

Formelsammlung MRT + A

Michi Fallegger
Mario Felder
Simon Kurmann

20. Februar 2015

Inhaltsverzeichnis

1	Matrizen	7
1.1	Grundlagen	7
1.2	Rang	11
1.2.1	Rang von Vektoren	11
1.2.2	Rang einer Matrix	11
1.3	Adjunkte	12
1.4	Inverse einer Matrix	13
1.5	Eigenwerte und Eigenvektoren	13
1.6	Transitionsmatrix	14
2	Zustandsraum	15
2.1	Zustandsvariabel	15
2.1.1	Laplace-Transformation auf Zustandsgleichung	15
2.2	Regelungsnormalform der Zustandsgleichung	16
2.2.1	Signalflussbild	17
2.2.2	Regelungsnormalform	17
2.2.3	Beobachtungsnormalform	18
2.2.4	Jordanische Normalform	18
2.3	Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit	20
2.3.1	Steuerbarkeit	20
2.3.2	Beobachtbarkeit	20
2.4	Transformation	21
2.4.1	Transformation in Regelungsnormalform (Steuer- normalform)	21
2.4.2	Transformation auf Beobachtungsnormalform	22
2.4.3	Transformation auf Jordansche Normalform	22

2.5	Reglersynthese im Zustandsraum	23
2.5.1	Polvorgabe	23
2.5.2	Vorfilter / Vorverstärker	24
2.5.3	Beobachter	25
2.6	LQ - Regler	26
2.6.1	Liapanov - Gleichung	26
2.6.2	Riccati - Gleichung	26
2.7	PI - Zustandsregler	27
3	Digitale Regelung	29
3.1	Schematische Darstellung	29
3.2	Wahl der Taktzeit	29
3.3	Anti-Aliasing Filter	30
3.4	Direkter/Indirekter Regler	30
3.5	Digitaler Regler	30
3.5.1	I Anteil	30
3.5.2	D Anteil	31
3.5.3	Antireset-Windup	31
3.6	z-Transformation	31
3.6.1	Definition	32
3.6.2	Signale	32
3.6.3	Eigenschaften der z-Transformation	32
3.7	z-Übertragungsfunktion	33
3.7.1	Übertragung der Regelstrecke	33
3.8	Laplace- \rightarrow z-Übertragungsfunktion	33
3.8.1	Transformation	33
3.9	Stabilität	34
3.9.1	Analyse mit der Impulsantwort	34
3.10	Zusammenhang Pole Laplace \leftrightarrow z	34
3.10.1	Periodizität	35
3.11	Wichtige Übertragungsfunktionen	35
3.11.1	z-Übertragung des offenen Regelkreises	35
3.11.2	Führungsübertragungsfunktion	36
3.11.3	Störübertragungsfunktion	36
3.12	Diskrete Zustandsraumdarstellung	36
3.13	Diskreter Frequenzgang	37
3.13.1	Eigenschaften	37
3.13.2	Nyquist Frequenz	37

3.13.3 Bode-Diagramm	37
4 Taschenrechnerbefehle	39
5 Umformungstabelle	41

Kapitel 1

Matrizen

1.1 Grundlagen

$m \times n$ Matrize

$$A = [a_{jk}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

m = Zeilen

n = Spalten

Vektoren

Zeilenvektor:

$$\underline{a} = [a_j] = [a_1 \quad a_2 \quad \dots \quad a_m]$$

Spaltenvektor:

$$\underline{b} = [b_k] = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Transponierte

$$A^T = [a_{kj}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & & a_{m2} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$A^T = A$ ist eine symmetrische Matrix

$A^T = -A$ ist eine schief-symmetrische Matrix

Addition

Ist nur für Matrizen derselben Dimension $A = [a_{jk}]$, $B = [b_{jk}]$ definiert.

$$C = A + B = [a_{jk} + b_{jk}]$$

Multiplikation

Definition: Das Produkt $C = A \cdot B$ einer $m \times n$ -Matrix $A = [a_{jk}]$ und einer $r \times p$ -Matrix $B = [b_{jk}]$ ist nur definiert wenn $r = n$ ist.

$$c_{jk} = \sum_{l=1}^n a_{jl} \cdot b_{lk} = a_{j1}b_{1k} + a_{j2}b_{2k} + \dots + a_{jn}b_{nk}$$

wobei $j = 1, 2, \dots, m$ und $k = 1, 2, \dots, p$.

$$\begin{aligned}
 C = A \cdot B &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & & b_{2p} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{np} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + \dots + a_{1n}b_{n1} & \dots & a_{11}b_{1n} + \dots + a_{1n}b_{nn} \\ a_{21}b_{11} + \dots + a_{2n}b_{n1} & & a_{21}b_{1n} + \dots + a_{2n}b_{nn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}b_{11} + \dots + a_{mn}b_{n1} & \dots & a_{m1}b_{1n} + \dots + a_{mn}b_{nn} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Transponierung eines Produkts:

$$(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$$

Spezielle Matrizen

Eine Quadratische Matrix, deren Elemente oberhalb der Hauptdiagonale sämtlich Null sind, heisst **untere Dreiecksmatrix**.

Wenn die Elemente unterhalb der Hauptdiagonalen sämtlich Null sind, dann heisst sie **obere Dreiecksmatrix**.

$$T_1 = \begin{bmatrix} t_{11} & 0 & 0 \\ t_{21} & t_{22} & 0 \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{bmatrix} \quad T_2 = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{21} & t_{31} \\ 0 & t_{22} & t_{32} \\ 0 & 0 & t_{33} \end{bmatrix}$$

Eine quadratische Matrix $A = [a_{jk}]$ deren Elemente unter- und oberhalb der Hauptdiagonalen sämtlich null sind, heisst **Diagonalmatrix**. ($a_{jk} = 0$ für alle $j \neq k$)

$$D = \begin{bmatrix} d_{11} & 0 & 0 \\ 0 & d_{22} & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} \end{bmatrix} \quad S = \begin{bmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$$

S ist eine **Skalarmatrix**, da: $A \cdot S = S \cdot A = cA$

Eine Skalarmatrix, deren Elemente der Hauptdiagonale sämtlich 1 sind, heisst **Einheitsmatrix**.

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Orthogonal

Vektor \underline{a} ist zum Vektor \underline{b} orthogonal, wenn das Skalarprodukt $\underline{a} \bullet \underline{b} = 0$ ist. Dann ist auch \underline{b} orthogonal zu \underline{a} und wir sprechen daher von zwei orthogonalen Vektoren \underline{a} und \underline{b} .

Zwei orthogonale Nichtnullvektoren sind aufeinander senkrecht ($\cos(\alpha) = 0, \alpha = \frac{\pi}{2}$).

Determinante

$$D = \det A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a \cdot d - b \cdot c$$

Wichtige Eigenschaften:

1. $\det A = \det A^T$
2. Sind zwei Zeilen oder Spalten linear abhängig, so ist die Determinante $= 0$
3. Vertauscht man zwei Zeilen oder Spalten, so wird die Determinante mit -1 multipliziert
4. $\det AB = \det BA = \det A \cdot \det B$

Lineares Gleichungssystem:

$$A \cdot \underline{x} = \underline{b}$$

hat die Lösungen: $x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D}$, wobei $D = \det A$ und

$$D_1 = \begin{bmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{bmatrix} \quad D_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{bmatrix}$$

1.2 Rang

1.2.1 Rang von Vektoren

Beschreibt die lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit von Vektoren. Eine Menge von m Vektoren a_1, a_2, \dots, a_m (mit derselben Anzahl von Komponenten) bildet die folgende lineare Kombination:

$$c_1 a_1 + c_2 a_2 + \dots + c_m a_m$$

Daraus folgt:

$$c_1 a_1 + c_2 a_2 + \dots + c_m a_m = 0$$

Falls die einzige Möglichkeit darin besteht, $c = 0$ zu setzen um die Gleichung zu erfüllen, sind die Vektoren linear unabhängig.

Zwei Vektoren in der Ebene sind linear abhängig, wenn sie parallel sind.

$$\underline{a} - c \cdot \underline{b} = 0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Drei Vektoren in Anschauungsraum (3D) sind linear abhängig, wenn sie in einer Ebene liegen.

$$c_1 \cdot \underline{a}_1 + c_2 \cdot \underline{a}_2 + c_3 \cdot \underline{a}_3 = 0$$

1.2.2 Rang einer Matrix

Die maximale Zahl der linear unabhängigen Zeilenvektoren einer Matrix \underline{A} heisst Rang. Es gilt:

$$r = \text{Rang}(A) \leq m, n$$

Vorgehen (Horizontal):

1. Erste Zeile (oder die mit der tiefsten Zahlen) stehen lassen.
2. Dieser Schritt für alle Zeilen machen:

$$c_j \cdot a_{11} + a_{j1} = 0 \quad \rightarrow \quad c_j \cdot \begin{bmatrix} a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \end{bmatrix}$$

3. Entstehen in der Matrix horizontale gleiche Vektoren, so sind diese linear abhängig.

1.3 Adjunkte

Ist nur für quadratische Matrizen definiert.

$$\text{adj}(A) = \text{Cof}(A)^T = \tilde{A}^T = \begin{bmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} & \dots & \tilde{a}_{1n} \\ \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{22} & & \tilde{a}_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \tilde{a}_{n1} & \tilde{a}_{n2} & \dots & \tilde{a}_{nn} \end{bmatrix}^T$$

An der Stelle (j, k) steht der Cofaktor \tilde{a}_{jk} , welcher sich folgendermaßen berechnet:

$$\tilde{a}_{jk} = (-1)^{j+k} \cdot M_{jk} = (-1)^{j+k} \cdot \det \begin{bmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,k-1} & a_{1,k+1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j-1,1} & \dots & a_{j-1,k-1} & a_{j-1,k+1} & \dots & a_{j-1,n} \\ a_{j+1,1} & \dots & a_{j+1,k-1} & a_{j+1,k+1} & \dots & a_{j+1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,k-1} & a_{n,k+1} & \dots & a_{n,n} \end{bmatrix}$$

2×2 Matrix

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Adjunkte:

$$\text{adj}(A) = \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

1.4 Inverse einer Matrix

Ist nur für quadratische Matrizen definiert.

Die Inverse einer $n \times n$ -Matrix ist gegeben durch:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \text{adj}(A) = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{bmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{21} & \dots & \tilde{a}_{n1} \\ \tilde{a}_{12} & \tilde{a}_{22} & & \tilde{a}_{n2} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \tilde{a}_{1n} & \tilde{a}_{2n} & \dots & \tilde{a}_{nn} \end{bmatrix}$$

Es gilt:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$$

1.5 Eigenwerte und Eigenvektoren

$$A \cdot \underline{x} = \lambda \cdot \underline{x}$$

Derjenige Wert λ für welchen die obige Gleichung eine Lösung $\underline{x} \neq 0$ hat heisst der Eigenwert der Matrix \underline{A} .

Die korrespondierende Lösung $\underline{x} \neq 0$ heisst der Eigenvektor der Matrix \underline{A} .

$$A \cdot \underline{x} = \lambda \cdot \underline{x}$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Homogenes, lineares Gleichungssystem

$$(A - \lambda \cdot I)\underline{x} = \underline{0}$$

Lösung nach Cramer: Eigenwert bestimmen

$$D(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0 \qquad \lambda I = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$$

Eigenvektor

$$\underline{x} = A - \lambda \cdot I$$

1.6 Transitionsmatrix

Darstellung des zeitlichen Verlaufs der Zustandsvariablen x_n

$$x = e^{At} \cdot x_0$$

Laplace - Bereich

$$\phi(t) = e^{At} \circ \bullet (sI - A)^{-1}$$

Jordanische Normalform

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \Rightarrow e^{At} = \phi(t) = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_3 t} \end{bmatrix}$$

Zeitlicher Verlauf einer Zustandsvariabel x_i

$$\dot{x}_i = a_i \cdot x_i + b_i \cdot k_0 \cdot u$$

$$x_i(t) = \underbrace{\int_{t_0}^t e^{a_i(t-\tau)} \cdot b_i \cdot k_0 \cdot u(\tau) d\tau}_{\text{inhomogener Lösungsanteil}} + \underbrace{e^{a_i(t-t_0)} \cdot x(t_0)}_{\text{homogener Lösungsanteil}}$$

Potenzreihe von e^{At} :

$$e^{Az} = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{(Az)^v}{v!}$$

Kapitel 2

Zustandsraum

2.1 Zustandsvariabel

Es gibt allgemeine Untersuchungen über das Systemverhalten, beispielsweise über die Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit von Systemen, die sich nur im Zeitbereich durchführen lassen.

Aus diesem Grund ist es angebracht im Zeitbereich zu bleiben. Es ist zweckmässig, die auftretende Differentialgleichung durch Einführen von Zwischengrössen in Systeme von Differentialgleichungen erster Ordnung zu verwandeln.

$$a_n \cdot y^n + a_{n-1} \cdot y^{n-1} + \dots + a_2 \ddot{y} + a_1 \dot{y} + a_0 y = b_0 u \quad a_n \neq 0$$

Dann kann man als Zwischengrössen x_1, x_2, \dots, x_n die Ausgangsgrösse y und ihre Ableitungen nehmen:

$$x_1 = y, \quad x_2 = \dot{y}, \quad x_3 = \ddot{y}, \dots, \quad x_{n-1} = y^{n-2} \quad x_n = y^{n-1}$$

Aus der Definition folgen die einfachen Differentialgleichungen.:

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = x_3, \quad \dots, \quad \dot{x}_{n-1} = x_n$$

2.1.1 Laplace-Transformation auf Zustandsgleichung

Zeitbereich:

$$x(t) = \int_0^t (Ax(\tau) + Bu(\tau))d\tau + x(0)$$

Zustandsdifferentialgleichung:

$$\dot{x} = A \cdot x + b \cdot u$$

Laplace-Transformation:

$$\begin{aligned} sX(s) - x_0 &= A \cdot X(s) + b \cdot U(s) \\ X(s) &= (sI - A)^{-1} \cdot b \cdot U(s) + (sI - A)^{-1} x_0 \end{aligned}$$

Die inverse Matrix zu $sI - A$ existiert nur wenn $\det(sI - A) \neq 0$:

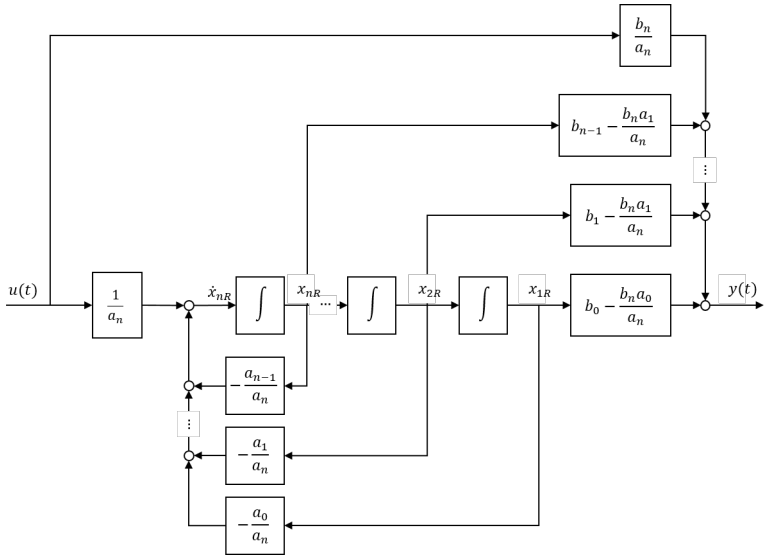
$$\det(sI - A) = \begin{vmatrix} s - a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & s - a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & s - a_{nn} \end{vmatrix}$$

2.2 Regelungsnormalform der Zustandsgleichung

$$Y(s) = G(s) \cdot U(s)$$

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{Z(s)}{N(s)} = \frac{b_0 + b_1 s + b_2 s^2 + \dots + b_n s^n}{a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \dots + a_n s^n} \\ &= \underbrace{c \cdot (sI - A)^{-1} \cdot B + D}_{\text{inhomogener Teil}} + \underbrace{c(sI - A)^{-1} \cdot x_0}_{\text{Anfangswert}} \end{aligned}$$

2.2.1 Signalflussbild



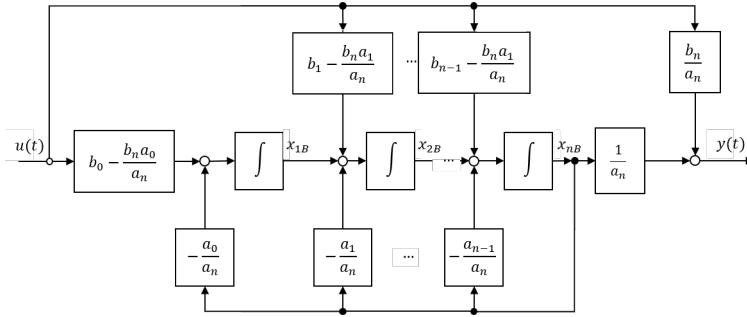
2.2.2 Regelungsnormalform

$$\dot{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -\frac{a_0}{a_n} & -\frac{a_1}{a_n} & -\frac{a_2}{a_n} & \dots & -\frac{a_{n-1}}{a_n} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \cdot x + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{1}{a_n} \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}} \cdot u$$

$$y = \underbrace{\left[b_0 - a_0 \cdot \frac{b_n}{a_n} \quad b_1 - a_1 \cdot \frac{b_n}{a_n} \quad \dots \quad b_{n-1} - a_{n-1} \cdot \frac{b_n}{a_n} \right]}_{\mathbf{c}^T} \cdot x + \underbrace{\left[\frac{b_n}{a_n} \right]}_{\mathbf{d}} \cdot u$$

2.2.3 Beobachtungsnormalform

Signalflussbild



Systemmatrizen

$$\dot{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & -\frac{a_0}{a_n} \\ 1 & 0 & 0 & \dots & -\frac{a_1}{a_n} \\ 0 & 1 & 0 & \dots & -\frac{a_2}{a_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -\frac{a_{n-1}}{a_n} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \cdot x + \underbrace{\begin{bmatrix} b_0 - b_n \frac{a_0}{a_n} \\ b_1 - b_n \frac{a_1}{a_n} \\ b_2 - b_n \frac{a_2}{a_n} \\ \vdots \\ b_{n-1} - b_n \frac{a_{n-1}}{a_n} \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}} \cdot u$$

$$y = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{a_n} \end{bmatrix}}_{\mathbf{c}^T} \cdot x + \underbrace{\begin{bmatrix} b_n \\ a_n \end{bmatrix}}_{\mathbf{d}} \cdot u$$

2.2.4 Jordanische Normalform

- Bevorzugte Verwendung, wenn Pole vom System bekannt sind
- System ist vollständig entkoppelt, wenn alle Pole reell und einfach vorkommen
- A ist Diagonalmatrix mit λ_i : Pole

Es gilt:

$$Y(s) = \left(\sum_{i=1}^n \frac{r_i}{s - \lambda_i} + r_0 \right) \cdot U(s)$$

2.2. REGELUNGSNORMALFORM DER ZUSTANDSGLEICHUNG

Dabei ist $r_0 \neq 0$ wenn Zähler und Nenner von $G(s)$ den gleichen Grad haben.

$$\dot{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \cdot x + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}} \cdot u$$

$$y = \underbrace{\begin{bmatrix} r_1 & r_2 & \dots & r_n \end{bmatrix}}_{c^T} \cdot x + \underbrace{\begin{bmatrix} r_0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{d}} \cdot u$$

Mehrfachpole

Wenn λ_1 ein m -facher Pol ist gilt:

$$Y(s) = \left(\frac{r_1}{s - \lambda_1} + \dots + \frac{r_m}{(s - \lambda_m)^m} + \sum_{i=m+1}^n \frac{r_i}{s - \lambda_i} + r_0 \right) \cdot U(s)$$

Für die Matrix bedeutet dies:

$$\dot{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda_1 & & & & \\ 1 & \lambda_1 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & 1 & \lambda_1 & \\ & & & \lambda_{m+1} & \ddots \\ & & & & \lambda_n \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \cdot x + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}} \cdot u$$

$$y = \underbrace{\begin{bmatrix} r_1 & \dots & r_m & r_{m+1} & \dots & r_n \end{bmatrix}}_{c^T} \cdot x + \underbrace{\begin{bmatrix} r_0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{d}} \cdot u$$

2.3 Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit

2.3.1 Steuerbarkeit

Das System

$$\begin{aligned}\dot{x} &= A \cdot x + b \cdot u \\ y &= c^T \cdot x + d \cdot u\end{aligned}$$

heisst steuerbar, wenn sein Zustandspunkt x durch geeignete Wahl des Steuervektors u in endlicher Zeit aus einem beliebigen Anfangszustand x_0 in den Endzustand 0 bewegt werden kann.

Es ist somit steuerbar, wenn die Vektoren $b, Ab, \dots, A^{n-1}b$ linear unabhängig sind. ($\text{Rang}(Q_S) = n$ oder $\det(Q_S) \neq 0$)

Steuerbarkeits-Matrix ($n \times n$):

$$Q_S = [b \quad A \cdot b \quad \dots \quad A^{n-1} \cdot b]$$

2.3.2 Beobachtbarkeit

Das System

$$\begin{aligned}\dot{x} &= A \cdot x + b \cdot u \\ y &= c^T \cdot x + d \cdot u\end{aligned}$$

heisst beobachtbar, wenn dem bekannten $u(t)$ aus der Messung von $y(t)$ über eine endliche Zeitspanne der Anfangszustand $x(t_0)$ eindeutig ermittelt werden kann, ganz gleich wo dieser liegt.

Das System ist beobachtbar, wenn die Beobachtungsmatrix Q_B ($n \times n$ Matrix) regulär ist ($\text{Rang}(Q_B) = n$ oder $\det(Q_B) \neq 0$).

$$Q_B = \begin{bmatrix} c^T \\ c^T \cdot A \\ \vdots \\ c^T \cdot A^{n-1} \end{bmatrix}$$

2.4 Transformation

2.4.1 Transformation in Regelungsnormalform (Steuernormalform)

Ein Übertragungssystem

$$\dot{x} = A \cdot x + b \cdot u$$

wird mit der Transformation

$$z = T_R \cdot x$$

in die Regelungsnormalform

$$\dot{x} = A_R \cdot x + b_R \cdot u$$

überführt. Die Matrizen werden folgendermassen transformiert:

$$A_R = T_R \cdot A \cdot T_R^{-1}$$

$$b_R = T_R \cdot b$$

$$c^T_R = c^T \cdot T_R^{-1}$$

$$d_R = d$$

Die Transformationsmatrix T_R ($n \times n$) wird wie folgt berechnet:

$$T_R = \begin{bmatrix} q_{S_n}^T \\ q_{S_n}^T \cdot A \\ \vdots \\ q_{S_n}^T \cdot A^{n-1} \end{bmatrix}$$

wobei $q_{S_n}^T$ der n -te Zeilenvektor der inversen Steuerbarkeitsmatrix Q_S^{-1} ist

$$Q_S^{-1} = \begin{bmatrix} q_{S_{11}} & q_{S_{12}} & \cdots & q_{S_{1n}} \\ q_{S_{21}} & q_{S_{22}} & \cdots & q_{S_{2n}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{S_{n1}} & q_{S_{n2}} & \cdots & q_{S_{nn}} \end{bmatrix} \Rightarrow q_{S_n}^T = [q_{S_{n1}} \quad q_{S_{n2}} \quad \cdots \quad q_{S_{nn}}]$$

2.4.2 Transformation auf Beobachtungsnormalform

Ein Übertragungssystem

$$\dot{x} = A \cdot x + b \cdot u$$

wird mit der Transformation

$$z = T_B^{-1} \cdot x$$

in die Beobachtungsnormalform

$$\dot{x} = A_B \cdot x + b_B \cdot u$$

überführt. Die Matrizen werden folgendermassen transformiert:

$$A_B = T_B^{-1} \cdot A \cdot T_B$$

$$b_B = T_B^{-1} \cdot b$$

$$c_B^T = c^T \cdot T_B$$

$$d_B = d$$

Die Transformationsmatrix T_B ($n \times n$) wird wie folgt berechnet:

$$T_B = [q_{B_n} \quad A \cdot q_{B_n} \quad \dots \quad A^{n-1} \cdot q_{B_n}]$$

wobei q_{B_n} der n -te Spaltenvektor der inversen Beobachtungsmatrix Q_B^{-1} ist.

$$Q_B^{-1} = \begin{bmatrix} q_{B_{11}} & q_{B_{12}} & \dots & q_{B_{1n}} \\ q_{B_{21}} & q_{B_{22}} & \dots & q_{B_{2n}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{B_{n1}} & q_{B_{n2}} & \dots & q_{B_{nn}} \end{bmatrix} \Rightarrow q_{B_n} = \begin{bmatrix} q_{B_{1n}} \\ q_{B_{2n}} \\ \vdots \\ q_{B_{nn}} \end{bmatrix}$$

2.4.3 Transformation auf Jordansche Normalform

Ein Übertragungssystem

$$\dot{x} = A \cdot x + b \cdot u$$

wird mit der Transformation

$$x = V \cdot z$$

in die Jordansche Normalform

$$\dot{x} = A_J \cdot x + b_J \cdot u$$

überführt. Die Matrizen werden folgendermassen Transformatiert:

$$A_J = V^{-1} \cdot A \cdot V$$

$$b_J = V^{-1} \cdot b$$

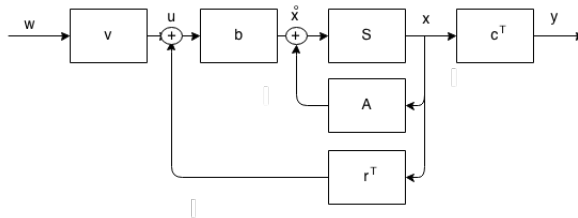
$$c^T_J = c^T \cdot V$$

$$d_J = d$$

Die Transformationsmatrix V ($n \times n$) besteht aus den Eigenvektoren v_n der Matrix A :

$$V = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & \dots & v_{1n} \\ v_{21} & v_{22} & \dots & v_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{n1} & v_{n2} & \dots & v_{nn} \end{bmatrix} = [v_1 \quad v_2 \quad \dots \quad v_n]$$

2.5 Reglersynthese im Zustandsraum



2.5.1 Polvorgabe

Bei der Polvorgabe werden die Pole des geschlossenen Systems vorgegeben.

$$A_{CL} = F = A - b \cdot r^T$$

$$A_{CL,R} = A_R - b_R \cdot r^T_R \quad r^T_R = [r_{1,R} \quad r_{2,R} \quad \dots \quad r_{n,R}]$$

Daraus folgt:

$$A_{CL,R} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -\frac{a_0}{a_n} - r_{1,R} & -\frac{a_1}{a_n} - r_{2,R} & -\frac{a_2}{a_n} - r_{3,R} & \dots & \underbrace{-\frac{a_{n-1}}{a_n} - r_{n,R}}_{-c^{n-1}} \end{bmatrix}$$

Diese Matrix kann gerade in das Istpolynom überführt werden.

Istpolynom:

$$p_{CL,r}(s) = s^n + \underbrace{(a_{n-1} + r_{n,R})}_{c^{n-1}} \cdot s^{n-1} + \dots + (a_1 + r_{2,R})a_1 \cdot s + (a_0 + r_{1,R})$$

Das Sollpolynom ist durch die Nullstellen vorgegeben:

$$\begin{aligned} p(s) &= (s - s_1)(s - s_2) \dots (s - s_n) \\ &= s^n + p_{n-1} \cdot s^{n-1} + \dots + p_1 \cdot s + p_0 \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich ergibt nun:

$$\begin{aligned} r_{1,R} &= p_0 - a_0 \\ r_{2,R} &= p_1 - a_1 \\ r_{n,R} &= p_{n-1} - a_{n-1} \end{aligned}$$

Die Reglermatrix ist somit gegeben durch:

$$r^T = r^T_R \cdot T_R$$

Die Reglermatrix kann auch direkt berechnet werden mit:

$$r^T = p_0 \cdot q_S^T + \dots + p_{n-1} \cdot q_S^T A^{n-1} + q_S^T A^n$$

2.5.2 Vorfilter / Vorverstärker

Der Vorfilter/Vorverstärker gewährleistet, dass im stationärem Zustand y mit dem gewünschtem, konstantem Vektor w übereinstimmt.

$$\begin{aligned} v &= [c^T(b \cdot r^T - A)^{-1} \cdot b]^{-1} \\ v_R &= [c_R^T(b_R \cdot r_R^T - A_R)^{-1} \cdot b]^{-1} \end{aligned}$$

2.5.3 Beobachter

Beobachter ist ein Nachbau des System für den Rechner. Er beinhaltet alle Punkte des realen System. Dafür werden keine Sensoren benötigt. Die Variablen werden geschätzt.

Das h muss derart bestimmt werden, dass $\text{eig}W(A - h_c^T) < 0$ sind.

Falls das System in BNF vorliegt, gilt:

$$\begin{aligned} A_B &= T_B^{-1} \cdot A \cdot T_B \\ c_B^T &= c^T \cdot T_B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \\ b_B &= T_B^{-1} \cdot b \\ A_B &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & -\frac{a_0}{a_n} \\ 1 & 0 & 0 & \dots & -\frac{a_1}{a_n} \\ 0 & 1 & 0 & \dots & -\frac{a_2}{a_n} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -\frac{a_{n-1}}{a_n} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Folgende Gleichung wird für die Bestimmung des Istpolynoms benötigt. Da $a_n = 1$, kann folgende Vereinfachung gemacht werden:

$$\dot{e}_{x,B} = (A_B - h_B \cdot c_B^T) \cdot e_{x,B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & -a_0 - h_{B,1} \\ 1 & 0 & 0 & \dots & -a_1 - h_{B,2} \\ 0 & 1 & 0 & \dots & -a_2 - h_{B,3} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{n-1} - h_{B,n} \end{bmatrix}$$

Istpolynom:

$$u(s) = s^n + (a_{n-1} + h_{B,n})s^{n-1} + \dots + (a_1 + h_{B,2})s + (a_0 + h_{B,1})$$

Sollpolynom:

$$p(s) = s^n + p_{n-1}s^{n-1} + \dots + p_1s + p_0$$

Aus diesen beiden Gleichungen kann via Koeffizientenvergleich die Matrix h_B bestimmt werden.

$$\begin{aligned} h_{B,1} &= p_0 - a_0 & h_{B,2} &= p_1 - a_1 & \text{etc.} \\ h_B &= p - a & h &= T_B \cdot h_B \end{aligned}$$

2.6 LQ - Regler

Der Reglerentwurf kann mittels dem Gütekriterium bestimmt werden. Der Regler wird optimal, wenn die Funktion $I(r^T)$ minimal wird.

$$I(r^T) = \int x^T \cdot Q \cdot x + u^T \cdot R \cdot dt$$

2.6.1 Liapanov - Gleichung

$$S \cdot A_{CL} + A_{CL}^T \cdot S = -Q_r$$

2.6.2 Riccati - Gleichung

Es gibt genau eine positiv-definite Lösung für S , wenn die Strecke steuerbar ist. Wobei S eine symmetrische Matrix ist.

$$-A^T \cdot S - S \cdot A + S \cdot b \cdot R^{-1} \cdot b^T \cdot S - Q = 0$$

$$S = \begin{bmatrix} s_1 & s_2 \\ s_2 & s_3 \end{bmatrix}$$

r^T - Regelung

- $r = S \cdot b \cdot R^{-1}$
- $r^T = R^{-1} \cdot b^T \cdot S$

LQ - Reglerentwurf

1. Vorgabe von Q und R
 - $Q = I$ und $R = 1$
 - $Q = c \cdot c^T$ und $R = \frac{1}{100}$
2. Lösungsmatrix S aus der Riccatigleichung bestimmen
3. Regelvektor r^T berechnen
4. Überprüfung der Eigenwerte

Vorteile LQ - Regler

- Vorgabe Q, R statt Pole
- Phasenreserve $\varphi_r \geq 60^\circ$
- Amplitudenreserve $A_r \geq 2$

2.7 PI - Zustandsregler

Der PI - Zustandsregler kompensiert eine permanente Last(Störung)

$$\dot{x}_{PI} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_I \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} A & | & 0 \\ \hline -c^T & | & 0 \end{bmatrix}}_{A_{PI}} \cdot \begin{bmatrix} x \\ x_I \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix}}_{b_{PI}} \cdot u$$

$$y = \underbrace{\begin{bmatrix} c^T & | & 0 \end{bmatrix}}_{c_{PI}^T} \cdot \begin{bmatrix} x \\ x_I \end{bmatrix}$$

Entwurfsschritte

- Bildung des erweiterten Systems $(A_{PI}, b_{PI}, c_{PI}^T)$
- Polvorgabe oder LQR für die Berechnung von r_{PI}^T
- Der letzte Wert von r_{PI}^T ist $-K_I$
- Vorgabe von K_p experimentell oder gemäss separatem Vorgehen
- r^T kann aus den ersten n -Elementen von r_{PI}^T berechnet werden
 - $r^T = r_{PI}^T(1 : n - 1) - K_p \cdot c^T$
- Kontrolle der Lage der Eigenwerte
 - $\det(\lambda I_{(n+1)} - (A_{PI} - b_{PI} \cdot r_{PI}^T)) = 0$
 - $\text{eig}(A_{PI} - b_{PI} \cdot r_{PI}^T)$

Mögliche Bestimmung von K_p

$$K_p = \alpha \cdot [-c^T \cdot A^{-1} \cdot b]^{-1}$$

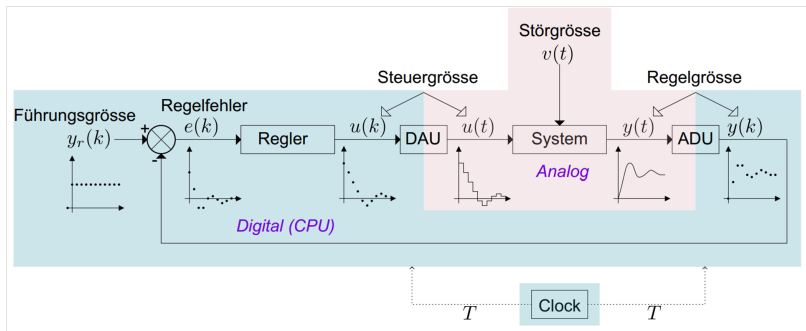
α ist frei wählbar und stellt den Bezug zur Stellgrösse $u(0)$ bei schrittförmiger Änderung der Eingangsgrösse dar:

$$u(0) \leq \alpha \cdot u(\infty)$$

Kapitel 3

Digitale Regelung

3.1 Schematische Darstellung



$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} \quad \rightarrow \quad H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)}$$

3.2 Wahl der Taktzeit

Perfekte theoretische Rekonstruktion (unmöglich):

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} y(kh) \frac{\sin \frac{\omega_e(t-kh)}{2}}{\frac{\omega_e(t-kh)}{2}}$$

Wahl in der Praxis:

$$\omega_e > [10 - 20] \cdot \omega_{max}$$

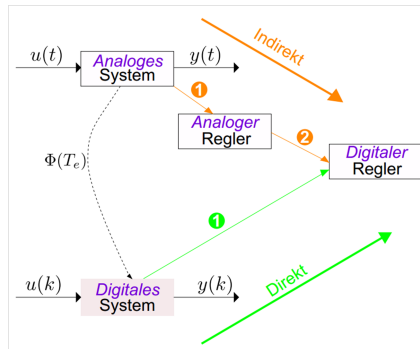
3.3 Anti-Aliasing Filter

$$G_{b,1} = \frac{1}{\frac{1}{\omega_b} s + 1}$$

$$G_{b,2} = \frac{1}{\frac{1}{\omega_b^2} s^2 + \frac{\sqrt{2}}{\omega_b} s + 1}$$

$$G_{b,3} = \frac{1}{\frac{1}{\omega_b^4} s^4 + \frac{2.6131}{\omega_b^3} s^3 + \frac{3.4142}{\omega_b^2} s^2 + \frac{2.6131}{\omega_b} s + 1}$$

3.4 Direkter/Indirekter Regler



3.5 Digitaler Regler

3.5.1 I Anteil

Rückwärts-Rechteckregel

$$u_{i,d,r}(e[k]) = u_{i,d,r}(e[k-1]) + \frac{K_a}{T_{i,a}} e[k] \cdot T$$

Trapezregel

$$u_{i,d,t}(e[k]) = u_{i,d,t}(e[k-1]) + \frac{K_a}{T_{i,a}} \cdot \frac{e[k] + e[k-1]}{2} \cdot T$$

3.5.2 D Anteil

$$u_{d,d}(e[k]) = K_a T_{d,a} \cdot \frac{e[k] - e[k-1]}{T}$$

3.5.3 Antireset-Windup

$$u_{nosat}[k] = u_p[k] + u_i[k-1] + u_d[k]$$

$$\text{if } u_{nosat}[k] > u_{sat,max} \rightarrow u[k] = u_{sat,max}$$

$$\text{else if } u_{nosat}[k] < u_{sat,min} \rightarrow u[k] = u_{sat,min}$$

$$u_i[k] = u_i[k-1] + K_a \frac{T}{T_i} \cdot \frac{e[k] + e[k-1]}{2} + \frac{T}{T_r} (u[k] - u[k]_{nosat})$$

Ohne ARW:

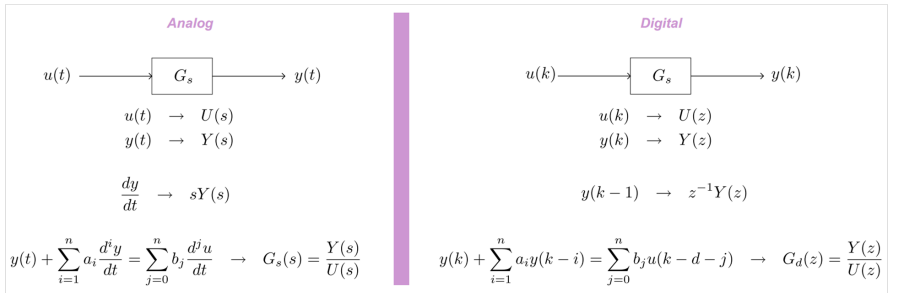
$$u_i[k] = u_i[k-1] + K_a \frac{T}{T_i} \cdot \frac{e[k] + e[k-1]}{2}$$

$$u_{nosat}[k] = u_p[k] + u_i[k] + u_d[k]$$

$$\text{if } u_{nosat}[k] > u_{sat,max} \rightarrow u[k] = u_{sat,max}$$

$$\text{else if } u_{nosat}[k] < u_{sat,min} \rightarrow u[k] = u_{sat,min}$$

3.6 z-Transformation



3.6.1 Definition

$$W(z) = Z\{w[k]\} = \sum_{k=0}^{\infty} w[k]z^{-k}$$

3.6.2 Signale

Impuls:

$$Z\{I_i[k]\} = z^{-l} \begin{cases} 1 & \text{if } k = l \\ 0 & \text{if } k \neq l \end{cases}$$

Sprungantwort:

$$Z\{S_i[k]\} = \sum_{i=l}^{\infty} z^{-i} = z^{-l} \frac{z}{z-1} \begin{cases} 1 & \text{if } k \geq l \\ 0 & \text{if } k < l \end{cases}$$

3.6.3 Eigenschaften der z-Transformation

Linearität 1:

$$Z(\{w_1[k]\} + \{w_2[k]\}) = Z\{w_1[k]\} + Z\{w_2[k]\}$$

Linearität 2:

$$Z(a\{w_1[k]\}) = a \cdot Z\{w_1[k]\}$$

Zeitverschiebung:

$$Z(\{w_1[k-d]\}) = z^{-d}W(z)$$

Initialwert:

$$w[0] = \lim_{z \rightarrow \infty} W(z)$$

Finalwert:

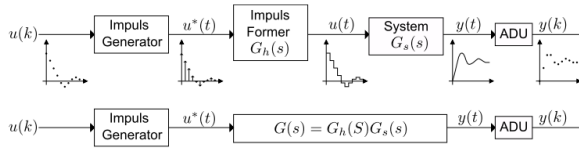
$$w[\infty] = \lim_{z \rightarrow 0} (z-1)W(z)$$

3.7 z-Übertragungsfunktion

Impulsantwort beschreibt das System:

$$y[k] = \sum_{l=0}^k u[l] \cdot g[k-l]$$

3.7.1 Übertragung der Regelstrecke



$$\begin{aligned} H(z) &= Z\{L^{-1}\{G_h(s)G_s(s)\}|_{t=kT}\} \\ &= (1 - z^{-1})Z\left\{L^{-1}\left\{\frac{G_s(s)}{s}\right\}\right\}\bigg|_{t=kT} \end{aligned}$$

3.8 Laplace- \rightarrow z-Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s\right) \rightarrow G(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = ?$$

3.8.1 Transformation

Rückwärts-Rechteckregel:

$$\dot{e}[kT] = \frac{e[kT] - e[kT - T]}{T} \quad \rightarrow \quad s = \frac{z - 1}{Tz}$$

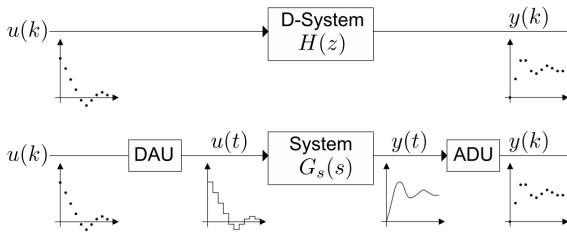
Vorwärts-Rechteckregel:

$$\dot{e}[kT] = \frac{e[kT + T] - e[kT]}{T} \quad \rightarrow \quad s = \frac{z - 1}{T}$$

Trapezregel:

$$\int_0^t e[\tau] d\tau = \sum_{i=0}^{\frac{k}{T}=kT} \frac{e[i] + e[i-1]}{2} \quad \rightarrow \quad s = \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1}$$

3.9 Stabilität



Ein digitales LZI-Glied ist stabil, wenn die Pole seiner z -Übertragungsfunktion $H(z)$ im Einheitskreis liegen.

3.9.1 Analyse mit der Impulsantwort

Das System ist stabil wenn

$$\sum_{k=0}^{\infty} |g[k]| < \infty$$

3.10 Zusammenhang Pole Laplace $\leftrightarrow z$

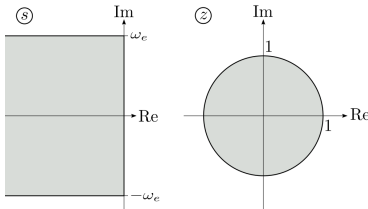
$$\begin{aligned} \frac{c}{s - s_1} &\rightarrow \frac{cZ}{z - e^{s_1 T}} \\ s_1 = \sigma_1 + j\omega_1 &\rightarrow z_1 = e^{s_1 T} = e^{\sigma_1 T} e^{j\omega_1 T} \end{aligned}$$

$$|z| = e^{\sigma} \quad \arg(z) = \omega T$$

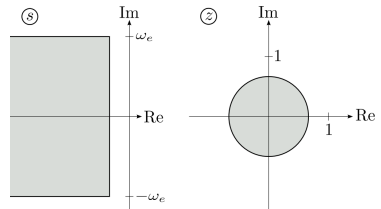
3.10.1 Periodizität

$$\omega_e = \frac{2\pi}{T}$$

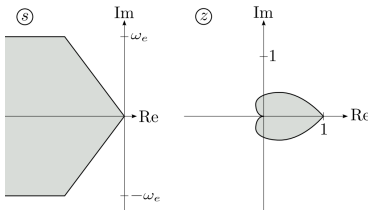
$$z = e^{(s+j\omega_e)T} = e^{sT}$$



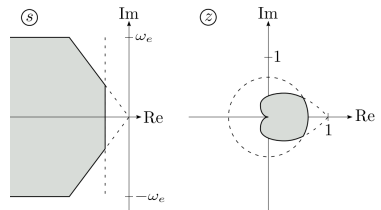
(a) Mapping 1



(b) Mapping 2



(c) Mapping 3

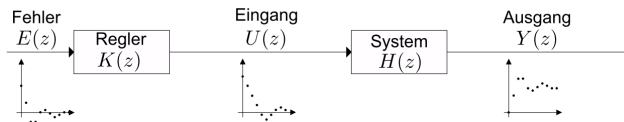


(d) Mapping 4

3.11 Wichtige Übertragungsfunktionen

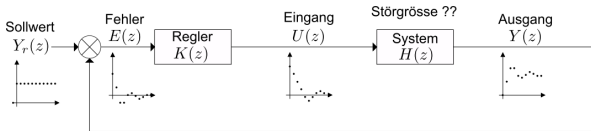
3.11.1 z-Übertragung des offenen Regelkreises

$$\frac{Y(z)}{E(z)} = K(z)H(z)$$



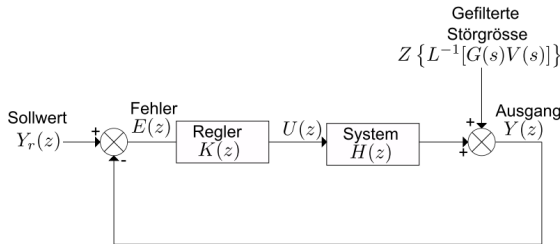
3.11.2 Führungsübertragungsfunktion

$$\frac{Y(z)}{Y_r(z)} = \frac{K(z)H(z)}{1 + K(z)H(z)}$$



3.11.3 Störübertragungsfunktion

$$Y(z) = \frac{K(z)H(z)}{1 + K(z)H(z)} Y_r(z) + \frac{Z\{L^{-1}\{G(s)V(s)\}\}}{1 + K(z)H(z)}$$



mit Störfunktion $v(t) = a$:

$$Y(z) = \frac{K(z)H(z)}{1 + K(z)H(z)} Y_r(z) + \frac{H(z)}{1 + K(z)H(z)} V(z) \quad \text{mit } V(z) = \frac{az}{z-1}$$

3.12 Diskrete Zustandsraumdarstellung

Analog:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

Digital:

$$x[k+1] = A_d x[k] + B_d u[k]$$

$$y[k+1] = C_d x[k] + D_d u[k]$$

Transformation

$$A_d = e^{AT}$$

$$B_d = \int_0^T e^{A\tau} d\tau B$$

$$C_d = C$$

$$D_d = D$$

3.13 Diskreter Frequenzgang

3.13.1 Eigenschaften

Periodizität

$$H(e^{j(\omega + \frac{2k\pi}{T})T}) = H(e^{j\omega T})$$

Symmetrie für $A(\omega)$

$$A(-\omega) = A(\omega)$$

Asymmetrie für $\varphi(\omega)$

$$\varphi(-\omega) = -\varphi(\omega)$$

3.13.2 Nyquist Frequenz

Die Analyse des Frequenzganges beschränkt sich auf:

$$\omega \in [0, \omega_N] \quad \omega_N = \frac{\pi}{T}$$

3.13.3 Bode-Diagramm

1. $H(z)$ herleiten
2. z durch $e^{j\omega T}$ ersetzen

$$3. |H(e^{j\omega T})| = \sqrt{\operatorname{Re}\{e^{j\omega T}\}^2 + \operatorname{Im}\{H(e^{j\omega T})\}^2}$$

$$4. \arg H(e^{j\omega T}) = \arctan\left(\frac{\operatorname{Im}\{H(e^{j\omega T})\}}{\operatorname{Re}\{H(e^{j\omega T})\}}\right)$$

Kapitel 4

Taschenrechnerbefehle

Erzeugen einer Einheitsmatrix:

$$\textit{identity}(m)$$

Matrix in eine obere Dreiecksmatrix formen:

$$\textit{ref}(A)$$

Matrix in eine Einheitsmatrix formen:

$$\textit{rref}(A)$$

Rang einer Matrix bestimmen:

$$\textit{ref}(A)$$

Die Anzahl der Zeilen- oder Spaltenvektoren, welche $\neq 0$ sind, entspricht dem Rang der Matrix.

Matrizen zusammenfügen (nur zwei Matrizen auf einmal möglich):

$$\textit{augment}(a, b)$$

$$\textit{augment}(a; b)$$

Auf gleichen Nenner bringen:

$$\textit{comDenom}(\dots)$$

Kapitel 5

Umformungstabelle

	$X(s)$	$x(t)$	$x(kT)$ or $x(k)$	$X(z)$
1.	—	—	Kronecker delta $\delta_0(k)$ 1 $k = 0$ 0 $k \neq 0$	1
2.	—	—	$\delta_0(n-k)$ 1 $n = k$ 0 $n \neq k$	z^{-k}
3.	$\frac{1}{s}$	$1(t)$	$1(k)$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$
4.	$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}	e^{-akT}	$\frac{1}{1-e^{-aT}z^{-1}}$
5.	$\frac{1}{s^2}$	t	kT	$\frac{Tz^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$
6.	$\frac{2}{s^3}$	t^2	$(kT)^2$	$\frac{T^2 z^{-1}(1+z^{-1})}{(1-z^{-1})^3}$
7.	$\frac{6}{s^4}$	t^3	$(kT)^3$	$\frac{T^3 z^{-1}(1+4z^{-1}+z^{-2})}{(1-z^{-1})^4}$
8.	$\frac{a}{s(s+a)}$	$1-e^{-at}$	$1-e^{-akT}$	$\frac{(1-e^{-aT})z^{-1}}{(1-z^{-1})(1-e^{-aT}z^{-1})}$
9.	$\frac{b-a}{(s+a)(s+b)}$	$e^{-at}-e^{-bt}$	$e^{-akT}-e^{-bkT}$	$\frac{(e^{-aT}-e^{-bT})z^{-1}}{(1-e^{-aT}z^{-1})(1-e^{-bT}z^{-1})}$
10.	$\frac{1}{(s+a)^2}$	te^{-at}	kTe^{-akT}	$\frac{Te^{-aT}z^{-1}}{(1-e^{-aT}z^{-1})^2}$
11.	$\frac{s}{(s+a)^2}$	$(1-at)e^{-at}$	$(1-akT)e^{-akT}$	$\frac{1-(1+aT)e^{-aT}z^{-1}}{(1-e^{-aT}z^{-1})^2}$
12.	$\frac{2}{(s+a)^3}$	t^2e^{-at}	$(kT)^2e^{-akT}$	$\frac{T^2e^{-aT}(1+e^{-aT}z^{-1})}{(1-e^{-aT}z^{-1})^3}$
13.	$\frac{a^2}{s^2(s+a)}$	$at-1+e^{-at}$	$akT-1+e^{-akT}$	$\frac{[(aT-1+e^{-aT})+(1-e^{-aT}-aTe^{-aT})z^{-1}]z^{-1}}{(1-z^{-1})^2(1-e^{-aT}z^{-1})}$
14.	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\sin \omega t$	$\sin \omega kT$	$\frac{z^{-1} \sin \omega T}{1-2z^{-1} \cos \omega T + z^{-2}}$
15.	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos \omega t$	$\cos \omega kT$	$\frac{1-z^{-1} \cos \omega T}{1-2z^{-1} \cos \omega T + z^{-2}}$
16.	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at} \sin \omega t$	$e^{-akT} \sin \omega kT$	$\frac{e^{-aT}z^{-1} \sin \omega T}{1-2e^{-aT}z^{-1} \cos \omega T + e^{-2aT}z^{-2}}$
17.	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at} \cos \omega t$	$e^{-akT} \cos \omega kT$	$\frac{1-e^{-aT}z^{-1} \cos \omega T}{1-2e^{-aT}z^{-1} \cos \omega T + e^{-2aT}z^{-2}}$
18.	—	—	a^k	$\frac{1}{1-az^{-1}}$
19.	—	—	a^k $k = 1, 2, 3, \dots$	$\frac{z^{-1}}{1-az^{-1}}$
20.	—	—	ka^{k-1}	$\frac{z^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$
21.	—	—	k^2a^{k-1}	$\frac{z^{-1}(1+az^{-1})}{(1-az^{-1})^3}$
22.	—	—	k^3a^{k-1}	$\frac{z^{-1}(1+4az^{-1}+a^2z^{-2})}{(1-az^{-1})^4}$
23.	—	—	k^4a^{k-1}	$\frac{z^{-1}(1+11az^{-1}+11a^2z^{-2}+a^3z^{-3})}{(1-az^{-1})^5}$
24.	—	—	$a^k \cos k\pi$	$\frac{1}{1+az^{-1}}$

$x(t) = 0$ for $t < 0$

$x(kT) = x(k) = 0$ for $k < 0$

Unless otherwise noted, $k = 0, 1, 2, 3, \dots$

$$\mathcal{R}\{x(k)\} = X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k)z^{-k}$$

Important properties and theorems of the Z-transform

	$x(t)$ or $x(k)$	$Z\{x(t)\}$ or $Z\{x(k)\}$
1.	$ax(t)$	$aX(z)$
2.	$ax_1(t) + bx_2(t)$	$aX_1(z) + bX_2(z)$
3.	$x(t+T)$ or $x(k+1)$	$zX(z) - zx(0)$
4.	$x(t+2T)$	$z^2X(z) - z^2x(0) - zx(T)$
5.	$x(k+2)$	$z^2X(z) - z^2x(0) - zx(1)$
6.	$x(t+kT)$	$z^kX(z) - z^kx(0) - z^{k-1}x(T) - \dots - zx(kT-T)$
7.	$x(t-kT)$	$z^{-k}X(z)$
8.	$x(n+k)$	$z^kX(z) - z^kx(0) - z^{k-1}x(1) - \dots - zx(k1-1)$
9.	$x(n-k)$	$z^{-k}X(z)$
10.	$tx(t)$	$-Tz \frac{d}{dz} X(z)$
11.	$kx(k)$	$-z \frac{d}{dz} X(z)$
12.	$e^{-at}x(t)$	$X(ze^{aT})$
13.	$e^{-ak}x(k)$	$X(ze^a)$
14.	$a^kx(k)$	$X\left(\frac{z}{a}\right)$
15.	$ka^kx(k)$	$-z \frac{d}{dz} X\left(\frac{z}{a}\right)$
16.	$x(0)$	$\lim_{z \rightarrow \infty} X(z)$ if the limit exists
17.	$x(\infty)$	$\lim_{z \rightarrow 1} \left[(1-z^{-1})X(z) \right]$ if $(1-z^{-1})X(z)$ is analytic on and outside the unit circle
18.	$\nabla x(k) = x(k) - x(k-1)$	$(1-z^{-1})X(z)$
19.	$\Delta x(k) = x(k+1) - x(k)$	$(z-1)X(z) - zx(0)$
20.	$\sum_{k=0}^n x(k)$	$\frac{1}{1-z^{-1}} X(z)$
21.	$\frac{\partial}{\partial a} x(t, a)$	$\frac{\partial}{\partial a} X(z, a)$
22.	$k^m x(k)$	$\left(-z \frac{d}{dz}\right)^m X(z)$
23.	$\sum_{k=0}^n x(kT)y(nT-kT)$	$X(z)Y(z)$
24.	$\sum_{k=0}^{\infty} x(k)$	$X(1)$