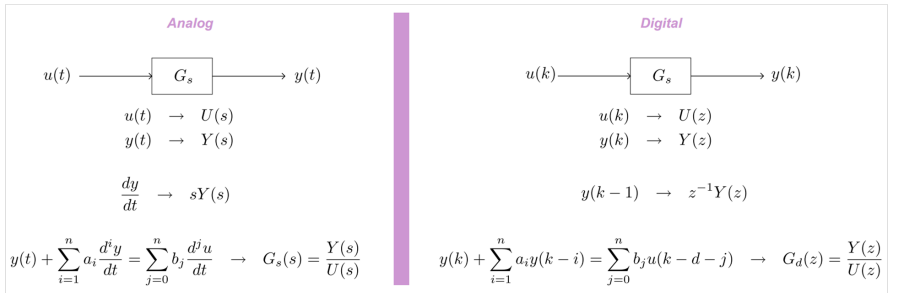
$$u_i[k] = u_i[k-1] + K_a \frac{T}{T_i} \cdot \frac{e[k] + e[k-1]}{2}$$

$$u_{nosat}[k] = u_p[k] + u_i[k] + u_d[k]$$

$$\text{if } u_{nosat}[k] > u_{sat,max} \rightarrow u[k] = u_{sat,max}$$

$$\text{else if } u_{nosat}[k] < u_{sat,min} \rightarrow u[k] = u_{sat,min}$$

## 3.6 z-Transformation



### 3.6.1 Definition

$$W(z) = Z\{w[k]\} = \sum_{k=0}^{\infty} w[k]z^{-k}$$

### 3.6.2 Signale

Impuls:

$$Z\{I_i[k]\} = z^{-l} \begin{cases} 1 & \text{if } k = l \\ 0 & \text{if } k \neq l \end{cases}$$

Sprungantwort:

$$Z\{S_i[k]\} = \sum_{i=l}^{\infty} z^{-i} = z^{-l} \frac{z}{z-1} \begin{cases} 1 & \text{if } k \geq l \\ 0 & \text{if } k < l \end{cases}$$

### 3.6.3 Eigenschaften der z-Transformation

Linearität 1:

$$Z(\{w_1[k]\} + \{w_2[k]\}) = Z\{w_1[k]\} + Z\{w_2[k]\}$$

Linearität 2:

$$Z(a\{w_1[k]\}) = a \cdot Z\{w_1[k]\}$$

Zeitverschiebung:

$$Z(\{w_1[k-d]\}) = z^{-d}W(z)$$

Initialwert:

$$w[0] = \lim_{z \rightarrow \infty} W(z)$$

Finalwert:

$$w[\infty] = \lim_{z \rightarrow 0} (z-1)W(z)$$

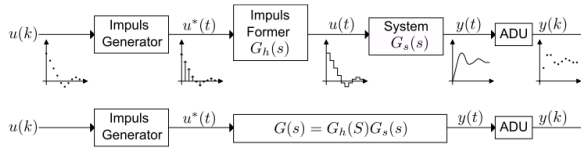


## 3.7 z-Übertragungsfunktion

Impulsantwort beschreibt das System:

$$y[k] = \sum_{l=0}^k u[l] \cdot g[k-l]$$

### 3.7.1 Übertragung der Regelstrecke



$$\begin{aligned} H(z) &= Z\{L^{-1}\{G_h(s)G_s(s)\}|_{t=kT}\} \\ &= (1 - z^{-1})Z\left\{L^{-1}\left\{\frac{G_s(s)}{s}\right\}\right\}\bigg|_{t=kT} \end{aligned}$$

## 3.8 Laplace- $\rightarrow$ z-Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s\right) \rightarrow G(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = ?$$

### 3.8.1 Transformation

Rückwärts-Rechteckregel:

$$\dot{e}[kT] = \frac{e[kT] - e[kT - T]}{T} \quad \rightarrow \quad s = \frac{z - 1}{Tz}$$

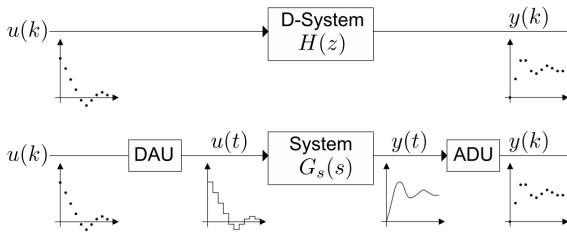
Vorwärts-Rechteckregel:

$$\dot{e}[kT] = \frac{e[kT + T] - e[kT]}{T} \quad \rightarrow \quad s = \frac{z - 1}{T}$$

Trapezregel:

$$\int_0^t e[\tau] d\tau = \sum_{i=0}^{\frac{k}{T}=kT} \frac{e[i] + e[i-1]}{2} \quad \rightarrow \quad s = \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1}$$

## 3.9 Stabilität



Ein digitales LZI-Glied ist stabil, wenn die Pole seiner  $z$ -Übertragungsfunktion  $H(z)$  im Einheitskreis liegen.

### 3.9.1 Analyse mit der Impulsantwort

Das System ist stabil wenn

$$\sum_{k=0}^{\infty} |g[k]| < \infty$$

## 3.10 Zusammenhang Pole Laplace $\leftrightarrow z$

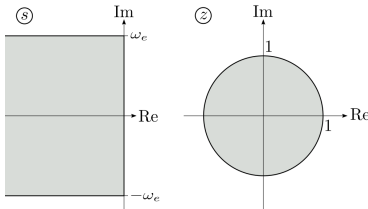
$$\begin{aligned} \frac{c}{s - s_1} &\rightarrow \frac{cZ}{z - e^{s_1 T}} \\ s_1 = \sigma_1 + j\omega_1 &\rightarrow z_1 = e^{s_1 T} = e^{\sigma_1 T} e^{j\omega_1 T} \end{aligned}$$

$$|z| = e^{\sigma} \quad \arg(z) = \omega T$$

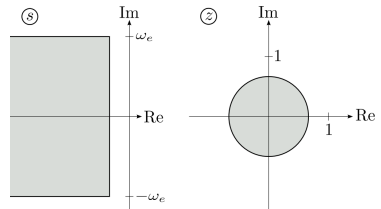
## 3.10.1 Periodizität

$$\omega_e = \frac{2\pi}{T}$$

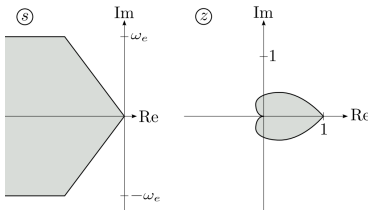
$$z = e^{(s+j\omega_e)T} = e^{sT}$$



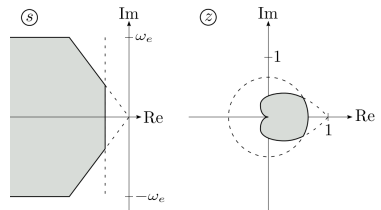
(a) Mapping 1



(b) Mapping 2



(c) Mapping 3

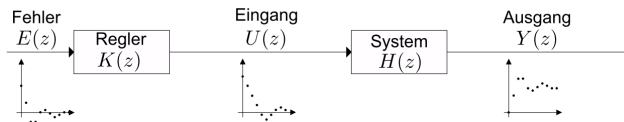


(d) Mapping 4

## 3.11 Wichtige Übertragungsfunktionen

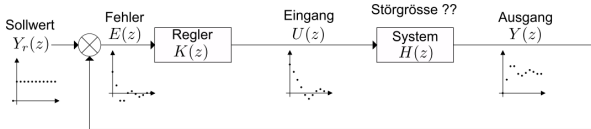
### 3.11.1 z-Übertragung des offenen Regelkreises

$$\frac{Y(z)}{E(z)} = K(z)H(z)$$



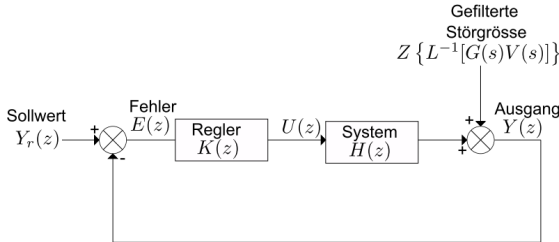
### 3.11.2 Führungsübertragungsfunktion

$$\frac{Y(z)}{Y_r(z)} = \frac{K(z)H(z)}{1 + K(z)H(z)}$$



### 3.11.3 Störübertragungsfunktion

$$Y(z) = \frac{K(z)H(z)}{1 + K(z)H(z)} Y_r(z) + \frac{Z\{L^{-1}\{G(s)V(s)\}\}}{1 + K(z)H(z)}$$



mit Störfunktion  $v(t) = a$ :

$$Y(z) = \frac{K(z)H(z)}{1 + K(z)H(z)} Y_r(z) + \frac{H(z)}{1 + K(z)H(z)} V(z) \quad \text{mit } V(z) = \frac{az}{z-1}$$

## 3.12 Diskrete Zustandsraumdarstellung

Analog:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

Digital:

$$x[k+1] = A_d x[k] + B_d u[k]$$

$$y[k+1] = C_d x[k] + D_d u[k]$$

Transformation

$$A_d = e^{AT}$$

$$B_d = \int_0^T e^{A\tau} d\tau B$$

$$C_d = C D_d = D$$

## 3.13 Diskreter Frequenzgang

### 3.13.1 Eigenschaften

Periodizität

$$H(e^{j(\omega + \frac{2k\pi}{T})T}) = H(e^{j\omega T})$$

Symmetrie für  $A(\omega)$

$$A(-\omega) = A(\omega)$$

Asymmetrie für  $\varphi(\omega)$

$$\varphi(-\omega) = -\varphi(\omega)$$

### 3.13.2 Nyquist Frequenz

Die Analyse des Frequenzganges beschränkt sich auf:

$$\omega \in [0, \omega_N] \quad \omega_N = \frac{\pi}{T}$$

### 3.13.3 Bode-Diagramm

1.  $H(z)$  herleiten
2.  $z$  durch  $e^{j\omega T}$  ersetzen
3.  $|H(e^{j\omega T})| = \sqrt{\operatorname{Re}\{H(e^{j\omega T})\}^2 + \operatorname{Im}\{H(e^{j\omega T})\}^2}$
4.  $\arg H(e^{j\omega T}) = \arctan\left(\frac{\operatorname{Im}\{H(e^{j\omega T})\}}{\operatorname{Re}\{H(e^{j\omega T})\}}\right)$



## Kapitel 4

# Umformungstabelle

	$X(s)$	$x(t)$	$x(kT)$ or $x(k)$	$X(z)$
1.	—	—	Kronecker delta $\delta_0(k)$ 1 $k = 0$ 0 $k \neq 0$	1
2.	—	—	$\delta_0(n-k)$ 1 $n = k$ 0 $n \neq k$	$z^{-k}$
3.	$\frac{1}{s}$	$1(t)$	$1(k)$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$
4.	$\frac{1}{s+a}$	$e^{-at}$	$e^{-akT}$	$\frac{1}{1-e^{-aT}z^{-1}}$
5.	$\frac{1}{s^2}$	$t$	$kT$	$\frac{Tz^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$
6.	$\frac{2}{s^3}$	$t^2$	$(kT)^2$	$\frac{T^2 z^{-1}(1+z^{-1})}{(1-z^{-1})^3}$
7.	$\frac{6}{s^4}$	$t^3$	$(kT)^3$	$\frac{T^3 z^{-1}(1+4z^{-1}+z^{-2})}{(1-z^{-1})^4}$
8.	$\frac{a}{s(s+a)}$	$1-e^{-at}$	$1-e^{-akT}$	$\frac{(1-e^{-aT})z^{-1}}{(1-z^{-1})(1-e^{-aT}z^{-1})}$
9.	$\frac{b-a}{(s+a)(s+b)}$	$e^{-at}-e^{-bt}$	$e^{-akT}-e^{-bkT}$	$\frac{(e^{-aT}-e^{-bT})z^{-1}}{(1-e^{-aT}z^{-1})(1-e^{-bT}z^{-1})}$
10.	$\frac{1}{(s+a)^2}$	$te^{-at}$	$kTe^{-akT}$	$\frac{Te^{-aT}z^{-1}}{(1-e^{-aT}z^{-1})^2}$
11.	$\frac{s}{(s+a)^2}$	$(1-at)e^{-at}$	$(1-akT)e^{-akT}$	$\frac{1-(1+aT)e^{-aT}z^{-1}}{(1-e^{-aT}z^{-1})^2}$
12.	$\frac{2}{(s+a)^3}$	$t^2e^{-at}$	$(kT)^2e^{-akT}$	$\frac{T^2e^{-aT}(1+e^{-aT}z^{-1})}{(1-e^{-aT}z^{-1})^3}$
13.	$\frac{a^2}{s^2(s+a)}$	$at-1+e^{-at}$	$akT-1+e^{-akT}$	$\frac{[(aT-1+e^{-aT})+(1-e^{-aT}-aTe^{-aT})z^{-1}]z^{-1}}{(1-z^{-1})^2(1-e^{-aT}z^{-1})}$
14.	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\sin \omega t$	$\sin \omega kT$	$\frac{z^{-1} \sin \omega T}{1-2z^{-1} \cos \omega T + z^{-2}}$
15.	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos \omega t$	$\cos \omega kT$	$\frac{1-z^{-1} \cos \omega T}{1-2z^{-1} \cos \omega T + z^{-2}}$
16.	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at} \sin \omega t$	$e^{-akT} \sin \omega kT$	$\frac{e^{-aT}z^{-1} \sin \omega T}{1-2e^{-aT}z^{-1} \cos \omega T + e^{-2aT}z^{-2}}$
17.	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at} \cos \omega t$	$e^{-akT} \cos \omega kT$	$\frac{1-e^{-aT}z^{-1} \cos \omega T}{1-2e^{-aT}z^{-1} \cos \omega T + e^{-2aT}z^{-2}}$
18.	—	—	$a^k$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$
19.	—	—	$a^k$ $k = 1, 2, 3, \dots$	$\frac{z^{-1}}{1-az^{-1}}$
20.	—	—	$ka^{k-1}$	$\frac{z^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$
21.	—	—	$k^2a^{k-1}$	$\frac{z^{-1}(1+az^{-1})}{(1-az^{-1})^3}$
22.	—	—	$k^3a^{k-1}$	$\frac{z^{-1}(1+4az^{-1}+a^2z^{-2})}{(1-az^{-1})^4}$
23.	—	—	$k^4a^{k-1}$	$\frac{z^{-1}(1+11az^{-1}+11a^2z^{-2}+a^3z^{-3})}{(1-az^{-1})^5}$
24.	—	—	$a^k \cos k\pi$	$\frac{1}{1+az^{-1}}$

$x(t) = 0$  for  $t < 0$

$x(kT) = x(k) = 0$  for  $k < 0$

Unless otherwise noted,  $k = 0, 1, 2, 3, \dots$



$$\mathcal{Z}\{x(k)\} = X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k)z^{-k}$$

## Important properties and theorems of the Z-transform

	$x(t)$ or $x(k)$	$Z\{x(t)\}$ or $Z\{x(k)\}$
1.	$ax(t)$	$aX(z)$
2.	$ax_1(t) + bx_2(t)$	$aX_1(z) + bX_2(z)$
3.	$x(t+T)$ or $x(k+1)$	$zX(z) - zx(0)$
4.	$x(t+2T)$	$z^2X(z) - z^2x(0) - zx(T)$
5.	$x(k+2)$	$z^2X(z) - z^2x(0) - zx(1)$
6.	$x(t+kT)$	$z^kX(z) - z^kx(0) - z^{k-1}x(T) - \dots - zx(kT-T)$
7.	$x(t-kT)$	$z^{-k}X(z)$
8.	$x(n+k)$	$z^kX(z) - z^kx(0) - z^{k-1}x(1) - \dots - zx(k1-1)$
9.	$x(n-k)$	$z^{-k}X(z)$
10.	$tx(t)$	$-Tz \frac{d}{dz} X(z)$
11.	$kx(k)$	$-z \frac{d}{dz} X(z)$
12.	$e^{-at}x(t)$	$X(ze^{aT})$
13.	$e^{-ak}x(k)$	$X(ze^a)$
14.	$a^kx(k)$	$X\left(\frac{z}{a}\right)$
15.	$ka^kx(k)$	$-z \frac{d}{dz} X\left(\frac{z}{a}\right)$
16.	$x(0)$	$\lim_{z \rightarrow \infty} X(z)$ if the limit exists
17.	$x(\infty)$	$\lim_{z \rightarrow 1} \left[ (1-z^{-1})X(z) \right]$ if $(1-z^{-1})X(z)$ is analytic on and outside the unit circle
18.	$\nabla x(k) = x(k) - x(k-1)$	$(1-z^{-1})X(z)$
19.	$\Delta x(k) = x(k+1) - x(k)$	$(z-1)X(z) - zx(0)$
20.	$\sum_{k=0}^n x(k)$	$\frac{1}{1-z^{-1}} X(z)$
21.	$\frac{\partial}{\partial a} x(t, a)$	$\frac{\partial}{\partial a} X(z, a)$
22.	$k^m x(k)$	$\left(-z \frac{d}{dz}\right)^m X(z)$
23.	$\sum_{k=0}^n x(kT)y(nT-kT)$	$X(z)Y(z)$
24.	$\sum_{k=0}^{\infty} x(k)$	$X(1)$