13 単回帰（最小二乗法）＋回帰のまとめ

1. 回帰直線は「どう決める？」（最小二乗法）

今日の結論（先に言う）

回帰直線は、**ズレ（残差）の二乗の合計**が
いちばん小さくなるように決められています。

- 前回：散布図から回帰直線を引き、式と R^2 を見て予測した
- 今日は：その「直線の決め方」を理解する（**アルゴリズム**）
- ゴール：Excel の結果をブラックボックスにせず、**なぜその線か**を説明できる

到達目標

- 残差（$y - \hat{y}$）を「点と線のズレ」として説明できる
- 残差平方和（SSE）を作り、**小さいほど良い**と説明できる
- 「最小二乗法＝ SSE 最小の線」と言葉で言える

2. ストーリー：次の目標は「ポテト売上 UP」

店長は、ポテトのばらつきを改善したあと、次の目標を立てました。

店長の目標：

- ポテトは利益率が高い
- だから「**ポテトの売上を伸ばす**」ことを目標にする

そのために知りたいこと：

- ハンバーガーの注文が増えると、ポテトの注文も増えるのか？
- 関係があるなら、**来週の注文数**を**予測**できるか？

📌 今日の視点：**関係を式（直線）にして予測に使う。**
その直線を**どうやって決めるか**が今日のテーマ。

3. 前回回収：検定は「判断」／回帰は「予測」（混同しない）

前回（検定）と今回（回帰）は目的が違います。

前回：仮説検定（判断）

- 「平均が基準と違うと言ってよいか？」を**珍しさ（p 値）**で判断する
- 結論は「棄却／棄却できない」で書く

今回：回帰（予測）

- 「x が増えると y はどう変わるか？」を**式（回帰直線）**で表す
- 式を使って**未来の y** を予測する

📌 今日は p 値は使わない。代わりに「**ズレが小さい線**」を考える。

4. 問い：同じ散布図に「線」は何本でも引ける

散布図を見ると「だいたい右上がり」に見えてきます。
でも、**直線は１本に決まっていません。**

問い

この散布図に引く直線として、
どの線が「良い線」でしょうか？

- 傾きが少し違う線／上下にずれた線……どれも「それっぽく」見える
- だから、見た目ではなく**評価基準（ルール）**が必要

5. 評価の方針：良い線＝点に近い（ズレが小さい）を数で決める

良い線を決めるために、次の方針を使います。

📌 **良い線**とは、点と線の**ズレ**が**全体として小さい**線。

ズレを「数」で決めるために、次を行います。

- 各点について「ズレ」を測る
- 全部の点のズレを**まとめて**１つの数にする
- その数が**いちばん小さい線**を選ぶ

次に出てくる言葉：

- 点と線のズレを **残差（ざんさ）**と呼ぶ
- 次スライドで、残差を**図と言葉と式**で定義する

6. 残差の定義：残差＝実測 y − 予測 $\hat{y}$（縦のズレ）

回帰直線（予測の線）を引くと、各点には「ズレ」が生まれます。
このズレを**残差（ざんさ）**と呼びます。

$$\text{残差 } e = y - \hat{y}$$

- y：実測値（実際に観測された値）
- $\hat{y}$：予測値（直線が予測する値）
- 残差 e は、**点と線の「縦方向の距離」**（上下のズレ）

📌 回帰直線は「全部を完全に当てる線」ではない。
だから、残差（ズレ）は必ず出る。

7. 残差の符号：線より上は＋／下は－（そのまま足すと相殺する）

残差には**符号（プラス／マイナス）**があります。

- 点が直線より**上**にある：$y > \hat{y}$ なので、**残差は＋**
- 点が直線より**下**にある：$y < \hat{y}$ なので、**残差は－**

ここで大事な問題が起きます。

📌 残差を**そのまま足す**と、
＋と－が**打ち消し合って**（相殺して）小さく見えてしまう。

例（イメージ）

- $+5$ と -5 を足すと 0（ズレがないように見える）
- でも実際には、上下に**大きくズレている**

8. 問題：残差の合計は「＋と－」で打ち消し合い、基準にならない

前スライドで見た通り、残差 $e = y - \hat{y}$ には**＋と－**があります。
そのため、残差をそのまま足すと「ズレの大きさ」を表せません。

なぜダメか（相殺）

- 例：$+5$ と -5 を足すと 0
- 合計が 0 でも、実際には上下に**大きくズレている**

📌だから、回帰では「符号つきの合計」ではなく、
ズレの大きさを足し合わせる方法が必要。

9. 二乗する理由：なぜ $(y - \hat{y})^2$ なのか

相殺を防ぐために、残差を**二乗**してから足し合わせます。

二乗する3つの理由（ここだけ覚える）

1. **マイナスが消える**（相殺しない）
2. **大きいズレを強く罰する**（大外れを重く扱う）
3. **計算として扱いやすい**（後で「最小」を作りやすい）

📌 回帰は「全部当てる」ではなく、
ズレをできるだけ小さくすることが目的。

10. 残差平方和（SSE）：ズレの大きさの合計を 1 つの数にする

残差を二乗して、**全部足した**数を作ります。
これが「線の良さ」を表す指標になります。

$$\mathrm{SSE} = \sum (y - \hat{y})^2$$

- 各点のズレ：$(y - \hat{y})$
- そのズレの大きさ：$(y - \hat{y})^2$
- それを全部足す：$\sum (y - \hat{y})^2$

📌 **SSE が小さいほど、点に近い（ズレが小さい）線。**

11. 最小二乗法：SSE が最小になる直線が「回帰直線」

同じ散布図に引ける直線は何本もあります。
その中から **1 本**を選ぶルールが、最小二乗法です。

最小二乗法（言葉での定義）

- 直線ごとに SSE（残差平方和）を計算する
- **SSE がいちばん小さい直線**を選ぶ

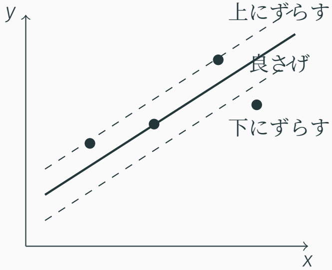
📌 つまり、回帰直線は
「ズレの二乗の合計が最小」になるように決まる。

注意（ここで止める）

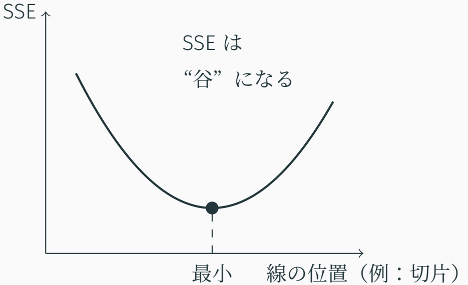
- 今日は「最小にする考え方」を理解する回
- 次の塊で「実際にどうやって最小を作るか（Excel で体験）」へ進む

12. 直感：線を少し動かすと SSE が増える／減る（“最小” のイメージ）

回帰直線は「当てずっぽう」で決めているのではなく、
SSE（ズレの二乗の合計）を最小にするというルールで決まります。



直線を上下に動かすだけでも、
点とのズレが変わる



SSE がいちばん小さい場所が 1 つ決まる

13. ミニ例（3 点）：線 A と線 B で SSE を比べる（計算は最小限）

3 つの点があるとします（散布図の一部だと思って OK）：

点	(x, y)	線 A の $\hat{y}$	線 B の $\hat{y}$
1	$(1, 2)$	2	1
2	$(2, 2)$	3	2
3	$(3, 4)$	4	3

ここで 2 本の候補：

- 線 A：$\hat{y} = x + 1$
- 線 B：$\hat{y} = x$

残差 $e = y - \hat{y}$ と **SSE**（残差の二乗の合計）を比べます。

点	e_A	e_A^2	e_B	e_B^2
1	$2 - 2 = 0$	0	$2 - 1 = 1$	1
2	$2 - 3 = -1$	1	$2 - 2 = 0$	0
3	$4 - 4 = 0$	0	$4 - 3 = 1$	1
合計（SSE）	**1**		**2**	

14. Excel とつながる：トレンドラインの式＝ SSE 最小の結果

Excel で散布図に「近似曲線（トレンドライン）」を追加すると、
直線の式 $\hat{y} = ax + b$ が表示できます。

ここがポイント

Excel のトレンドラインは、裏側で **SSE が最小になる**ように
a（傾き）と b（切片）を自動で決めている。

つまり：

- 私たちがやってきた「SSE で良い線を決める」ルールを
- Excel が**自動で実行**して、式を出している

実習でやる操作（次の塊につながる）

- 散布図を作る（x=バーガー数、y=ポテト数）
- 近似曲線（線形）を追加し、「**数式を表示**」「R^2 **を表示**」
- その式で $\hat{y}$ を作り、残差と SSE を作る

15. 実習①（clean）：SSE を自分で作って「良い線」を理解する（全体手順）

Excel のトレンドラインは「SSE が最小の直線」を自動で出しています。
実習①では、その中身を**自分の手で**再現します。

実習①のゴール（ここだけ）

予測値 $\hat{y}$ → 残差 → 残差 ^{2} → 合計（SSE）を作り、
SSE が小さいほど良い線だと確かめる

1. 散布図から回帰式を表示し、傾き a と切片 b を取り出す
2. 各行で $\hat{y} = ax + b$ を計算して「予測値」列を作る
3. 残差 $e = y - \hat{y}$ 列を作る（縦のズレ）
4. 残差 ^{2} 列を作る（マイナスを消す＋大ズレを強く罰する）
5. 残差 ^{2} を合計して **SSE** を出す（SUM）

📌 **最後に a や b を少し変えて、SSE が増えることを確認する**

16. 実習①-1（clean）：$\hat{y}$（予測値）列を作る（回帰式を使う）

まず、散布図にトレンドライン（線形）を追加し、
数式 $\hat{y} = ax + b$ **を表示**して a と b をメモします。

- x：バーガー注文数（説明変数）
- y：ポテト注文数（目的変数）
- $\hat{y}$：回帰式が出す「予測値」

Excel で作る列（例）

（例） a と b をセルに置く：
　a を H1、b を H2 に入力
予測値列（例：D2）

```
=$H$1*A2 + $H$2
```

📌 **ポイント：**$ を付けて a, b のセルを固定すると、下までコピーできる

17. 実習①-2（clean）：残差・残差^{2}を作り、SSE を計算する

残差は「実測」と「予測」のズレです。
回帰直線がどれだけ点に近いかを、残差で数にします。

作る列（定義）

残差：　$e = y - \hat{y}$（縦のズレ）
残差^2：　e^2（マイナスを消して足せるようにする）
SSE：　$\sum e^2$（残差^{2}の合計）

Excel 例（列が違っても OK）

- 残差列（例：E2）：　`=B2 - D2`　$(y - \hat{y})$
- 残差^{2}列（例：F2）：　`=E2^2` **または** `=POWER(E2,2)`
- SSE（例：F1）：　`=SUM(F2:F31)`

📌 **SSE が小さいほど、**点に近い（＝良い線）

18. 実習①-3（clean）：a や b を少し変えて、SSE が増えることを確認する

ここが「体験で納得」パートです。
今の回帰式は、Excel が **SSE が最小**になるように選んだ直線でした。

やること（超シンプル）

a または b を**少しだけ**動かして、SSE がどう変わるかを見る
（例）a を +0.1 / b を +1 など

確認のしかた

- a, b を変える　$\Rightarrow$　$\hat{y}$ 列が変わる
- $\hat{y}$ が変わる　$\Rightarrow$　残差・残差 ^{2} が変わる
- その結果、**SSE が増える**（多くの場合）

📌 **観察の結論**：元の a, b が「SSE を最小にする」直線だった

19. 実習②（outlier）：二乗は外れ値に弱い（線が引っ張られる）

実習①（clean）と同じ手順を、**outlier データ**でもう一度やります。
ここで見たいのは、**二乗（e^2）が外れ値に強く反応する**という性質です。

今日の観察ポイント（ここだけ）

外れ値があると、**1 点の大きなズレ**が e^2 で**何倍にも大きく**なり、
SSE を強く支配する → 回帰直線が**外れ値に引っ張られる**

やること（実習①と同型）

1. outlier 版で散布図 → トレンドライン → 式（a, b）を表示
2. $\hat{y}$ 列 → 残差 e 列 → 残差 ^{2} 列 → SSE を作る
3. clean 版と比べて、**どこが大きく変わったか**を見る

見るポイント（比較）

- a（傾き）や b（切片）はどれくらい変わった？
- R^2 は上がった？ 下がった？
- 残差 ^{2} 列で、**異常に大きい行**はどれ？

20. まとめ：回帰直線は「SSE 最小」で決まる／今後は“読み取りと応用”へ

今日のゴールは、回帰直線の裏側にあるルールを、
式ではなく“列（手順）”で理解することでした。

- **残差**：$e = y - \hat{y}$（実測と予測のズレ）
- SSE：$\sum e^2$（ズレの二乗の合計）
- **回帰直線**：**SSE が最小**になる直線（最小二乗法）
- **二乗の性質**：大きいズレを強く重視 → 外れ値に引っ張られやすい

今後への橋

今後は、回帰の結果を**読む・使う**練習を増やします。
（例）予測値の解釈／残差からの気づき／外れ値の扱い（データの意味づけ）

📌 **同じ姿勢**：データ → 要約（線）→ ズレ（残差）→ 解釈（理由）