Formelsammlung MRT + A

Michi Fallegger, Mario Felder

8. Oktober 2014

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Matrizen

1.1 Grundlagen

Matrize

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{3n} \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & a_{mn} \end{bmatrix}$$

A = [Spalten,Zeilen]

Transponierte

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{3n} \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & a_{mn} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & a_{n2} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{n3} \\ a_{1n} & a_{2m} & a_{3m} & a_{nm} \end{bmatrix}$$

Multiplikation

$\underline{A}*\underline{B}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} b_{11} & b_{21} \\ b_{12} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} * b_{11} + a_{21} * b_{12} & a_{11} * b_{21} + a_{21} * b_{22} \\ a_{12} * b_{11} + a_{22} * b_{12} & a_{12} * b_{21} + a_{22} * b_{22} \end{bmatrix}$

Orthogonal

Vektor $\underline{a}$ ist zum Vektor $\underline{b}$ orthogonal, wenn das Skalarprodukt $\underline{a}*\underline{b}= 0$

ist. Dann ist auch $\underline{\mathrm{b}}$ orthogonal zu $\underline{\mathrm{a}}$ und wir sprechen daher von zwei orthogonalen Vektoren $\underline{\mathrm{a}}$ und $\underline{\mathrm{b}}$.

Zwei orthogonale Nichtnullvektoren sind aufeinander senkrecht ($\cos(\alpha) = 0, \alpha = \frac{\pi}{2}$).

Determinante

$$det(A) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = a \cdot d - b \cdot c$$

1.2 Rang

1.2.1 Rang von Vektoren

Beschreibt die lineare AbhÃďngigkeit und UnabhÃďngigkeit von Vektoren.
Eine Menge von m Vektoren $a_1, a_2, ..., a_n$ (mit derselben Anzahl von Komponenten) bildet die folgende lineare Kombination:

$$c_1a_1 + c_2a_2 + ... + c_ma_m$$

Daraus folgt:

$$c_1a_1 + c_2a_2 + ... + c_ma_m = 0$$

Falls die einzige MÃűglichkeit darin besteht, $c =$ um die Gleichung zu erfÃijllen, sind die Vektoren linear unabhÃďngig.

Zwei Vektoren in der Ebene sind linear abhÃďngig, wenn sie parallel sind.

$$\underline{a} - c * \underline{b} = 0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Drei Vektoren in Anschauungsraum (3D) sind linear abhÃďngig, wenn sie in einer Ebene liegen.

$$c_1 \cdot \underline{a} + c_2 \cdot \underline{b} + c_3 \cdot \underline{c} = 0$$

1.2.2 Rang einer Matrix

Die maximale Zahl der linear unabhÃďngigen Zeilenvektoren einer Matrix A heisst Rang. Es gilt:

$$r = Rang(A) \leq m, n$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = Rang \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Vorgehen (Horizontal):
-1. Erste Zeile (oder die mit der tiefsten Zahlen) stehen lassen.
-2. Dieser Schritt fÃijr alle Zeilen machen:

$$c_1 \cdot a_{11} + a_{21} = 0 \qquad c \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

-3. Entstehen in der Matrix horizontale gleiche Vektoren, so sind diese linear abhÃďngig.

1.3 Eigenwerte und Eigenvektoren

1.3.1 Eigenwerte

$$A\underline{v} = \lambda\underline{v}$$

Derjenige Wert λ fÃijr welchen die obige Gleichung eine LÃűsung $x \neq 0$ hat heisst der Eigenwert der Matrix A.
Die korrespondierende LÃűsung $\underline{\mathrm{x}} \neq 0$ heisst der Eigenvektor der Matrix A.

$$A \cdot \underline{x} = \lambda \cdot \underline{x}$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Homogenes, lineares Gleichungssystem

$$(A - \lambda \cdot I)\underline{x} = \underline{0}$$

LÃűsung nach Cramer: Eigenwert bestimmen

$$D(\lambda) = det(A - \lambda I) = 0 \qquad \lambda I = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$$

Eigenvektor

$$\underline{v} = A - \lambda \cdot I$$

1.4 Zustandsvariabel

Es gibt allgemeine Untersuchungen Ãijber das Systemverhalten, beispielsweise Ãijber die Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit von Systemen, die sich nur im Zeitbereich durchfÃijhren lassen.
Aus diesem Grund ist es angebracht im Zeitbereich zu bleiben. Es ist zweckmÃďssig, die auftretende Differentialgleichung durch EinfÃijhren von ZwischengrÃűssen in Systeme von Differentialgleichungen erster Ordnung zu verwandeln.

$$a_n \cdot y^n + a_{n-1} \cdot y^{n-1} + ... + a_2\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_0 y = b_0 u \qquad a_n \neq 0$$

Dann kann man als ZwischengrÃűssen $x_1, x_2, ..., x_n$ die AusgangsgrÃűsse y und ihre Ableitungen nehmen:

$$x_1 = y, \quad x_2 = \dot{y}, \quad x_3 = \ddot{y}, ..., \quad x_{n-1} = y^{n-2} \quad x_n = y^{n-1}$$

Aus der Definition folgen die einfachen Differentialgleichungen.:

$$\dot{x}_1 = x_2, \qquad \dot{x}_2 = x_3 \qquad , ..., \qquad \dot{x}_{n-1} = x_n$$