Formelsammlung MRT + A

Michi Fallegger, Mario Felder

9. Oktober 2014

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Matrizen

1.1 Grundlagen

Matrize

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{3n} \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & a_{mn} \end{bmatrix}$$

A = [Spalten,Zeilen]

Transponierte

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{3n} \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & a_{mn} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & a_{n2} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{n3} \\ a_{1n} & a_{2m} & a_{3m} & a_{nm} \end{bmatrix}$$

Multiplikation

$\underline{A}*\underline{B}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} b_{11} & b_{21} \\ b_{12} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}*b_{11}+a_{21}*b_{12} & a_{11}*b_{21}+a_{21}*b_{22} \\ a_{12}*b_{11}+a_{22}*b_{12} & a_{12}*b_{21}+a_{22}*b_{22} \end{bmatrix}$

Orthogonal

Vektor $\underline{a}$ ist zum Vektor $\underline{b}$ orthogonal, wenn das Skalarprodukt $\underline{a}*\underline{b}= 0$

ist. Dann ist auch $\underline{b}$ orthogonal zu $\underline{a}$ und wir sprechen daher von zwei orthogonalen Vektoren $\underline{a}$ und $\underline{b}$.

Zwei orthogonale Nichtnullvektoren sind aufeinander senkrecht ($\cos(\alpha) = 0, \alpha = \frac{\pi}{2}$).

Determinante

$$det(A) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = a \cdot d - b \cdot c$$

1.2 Rang

1.2.1 Rang von Vektoren

Beschreibt die lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit von Vektoren. Eine Menge von m Vektoren $a_1, a_2, ..., a_n$ (mit derselben Anzahl von Komponenten) bildet die folgende lineare Kombination:

$$c_1 a_1 + c_2 a_2 + ... + c_m a_m$$

Daraus folgt:

$$c_1 a_1 + c_2 a_2 + ... + c_m a_m = 0$$

Falls die einzige Möglichkeit darin besteht, $c =$ um die Gleichung zu erfüllen, sind die Vektoren linear unabhängig.

Zwei Vektoren in der Ebene sind linear abhängig, wenn sie parallel sind.

$$\underline{a} - c * \underline{b} = 0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Drei Vektoren in Anschauungsraum (3D) sind linear abhängig, wenn sie in einer Ebene liegen.

$$c_1 \cdot \underline{a} + c_2 \cdot \underline{b} + c_3 \cdot \underline{c} = 0$$

1.2.2 Rang einer Matrix

Die maximale Zahl der linear unabhängigen Zeilenvektoren einer Matrix $\underline{A}$ heisst Rang. Es gilt:

$$r = Rang(A) \leq m, n$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = Rang \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Vorgehen (Horizontal):
-1. Erste Zeile (oder die mit der tiefsten Zahlen) stehen lassen.
-2. Dieser Schritt für alle Zeilen machen:

$$c_1 \cdot a_{11} + a_{21} = 0 \qquad c \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

-3. Entstehen in der Matrix horizontale gleiche Vektoren, so sind diese linear abhängig.

1.3 Eigenwerte und Eigenvektoren

1.3.1 Eigenwerte

$$A\underline{v} = \lambda \underline{v}$$

Derjenige Wert λ für welchen die obige Gleichung eine Lösung $x \neq 0$ hat heisst der Eigenwert der Matrix $\underline{A}$.
Die korrespondierende Lösung $\underline{\mathrm{x}} \neq 0$ heisst der Eigenvektor der Matrix A.

$$A \cdot \underline{x} = \lambda \cdot \underline{x}$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Homogenes, lineares Gleichungssystem

$$(A - \lambda \cdot I)\underline{x} = \underline{0}$$

Lösung nach Cramer: Eigenwert bestimmen

$$D(\lambda) = det(A - \lambda I) = 0 \qquad \lambda I = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$$

Eigenvektor

$$\underline{v} = A - \lambda \cdot I$$

1.4 Zustandsvariabel

Es gibt allgemeine Untersuchungen über das Systemverhalten, beispielsweise über die Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit von Systemen, die sich nur im Zeitbereich durchführen lassen.
Aus diesem Grund ist es angebracht im Zeitbereich zu bleiben. Es ist zweckmässig, die auftretende Differentialgleichung durch Einführen von Zwischengrössen in Systeme von Differentialgleichungen erster Ordnung zu verwandeln.

$$a_n \cdot y^n + a_{n-1} \cdot y^{n-1} + ... + a_2\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_0 y = b_0 u \qquad a_n \neq 0$$

Dann kann man als Zwischengrössen $x_1, x_2, ..., x_n$ die Ausgangsgrösse y und ihre Ableitungen nehmen:

$$x_1 = y, \quad x_2 = \dot{y}, \quad x_3 = \ddot{y}, ..., \quad x_{n-1} = y^{n-2} \quad x_n = y^{n-1}$$

Aus der Definition folgen die einfachen Differentialgleichungen.:

$$\dot{x}_1 = x_2, \qquad \dot{x}_2 = x_3 \qquad ,..., \qquad \dot{x}_{n-1} = x_n$$