Formelsammlung MRT + A

Michi Fallegger, Mario Felder

12. November 2014

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Matrizen

1.1 Grundlagen

Matrize

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{3n} \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & a_{mn} \end{bmatrix}$$

A = [Spalten,Zeilen]

Transponierte

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{3n} \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & a_{mn} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & a_{n2} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{n3} \\ a_{1n} & a_{2m} & a_{3m} & a_{nm} \end{bmatrix}$$

Multiplikation

$\underline{A}*\underline{B}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} b_{11} & b_{21} \\ b_{12} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} * b_{11} + a_{21} * b_{12} & a_{11} * b_{21} + a_{21} * b_{22} \\ a_{12} * b_{11} + a_{22} * b_{12} & a_{12} * b_{21} + a_{22} * b_{22} \end{bmatrix}$

Orthogonal

Vektor $\underline{a}$ ist zum Vektor $\underline{b}$ orthogonal, wenn das Skalarprodukt $\underline{a}*\underline{b}= 0$

ist. Dann ist auch $\underline{b}$ orthogonal zu $\underline{a}$ und wir sprechen daher von zwei orthogonalen Vektoren $\underline{a}$ und $\underline{b}$.

Zwei orthogonale Nichtnullvektoren sind aufeinander senkrecht ($\cos(\alpha) = 0, \alpha = \frac{\pi}{2}$).

Determinante

$$det(A) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = a \cdot d - b \cdot c$$

1.2 Rang

1.2.1 Rang von Vektoren

Beschreibt die lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit von Vektoren. Eine Menge von m Vektoren $a_1, a_2, ..., a_n$ (mit derselben Anzahl von Komponenten) bildet die folgende lineare Kombination:

$$c_1 a_1 + c_2 a_2 + ... + c_m a_m$$

Daraus folgt:

$$c_1 a_1 + c_2 a_2 + ... + c_m a_m = 0$$

Falls die einzige Möglichkeit darin besteht, $c =$ um die Gleichung zu erfüllen, sind die Vektoren linear unabhängig.

Zwei Vektoren in der Ebene sind linear abhängig, wenn sie parallel sind.

$$\underline{a} - c * \underline{b} = 0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Drei Vektoren in Anschauungsraum (3D) sind linear abhängig, wenn sie in einer Ebene liegen.

$$c_1 \cdot \underline{a} + c_2 \cdot \underline{b} + c_3 \cdot \underline{c} = 0$$

1.2.2 Rang einer Matrix

Die maximale Zahl der linear unabhängigen Zeilenvektoren einer Matrix $\underline{A}$ heisst Rang. Es gilt:

$$r = Rang(A) \leq m, n$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = Rang \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Vorgehen (Horizontal):
-1. Erste Zeile (oder die mit der tiefsten Zahlen) stehen lassen.
-2. Dieser Schritt für alle Zeilen machen:

$$c_1 \cdot a_{11} + a_{21} = 0 \qquad c \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

-3. Entstehen in der Matrix horizontale gleiche Vektoren, so sind diese linear abhängig.

1.3 Eigenwerte und Eigenvektoren

1.3.1 Eigenwerte

$$A\underline{v} = \lambda\underline{v}$$

Derjenige Wert λ für welchen die obige Gleichung eine Lösung $x \neq 0$ hat heisst der Eigenwert der Matrix $\underline{A}$.
Die korrespondierende Lösung $\underline{\mathrm{x}} \neq 0$ heisst der Eigenvektor der Matrix A.

$$A \cdot \underline{x} = \lambda \cdot \underline{x}$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Homogenes, lineares Gleichungssystem

$$(A - \lambda \cdot I)\underline{x} = \underline{0}$$

Lösung nach Cramer: Eigenwert bestimmen

$$D(\lambda) = det(A - \lambda I) = 0 \qquad \lambda I = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$$

Eigenvektor

$$\underline{v} = A - \lambda \cdot I$$

1.4 Zustandsvariabel

Es gibt allgemeine Untersuchungen über das Systemverhalten, beispielsweise über die Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit von Systemen, die sich nur im Zeitbereich durchführen lassen.
Aus diesem Grund ist es angebracht im Zeitbereich zu bleiben. Es ist zweckmässig, die auftretende Differentialgleichung durch Einführen von Zwischengrössen in Systeme von Differentialgleichungen erster Ordnung zu verwandeln.

$$a_n \cdot y^n + a_{n-1} \cdot y^{n-1} + ... + a_2\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_0 y = b_0 u \qquad a_n \neq 0$$

Dann kann man als Zwischengrössen $x_1, x_2, ..., x_n$ die Ausgangsgrösse y und ihre Ableitungen nehmen:

$$x_1 = y, \quad x_2 = \dot{y}, \quad x_3 = \ddot{y}, ..., \quad x_{n-1} = y^{n-2} \quad x_n = y^{n-1}$$

Aus der Definition folgen die einfachen Differentialgleichungen.:

$$\dot{x}_1 = x_2, \qquad \dot{x}_2 = x_3 \qquad ,..., \qquad \dot{x}_{n-1} = x_n$$

1.5 $(sI - A)^{-1}$

$$(sI - A)^{-1} = \frac{adj((sI - A)^{-1})}{det((sI - A)^{-1})}$$

$$adj \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Kapitel 2

Zustandsraum

2.1 Regelungsnormalform der Zustandsgleichung

$$G(s) = \frac{b_0 + b_1 s + b_2 s^2 + ... + b_n s^n}{a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + ... + a_n s^n}$$

2.1.1 Regelungsnormalform

$$\dot{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & .. & 0 \\ 0 & 0 & 1 & .. & 0 \\ .. & .. & .. & .. & .. \\ 0 & 0 & 0 & .. & 1 \\ -\frac{a_0}{a_n} & -\frac{a_1}{a_n} & -\frac{a_2}{a_n} & .. & -\frac{a_{n-1}}{a_n} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \cdot x + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ .. \\ 0 \\ \frac{1}{a_n} \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}} \cdot u$$

$$y = \underbrace{\begin{bmatrix} b_0 - a_0 \frac{b_n}{a_n} & b_1 - a_1 \frac{b_n}{a_n} & .. & b_{n-1} - a_{n-1} \frac{b_n}{a_n} \end{bmatrix}}_{c^T} \cdot x + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{b_n}{a_n} \end{bmatrix}}_{\mathbf{d}} \cdot u$$

2.1.2 Beobachtungsnormalform

$$\dot{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & .. & -\frac{a_0}{a_n} \\ 1 & 0 & 1 & .. & -\frac{a_1}{a_n} \\ 0 & 1 & 0 & .. & -\frac{a_2}{a_n} \\ .. & .. & .. & .. & .. \\ 0 & 0 & .. & 1 & -\frac{a_{n-1}}{a_n} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \cdot x + \underbrace{\begin{bmatrix} b_0 - b_n \frac{a_0}{a_n} \\ b_1 - b_n \frac{a_1}{a_n} \\ b_2 - b_n \frac{a_2}{a_n} \\ .. \\ b_{n-1} - b_n \frac{a_{n-1}}{a_n} \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}} \cdot u$$

$$y = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & .. & 0 & \frac{1}{a_n} \end{bmatrix}}_{c^T} \cdot x + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{b_n}{a_n} \end{bmatrix}}_{\mathbf{d}} \cdot u$$

2.1.3 Jordanische Normalform

- Bevorzugte Verwendung, wenn Pole vom System bekannt sind
- System ist vollständig entkoppelt, wenn alle Pole reell und einfach vorkommen
- A ist Diagonalmatrix mit λ_i: Pole

$$\dot{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & .. & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & .. & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & .. & 0 \\ .. & .. & .. & .. & .. \\ 0 & 0 & 0 & .. & \lambda_n \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \cdot x + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ .. \\ .. \\ 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}} \cdot u$$

$$y = \underbrace{\begin{bmatrix} r_1 & r_2 & .. & r_n \end{bmatrix}}_{c^T} \cdot x + \underbrace{\begin{bmatrix} r_0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{d}} \cdot u$$

2.2 Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit

2.2.1 Steuerbarkeit

Das System heisst steuerbar, wenn sein Zustandspunkt $\underline{x}$ durch geeignete Wahl des Steuervektors u in endlicher Zeit aus einem beliebigen

Anfangszustand x_0 in den Endzustnad 0 bewegt werden kann (Steuerbar wenn die Vektoren linear unabhängig sind; $Rang(Q_s) = n$)

$$Q_s = \begin{bmatrix} b & A \cdot b & .. & A^{n-1} \cdot b \end{bmatrix} = [n \cdot n]$$

2.2.2 Beobachtbarkeit

Das System heisst beobachtbar, wenn dem bekannten $u(t)$ aus der Messung $y(t)$ über eine endliche Zeitspanne der Anfangszustand $x(t)$ eindeutig ermittelt werden kann, ganz gleich wo dieser liegt.

Das System ist beobachtbar, wenn die Beobachtungsmatrix Q_B regulär ist (nxn Matrix).

$$Q_B = \begin{bmatrix} c^T \\ c^T \cdot A \\ ... \\ c^T \cdot A^{n-1} \end{bmatrix}$$

2.3 Transformation

2.3.1 Transformation in Regelungsnormalform (Steuernormalform)

Eine Übertragungssystem $\dot{x} = A \cdot x + b \cdot u$ wird mit der Transformation $z = T_R \cdot x$ in die Regelungsnormalform $\dot{x_R} = A_R \cdot x_R + b_R \cdot u$ überführt.

$q_{s_n}^T$ ist die letzte Zeile von der inversen Steuerbarkeitsmatrix Q_s^{-1}.

$$A_R = T_R \cdot A \cdot T_R^{-1} \qquad b_R = T_R \cdot b \qquad c_R^T = c^T \cdot T_R^{-1} \qquad d_R = d$$

$$T_R = \begin{bmatrix} q_{s_n}^T \\ q_{s_n}^T \cdot A \\ .. \\ q_{s_n}^T \cdot A^{n-1} \end{bmatrix} \qquad Q_s^{-1} = \begin{bmatrix} .. & .. & .. & .. & .. \\ .. & .. & .. & .. & .. \\ .. & .. & .. & .. & .. \\ [x & x & x & x & x] \end{bmatrix}$$

2.3.2 Transformation auf Beobachtungsnormalform

Eine Übertragungssystem $\dot{x} = A \cdot x + b \cdot u$ wird mit der Transformation $z = T_B \cdot x$ in die Beobachtungsnormalform $\dot{x_B} = A_R \cdot x_B + b_B \cdot u$

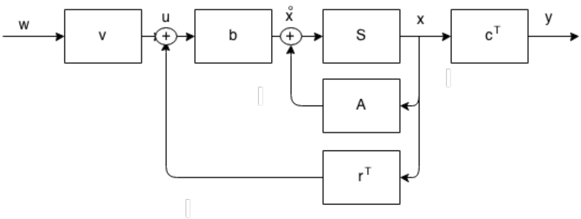
überführt.

q_{B_n} ist die letzte Spalte von der inversen Beobachtungsmatrix Q_B^{-1}.

$$A_B = T_B \cdot A \cdot T_B^{-1} \qquad b_B = T_B \cdot b \qquad c_B^T = c^T \cdot T_B^{-1} \qquad d_B = d$$

$$T_B = \begin{bmatrix} q_{B_n} & A \cdot q_{B_n} & .. & A^{n-1} \cdot q_{B_n} & \end{bmatrix} \qquad Q_B^{-1} = \begin{bmatrix} .. & .. & x \\ .. & .. & x \\ .. & .. & x \end{bmatrix}$$

2.4 Reglersynthese im Zustandsraum



$$A_{CL} = A - b \cdot r^T \qquad\qquad A_R = T_R \cdot A \cdot T_R^{-1}$$
$$A_{R,CL} = A_R - b_R \cdot r_R^T \qquad r_R^T = \begin{bmatrix} r_{1,R} & r_{2,R} & r_{3,R} & r_{n,R} \end{bmatrix}$$

Daraus folgt:

$$A_{Cl,R} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & .. & 0 \\ 0 & 0 & 1 & .. & 0 \\ .. & .. & .. & .. & .. \\ 0 & 0 & 0 & .. & 1 \\ \underbrace{-\frac{a_0}{a_n} - r_{1,R}}_{-c^{n-1}} & -\frac{a_1}{a_n} - r_{2,R} & -\frac{a_2}{a_n} - r_{3,R} & .. & -\frac{a_{n-1}}{a_n} - r_{n,R} \end{bmatrix}$$

Diese Matrix kann gerade in das Istpolynom überführt werden.
Istpolynom:

$$p_{Cl,r}(s) = s^n + \underbrace{(a_{n-1} + r_{n,R})}_{c^{n-1}} \cdot s^{n-1} + ... + (a_1 + r_{2,R}) a_1 \cdot s + (a_0 + r_{1,r})$$

Das Sollpolynom ist durch die Nullstellen vorgegeben:

$$p(s) = s^n + p_{n-1} \cdot s^{n-1} + ... + p_1 \cdot s + p_0$$

Koeffizientenvergleich ergibt nun:

$$r_{1,R} = p_0 - a_0$$

$$r_{2,R} = p_1 - a_1$$

$$r_{n,R} = p_{n-1} - a_{n-1}$$

Durch die Transformation in RNF der letzten Zeile von Q_s^{-1} (T) lässt sich die Matrix umwandeln.

$$r^T = r_R^T \cdot T$$

2.4.1 Vorfilter / Vorverstärker

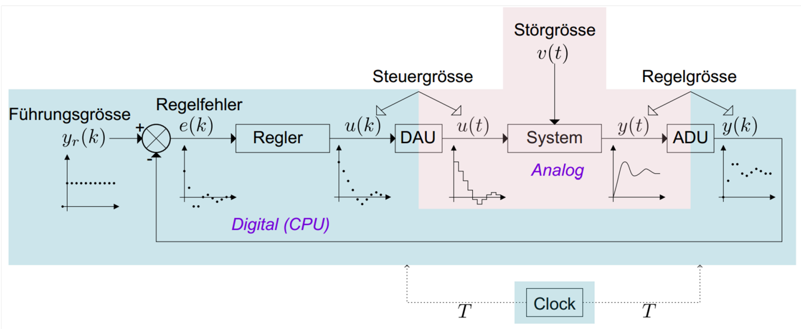
Der Vorfilter/Vorverstärker gewährleistet, dass im stationärem Zustand y mit dem gewünschtem, konstantem Vektor w übereinstimmt.

$$v = [c^T (b * r^T - A)^{-1} \cdot b]^{-1}$$

Kapitel 3

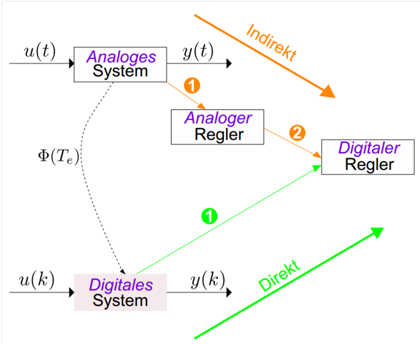
Digitale Regelung

3.1 Schematische Darstellung



$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} \qquad \rightarrow \qquad H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)}$$

3.2 Direkter/Indirekter Regler



3.3 Digitaler PID

Wir haben:

$$u(t) = u_{k,a}(e(t)) + u_{i,a}(e(t)) + u_{d,a}(e(t))$$

Wir wollen:

$$u(k) = u_{k,a}(e(k)) + u_{i,a}(e(k)) + u_{d,a}(e(k))$$

3.3.1 I Anteil

Implementierbare Differenzgleichungen für I-Anteil:
Rückwärts-Rechteckregel:

$$u_{i,d,r}(e(k))) = u_{i,d,r}(e(k-1)) + \frac{K_a}{T_{i,a}} e(k) \cdot T$$

Trapezregel:

$$u_{i,d,r}(e(k))) = u_{i,d,r}(e(k-1)) + \frac{K_a}{T_{i,a}} \cdot \frac{e(k) + e(k-1)}{2} \cdot T$$

3.3.2 D Anteil

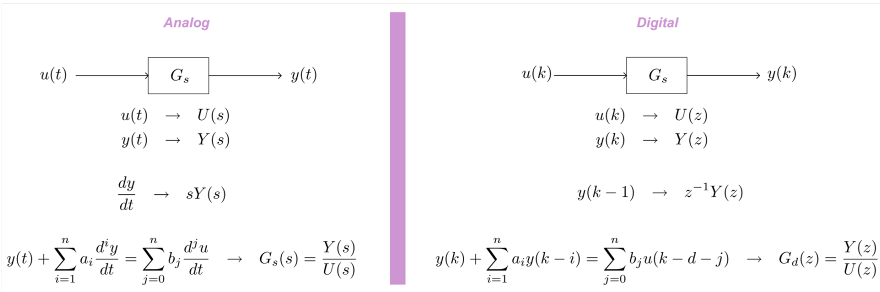
$$u_{d,d}(e(k)) = K_a T_{d,a} \cdot \frac{e(k) - e(k-1)}{T}$$

3.3.3 Antireset-Windup

$$u_{nosat}(k) = u_p(k) + u_i(k-1) + u(d)$$
$$if(u_{nosat}(k) > u_{sat,max}) \qquad u(k) = u_{sat,max}$$
$$elseif(u_{nosat}(k) < u_{sat,min})$$
$$u(k) = u_{sat,min}$$

$$u_i(k) = u_i(k-1) + K_a \frac{T}{Ti} \cdot \frac{e(k)+e(k-1)}{2} + \frac{T}{T_r}(u(k) - u(k)_{nosat})$$

3.4 z-Transformation



3.4.1 Antworten

Impulsantwort:

$$Z\{I_i(k)\} = z^{-l} \qquad \begin{cases} 1 & 1 \text{ if k } 0 \text{ l} \\ 2 & 0 \text{ if k} \neq \text{l} \end{cases}$$

Sprungantwort:

$$Z\{I_i(k)\} = \sum_{i=l}^{\infty} z^{-i} = u^{-l} \frac{z}{z-1} \qquad \begin{cases} 1 & 1 \text{ if k} \geq \text{l} \\ 2 & 0 \text{ if k} < \text{l} \end{cases}$$

Kapitel 4

Umformungstabelle

	$X(s)$	$x(t)$	$x(kT)$ or $x(k)$	$X(z)$
1.	–	–	Kronecker delta $\delta_0(k)$ 1 $k = 0$ 0 $k \neq 0$	1
2.	–	–	$\delta_0(n-k)$ 1 $n = k$ 0 $n \neq k$	z^{-k}
3.	$\frac{1}{s}$	$1(t)$	$1(k)$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$
4.	$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}	e^{-akT}	$\frac{1}{1-e^{-aT}z^{-1}}$
5.	$\frac{1}{s^2}$	t	kT	$\frac{Tz^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$
6.	$\frac{2}{s^3}$	t^2	$(kT)^2$	$\frac{T^2z^{-1}(1+z^{-1})}{(1-z^{-1})^3}$
7.	$\frac{6}{s^4}$	t^3	$(kT)^3$	$\frac{T^3z^{-1}(1+4z^{-1}+z^{-2})}{(1-z^{-1})^4}$
8.	$\frac{a}{s(s+a)}$	$1-e^{-at}$	$1-e^{-akT}$	$\frac{(1-e^{-aT})z^{-1}}{(1-z^{-1})(1-e^{-aT}z^{-1})}$
9.	$\frac{b-a}{(s+a)(s+b)}$	$e^{-at}-e^{-bt}$	$e^{-akT}-e^{-bkT}$	$\frac{(e^{-aT}-e^{-bT})z^{-1}}{(1-e^{-aT}z^{-1})(1-e^{-bT}z^{-1})}$
10.	$\frac{1}{(s+a)^2}$	te^{-at}	kTe^{-akT}	$\frac{Te^{-aT}z^{-1}}{(1-e^{-aT}z^{-1})^2}$
11.	$\frac{s}{(s+a)^2}$	$(1-at)e^{-at}$	$(1-akT)e^{-akT}$	$\frac{1-(1+aT)e^{-aT}z^{-1}}{(1-e^{-aT}z^{-1})^2}$
12.	$\frac{2}{(s+a)^3}$	t^2e^{-at}	$(kT)^2e^{-akT}$	$\frac{T^2e^{-aT}(1+e^{-aT}z^{-1})z^{-1}}{(1-e^{-aT}z^{-1})^3}$
13.	$\frac{a^2}{s^2(s+a)}$	$at-1+e^{-at}$	$akT-1+e^{-akT}$	$\frac{[(aT-1+e^{-aT})+(1-e^{-aT}-aTe^{-aT})z^{-1}]z^{-1}}{(1-z^{-1})^2(1-e^{-aT}z^{-1})}$
14.	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\sin \omega t$	$\sin \omega kT$	$\frac{z^{-1}\sin \omega T}{1-2z^{-1}\cos \omega T+z^{-2}}$
15.	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos \omega t$	$\cos \omega kT$	$\frac{1-z^{-1}\cos \omega T}{1-2z^{-1}\cos \omega T+z^{-2}}$
16.	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\sin \omega t$	$e^{-akT}\sin \omega kT$	$\frac{e^{-aT}z^{-1}\sin \omega T}{1-2e^{-aT}z^{-1}\cos \omega T+e^{-2aT}z^{-2}}$
17.	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\cos \omega t$	$e^{-akT}\cos \omega kT$	$\frac{1-e^{-aT}z^{-1}\cos \omega T}{1-2e^{-aT}z^{-1}\cos \omega T+e^{-2aT}z^{-2}}$
18.	–	–	a^k	$\frac{1}{1-az^{-1}}$
19.	–	–	a^k $k = 1, 2, 3, \ldots$	$\frac{z^{-1}}{1-az^{-1}}$
20.	–	–	ka^{k-1}	$\frac{z^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$
21.	–	–	k^2a^{k-1}	$\frac{z^{-1}(1+az^{-1})}{(1-az^{-1})^3}$
22.	–	–	k^3a^{k-1}	$\frac{z^{-1}(1+4az^{-1}+a^2z^{-2})}{(1-az^{-1})^4}$
23.	–	–	k^4a^{k-1}	$\frac{z^{-1}(1+11az^{-1}+11a^2z^{-2}+a^3z^{-3})}{(1-az^{-1})^5}$
24.	–	–	$a^k \cos k\pi$	$\frac{1}{1+az^{-1}}$

$x(t) = 0$ for $t < 0$
$x(kT) = x(k) = 0$ for $k < 0$
Unless otherwise noted, $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$

$$\mathscr{Z}\{x(k)\} = X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k) z^{-k}$$

Important properties and theorems of the Z-transform

	$x(t)$ or $x(k)$	**$\mathcal{Z}\{x(t)\}$ or $\mathcal{Z}\{x(k)\}$**
1.	$ax(t)$	$aX(z)$
2.	$ax_1(t)+bx_2(t)$	$aX_1(z)+bX_2(z)$
3.	$x(t+T)$ or $x(k+1)$	$zX(z)-zx(0)$
4.	$x(t+2T)$	$z^2X(z)-z^2x(0)-zx(T)$
5.	$x(k+2)$	$z^2X(z)-z^2x(0)-zx(1)$
6.	$x(t+kT)$	$z^kX(z)-z^kx(0)-z^{k-1}x(T)-\ldots-zx(kT-T)$
7.	$x(t-kT)$	$z^{-k}X(z)$
8.	$x(n+k)$	$z^kX(z)-z^kx(0)-z^{k-1}x(1)-\ldots-zx(k1-1)$
9.	$x(n-k)$	$z^{-k}X(z)$
10.	$tx(t)$	$-Tz\dfrac{d}{dz}X(z)$
11.	$kx(k)$	$-z\dfrac{d}{dz}X(z)$
12.	$e^{-at}x(t)$	$X(ze^{aT})$
13.	$e^{-ak}x(k)$	$X(ze^{a})$
14.	$a^kx(k)$	$X\left(\dfrac{z}{a}\right)$
15.	$ka^kx(k)$	$-z\dfrac{d}{dz}X\left(\dfrac{z}{a}\right)$
16.	$x(0)$	$\lim\limits_{z\to\infty} X(z)$ if the limit exists
17.	$x(\infty)$	$\lim\limits_{z\to 1}\left[\left(1-z^{-1}\right)X(z)\right]$ if $\left(1-z^{-1}\right)X(z)$ is analytic on and outside the unit circle
18.	$\nabla x(k)=x(k)-x(k-1)$	$\left(1-z^{-1}\right)X(z)$
19.	$\Delta x(k)=x(k+1)-x(k)$	$(z-1)X(z)-zx(0)$
20.	$\sum\limits_{k=0}^{n} x(k)$	$\dfrac{1}{1-z^{-1}}X(z)$
21.	$\dfrac{\partial}{\partial a}x(t,a)$	$\dfrac{\partial}{\partial a}X(z,a)$
22.	$k^mx(k)$	$\left(-z\dfrac{d}{dz}\right)^m X(z)$
23.	$\sum\limits_{k=0}^{n} x(kT)y(nT-kT)$	$X(z)Y(z)$
24.	$\sum\limits_{k=0}^{\infty} x(k)$	$X(1)$