Formelsammlung MRT + A

Michi Fallegger, Mario Felder

3. Oktober 2014

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Matrizen

1.1 Grundlagen

Matrize

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{3n} \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & a_{mn} \end{bmatrix}$$

A = [Spalten,Zeilen]

Transponierte

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{3n} \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & a_{mn} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & a_{n2} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{n3} \\ a_{1n} & a_{2m} & a_{3m} & a_{nm} \end{bmatrix}$$

Multiplikation

$\underline{A}*\underline{B}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} b_{11} & b_{21} \\ b_{12} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} * b_{11} + a_{21} * b_{12} & a_{11} * b_{21} + a_{21} * b_{22} \\ a_{12} * b_{11} + a_{22} * b_{12} & a_{12} * b_{21} + a_{22} * b_{22} \end{bmatrix}$

Orthogonal

Vektor $\underline{a}$ ist zum Vektor $\underline{b}$ orthogonal, wenn das Skalarprodukt $\underline{a}*\underline{b}= 0$

ist. Dann ist auch $\underline{b}$ orthogonal zu $\underline{a}$ und wir sprechen daher von zwei orthogonalen Vektoren $\underline{a}$ und $\underline{b}$.

Zwei orthogonale Nichtnullvektoren sind aufeinander senkrecht ($\cos(\alpha) = 0, \alpha = \frac{\pi}{2}$).

Determinante

$$det(A) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = a \cdot d - b \cdot c$$

1.2 Rang

1.2.1 Rang von Vektoren

Beschreibt die lineare AbhÃďngigkeit und UnabhÃďngigkeit von Vektoren.
Eine Menge von m Vektoren $a_1, a_2, ..., a_n$ (mit derselben Anzahl von Komponenten) bildet die folgende lineare Kombination:

$$c_1 a_1 + c_2 a_2 + ... + c_m a_m$$

Daraus folgt:

$$c_1 a_1 + c_2 a_2 + ... + c_m a_m = 0$$

Falls die einzige MÃűglichkeit darin besteht, $c =$ um die Gleichung zu erfÃijllen, sind die Vektoren linear unabhÃďngig.

Zwei Vektoren in der Ebene sind linear abhÃďngig, wenn sie parallel sind.

$$\underline{a} - c * \underline{b} = 0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Drei Vektoren in Anschauungsraum (3D) sind linear abhÃďngig, wenn sie in einer Ebene liegen.

$$c_1 \cdot \underline{a} + c_2 \cdot \underline{b} + c_3 \cdot \underline{c} = 0$$

1.2.2 Rang einer Matrix

Die maximale Zahl der linear unabhÃďngigen Zeilenvektoren einer Matrix A heisst Rang. Es gilt:

$$r = Rang(A) \leq m, n$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = Rang \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Vorgehen (Horizontal):
-1. Erste Zeile (oder die mit der tiefsten Zahlen) stehen lassen.
-2. Dieser Schritt fÃijr alle Zeilen machen:

$$c_1 \cdot a_{11} + a_{21} = 0 \qquad c \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

-3. Entstehen in der Matrix horizontale gleiche Vektoren, so sind diese linear abhÃďngig.

1.3 Eigenwerte und Eigenvektoren

1.3.1 Eigenwerte

$$A\underline{v} = \lambda\underline{v}$$

Derjenige Wert λ fÃijr welchen die obige Gleichung eine LÃűsung $x \neq 0$ hat heisst der Eigenwert der Matrix A.
Die korrespondierende LÃűsung x $\neq 0$ heisst der Eigenvektor der Matrix A.

$$A \cdot \underline{x} = \lambda \cdot \underline{x}$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Homogenes, lineares Gleichungssystem

$$(A - \lambda \cdot I)\underline{x} = \underline{0}$$

LÃűsung nach Cramer: Eigenwert bestimmen

$$D(\lambda) = det(A - \lambda I) = 0 \qquad \lambda I = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$$

Eigenvektor

$$\underline{v} = A - \lambda \cdot I$$