Formelsammlung MRT + A

Michi Fallegger, Mario Felder

4. Januar 2015

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Matrizen

1.1 Grundlagen

$m \times n$ Matrize

$$A = [a_{jk}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

m = Zeilen
n = Spalten

Vektoren

Zeilenvektor:

$$\underline{a} = [a_j] = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_m \end{bmatrix}$$

Spaltenvektor:

$$\underline{b} = [b_k] = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Transponierte

$$A^T = [a_{kj}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & & a_{m2} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$A^T = A$ ist eine symmetrische Matrix
$A^T = -A$ ist eine schief-symmetrische Matrix

Addition

Ist nur für Matrizen derselben Dimension $A = [a_{jk}], B = [b_{jk}]$ definiert.

$$C = A + B = [a_{jk} + b_{jk}]$$

Multiplikation

Definition: Das Produkt $C = A \cdot B$ einer $m \times n$-Matrix $A = [a_{jk}]$ und einer $r \times p$-Matrix $B = [b_{jk}]$ ist nur defniert wenn $r = n$ ist.

$$c_{jk} = \sum_{l=1}^{n} a_{jl} \cdot b_{lk} = a_{j1}b_{1k} + a_{j2}b_{2k} + \ldots + a_{jn}b_{nk}$$

wobei $j = 1, 2, \ldots, m$ und $k = 1, 2, \ldots, p$.

$$C = A \cdot B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & & b_{2p} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \ldots & b_{np} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + \ldots + a_{1n}b_{n1} & \ldots & a_{11}b_{1n} + \ldots + a_{1n}b_{nn} \\ a_{21}b_{11} + \ldots + a_{2n}b_{n1} & & a_{21}b_{1n} + \ldots + a_{2n}b_{nn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}b_{11} + \ldots + a_{mn}b_{n1} & \ldots & a_{m1}b_{1n} + \ldots + a_{mn}b_{nn} \end{bmatrix}$$

Transponierung eines Produkts:

$$(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$$

Spezielle Matrizen

Eine Quadratische Matrix, deren Elemente oberhalb der Hauptdiagonale sämtlich Null sind, heisst **untere Dreieckmatrix**.
Wenn die Elemente unterhalb der Hauptdiagonalen sämtlich Null sind, dann heisst sie **obere Dreieckmatrix**.

$$T_1 = \begin{bmatrix} t_{11} & 0 & 0 \\ t_{21} & t_{22} & 0 \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{bmatrix} \qquad T_2 = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{21} & t_{31} \\ 0 & t_{22} & t_{32} \\ 0 & 0 & t_{33} \end{bmatrix}$$

Ene quadratische Matrix $A = [a_{jk}]$ deren Elemente unter- und oberhalb der Hauptdiagonalen sämtlich null sind, heisst **Diagonalmatrix**. ($a_{jk} = 0$ für alle $j \neq k$)

$$D = \begin{bmatrix} d_{11} & 0 & 0 \\ 0 & d_{22} & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} \end{bmatrix} \qquad S = \begin{bmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$$

S ist eine **Skalarmatrix**, da: $A \cdot S = S \cdot A = cA$

Eine Skalarmatrix, deren Elemente der Hauptdiagonale sämtlich 1 sind, heisst **Einheitsmatrix**.

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Orthogonal

Vektor $\underline{\mathrm{a}}$ ist zum Vektor $\underline{\mathrm{b}}$ orthogonal, wenn das Skalarprodukt $\underline{a} \bullet \underline{b} = 0$ ist. Dann ist auch $\underline{\mathrm{b}}$ orthogonal zu $\underline{\mathrm{a}}$ und wir sprechen daher von zwei orthogonalen Vektoren $\underline{\mathrm{a}}$ und $\underline{\mathrm{b}}$.

Zwei orthogonale Nichtnullvektoren sind aufeinander senkrecht ($\cos(\alpha) = 0, \alpha = \frac{\pi}{2}$).

Determinante

$$D = \det A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = a \cdot d - b \cdot c$$

Wichtige Eigenschaften:

1. $\det A = \det A^T$
2. Sind zwei Zeilen oder Spalten linear abhängig, so ist die Determinante $= 0$
3. Vertauscht man zwei Zeilen oder Spalten, so wird die Determinante mit -1 multipliziert
4. $\det AB = \det BA = \det A \cdot \det B$

Lineares Gleichungssystem:

$$A \cdot \underline{x} = \underline{b}$$

hat die Lösungen: $x_1 = \frac{D_1}{D}$, $x_2 = \frac{D_2}{D}$, wobei $D = \det A$ und

$$D_1 = \begin{bmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{bmatrix} \qquad D_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{bmatrix}$$

1.2 Rang

1.2.1 Rang von Vektoren

Beschreibt die lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit von Vektoren. Eine Menge von m Vektoren $a_1, a_2, ..., a_m$ (mit derselben Anzahl von Komponenten) bildet die folgende lineare Kombination:

$$c_1 a_1 + c_2 a_2 + ... + c_m a_m$$

Daraus folgt:

$$c_1 a_1 + c_2 a_2 + ... + c_m a_m = 0$$

Falls die einzige Möglichkeit darin besteht, $c = 0$ zu setzten um die Gleichung zu erfüllen, sind die Vektoren linear unabhängig.

Zwei Vektoren in der Ebene sind linear abhängig, wenn sie parallel sind.

$$\underline{a} - c \cdot \underline{b} = 0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Drei Vektoren in Anschauungsraum (3D) sind linear abhängig, wenn sie in einer Ebene liegen.

$$c_1 \cdot \underline{a_1} + c_2 \cdot \underline{a_2} + c_3 \cdot \underline{a_3} = 0$$

1.2.2 Rang einer Matrix

Die maximale Zahl der linear unabhängigen Zeilenvektoren einer Matrix $\underline{A}$ heisst Rang. Es gilt:

$$r = Rang(A) \leq m, n$$

Vorgehen (Horizontal):

1. Erste Zeile (oder die mit der tiefsten Zahlen) stehen lassen.
2. Dieser Schritt für alle Zeilen machen:

$$c_j \cdot a_{11} + a_{j1} = 0 \qquad \rightarrow \qquad c_j \cdot \begin{bmatrix} a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \end{bmatrix}$$

3. Entstehen in der Matrix horizontale gleiche Vektoren, so sind diese linear abhängig.

1.3 Adjunkte

Ist nur für quadratische Matrizen definiert.

$$adj(A) = Cof(A)^T = \tilde{A}^T = \begin{bmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} & \dots & \tilde{a}_{1n} \\ \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{22} & & \tilde{a}_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \tilde{a}_{n1} & \tilde{a}_{n2} & \dots & \tilde{a}_{nn} \end{bmatrix}^T$$

An der Stelle (j, k) steht der Cofaktor $\tilde{a}_{jk}$, welcher sich folgendermassen berechnet:

$$\tilde{a}_{jk} = (-1)^{j+k} \cdot M_{jk} = (-1)^{j+k} \cdot \det \begin{bmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,k-1} & a_{1,k+1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j-1,1} & \dots & a_{j-1,k-1} & a_{j-1,k+1} & \dots & a_{j-1,n} \\ a_{j+1,1} & \dots & a_{j+1,k-1} & a_{j+1,k+1} & \dots & a_{j+1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,k-1} & a_{n,k+1} & \dots & a_{n,n} \end{bmatrix}$$

2×2 Matrix

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Adjunkte:

$$adj(A) = \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

1.4 Inverse einer Matrix

Ist nur für quadratische Matrizen definiert.
Die Inverse einer $n \times n$-Matrix ist gegeben durch:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot adj(A) = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{bmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{21} & \dots & \tilde{a}_{n1} \\ \tilde{a}_{12} & \tilde{a}_{22} & & \tilde{a}_{n2} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \tilde{a}_{1n} & \tilde{a}_{2n} & \dots & \tilde{a}_{nn} \end{bmatrix}$$

Es gilt:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$$

1.5 Eigenwerte und Eigenvektoren

$$A \cdot \underline{x} = \lambda \cdot \underline{x}$$

Derjenige Wert λ für welchen die obige Gleichung eine Lösung $\underline{x} \neq 0$ hat heisst der Eigenwert der Matrix $\underline{\text{A}}$.
Die korrespondierende Lösung $\underline{\text{x}} \neq 0$ heisst der Eigenvektor der Matrix A.

$$A \cdot \underline{x} = \lambda \cdot \underline{x}$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Homogenes, lineares Gleichungssystem

$$(A - \lambda \cdot I)\underline{x} = \underline{0}$$

Lösung nach Cramer: Eigenwert bestimmen

$$D(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0 \qquad \lambda I = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$$

Eigenvektor

$$\underline{x} = A - \lambda \cdot I$$

Kapitel 2

Zustandsraum

2.1 Zustandsvariabel

Es gibt allgemeine Untersuchungen über das Systemverhalten, beispielsweise über die Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit von Systemen, die sich nur im Zeitbereich durchführen lassen.
Aus diesem Grund ist es angebracht im Zeitbereich zu bleiben. Es ist zweckmässig, die auftretende Differentialgleichung durch Einführen von Zwischengrössen in Systeme von Differentialgleichungen erster Ordnung zu verwandeln.

$$a_n \cdot y^n + a_{n-1} \cdot y^{n-1} + ... + a_2\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_0 y = b_0 u \qquad a_n \neq 0$$

Dann kann man als Zwischengrössen $x_1, x_2, ..., x_n$ die Ausgangsgrösse y und ihre Ableitungen nehmen:

$$x_1 = y, \quad x_2 = \dot{y}, \quad x_3 = \ddot{y}, ..., \quad x_{n-1} = y^{n-2} \quad x_n = y^{n-1}$$

Aus der Definition folgen die einfachen Differentialgleichungen.:

$$\dot{x}_1 = x_2, \qquad \dot{x}_2 = x_3 \qquad , ..., \qquad \dot{x}_{n-1} = x_n$$

2.1.1 Laplace-Tranformation auf Zustandsgleichung

Zustandsdifferentialgleichung:

$$\dot{x} = A \cdot x + b \cdot u$$

Laplace-Tranformation:

$$\begin{aligned} sX(s) - x_0 &= A \cdot X(s) + b \cdot U(s) \\ X(s) &= (sI - A)^{-1} \cdot b \cdot U(s) + (sI - A)^{-1} x_0 \end{aligned}$$

Die inverse Matrix zu $sI - A$ existiert nur wenn $\det(sI - A) \neq 0$:

$$\det(sI - A) = \begin{bmatrix} s - a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & s - a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & s - a_{nn} \end{bmatrix}$$

2.2 Regelungsnormalform der Zustandsgleichung

$$Y(s) = G(s) \cdot U(s)$$

$$G(s) = \frac{Z(s)}{N(s)} = \frac{b_0 + b_1 s + b_2 s^2 + ... + b_n s^n}{a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + ... + a_n s^n}$$

2.2.1 Regelungsnormalform

$$\dot{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -\frac{a_0}{a_n} & -\frac{a_1}{a_n} & -\frac{a_2}{a_n} & \dots & -\frac{a_{n-1}}{a_n} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \cdot x + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{1}{a_n} \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}} \cdot u$$

$$y = \underbrace{\begin{bmatrix} b_0 - a_0 \cdot \frac{b_n}{a_n} & b_1 - a_1 \cdot \frac{b_n}{a_n} & \dots & b_{n-1} - a_{n-1} \cdot \frac{b_n}{a_n} \end{bmatrix}}_{c^T} \cdot x + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{b_n}{a_n} \end{bmatrix}}_{\mathbf{d}} \cdot u$$

2.2.2 Beobachtungsnormalform

$$\dot{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & -\frac{a_0}{a_n} \\ 1 & 0 & 0 & \dots & -\frac{a_1}{a_n} \\ 0 & 1 & 0 & \dots & -\frac{a_2}{a_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -\frac{a_{n-1}}{a_n} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \cdot x + \underbrace{\begin{bmatrix} b_0 - b_n \frac{a_0}{a_n} \\ b_1 - b_n \frac{a_1}{a_n} \\ b_2 - b_n \frac{a_2}{a_n} \\ \vdots \\ b_{n-1} - b_n \frac{a_{n-1}}{a_n} \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}} \cdot u$$

$$y = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{a_n} \end{bmatrix}}_{c^T} \cdot x + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{b_n}{a_n} \end{bmatrix}}_{\mathbf{d}} \cdot u$$

2.2.3 Jordanische Normalform

- Bevorzugte Verwendung, wenn Pole vom System bekannt sind
- System ist vollständig entkoppelt, wenn alle Pole reell und einfach vorkommen
- A ist Diagonalmatrix mit λ_i: Pole

Es gilt:

$$Y(s) = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{r_i}{s - \lambda_i} + r_0 \right) \cdot U(s)$$

Dabei ist $r_0 \neq 0$ wenn Zähler und Nenner von $G(s)$ den gleichen Grad haben.

$$\dot{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \cdot x + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}} \cdot u$$

$$y = \underbrace{\begin{bmatrix} r_1 & r_2 & \dots & r_n \end{bmatrix}}_{c^T} \cdot x + \underbrace{\begin{bmatrix} r_0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{d}} \cdot u$$

Mehrfachpole

Wenn λ_1 ein m-facher Pol ist gilt:

$$Y(s) = \left(\frac{r_1}{s-\lambda_1} + \ldots + \frac{r_m}{(s-\lambda_m)^m} + \sum_{i=m+1}^{n} \frac{r_i}{s-\lambda_i} + r_0 \right) \cdot U(s)$$

Für die Matrix bedeutet dies:

$$\dot{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda_1 & & & & & & \\ 1 & \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & \ddots & & & & \\ & & 1 & \lambda_1 & & & \\ & & & & \lambda_{m+1} & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & \lambda_n \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \cdot x + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}} \cdot u$$

$$y = \underbrace{\begin{bmatrix} r_1 & \ldots & r_m & r_{m+1} & \ldots & r_n \end{bmatrix}}_{c^T} \cdot x + \underbrace{\begin{bmatrix} r_0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{d}} \cdot u$$

2.3 Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit

2.3.1 Steuerbarkeit

Das System

$$\dot{x} = A \cdot x + b \cdot u$$
$$y = c^T \cdot x + d \cdot u$$

heisst steuerbar, wenn sein Zustandspunkt x durch geeignete Wahl des Steuervektors u in endlicher Zeit aus einem beliebigen Anfangszustand x_0 in den Endzustnad 0 bewegt werden kann.
Es ist somit steuerbar, wenn die Vektoren $b, Ab, \ldots, A^{n-1}b$ linear unabhängig sind. ($Rang(Q_S) = n$ oder $\det(Q_S) \neq 0$)

Steuerbarkeits-Matrix ($n \times n$):

$$Q_S = \begin{bmatrix} b & A \cdot b & \ldots & A^{n-1} \cdot b \end{bmatrix}$$

2.3.2 Beobachtbarkeit

Das System

$$\dot{x} = A \cdot x + b \cdot u$$
$$y = c^T \cdot x + d \cdot u$$

heisst beobachtbar, wenn dem bekannten $u(t)$ aus der Messung von $y(t)$ über eine endliche Zeitspanne der Anfangszustand $x(t_0)$ eindeutig ermittelt werden kann, ganz gleich wo dieser liegt.

Das System ist beobachtbar, wenn die Beobachtungsmatrix Q_B ($n \times n$ Matrix) regulär ist ($Rang(Q_B) = n$ oder $\det(Q_B) \neq 0$).

$$Q_B = \begin{bmatrix} c^T \\ c^T \cdot A \\ \vdots \\ c^T \cdot A^{n-1} \end{bmatrix}$$

2.4 Transformation

2.4.1 Transformation in Regelungsnormalform (Steuernormalform)

Ein Übertragungssystem

$$\dot{x} = A \cdot x + b \cdot u$$

wird mit der Transformation

$$z = T_R \cdot x$$

in die Regelungsnormalform

$$\dot{x} = A_R \cdot x + b_R \cdot u$$

überführt. Die Matrizen werden folgendermassen transformiert:

$$A_R = T_R \cdot A \cdot {T_R}^{-1}$$
$$b_R = T_R \cdot b$$
$${c^T}_R = c^T \cdot {T_R}^{-1}$$
$$d_R = d$$

Die Transformationsmatrix T_R $(n \times n)$ wird wie folgt berechnet:

$$T_R = \begin{bmatrix} q_{S_n}^T \\ q_{S_n}^T \cdot A \\ \vdots \\ q_{S_n}^T \cdot A^{n-1} \end{bmatrix}$$

wobei $q_{S_n}^T$ der n-te Zeilenvektor der inversen Steuerbarkeitsmatrix ${Q_S}^{-1}$ ist

$$ {Q_S}^{-1} = \begin{bmatrix} q_{S_{11}} & q_{S_{12}} & \cdots & q_{S_{1n}} \\ q_{S_{21}} & q_{S_{22}} & \cdots & q_{S_{2n}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{S_{n1}} & q_{S_{n2}} & \cdots & q_{S_{nn}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{S_1} \\ q_{S_2} \\ \vdots \\ q_{S_n} \end{bmatrix}$$

2.4.2 Transformation auf Beobachtungsnormalform

Ein Übertragungssystem

$$\dot{x} = A \cdot x + b \cdot u$$

wird mit der Transformation

$$z = T_B \cdot x$$

in die Beobachtungsnormalform

$$\dot{x} = A_B \cdot x + b_B \cdot u$$

überführt. Die Matrizen werden folgendermassen transformiert:

$$\begin{aligned} A_B &= T_B \cdot A \cdot {T_B}^{-1} \\ b_B &= T_B \cdot b \\ {c^T}_B &= c^T \cdot {T_B}^{-1} \\ d_B &= d \end{aligned}$$

Die Transformationsmatrix T_B $(n \times n)$ wird wie folgt berechnet:

$$T_B = \begin{bmatrix} q_{B_n} & A \cdot q_{B_n} & .. & A^{n-1} \cdot q_{B_n} & \end{bmatrix}$$

wobei q_{B_n} der n-te Spaltenvektor der inversen Beobachtungsmatrix ${Q_B}^{-1}$ ist.

$$
{Q_B}^{-1} = \begin{bmatrix} q_{B_{11}} & q_{B_{12}} & \dots & q_{B_{1n}} \\ q_{B_{21}} & q_{B_{22}} & \dots & q_{B_{2n}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{B_{n1}} & q_{B_{n2}} & \dots & q_{B_{nn}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{B_1} & q_{B_2} & \dots & q_{B_n} \end{bmatrix}
$$

2.4.3 Tranformation auf Jordansche Normalform

Ein Übertragungssystem

$$
\dot{x} = A \cdot x + b \cdot u
$$

wird mit der Transformation

$$
x = V \cdot z
$$

in die Jordansche Normalform

$$
\dot{x} = A_J \cdot x + b_J \cdot u
$$

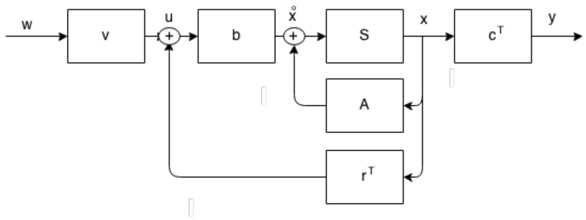
überführt. Die Matrizen werden folgendermassen Transformiert:

$$
\begin{aligned}
A_J &= V^{-1} \cdot A \cdot V \\
b_J &= V^{-1} \cdot b \\
{c^T}_J &= c^T \cdot V \\
d_J &= d
\end{aligned}
$$

Die Transformationsmatrix V $(n \times n)$ besteht aus den Eigenvektoren v_n der Matrix A:

$$
V = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & \dots & v_{1n} \\ v_{21} & v_{22} & \dots & v_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{n1} & v_{n2} & \dots & v_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_n \end{bmatrix}
$$

2.5 Reglersynthese im Zustandsraum



$$A_{CL} = A - b \cdot r^T \qquad A_R = T_R \cdot A \cdot T_R^{-1}$$

$$A_{R,CL} = A_R - b_R \cdot r_R^T \qquad r_R^T = \begin{bmatrix} r_{1,R} & r_{2,R} & r_{3,R} & r_{n,R} \end{bmatrix}$$

Daraus folgt:

$$A_{Cl,R} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & .. & 0 \\ 0 & 0 & 1 & .. & 0 \\ .. & .. & .. & .. & .. \\ 0 & 0 & 0 & .. & 1 \\ \underbrace{-\frac{a_0}{a_n} - r_{1,R}}_{-c^{n-1}} & -\frac{a_1}{a_n} - r_{2,R} & -\frac{a_2}{a_n} - r_{3,R} & .. & -\frac{a_{n-1}}{a_n} - r_{n,R} \end{bmatrix}$$

Diese Matrix kann gerade in das Istpolynom überführt werden.
Istpolynom:

$$p_{Cl,r}(s) = s^n + \underbrace{(a_{n-1} + r_{n,R})}_{c^{n-1}} \cdot s^{n-1} + ... + (a_1 + r_{2,R}) a_1 \cdot s + (a_0 + r_{1,r})$$

Das Sollpolynom ist durch die Nullstellen vorgegeben:

$$p(s) = s^n + p_{n-1} \cdot s^{n-1} + ... + p_1 \cdot s + p_0$$

Koeffizientenvergleich ergibt nun:

$$r_{1,R} = p_0 - a_0$$

$$r_{2,R} = p_1 - a_1$$

$$r_{n,R} = p_{n-1} - a_{n-1}$$

Durch die Transformation in RNF der letzten Zeile von Q_s^{-1} (T) lässt sich die Matrix umwandeln.

$$r^T = r_R^T \cdot T$$

2.5.1 Vorfilter / Vorverstärker

Der Vorfilter/Vorverstärker gewährleistet, dass im stationärem Zustand y mit dem gewünschtem, konstantem Vektor w übereinstimmt.

$$v = [c^T(b \cdot r^T - A)^{-1} \cdot b]^{-1}$$

2.5.2 Beobachter

Beobachter ist ein Nachbau des System für den Rechner. Er beinhaltet alle Punkte des realen System. Dafür werden keine Sensoren benötigt. Die Variablen werden geschätzt.

Das h muss derart bestimmt werden, dass $eigW(A - h_c^T) < 0$ sind.

Falls das System in BNF vorliegt, gilt:

$$A_B = T_B^{-1} \cdot A \cdot T_b \qquad c_B^T = c^T \cdot T_B = [0\ 0\ ..\ 1] \qquad b_B = T_B^{-1} \cdot b$$

$$A_B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & .. & -\frac{a_0}{a_n} \\ 1 & 0 & 0 & .. & -\frac{a_1}{a_n} \\ 0 & 1 & 0 & .. & -\frac{a_2}{a_n} \\ .. & .. & .. & .. & .. \\ 0 & 0 & .. & 1 & -\frac{a_{n-1}}{a_n} \end{bmatrix}$$

Folgende Gleichung wird für die Bestimmung des Istpolynoms benötigt. Da $a_n = 1$, kann folgende Vereinfachung gemacht werden:

$$\dot{e}_{x,B} = (A_B - h_B \cdot c_B^T) \cdot e_{x,B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & .. & -a_0 - h_{B,1} \\ 1 & 0 & 0 & .. & -a_1 - h_{B,2} \\ 0 & 1 & 0 & .. & -a_2 - h_{B,3} \\ .. & .. & .. & .. & .. \\ 0 & 0 & .. & 1 & -a_{n-1} - h_{B,n} \end{bmatrix}$$

Istpolynom:

$$u(s) = s^n + (a_{n-1} + h_{B,n})s^{n-1} + ... + (a_1 + h_{B,2})s + (a_0 + h_{B,1})$$

Sollpolynom:

$$p(s) = s^n + p_{n-1}s^{n-1} + ... + p_1 s + p_0$$

Aus diesen beiden Gleichungen kann via Koeffizientenvergleich die Matrix h_B bestimmt werden.

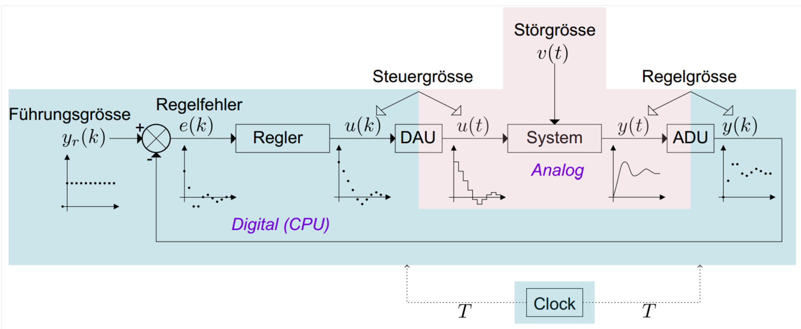
$$h_{B,1} = p_0 - a_0 \qquad h_{B,2} = p1 - a1 \qquad etc.$$

$$h_B = p - a$$

Kapitel 3

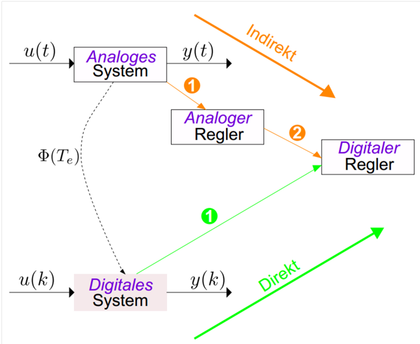
Digitale Regelung

3.1 Schematische Darstellung



$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} \qquad \rightarrow \qquad H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)}$$

3.2 Direkter/Indirekter Regler



3.3 Digitaler PID

Wir haben:

$$u(t) = u_{k,a}(e(t)) + u_{i,a}(e(t)) + u_{d,a}(e(t))$$

Wir wollen:

$$u(k) = u_{k,a}(e(k)) + u_{i,a}(e(k)) + u_{d,a}(e(k))$$

3.3.1 I Anteil

Implementierbare Differenzgleichungen für I-Anteil:
Rückwärts-Rechteckregel:

$$u_{i,d,r}(e(k))) = u_{i,d,r}(e(k-1)) + \frac{K_a}{T_{i,a}} e(k) \cdot T$$

Trapezregel:

$$u_{i,d,r}(e(k))) = u_{i,d,r}(e(k-1)) + \frac{K_a}{T_{i,a}} \cdot \frac{e(k) + e(k-1)}{2} \cdot T$$

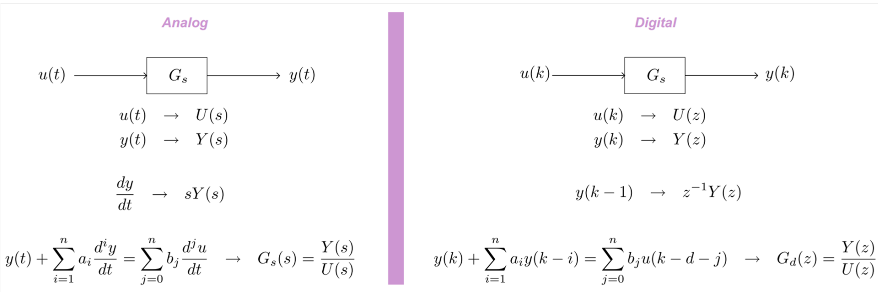
3.3.2 D Anteil

$$u_{d,d}(e(k)) = K_a T_{d,a} \cdot \frac{e(k) - e(k-1)}{T}$$

3.3.3 Antireset-Windup

$$u_{nosat}(k) = u_p(k) + u_i(k-1) + u(d)$$
$$if(u_{nosat}(k) > u_{sat,max}) \qquad u(k) = u_{sat,max}$$
$$elseif(u_{nosat}(k) < u_{sat,min})$$
$$u(k) = u_{sat,min}$$
$$u_i(k) = u_i(k-1) + K_a\frac{T}{Ti} \cdot \frac{e(k)+e(k-1)}{2} + \frac{T}{T_r}(u(k) - u(k)_{nosat})$$

3.4 z-Transformation



3.4.1 Antworten

Impulsantwort:

$$Z\{I_i(k)\} = z^{-l} \qquad \begin{cases} 1 & 1 \text{ if k 0 l} \\ 2 & 0 \text{ if k} \neq \text{l} \end{cases}$$

Sprungantwort:

$$Z\{I_i(k)\} = \sum_{i=l}^{\infty} z^{-i} = u^{-l}\frac{z}{z-1} \qquad \begin{cases} 1 & 1 \text{ if k} \geq \text{l} \\ 2 & 0 \text{ if k} < \text{l} \end{cases}$$

Kapitel 4

Umformungstabelle

	$X(s)$	$x(t)$	$x(kT)$ or $x(k)$	$X(z)$
1.	–	–	Kronecker delta $\delta_0(k)$ $1 \quad k = 0$ $0 \quad k \neq 0$	1
2.	–	–	$\delta_0(n-k)$ $1 \quad n = k$ $0 \quad n \neq k$	z^{-k}
3.	$\frac{1}{s}$	$1(t)$	$1(k)$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$
4.	$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}	e^{-akT}	$\frac{1}{1-e^{-aT}z^{-1}}$
5.	$\frac{1}{s^2}$	t	kT	$\frac{Tz^{-1}}{\left(1-z^{-1}\right)^2}$
6.	$\frac{2}{s^3}$	t^2	$(kT)^2$	$\frac{T^2z^{-1}\left(1+z^{-1}\right)}{\left(1-z^{-1}\right)^3}$
7.	$\frac{6}{s^4}$	t^3	$(kT)^3$	$\frac{T^3z^{-1}\left(1+4z^{-1}+z^{-2}\right)}{\left(1-z^{-1}\right)^4}$
8.	$\frac{a}{s(s+a)}$	$1-e^{-at}$	$1-e^{-akT}$	$\frac{\left(1-e^{-aT}\right)z^{-1}}{\left(1-z^{-1}\right)\left(1-e^{-aT}z^{-1}\right)}$
9.	$\frac{b-a}{(s+a)(s+b)}$	$e^{-at}-e^{-bt}$	$e^{-akT}-e^{-bkT}$	$\frac{\left(e^{-aT}-e^{-bT}\right)z^{-1}}{\left(1-e^{-aT}z^{-1}\right)\left(1-e^{-bT}z^{-1}\right)}$
10.	$\frac{1}{(s+a)^2}$	te^{-at}	kTe^{-akT}	$\frac{Te^{-aT}z^{-1}}{\left(1-e^{-aT}z^{-1}\right)^2}$
11.	$\frac{s}{(s+a)^2}$	$(1-at)e^{-at}$	$(1-akT)e^{-akT}$	$\frac{1-(1+aT)e^{-aT}z^{-1}}{\left(1-e^{-aT}z^{-1}\right)^2}$
12.	$\frac{2}{(s+a)^3}$	t^2e^{-at}	$(kT)^2e^{-akT}$	$\frac{T^2e^{-aT}\left(1+e^{-aT}z^{-1}\right)z^{-1}}{\left(1-e^{-aT}z^{-1}\right)^3}$
13.	$\frac{a^2}{s^2(s+a)}$	$at-1+e^{-at}$	$akT-1+e^{-akT}$	$\frac{\left[\left(aT-1+e^{-aT}\right)+\left(1-e^{-aT}-aTe^{-aT}\right)z^{-1}\right]z^{-1}}{\left(1-z^{-1}\right)^2\left(1-e^{-aT}z^{-1}\right)}$
14.	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\sin \omega t$	$\sin \omega kT$	$\frac{z^{-1}\sin\omega T}{1-2z^{-1}\cos\omega T+z^{-2}}$
15.	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos \omega t$	$\cos \omega kT$	$\frac{1-z^{-1}\cos\omega T}{1-2z^{-1}\cos\omega T+z^{-2}}$
16.	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\sin \omega t$	$e^{-akT}\sin \omega kT$	$\frac{e^{-aT}z^{-1}\sin\omega T}{1-2e^{-aT}z^{-1}\cos\omega T+e^{-2aT}z^{-2}}$
17.	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\cos \omega t$	$e^{-akT}\cos \omega kT$	$\frac{1-e^{-aT}z^{-1}\cos\omega T}{1-2e^{-aT}z^{-1}\cos\omega T+e^{-2aT}z^{-2}}$
18.	–	–	a^k	$\frac{1}{1-az^{-1}}$
19.	–	–	a^k $k = 1, 2, 3, \ldots$	$\frac{z^{-1}}{1-az^{-1}}$
20.	–	–	ka^{k-1}	$\frac{z^{-1}}{\left(1-az^{-1}\right)^2}$
21.	–	–	k^2a^{k-1}	$\frac{z^{-1}\left(1+az^{-1}\right)}{\left(1-az^{-1}\right)^3}$
22.	–	–	k^3a^{k-1}	$\frac{z^{-1}\left(1+4az^{-1}+a^2z^{-2}\right)}{\left(1-az^{-1}\right)^4}$
23.	–	–	k^4a^{k-1}	$\frac{z^{-1}\left(1+11az^{-1}+11a^2z^{-2}+a^3z^{-3}\right)}{\left(1-az^{-1}\right)^5}$
24.	–	–	$a^k\cos k\pi$	$\frac{1}{1+az^{-1}}$

$x(t) = 0$ for $t < 0$
$x(kT) = x(k) = 0$ for $k < 0$
Unless otherwise noted, $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$

$$\mathscr{Z}\{x(k)\} = X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k) z^{-k}$$

Important properties and theorems of the Z-transform

	$x(t)$ or $x(k)$	$\mathcal{Z}\{x(t)\}$ or $\mathcal{Z}\{x(k)\}$
1.	$ax(t)$	$aX(z)$
2.	$ax_1(t)+bx_2(t)$	$aX_1(z)+bX_2(z)$
3.	$x(t+T)$ or $x(k+1)$	$zX(z)-zx(0)$
4.	$x(t+2T)$	$z^2X(z)-z^2x(0)-zx(T)$
5.	$x(k+2)$	$z^2X(z)-z^2x(0)-zx(1)$
6.	$x(t+kT)$	$z^kX(z)-z^kx(0)-z^{k-1}x(T)-\ldots-zx(kT-T)$
7.	$x(t-kT)$	$z^{-k}X(z)$
8.	$x(n+k)$	$z^kX(z)-z^kx(0)-z^{k-1}x(1)-\ldots-zx(k1-1)$
9.	$x(n-k)$	$z^{-k}X(z)$
10.	$tx(t)$	$-Tz\frac{d}{dz}X(z)$
11.	$kx(k)$	$-z\frac{d}{dz}X(z)$
12.	$e^{-at}x(t)$	$X(ze^{aT})$
13.	$e^{-ak}x(k)$	$X(ze^{a})$
14.	$a^kx(k)$	$X\left(\frac{z}{a}\right)$
15.	$ka^kx(k)$	$-z\frac{d}{dz}X\left(\frac{z}{a}\right)$
16.	$x(0)$	$\lim_{z\to\infty} X(z)$ if the limit exists
17.	$x(\infty)$	$\lim_{z\to 1}\left[\left(1-z^{-1}\right)X(z)\right]$ if $\left(1-z^{-1}\right)X(z)$ is analytic on and outside the unit circle
18.	$\nabla x(k)=x(k)-x(k-1)$	$\left(1-z^{-1}\right)X(z)$
19.	$\Delta x(k)=x(k+1)-x(k)$	$(z-1)X(z)-zx(0)$
20.	$\sum_{k=0}^{n}x(k)$	$\frac{1}{1-z^{-1}}X(z)$
21.	$\frac{\partial}{\partial a}x(t,a)$	$\frac{\partial}{\partial a}X(z,a)$
22.	$k^mx(k)$	$\left(-z\frac{d}{dz}\right)^m X(z)$
23.	$\sum_{k=0}^{n}x(kT)y(nT-kT)$	$X(z)Y(z)$
24.	$\sum_{k=0}^{\infty}x(k)$	$X(1)$