

# Formelsammlung MRT + A

Michi Fallegger, Mario Felder

7. November 2014



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Matrizen</b>	<b>5</b>
1.1	Grundlagen . . . . .	5
1.2	Rang . . . . .	6
1.2.1	Rang von Vektoren . . . . .	6
1.2.2	Rang einer Matrix . . . . .	7
1.3	Eigenwerte und Eigenvektoren . . . . .	7
1.3.1	Eigenwerte . . . . .	7
1.4	Zustandsvariabel . . . . .	8
1.5	$(sI - A)^{-1}$ . . . . .	9
<b>2</b>	<b>Zustandsraum</b>	<b>11</b>
2.1	Regelungsnormalform der Zustandsgleichung . . . . .	11
2.1.1	Regelungsnormalform . . . . .	11
2.1.2	Beobachtungsnormalform . . . . .	12
2.1.3	Jordanische Normalform . . . . .	12
2.2	Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit . . . . .	12
2.2.1	Steuerbarkeit . . . . .	12
2.2.2	Beobachtbarkeit . . . . .	13
2.2.3	Transformation in Regelungsnormalform (Steu- ernormalform) . . . . .	13
2.2.4	Transformation auf Beobachtungsnormalform . .	13
<b>3</b>	<b>Digitale Regelung</b>	<b>15</b>
3.1	Schematische Darstellung . . . . .	15
3.2	Direkter/Indirekter Regler . . . . .	16
3.3	Digitaler PID . . . . .	16

3.3.1	I Anteil . . . . .	16
3.3.2	D Anteil . . . . .	16
3.3.3	Antireset-Windup . . . . .	17
3.4	z-Transformation . . . . .	17
3.4.1	Antworten . . . . .	17
<b>4</b>	<b>Umformungstabelle</b>	<b>19</b>

# Kapitel 1

## Matrizen

### 1.1 Grundlagen

**Matrize**

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{3n} \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & a_{mn} \end{bmatrix}$$

A = [Spalten, Zeilen]

**Transponierte**

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{3n} \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & a_{mn} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & a_{n2} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{n3} \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & a_{nn} \end{bmatrix}$$

**Multiplikation**

$$\underline{A} * \underline{B} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} b_{11} & b_{21} \\ b_{12} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} * b_{11} + a_{21} * b_{12} & a_{11} * b_{21} + a_{21} * b_{22} \\ a_{12} * b_{11} + a_{22} * b_{12} & a_{12} * b_{21} + a_{22} * b_{22} \end{bmatrix}$$

**Orthogonal**

Vektor  $\underline{a}$  ist zum Vektor  $\underline{b}$  orthogonal, wenn das Skalarprodukt  $\underline{a} * \underline{b} = 0$

ist. Dann ist auch  $\underline{b}$  orthogonal zu  $\underline{a}$  und wir sprechen daher von zwei orthogonalen Vektoren  $\underline{a}$  und  $\underline{b}$ .

Zwei orthogonale Nichtnullvektoren sind aufeinander senkrecht ( $\cos(\alpha) = 0, \alpha = \frac{\pi}{2}$ ).

### Determinante

$$\det(A) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = a \cdot d - b \cdot c$$

## 1.2 Rang

### 1.2.1 Rang von Vektoren

Beschreibt die lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit von Vektoren. Eine Menge von  $m$  Vektoren  $a_1, a_2, \dots, a_n$  ( mit derselben Anzahl von Komponenten ) bildet die folgende lineare Kombination:

$$c_1 a_1 + c_2 a_2 + \dots + c_m a_m$$

Daraus folgt:

$$c_1 a_1 + c_2 a_2 + \dots + c_m a_m = 0$$

Falls die einzige Möglichkeit darin besteht,  $c =$  um die Gleichung zu erfüllen, sind die Vektoren linear unabhängig.

Zwei Vektoren in der Ebene sind linear abhängig, wenn sie parallel sind.

$$\underline{a} - c * \underline{b} = 0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Drei Vektoren in Anschauungsraum (3D) sind linear abhängig, wenn sie in einer Ebene liegen.

$$c_1 \cdot \underline{a} + c_2 \cdot \underline{b} + c_3 \cdot \underline{c} = 0$$

### 1.2.2 Rang einer Matrix

Die maximale Zahl der linear unabhängigen Zeilenvektoren einer Matrix  $\underline{A}$  heisst Rang. Es gilt:

$$r = \text{Rang}(A) \leq m, n$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \text{Rang} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

**Vorgehen (Horizontal):**

- 1. Erste Zeile (oder die mit der tiefsten Zahlen) stehen lassen.
- 2. Dieser Schritt für alle Zeilen machen:

$$c_1 \cdot a_{11} + a_{21} = 0 \qquad c \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

- 3. Entstehen in der Matrix horizontale gleiche Vektoren, so sind diese linear abhängig.

## 1.3 Eigenwerte und Eigenvektoren

### 1.3.1 Eigenwerte

$$A\underline{v} = \lambda\underline{v}$$

Derjenige Wert  $\lambda$  für welchen die obige Gleichung eine Lösung  $x \neq 0$  hat heisst der Eigenwert der Matrix  $\underline{A}$ .

Die korrespondierende Lösung  $\underline{x} \neq 0$  heisst der Eigenvektor der Matrix  $\underline{A}$ .

$$A \cdot \underline{x} = \lambda \cdot \underline{x}$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Homogenes, lineares Gleichungssystem

$$(A - \lambda \cdot I)\underline{x} = \underline{0}$$

### Lösung nach Cramer: Eigenwert bestimmen

$$D(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0 \qquad \lambda I = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$$

Eigenvektor

$$\underline{v} = A - \lambda \cdot I$$

## 1.4 Zustandsvariabel

Es gibt allgemeine Untersuchungen über das Systemverhalten, beispielsweise über die Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit von Systemen, die sich nur im Zeitbereich durchführen lassen.

Aus diesem Grund ist es angebracht im Zeitbereich zu bleiben. Es ist zweckmässig, die auftretende Differentialgleichung durch Einführen von Zwischengrössen in Systeme von Differentialgleichungen erster Ordnung zu verwandeln.

$$a_n \cdot y^n + a_{n-1} \cdot y^{n-1} + \dots + a_2 \ddot{y} + a_1 \dot{y} + a_0 y = b_0 u \quad a_n \neq 0$$

Dann kann man als Zwischengrössen  $x_1, x_2, \dots, x_n$  die Ausgangsgrösse  $y$  und ihre Ableitungen nehmen:

$$x_1 = y, \quad x_2 = \dot{y}, \quad x_3 = \ddot{y}, \dots, \quad x_{n-1} = y^{n-2} \quad x_n = y^{n-1}$$

Aus der Definition folgen die einfachen Differentialgleichungen.:

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = x_3, \quad \dots, \quad \dot{x}_{n-1} = x_n$$



**1.5**  $(sI - A)^{-1}$ 

$$(sI - A)^{-1} = \frac{adj((sI - A)^{-1})}{det((sI - A)^{-1})}$$

$$adj \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$



# Kapitel 2

## Zustandsraum

### 2.1 Regelungsnormalform der Zustandsgleichung

$$G(s) = \frac{b_0 + b_1 s + b_2 s^2 + \dots + b_n s^n}{a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \dots + a_n s^n}$$

#### 2.1.1 Regelungsnormalform

$$\dot{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -\frac{a_0}{a_n} & -\frac{a_1}{a_n} & -\frac{a_2}{a_n} & \dots & -\frac{a_{n-1}}{a_n} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \cdot x + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ \frac{1}{a_n} \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}} \cdot u$$

$$y = \underbrace{\begin{bmatrix} b_0 - a_0 \frac{b_n}{a_n} & b_1 - a_1 \frac{b_n}{a_n} & \dots & b_{n-1} - a_{n-1} \frac{b_n}{a_n} \end{bmatrix}}_{\mathbf{c}^T} \cdot x + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{b_n}{a_n} \end{bmatrix}}_{\mathbf{d}} \cdot u$$

### 2.1.2 Beobachtungsnormalform

$$\dot{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & -\frac{a_0}{a_n} \\ 1 & 0 & 1 & \dots & -\frac{a_1}{a_n} \\ 0 & 1 & 0 & \dots & -\frac{a_2}{a_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -\frac{a_{n-1}}{a_n} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \cdot x + \underbrace{\begin{bmatrix} b_0 - b_n \frac{a_0}{a_n} \\ b_1 - b_n \frac{a_1}{a_n} \\ b_2 - b_n \frac{a_2}{a_n} \\ \dots \\ b_{n-1} - b_n \frac{a_{n-1}}{a_n} \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}} \cdot u$$

$$y = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{a_n} \end{bmatrix}}_{c^T} \cdot x + \underbrace{\begin{bmatrix} b_n \\ a_n \end{bmatrix}}_{\mathbf{d}} \cdot u$$

### 2.1.3 Jordanische Normalform

- Bevorzugte Verwendung, wenn Pole vom System bekannt sind
- System ist vollständig entkoppelt, wenn alle Pole reell und einfach vorkommen
- A ist Diagonalmatrix mit  $\lambda_i$ : Pole

$$\dot{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \cdot x + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \dots \\ \dots \\ 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}} \cdot u$$

$$y = \underbrace{\begin{bmatrix} r_1 & r_2 & \dots & r_n \end{bmatrix}}_{c^T} \cdot x + \underbrace{\begin{bmatrix} r_0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{d}} \cdot u$$

## 2.2 Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit

### 2.2.1 Steuerbarkeit

Das System heisst steuerbar, wenn sein Zustandspunkt  $\underline{x}$  durch geeignete Wahl des Steuervektors  $u$  in endlicher Zeit aus einem beliebigen

Anfangszustand  $x_0$  in den Endzustand 0 bewegt werden kann (Steuerbar wenn die Vektoren linear unabhängig sind;  $\text{Rang}(Q_s) = n$ )

$$Q_s = [b \quad A \cdot b \quad \dots \quad A^{n-1} \cdot b] = [n \cdot n]$$

### 2.2.2 Beobachtbarkeit

Das System heisst beobachtbar, wenn dem bekannten  $u(t)$  aus der Messung  $y(t)$  über eine endliche Zeitspanne der Anfangszustand  $x(t)$  eindeutig ermittelt werden kann, ganz gleich wo dieser liegt.

Das System ist beobachtbar, wenn die Beobachtungsmatrix  $Q_B$  regulär ist (nxn Matrix).

$$Q_B = \begin{bmatrix} c^T \\ c^T \cdot A \\ \dots \\ c^T \cdot A^{n-1} \end{bmatrix}$$

### 2.2.3 Transformation in Regelungsnormalform (Steuernormalform)

Eine Übertragungssystem  $\dot{x} = A \cdot x + b \cdot u$  wird mit der Transformation  $z = T_R \cdot x$  in die Regelungsnormalform  $\dot{x}_R = A_R \cdot x_R + b_R \cdot u$  überführt.

$q_{s_n}^T$  ist die letzte Zeile von der inversen Steuerbarkeitsmatrix  $Q_s^{-1}$ .

$$A_R = T_R \cdot A \cdot T_R^{-1} \quad b_R = T_R \cdot b \quad c_R^T = c^T \cdot T_R^{-1} \quad d_R = d$$

$$T_R = \begin{bmatrix} q_{s_n}^T \\ q_{s_n}^T \cdot A \\ \dots \\ q_{s_n}^T \cdot A^{n-1} \end{bmatrix} \quad Q_s^{-1} = \begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x & x & x & x & x \end{bmatrix}$$

### 2.2.4 Transformation auf Beobachtungsnormalform

Eine Übertragungssystem  $\dot{x} = A \cdot x + b \cdot u$  wird mit der Transformation  $z = T_B \cdot x$  in die Beobachtungsnormalform  $\dot{x}_B = A_R \cdot x_B + b_B \cdot u$  überführt.

$q_{B_n}$  ist die letzte Spalte von der inversen Beobachtungsmatrix  $Q_B^{-1}$ .

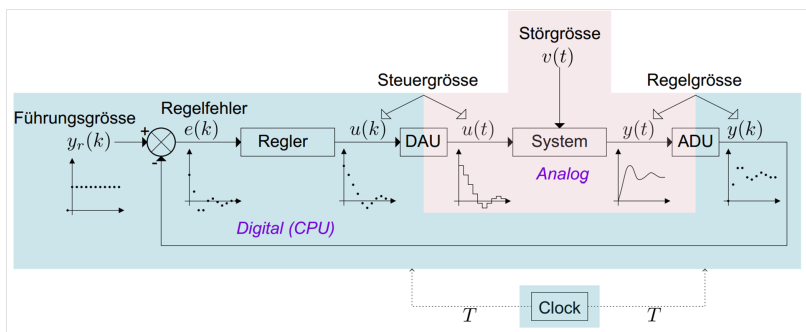
$$A_B = T_B \cdot A \cdot T_B^{-1} \quad b_B = T_B \cdot b \quad c_B^T = c^T \cdot T_B^{-1} \quad d_B = d$$

$$T_R = \begin{bmatrix} q_{B_n} & A \cdot q_{B_n} & \dots & A^{n-1} \cdot q_{B_n} \end{bmatrix} \quad Q_B^{-1} = \begin{bmatrix} \dots & \dots & x \\ \dots & \dots & x \\ \dots & \dots & x \end{bmatrix}$$

# Kapitel 3

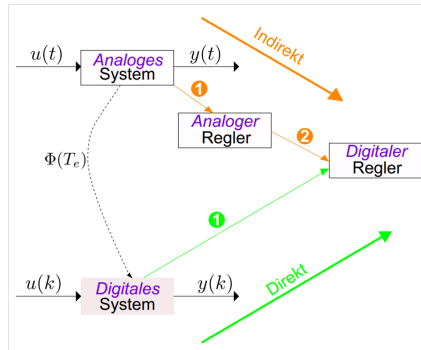
## Digitale Regelung

### 3.1 Schematische Darstellung



$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} \quad \rightarrow \quad H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)}$$

## 3.2 Direkter/Indirekter Regler



## 3.3 Digitaler PID

Wir haben:

$$u(t) = u_{k,a}(e(t)) + u_{i,a}(e(t)) + u_{d,a}(e(t))$$

Wir wollen:

$$u(k) = u_{k,a}(e(k)) + u_{i,a}(e(k)) + u_{d,a}(e(k))$$

### 3.3.1 I Anteil

Implementierbare Differenzgleichungen für I-Anteil:

Rückwärts-Rechteckregel:

$$u_{i,d,r}(e(k)) = u_{i,d,r}(e(k-1)) + \frac{K_a}{T_{i,a}} e(k) \cdot T$$

Trapezregel:

$$u_{i,d,r}(e(k)) = u_{i,d,r}(e(k-1)) + \frac{K_a}{T_{i,a}} \cdot \frac{e(k) + e(k-1)}{2} \cdot T$$

### 3.3.2 D Anteil

$$u_{d,d}(e(k)) = K_a T_{d,a} \cdot \frac{e(k) - e(k-1)}{T}$$



### 3.3.3 Antireset-Windup

$$u_{nosat}(k) = u_p(k) + u_i(k-1) + u(d)$$

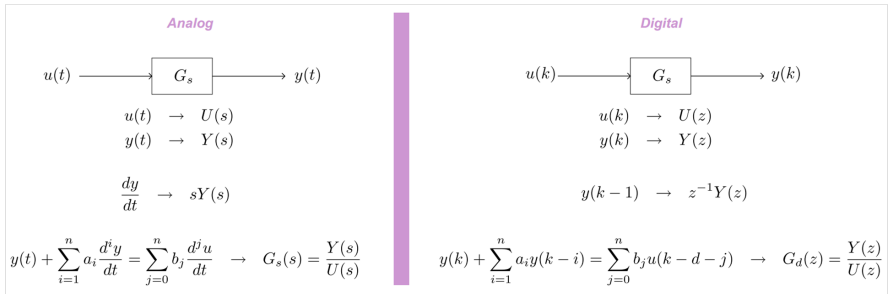
$$\text{if}(u_{nosat}(k) > u_{sat,max}) \quad u(k) = u_{sat,max}$$

$$\text{elseif}(u_{nosat}(k) < u_{sat,min})$$

$$u(k) = u_{sat,min}$$

$$u_i(k) = u_i(k-1) + K_a \frac{T}{T_i} \cdot \frac{e(k) + e(k-1)}{2} + \frac{T}{T_r} (u(k) - u(k)_{nosat})$$

## 3.4 z-Transformation



### 3.4.1 Antworten

Impulsantwort:

$$Z \{I_i(k)\} = z^{-l} \quad \begin{cases} 1 & \text{if } k = 0 \\ 2 & \text{if } k \neq 0 \end{cases}$$

Sprungantwort:

$$Z \{I_i(k)\} = \sum_{i=l}^{\infty} z^{-i} = u^{-l} \frac{z}{z-1} \quad \begin{cases} 1 & \text{if } k \geq l \\ 2 & \text{if } k < l \end{cases}$$



## Kapitel 4

# Umformungstabelle

	$X(s)$	$x(t)$	$x(kT)$ or $x(k)$	$X(z)$
1.	—	—	Kronecker delta $\delta_0(k)$ 1 $k = 0$ 0 $k \neq 0$	1
2.	—	—	$\delta_0(n-k)$ 1 $n = k$ 0 $n \neq k$	$z^{-k}$
3.	$\frac{1}{s}$	$1(t)$	$1(k)$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$
4.	$\frac{1}{s+a}$	$e^{-at}$	$e^{-akT}$	$\frac{1}{1-e^{-aT}z^{-1}}$
5.	$\frac{1}{s^2}$	$t$	$kT$	$\frac{Tz^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$
6.	$\frac{2}{s^3}$	$t^2$	$(kT)^2$	$\frac{T^2 z^{-1}(1+z^{-1})}{(1-z^{-1})^3}$
7.	$\frac{6}{s^4}$	$t^3$	$(kT)^3$	$\frac{T^3 z^{-1}(1+4z^{-1}+z^{-2})}{(1-z^{-1})^4}$
8.	$\frac{a}{s(s+a)}$	$1-e^{-at}$	$1-e^{-akT}$	$\frac{(1-e^{-aT})z^{-1}}{(1-z^{-1})(1-e^{-aT}z^{-1})}$
9.	$\frac{b-a}{(s+a)(s+b)}$	$e^{-at}-e^{-bt}$	$e^{-akT}-e^{-bkT}$	$\frac{(e^{-aT}-e^{-bT})z^{-1}}{(1-e^{-aT}z^{-1})(1-e^{-bT}z^{-1})}$
10.	$\frac{1}{(s+a)^2}$	$te^{-at}$	$kTe^{-akT}$	$\frac{Te^{-aT}z^{-1}}{(1-e^{-aT}z^{-1})^2}$
11.	$\frac{s}{(s+a)^2}$	$(1-at)e^{-at}$	$(1-akT)e^{-akT}$	$\frac{1-(1+aT)e^{-aT}z^{-1}}{(1-e^{-aT}z^{-1})^2}$
12.	$\frac{2}{(s+a)^3}$	$t^2e^{-at}$	$(kT)^2e^{-akT}$	$\frac{T^2e^{-aT}(1+e^{-aT}z^{-1})}{(1-e^{-aT}z^{-1})^3}$
13.	$\frac{a^2}{s^2(s+a)}$	$at-1+e^{-at}$	$akT-1+e^{-akT}$	$\frac{[(aT-1+e^{-aT})+(1-e^{-aT}-aTe^{-aT})z^{-1}]z^{-1}}{(1-z^{-1})^2(1-e^{-aT}z^{-1})}$
14.	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\sin \omega t$	$\sin \omega kT$	$\frac{z^{-1} \sin \omega T}{1-2z^{-1} \cos \omega T + z^{-2}}$
15.	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos \omega t$	$\cos \omega kT$	$\frac{1-z^{-1} \cos \omega T}{1-2z^{-1} \cos \omega T + z^{-2}}$
16.	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at} \sin \omega t$	$e^{-akT} \sin \omega kT$	$\frac{e^{-aT}z^{-1} \sin \omega T}{1-2e^{-aT}z^{-1} \cos \omega T + e^{-2aT}z^{-2}}$
17.	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at} \cos \omega t$	$e^{-akT} \cos \omega kT$	$\frac{1-e^{-aT}z^{-1} \cos \omega T}{1-2e^{-aT}z^{-1} \cos \omega T + e^{-2aT}z^{-2}}$
18.	—	—	$a^k$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$
19.	—	—	$a^k$ $k = 1, 2, 3, \dots$	$\frac{z^{-1}}{1-az^{-1}}$
20.	—	—	$ka^{k-1}$	$\frac{z^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$
21.	—	—	$k^2a^{k-1}$	$\frac{z^{-1}(1+az^{-1})}{(1-az^{-1})^3}$
22.	—	—	$k^3a^{k-1}$	$\frac{z^{-1}(1+4az^{-1}+a^2z^{-2})}{(1-az^{-1})^4}$
23.	—	—	$k^4a^{k-1}$	$\frac{z^{-1}(1+11az^{-1}+11a^2z^{-2}+a^3z^{-3})}{(1-az^{-1})^5}$
24.	—	—	$a^k \cos k\pi$	$\frac{1}{1+az^{-1}}$

$x(t) = 0$  for  $t < 0$

$x(kT) = x(k) = 0$  for  $k < 0$

Unless otherwise noted,  $k = 0, 1, 2, 3, \dots$

$$\mathcal{R}\{x(k)\} = X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k)z^{-k}$$

## Important properties and theorems of the Z-transform

	$x(t)$ or $x(k)$	$Z\{x(t)\}$ or $Z\{x(k)\}$
1.	$ax(t)$	$aX(z)$
2.	$ax_1(t) + bx_2(t)$	$aX_1(z) + bX_2(z)$
3.	$x(t+T)$ or $x(k+1)$	$zX(z) - zx(0)$
4.	$x(t+2T)$	$z^2X(z) - z^2x(0) - zx(T)$
5.	$x(k+2)$	$z^2X(z) - z^2x(0) - zx(1)$
6.	$x(t+kT)$	$z^kX(z) - z^kx(0) - z^{k-1}x(T) - \dots - zx(kT-T)$
7.	$x(t-kT)$	$z^{-k}X(z)$
8.	$x(n+k)$	$z^kX(z) - z^kx(0) - z^{k-1}x(1) - \dots - zx(k1-1)$
9.	$x(n-k)$	$z^{-k}X(z)$
10.	$tx(t)$	$-Tz \frac{d}{dz} X(z)$
11.	$kx(k)$	$-z \frac{d}{dz} X(z)$
12.	$e^{-at}x(t)$	$X(ze^{aT})$
13.	$e^{-ak}x(k)$	$X(ze^a)$
14.	$a^kx(k)$	$X\left(\frac{z}{a}\right)$
15.	$ka^kx(k)$	$-z \frac{d}{dz} X\left(\frac{z}{a}\right)$
16.	$x(0)$	$\lim_{z \rightarrow \infty} X(z)$ if the limit exists
17.	$x(\infty)$	$\lim_{z \rightarrow 1} \left[ (1-z^{-1})X(z) \right]$ if $(1-z^{-1})X(z)$ is analytic on and outside the unit circle
18.	$\nabla x(k) = x(k) - x(k-1)$	$(1-z^{-1})X(z)$
19.	$\Delta x(k) = x(k+1) - x(k)$	$(z-1)X(z) - zx(0)$
20.	$\sum_{k=0}^n x(k)$	$\frac{1}{1-z^{-1}} X(z)$
21.	$\frac{\partial}{\partial a} x(t, a)$	$\frac{\partial}{\partial a} X(z, a)$
22.	$k^m x(k)$	$\left(-z \frac{d}{dz}\right)^m X(z)$
23.	$\sum_{k=0}^n x(kT)y(nT-kT)$	$X(z)Y(z)$
24.	$\sum_{k=0}^{\infty} x(k)$	$X(1)$