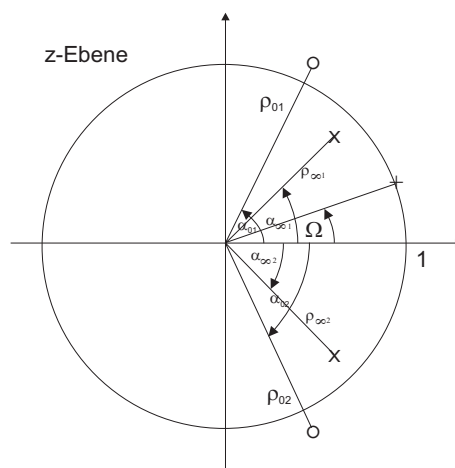


Praktikum digitale Signalverarbeitung

Versuch 4



Analoge und digitale Filterung

Institut für Industrielle Informationstechnik

Stand: 22. April 2014

Institut für Industrielle Informationstechnik (IIIT)
Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Hertzstraße 16
D-76187 Karlsruhe
Tel.: 0721/608-44521
FAX: 0721/608-44500
WWW: <http://www.iiit.kit.edu>
Email: pds@iiit.kit.edu

Version 2.2.3

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Die dadurch begründeten Rechte, insbesondere die der Übersetzung, des Nachdrucks, des Vortrags, der Entnahme von Abbildungen und Tabellen, der Funksendung, der Mikroverfilmung oder der Vervielfältigung auf anderen Wegen und der Speicherung in Datenverarbeitungsanlagen, bleiben, auch bei nur auszugsweiser Verwertung, vorbehalten. Eine Vervielfältigung dieses Werkes oder von Teilen dieses Werkes ist auch im Einzelfall nur in den Grenzen der gesetzlichen Bestimmungen des Urheberrechtsgesetzes der Bundesrepublik Deutschland vom 9. September 1965 in der jeweils geltenden Fassung zulässig. Sie ist grundsätzlich vergütungspflichtig. Zuwiderhandlungen unterliegen den Strafbestimmungen des Urheberrechtsgesetzes.

©Institut für Industrielle Informationstechnik (IIIT) 2004

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenzeichen-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften. Sollte in diesem Werk direkt oder indirekt auf Gesetze, Vorschriften oder Richtlinien (z.B. DIN, VDI, VDE) Bezug genommen werden oder aus ihnen zitiert worden sein, so kann keine Gewähr für Richtigkeit, Vollständigkeit oder Aktualität übernommen werden. Es empfiehlt sich, gegebenenfalls für die einzelnen Arbeiten die vollständigen Vorschriften oder Richtlinien in der jeweils gültigen Fassung hinzuzuziehen.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Theorie	3
2.1	Grundlagen	3
2.1.1	Grundbegriffe der Systemtheorie	3
2.1.2	Zusammenhang zwischen Systempolen, Frequenzgang und Gruppenlaufzeit	4
2.1.3	Grundbegriffe der Filterung	8
2.2	Anwendungsgebiete von Filtern	9
2.3	Analoge Filter	10
2.3.1	BUTTERWORTH-Filter	10
2.3.2	TSCHEBYSCHJEFF-Filter	11
2.3.3	CAUER-Filter	12
2.4	Digitale Filter	13
2.4.1	FIR-Filter	13
2.4.2	IIR-Filter	16
2.5	Auswirkungen endlicher Rechengenauigkeit	22
2.5.1	Quantisierung der Koeffizienten	22
2.5.2	Quantisierungsrauschen	23
3	Versuchsaufbau	27
3.1	Beschreibung des Versuchs	27
3.1.1	Beschreibung der Hardware	28
3.1.2	Beschreibung der Programme	30
4	Versuchsvorbereitende Aufgaben	35
5	Versuche am Versuchstag	37
5.1	Versuche mit der Analoghardware	37
5.2	Versuche am PC	37

1 Einleitung

Die Filterung von Signalen hat eine herausragende Stellung in der Signalverarbeitung. Filterung ermöglicht es, den Frequenzverlauf eines Eingangssignals gezielt zu beeinflussen, so dass nach der Filterung nicht erwünschte Effekte wie hochfrequente Störungen oder Signaldrift eliminiert werden können.

Ursprünglich wurden *digitale* Filter zur Simulation von mess- und regelungstechnischen Anwendungen verwendet. Durch die Einführung von DAT (Digital Audio Tape) und CD (Compact Disk) hat die digitale Filterung den Weg auf den Massenmarkt gefunden. So werden heute in zunehmenden Maße in immer mehr Anwendungsgebieten digitale Filter eingesetzt, worauf später noch weiter eingegangen wird.

Im Vergleich zu analogen Filtern liefern digitale Realisierungen ein besseres Signal zu Rausch Verhältnis (SNR) und die Schwankung der Filterparameter fällt geringer aus. Auch müssen keine Bauteiltoleranzen berücksichtigt werden. Die Flexibilität einer einzigen Hardware-Realisierung ist weitaus höher als beim analogen Pendant, können doch durch Anpassung der Filterkoeffizienten sehr viele verschiedene Filtereigenschaften auf einer vorgegebenen Hardware implementiert werden. Weiterhin ist es mit analogen Filtern beinahe unmöglich, steilflankige oder schmalbandige Frequenzverläufe zu erreichen und gleichzeitig den schaltungstechnischen Aufwand in einem erträglichen Rahmen zu halten.

Als Nachteil digitaler gegenüber analoger Filter wäre jedoch zu nennen, dass durch die Rechendauer für das Filter dessen Grenzfrequenz natürlich limitiert wird.

Um der besonderen Bedeutung von Filtern gerecht zu werden, beschäftigt sich dieser Versuch sowohl mit der analogen, jedoch hauptsächlich mit der digitalen Filterung. Dabei sollen Analogien zwischen den beiden Filtermethoden aufgezeigt werden.

Aufgrund der steigenden Komplexität und immer kürzer werdenden Entwicklungszeit von modernen Steuerungen und Reglern werden hohe Anforderungen an die Softwareentwicklung gestellt. Zwei leistungsfähige Werkzeuge hierzu sind RAPID CONTROL PROTOTYPING (RPC) und HARDWARE IN THE LOOP (HiL). Rapid Control Prototyping ist eine effiziente Methode zur rechnergestützten Reglerentwicklung. Der Entwurf einer Automatisierungslösung erfolgt dabei, ausgehend von einer Aufgabenstellung, schrittweise und systematisch. Zunächst wird ein Modell des vorliegenden Systems entwickelt und darauf basierend dann ein Regel- oder Steueralgorithmus. Als nächster Schritt folgt zunächst die Simulation der entworfenen Software und anschließend deren Implementierung. Zum Testen des so entwickelten Produkts kann das Hardware in the Loop-Verfahren eingesetzt werden. Dabei werden ein oder mehrere Elektronikkomponenten (z. B. Steuergeräte) an einen HiL-Simulator angeschlossen und in Echtzeit getestet. Auf dem HiL-Simulator ist dabei ein Modell des betrachteten Systems implementiert, welches dem zu testenden System die benötigten Eingangssignale liefert.

Ein weltweit führender Hersteller von solchen Entwicklungswerkzeugen ist die Firma *dSPACE*. Um einen Einblick in die o.g. Methoden und die dazu verwendete Hardware zu erhalten, werden Sie im zweiten Teil des Versuchs mit der *dSPACE AutoBox* arbeiten.

2 Theorie

2.1 Grundlagen

Die Grundlagen der Systemtheorie werden in diesem Kapitel kurz wiederholt. Dabei wird meist nicht ausführlich auf die Herleitung der einzelnen Formeln eingegangen. Für eine ausführlichere Darstellung wird auf das Signale und Systeme-Buch [2] hingewiesen.

2.1.1 Grundbegriffe der Systemtheorie

Hier werden wir uns auf lineare, zeitinvariante Systeme (LTI-Systeme) beschränken. Ein zeitkontinuierliches LTI-System wird durch die *Impulsantwort* $g(t)$ vollständig beschrieben. Als Zusammenhang zwischen *Ausgangssignal* $y_a(t)$ und dem *Eingangssignal* $y_e(t)$ gilt dann

$$y_a(t) = g(t) * y_e(t) \quad (2.1)$$

und durch Laplace-Transformation erhält man

$$Y_a(s) = G(s) \cdot Y_e(s), \quad (2.2)$$

wobei $G(s)$ als die *Systemfunktion* oder auch *Übertragungsfunktion* bezeichnet wird. Für ein LTI-System gibt es eine Vielzahl von Darstellungsmöglichkeiten, je nachdem, welche Eigenschaften des Systems zu untersuchen sind. Wenn $G(s)$ in ein Nennerpolynom $N(s)$ und Zählerpolynom $Z(s)$ aufgeteilt wird, erhält man:

$$G(s) = \frac{Z(s)}{N(s)} = \frac{\sum_{j=0}^m b_j s^j}{\sum_{i=0}^n a_i s^i} = c \cdot \frac{\prod_{j=0}^m (s - s_{0j})}{\prod_{i=0}^n (s - s_{\infty i})} \quad m \leq n. \quad (2.3)$$

s_{0j} sind Nullstellen von $Z(s)$, auch als *Nullstellen der Übertragungsfunktion* bezeichnet. $s_{\infty i}$ sind Nullstellen von $N(s)$ und werden *Polstellen der Übertragungsfunktion* genannt. Die Impulsantwort kann fouriertransformiert werden, um den *Frequenzgang* $G(f)$ zu erhalten:

$$\mathcal{F}\{g(t)\} = G(s = e^{j2\pi f}) = |G(f)| \cdot e^{-j\varphi(f)}. \quad (2.4)$$

Die Frequenzachse entspricht dabei der imaginären Achse der s -Ebene, da $s = \delta + j2\pi f$. $|G(f)|$ ist der *Amplitudengang*, $\varphi(f)$ ist der *Phasengang*. Neben dem Amplitudengang und dem Phasengang interessiert auch die Ableitung der Phase $\tau_g(f) = \frac{d\varphi}{df}$ (Gruppenlaufzeit), die die Phasenverzerrung gut beschreibt.

Bisher hat sich die Diskussion auf zeitkontinuierliche Signale und Systeme beschränkt. Sie lässt sich jedoch auch einfach auf zeitdiskrete Signale und Systeme übertragen.

Zur Erinnerung, ein Signal wird mit der *Abtastzeit* t_A abgetastet und als zeitdiskretes Signal als Folge $y_n = y(nt_A)$, $n \in \mathbb{Z}$, angegeben. Damit das stetige Zeitsignal $y(t)$ der Bandbreite B vollständig rekonstruierbar ist, muss das *Abtasttheorem* erfüllt sein:

$$t_A < \frac{1}{2B}. \quad (2.5)$$

Die *Abtastfrequenz* f_A , in der englischen Literatur f_s („sample rate“) genannt¹, muss also größer oder gleich $2B$ sein. Durch die Abtastung im Zeitbereich (Multiplikation mit dem Impulskamm) entsteht im Frequenzbereich (und damit auch in der s -Ebene) eine periodische Wiederholung durch die Faltung mit dem Impulskamm. Wird das Abtasttheorem nicht erfüllt, wird das abgetastete Signal durch spektrale Überlappung verzerrt; dieser Effekt wird *Aliasing* genannt.

Systeme werden im zeitdiskreten Fall mit Differenzengleichungen statt Differenzialgleichungen geschrieben. In diesem Fall wird die z -Transformation anstelle der Laplace-Transformation benutzt. Diese „Übersetzung“ erfolgt über die konforme Abbildung $z = e^{st_A}$. Eine wichtige Eigenschaft dieser Abbildung ist, dass die imaginäre Achse (Frequenzachse) der s -Ebene auf den Einheitskreis der z -Ebene abgebildet wird (siehe auch Abschnitt 2.1.2). Dadurch wird die linke Halbebene auf das Innere des Einheitskreises abgebildet. Weitere Folgen dieser Abbildung sind in [2] nachzuschlagen.

2.1.2 Zusammenhang zwischen Systempolen, Frequenzgang und Gruppenlaufzeit

Die Systemfunktion $G(s)$ aus Gleichung (2.3) beschreibt zeitkontinuierliche Systeme. Für zeitdiskrete Systeme ist die Übertragungsfunktion

$$G(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^q b(k)z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^p a(k)z^{-k}} = \frac{B(z)}{A(z)} = z^{p-q} \cdot b_0 \cdot \frac{\prod_{k=1}^q (z - z_{0k})}{\prod_{k=1}^p (z - z_{\infty k})} \quad (2.6)$$

definiert. Den Übergang vom Zeitkontinuierlichen zum Zeitdiskreten erhält man durch z -Transformation, wie bereits oben erwähnt.

Den *zeitdiskreten Amplitudengang* erhält man durch Betragsbildung von (2.6) für $z = e^{j2\pi f t_A}$:

$$\left| G(e^{j2\pi f t_A}) \right| = \frac{\left| \sum_{k=0}^q b(k) e^{-j2\pi f t_A k} \right|}{\left| 1 + \sum_{k=1}^p a(k) e^{-j2\pi f t_A k} \right|} = \frac{|B(e^{j2\pi f t_A})|}{|A(e^{j2\pi f t_A})|}. \quad (2.7)$$

Für den Phasengang gilt dann

$$\varphi(f) = -\arg\{G(e^{j2\pi f t_A})\} = \arg\{A(e^{j2\pi f t_A})\} - \arg\{B(e^{j2\pi f t_A})\}. \quad (2.8)$$

Hierbei ist auf die Definition des arctan in den verschiedenen Quadranten zu achten! Um einen linearen Phasengang zu erhalten, müssen drei Bedingungen erfüllt sein:

¹Oft wird auch die Bezeichnung $\omega_A = 2\pi f_A$ verwendet.

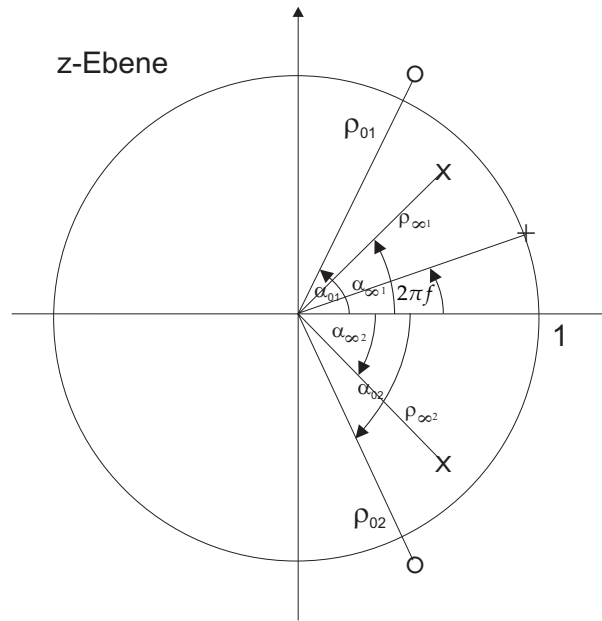


Abbildung 2.1: Pole und Nullstellen in der z-Ebene

lineare Phasengang falls alle drei Bedingungen erfüllt

- Alle Pole müssen im Ursprung liegen.
- Die Nullstellen liegen entweder auf dem Einheitskreis oder liegen in am Einheitskreis gespiegelten Paaren z_{0i} und $1/z_{0i}^*$ vor. ([3]).
- Die Impulsantwort muss symmetrisch oder antisymmetrisch sein.

Die Gruppenlaufzeit τ erhält man durch Ableitung von $\varphi(f)$ nach f . Bei einem linearen Phasengang erhält man also eine konstante Gruppenlaufzeit.

Stellt man den Frequenzgang durch Pole und Nullstellen dar, so erhält man aus (2.6) an der Stelle $z = e^{j2\pi f t_A}$

$$G(e^{j2\pi f t_A}) = e^{j(p-q)2\pi f t_A} \cdot b_0 \cdot \frac{\prod_{k=1}^q (e^{j2\pi f t_A} - \rho_{0k} e^{j\alpha_{0k}})}{\prod_{k=1}^p (e^{j2\pi f t_A} - \rho_{\infty k} e^{j\alpha_{\infty k}})}. \quad (2.9)$$

Dabei werden Pol- und Nullstellen in (2.9) in Polarkoordinaten dargestellt (Abb. 2.1)

$$z_{\infty k} = \rho_{\infty k} e^{j\alpha_{\infty k}}, \quad (2.10)$$

$$z_{0k} = \rho_{0k} e^{j\alpha_{0k}}. \quad (2.11)$$

Unter Verwendung der Beziehung

$$e^{j2\pi f t_A} = \cos(2\pi f t_A) + j\sin(2\pi f t_A) \quad (2.12)$$

erhält man schließlich nach Betragsbildung den Amplitudengang

$$\left| G(e^{j2\pi f t_A}) \right| = |b_0| \cdot \frac{\prod_{k=1}^q \sqrt{1 - 2\rho_{0k} \cos(2\pi f t_A - \alpha_{0k}) + \rho_{0k}^2}}{\prod_{k=1}^p \sqrt{1 - 2\rho_{\infty k} \cos(2\pi f t_A - \alpha_{\infty k}) + \rho_{\infty k}^2}}. \quad (2.13)$$

Für den Phasengang resultiert demnach

$$\begin{aligned} \varphi(f) = & (q - p)2\pi f t_A - \arg\{b_0\} + \sum_{k=1}^p \arctan \left\{ \frac{\sin 2\pi f t_A - \rho_{\infty k} \cdot \sin \alpha_{\infty k}}{\cos 2\pi f t_A - \rho_{\infty k} \cdot \cos \alpha_{\infty k}} \right\} \\ & + \sum_{k=1}^q \arctan \left\{ \frac{\sin 2\pi f t_A - \rho_{0k} \cdot \sin \alpha_{0k}}{\cos 2\pi f t_A - \rho_{0k} \cdot \cos \alpha_{0k}} \right\} \end{aligned} \quad (2.14)$$

und die Gruppenlaufzeit wird zu

$$\begin{aligned} 2\pi\tau(f) = & (q - p) + \sum_{k=1}^p \frac{1 - \rho_{\infty k} \cdot \cos(2\pi f t_A - \alpha_{\infty k})}{1 - 2\rho_{\infty k} \cos(2\pi f t_A - \alpha_{\infty k}) + \rho_{\infty k}^2} \\ & - \sum_{k=1}^q \frac{1 - \rho_{0k} \cos(2\pi f t_A - \alpha_{0k})}{1 - 2\rho_{0k} \cos(2\pi f t_A - \alpha_{0k}) + \rho_{0k}^2}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Anschauliche Interpretation

Der Zähler der Gleichung (2.13) beschreibt das Produkt aller Nullstellenabstände vom gegenwärtigen Punkt auf der $2\pi f t_A$ -Achse. Dies wird klar, wenn man das beliebige Dreieck in Abbildung 2.2 a) näher betrachtet. Die Strecke ΔNS , die den Abstand der NS vom Punkt auf der $2\pi f t_A$ -Achse (Einheitskreis) beschreibt, errechnet sich nach dem Cosinussatz ([1]) wie folgt:

$$\Delta^2 NS = 1^2 + \rho_0^2 - 2 \cdot 1 \cdot \rho_0 \cos(\delta) \quad (2.16)$$

$$= 1^2 + \rho_0^2 - 2 \cdot 1 \cdot \rho_0 \cos(\alpha - 2\pi f t_A) \quad (2.17)$$

$$= 1^2 + \rho_0^2 - 2 \cdot 1 \cdot \rho_0 \cos(-(2\pi f t_A - \alpha)) \quad (2.18)$$

$$\Delta NS = \sqrt{1 + \rho_0^2 - 2\rho_0 \cos(2\pi f t_A - \alpha)}. \quad (2.19)$$

Der Nenner von (2.13) beschreibt das Produkt der Polstellenabstände. Es wird nun klar, dass nahe am Einheitskreis liegende Polstellen ein kleines „Abstandsprodukt“ erzeugen und daher Amplitudenüberhöhungen im Frequenzgang bei den entsprechenden Frequenzen vorhanden sind.

Abbildung 2.2 b) soll die Gleichung (2.14) für den Phasenverlauf näher beleuchten. Der erste Summand $(q - p)2\pi f t_A$ beschreibt die stationäre Phasenverschiebung für große Frequenzen. Der zweite Term $\arg\{b_0\}$ verschwindet für reelle Koeffizienten b_0 . Der Winkel γ_2 in Abbildung 2.2 b) ist stellvertretend für den Winkel unter der ersten Summe in (2.14). Er beschreibt den Winkel zwischen der reellen Achse und der Verbindungslinie von Pol zu gegenwärtigem Punkt auf der Frequenzachse. Entsprechende

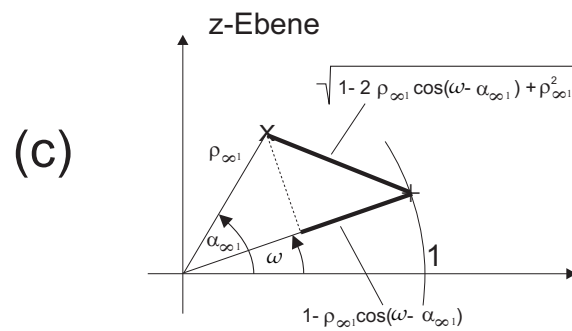
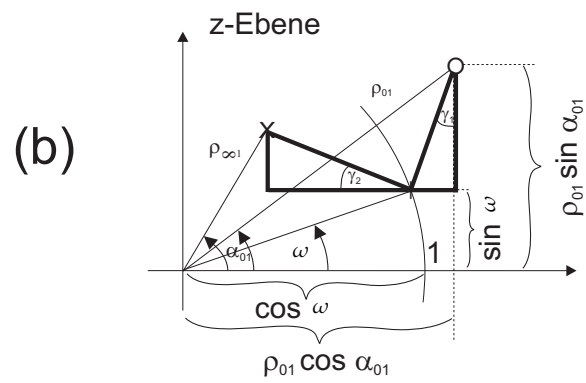
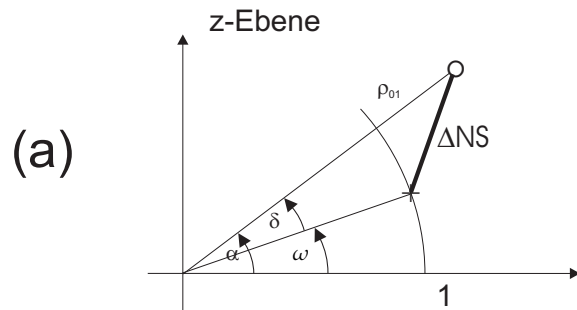


Abbildung 2.2: Anschauliche Erklärung der Gleichungen (2.13) bis (2.15)

Überlegungen führen auf γ_1 , der den Winkel unter der zweiten Summe in (2.14) repräsentiert.

Die Differenz aus Pol- und Nullstellen-„Winkelsummen“ geht also weiterhin in Gleichung (2.14) ein.

Abbildung 2.2 c) beschreibt Gleichung (2.15), wobei hier die Anschauung schon schwerer fällt. Aus Übersichtlichkeitsgründen wurden die Überlegungen auch nur für eine Polstelle skizziert.

Durch Abfahren des Einheitskreises in mathematisch positiver Richtung beginnend bei $z = 1$ bis $z = -1$ ist es also möglich, durch Betrachtung der Abstände der Pol- bzw. Nullstellen zu dem aktuell betrachteten Punkt auf dem Einheitskreis den Frequenzgang des Systems bis auf einen konstanten Faktor im Amplitudengang bzw. einen konstanten Offset im Phasengang zu berechnen. Durch die positive Umlaufrichtung wird nur der positive Teil der Frequenzachse betrachtet. Da reale Systeme jedoch immer einen geraden Amplitudengang und einen ungeraden Phasengang besitzen (zur Erinnerung: in realen Systemen liegen Pole und Nullstellen entweder auf der reellen Achse oder kommen in einem konjugiert komplexen Paar vor, weshalb in der Impulsantwort keine komplexen Schwingungen vorhanden sind), charakterisiert diese Information das System vollständig.

Es ist so auch leicht ersichtlich, dass beispielsweise nahe am Einheitskreis liegende Pole Überhöhungen im Amplitudengang bewirken und dass nahe beisammen liegende Pole und Nullstellen steile Filterflanken hervorrufen können (vgl. das Notch-Filter in [2]).

2.1.3 Grundbegriffe der Filterung

Ein Filter ist hier zu verstehen als *eine elektrische Schaltung oder allgemein als ein elektronisches System, das den Frequenzgehalt eines Signals modifiziert*. Mathematisch wird ein Filter durch eine Übertragungsfunktion nach Gl. (2.3) implementiert. Der *Filterentwurf* umfasst dann die Wahl der Parameter b_j und a_i so, dass bestimmte Eigenschaften bezüglich des Amplitudenganges und der Phase realisiert werden. Besteht der gewünschte Amplitudengang aus stückweise konstanten Abschnitten, so spricht man von *frequenzselektiven Filtern*, die Grundformen sind als *Tiefpass*, *Hochpass*, *Bandpass* und *Bandsperre* bekannt. Für den Entwurf dieser Filterformen existieren geschlossene Verfahren, z. B. solche, die sich vom Entwurf klassischer Analognetzwerke herleiten.

Idealerweise besitzen frequenzselektive Filter einen Amplitudengang, der im *Durchlassbereich* den Wert Eins und im *Sperrbereich* den Wert Null besitzt. Soll ein Filter als lineares, zeitinvariantes System realisiert werden, ist die Übertragungsfunktion $G(s)$ bzw. $G(z)$ wie schon erwähnt im Allgemeinen gebrochen rational. Oft kann damit der gewünschte Verlauf von Amplituden- und Phasengang aufgrund der begrenzten Zahl von Koeffizienten nur approximiert werden. Die Abweichungen vom gewünschten Verhalten werden in einem *Toleranzschema* zusammengestellt. Das Toleranzschema besteht aus einem definiertem *Übergangsbereich* zwischen Durchlass- und Sperrbereich sowie maximal erlaubten Amplitudenabweichungen δ_D, δ_S in Durchlass- und Sperrbereich (siehe Abbildung 2.1.3).

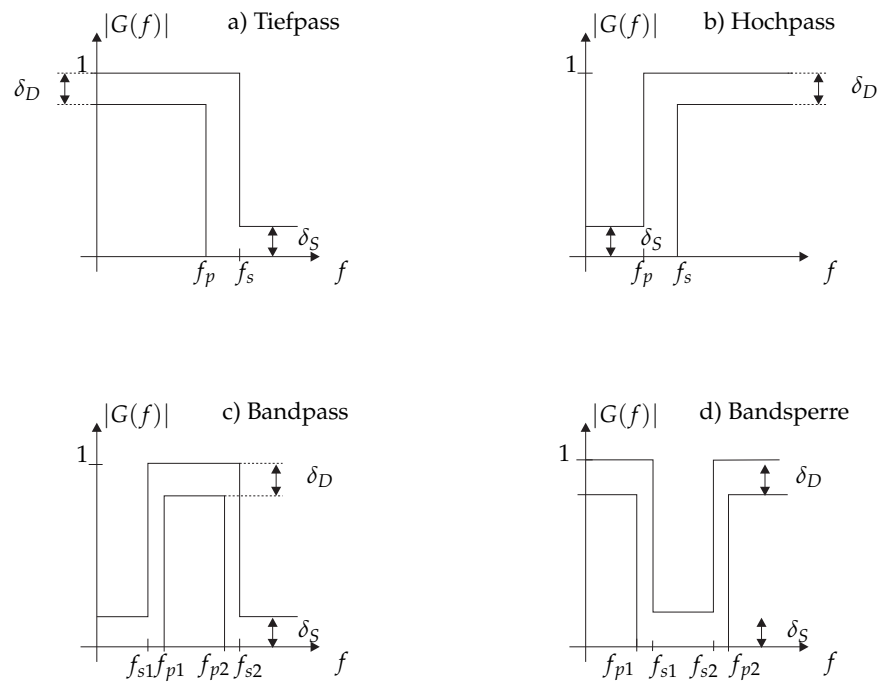


Abbildung 2.3: Toleranzschema von frequenzselektiven Filtern. δ_D ist die erlaubte Amplitudenabweichung im Durchlassbereich und δ_S im Sperrbereich.

2.2 Anwendungsgebiete von Filtern

Filter kommen in den unterschiedlichsten Anwendungsgebieten zum Einsatz. Eine kleine Auswahl ausgewählter Themengebiete wird im Folgenden hier vorgestellt, die Aufzählung könnte jedoch beinahe beliebig fortgesetzt werden.

Nachrichtenübertragung Nachrichtenübertragung beschreibt den Austausch von Informationen. Unterschiedliche Medien haben unterschiedliche Charakteristika der Informations- oder Signalübertragung. Wegen externer Störquellen wie zum Beispiel dem Netzbrummen können frequenzselektive Störungen während der Übertragung überlagert sein. Das Medium selbst besitzt auch eine bestimmte Bandbreite, normalerweise steigt die Dämpfung mit der Frequenz und somit funktioniert das Medium selbst häufig wie ein Tiefpassfilter.

Ein Filter auf der Empfängerseite kann anhand von bekannten Eigenschaften des Mediums Störungen beseitigen, um die Übertragung zu optimieren.

Im Allgemeinen ist die Nutzung von Frequenzen gesetzlich geregelt. Es muß daher sichergestellt werden, dass ein Sender außerhalb des zugewiesenen Spektrums mit der Sendeleistung den gesetzlichen Grenzwert nicht überschreitet.

Weiterhin muß in der Nachrichtenübertragung häufig auf die Phasenänderung über der Frequenz (Gruppenlaufzeit) geachtet werden, da eine Datenübertragung oft nur möglich ist, wenn die Phase des übertragenen Signals fast linear ist.

Audioverarbeitung In vielen HiFi-Geräten sind sogenannte Equalizer enthalten, welche eine Filterbank repräsentieren. Mit ihnen können bestimmte akustische Ei-

enschaften des beschallten Raumes erreicht, das heißt, ein gewünschter Frequenzgang realisiert werden.

In der Audioverarbeitung ist eine Linearität der Phase der eingesetzten Filter besonders wichtig, da das menschliche Ohr empfindlich auf nicht konstante Gruppenlaufzeiten reagiert. Hier ist deshalb oft von einer „Phasenverzerrung“ die Rede.

Bildverarbeitung Effekte, die Bilder schärfen oder unschärfer machen (Blur), werden mit Hilfe zweidimensionaler Filter realisiert. Bei der Bildverarbeitung sieht man Verzerrungen besonders deutlich, wenn Bilder verkleinert oder vergrößert werden sollen. Ein entsprechendes Hoch- oder Tiefpassfilter kann diese Verzerrungen unterdrücken.

Je nach Einsatzzweck müssen Filter also bestimmte Eigenschaften in Bezug auf Phase, Gruppenlaufzeit oder Amplitudengang aufweisen.

2.3 Analoge Filter

Analoge Filter realisieren eine Approximation eines gewünschten Frequenzgangs $G(f)$ mit analogen Bauteilen. Die Bauteile können entweder *passiv* oder *aktiv* sein, man spricht dann von einem passiven oder aktiven Filter. Analoge Filter sind Schaltungen, die sich mittels einfacher Methoden wie z. B. Bode-Diagrammen und der Laplace-Transformation analysieren lassen. Die Synthese dieser Schaltungen wird im Folgenden behandelt.

2.3.1 BUTTERWORTH-Filter

Der Frequenzgang eines BUTTERWORTH-Filters ist im Durchlassbereich „maximal“ flach. Für ein Tiefpassfilter N -ter Ordnung bedeutet das, dass die ersten $(2N - 1)$ Ableitungen vom Quadrat des Frequenzgangs bei $f = 0$ Null sind. Das BUTTERWORTH-Filter ist sowohl im Durchlass- als auch im Sperrbereich monoton fallend. Das Quadrat des Amplitudengangs wird verwendet, da es die Leistungsverteilung über der Frequenz repräsentiert. Für ein BUTTERWORTH-Tiefpassfilter ist es wie folgt definiert:

$$|G(f)|^2 = \frac{1}{1 + (f/f_C)^{2N}}. \quad (2.20)$$

Dabei ist f_C die Knickfrequenz des Filters, siehe Abb. 2.3.1. Mit höherer Ordnung N wird der Übergang vom Durchlass- zum Sperrbereich steiler. Bei BUTTERWORTH-Filtern ist der Frequenzgang sowohl im Durchlass- als auch im Sperrbereich monoton. Für den Entwurf eines BUTTERWORTH-Filters hat man die folgenden Parameter zur Verfügung: f_d , f_s , δ_D und δ_S (siehe Abbildung 2.1.3). Mit der folgenden Gleichung kann die benötigte Ordnung berechnet werden:

$$N = \frac{\log \left(\frac{(\frac{1}{\delta_D})^2 - 1}{(\frac{1}{1 - \delta_S})^2 - 1} \right)}{2 \log(\frac{f_s}{f_D})}. \quad (2.21)$$

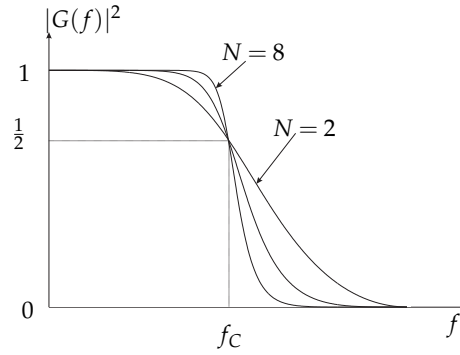


Abbildung 2.4: Amplitudengang des BUTTERWORTH Tiefpass-Filters

Bei Angabe von δ_S und δ_D in dB wird Gleichung (2.21) zu

$$N_{dB} = \frac{\log\left(\frac{10^{\frac{\delta_D}{10}} - 1}{10^{\frac{\delta_S}{10}} - 1}\right)}{2\log\left(\frac{f_S}{f_D}\right)}. \quad (2.22)$$

Die Polstellen können mittels

$$s_{k,\infty} = (-1)^{\frac{1}{2N}} (j2\pi f_C) = 2\pi f_C \cdot e^{\left(\frac{j\pi}{2N}(2k+N-1)\right)}, \quad k = 0, 1, \dots, 2N-1 \quad (2.23)$$

aus dem Betragsquadrat des Amplitudengangs berechnet werden. Um ein kausales und stabiles Filter zu erhalten, müssen nun nur noch diejenigen Pole gewählt werden, die in der linken s -Halbebene liegen. Damit erspart man sich das aufwändige Aufspalten des Betragsquadrates $|G(s)|^2 = G(-s) \cdot G(s)$, um die Pole der (stabilen) Übertragungsfunktion $\bar{G}(s)$ zu erhalten. Diese liegen auf einem Halbkreis in der s -Ebene.

2.3.2 TSCHEBYSCHJEFF-Filter

Beim BUTTERWORTH-Filter ist die maximale Amplitudenabweichung im Durchlass- oder Sperrbereich in nur einem Punkt gegeben, nämlich im Idealfall bei den Frequenzen f_s oder f_d . Wenn im Durchlassbereich mehrere maximale Amplitudenabweichungen erlaubt sind (vgl. Abb. 2.3.2), erhält man ein TSCHEBYSCHJEFF-Filter. Auf Grund der Aufteilung des Fehlers ergibt das TSCHEBYSCHJEFF-Filter einen steileren Übergang zwischen Durchlass- und Sperrbereich.

Wenn der Frequenzgang Schwingungen im Durchlassbereich hat und monoton im Sperrbereich ist, handelt es sich dabei um ein TSCHEBYSCHJEFF I Filter. Der Frequenzgang von TSCHEBYSCHJEFF II Filtern ist monoton im Durchlassbereich und weist Schwingungen im Sperrbereich auf. Das Quadrat des Frequenzgangs für ein TSCHEBYSCHJEFF I Tiefpassfilter lautet

$$|G(f)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 V_N^2(f/f_C)}. \quad (2.24)$$

Dabei ist $V_N(x)$ das sogenannte TSCHEBYSCHJEFF-Polynom: $V_N(x) = \cos(N \cos^{-1} x)$. Die Schwingung, im Durchlassbereich begrenzt durch δ_D , schwingt zwischen 1 und $1/(1 + \varepsilon^2)$. f_C bezeichnet wie schon beim BUTTERWORTH-Filter die Knickfrequenz.

Die Pole eines TSCHEBYSCHJEFF-Filters liegen in der s -Ebene auf einer Ellipse. Die kleine und große Halbachse dieser Ellipse sind nur abhängig von der Höhe des Durchlassstoleranzbandes ε und der Filterordnung N . Die geometrische Bestimmung kann [4] entnommen werden.

Das Quadrat des Frequenzganges eines TSCHEBYSCHJEFF II Filters erhält man mit

$$|G(f)|^2 = \frac{1}{1 + [\varepsilon^2 V_N^2(f_C/f)]^{-1}}. \quad (2.25)$$

Der Entwurf des Filters entspricht dem des Typs I, jedoch muß die Transformation $(\cdot)^{-1}$ und die Vertauschung der Argumente des TSCHEBYSCHJEFF-Polynoms vorgenommen werden.

Das Typ II Filter erzeugt im Übergangsbereich zwischen Durchlass- und Sperrbereich die geringste Laufzeit und besitzt im Durchlassbereich das größte Intervall mit konstanter Gruppenlaufzeit.

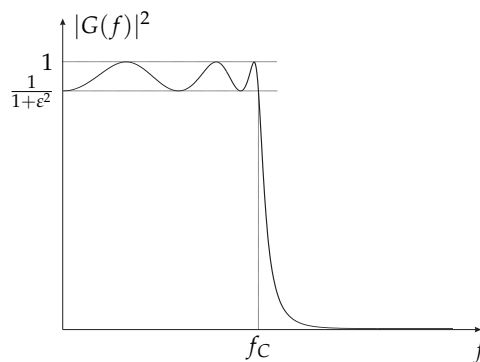


Abbildung 2.5: Amplitudengang des TSCHEBYSCHJEFF I Tiefpass-Filters

2.3.3 CAUER-Filter

Die **elliptischen oder CAUER-Filter stellen eine Kombination aus TSCHEBYSCHJEFF I und TSCHEBYSCHJEFF II Entwurf dar, das heißt, sie sind sowohl im Durchlass- als auch im Sperrbereich wellig.** Das Betragsquadrat für CAUER-Filter lautet

$$|G(f)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 U_N^2(f)}. \quad (2.26)$$

Die Funktion $U_N(f)$ ist dabei die so genannte JACOBISCHE Ellipsenfunktion. Daher rührt auch der Name „elliptische Filter“.

CAUER-Filter zeichnen sich durch eine sehr große Flankensteilheit aus und benötigen eine weit geringere Ordnung als die anderen bereits erwähnten Filter, um ein vorgegebenes Toleranzband einzuhalten.

Die steile Flanke des CAUER-Filters erkauft man sich allerdings durch eine extreme Phasenverzerrung. Insbesondere im Durchlassbereich tritt ein Peak in der Gruppenlaufzeit auf, weshalb solche Filter zum Beispiel für Audioanwendungen ungeeignet sind. Auch für die Impulswiedergabe sind CAUER-Filter schlecht verwendbar.

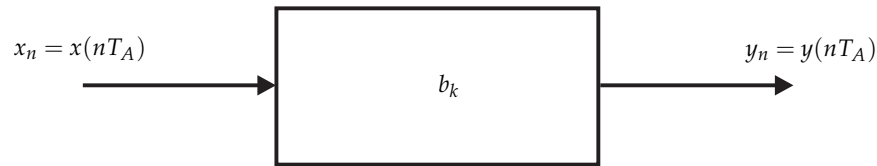


Abbildung 2.6: Blockschaltbild eines nichtrekursiven digitalen Filters

2.4 Digitale Filter

Wie bereits erwähnt, bieten digitale Filter gegenüber einer analogen Realisierung entscheidende Vorteile wie einfache Parametrierbarkeit und eine geringere Abhängigkeit von Bauteiltoleranzen. Wo möglich wird daher die digitale Filterung der analogen vorgezogen. Analoge Filter finden sich heute hauptsächlich in zwei großen Anwendungsgebieten, die der digitalen Filterung nicht zugänglich sind. Dies ist zum einen die Vorverarbeitung vor der Digitalisierung (Abtastung) von Messdaten, zum anderen der Bereich der Hochfrequenz, da die maximale Frequenz, bei der digitale Filter in Echtzeit eingesetzt werden können, durch die Schaltgeschwindigkeit von Transistoren beschränkt ist.

In Kapitel 2 wurde bereits gezeigt, dass durch die Abtastung im Zeitbereich eine periodische Wiederholung mit der Abtastfrequenz im Frequenzbereich entsteht. Dadurch entsteht eine Redundanz im Frequenzgang, die nicht erwünscht ist. Bei digitalen Filtern wird deshalb oft die auf die Abtastfrequenz bezogene Frequenz $\omega = 2\pi f t_A$ als Variable verwendet. Für die Analyse realer Filter reicht die Betrachtung im Bereich $0 \leq \omega \leq \pi$ aus.

2.4.1 FIR-Filter

Generell kann man digitale Filter in zwei Hauptklassen einteilen, je nachdem, ob vergangene Ausgangswerte „weiterverwendet“ werden oder nicht. Werden die Ausgangswerte in die Berechnung zurückgekoppelt, spricht man von *rekursiven* Filtern, sonst von *nichtrekursiven* Filtern. In diesem Kapitel soll auf die nichtrekursiven oder FIR-Filter eingegangen werden.

Algorithmus

Nichtrekursive Filter verwenden ausschließlich *Eingangswerte* zur Berechnung der Ausgangswerte, siehe auch Abbildung 2.6. Dies führt zu folgender Impulsantwort:

$$y_n = \sum_{k=0}^m b_k x_{n-k}. \quad (2.27)$$

Die Impulsantwort des nichtrekursiven Systems weist nur in den ersten m Schritten ein von Null verschiedenes Ausgangssignal auf. Da nach $m + 1$ -Takten die Impulsantwort verschwindet, wird dieser Filtertyp auch FIR-Filter genannt („finite impulse response“).

Übertragungsfunktion

Die Abtastwerte der Impulsantwort eines FIR-Filters entsprechen gerade dessen Filterkoeffizienten:

$$g_k = \begin{cases} b_k & 0 \leq k \leq m \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (2.28)$$

Für die *nicht-symmetrische* Form der Übertragungsfunktion gilt dann

$$G(f) = \sum_{k=0}^m b_k e^{-j2\pi f t_A k} \quad (2.29)$$

und für die *symmetrische* Darstellung²

$$G(f) = \sum_{k=-\frac{m}{2}}^{\frac{m}{2}-1} b_k e^{-j2\pi f t_A k}. \quad (2.30)$$

Die Darstellungsformen können im Allgemeinen durch eine Zeitverschiebung der Impulsantwort ineinander überführt werden.

Entwurf nichtrekursiver Filter

Der Filterentwurf nichtrekursiver Systeme besteht in der Vorgabe eines gewünschten Frequenzganges $G_W(e^{j\Omega})$. Die Abweichung des realen Frequenzganges bezüglich G_W wird mittels eines quadratischen Gütemaßes optimiert. Für die nichtsymmetrische Darstellung des Frequenzganges folgt für das Gütemaß

$$Q = \int_{-\pi}^{\pi} \left| G_W(f) - \sum_{k=0}^m g(k) \cdot e^{-j2\pi f t_A k} \right|^2 df \rightarrow \min. \quad (2.31)$$

Die weitere Rechnung, die auf der Minimumssuche von Q bezüglich g_k basiert, kann im Detail [3] entnommen werden.

Die Rechnung zeigt, dass die auf diese Weise hergeleitete Approximation des idealen Frequenzganges aus der inversen zeitdiskreten Fouriertransformation resultiert:

$$g(k) = \int_{-\frac{t_A}{2}}^{\frac{t_A}{2}} G_W(f) \cdot e^{j2\pi f t_A k} df. \quad (2.32)$$

Hier ist $g(k)$ die Impulsantwort des approximierten FIR-Systems.

Anschaulich bedeutet dies also, dass man sich beispielsweise beim Entwurf eines TP-Filters dessen Frequenzgang vorgibt und davon die *inverse* Fouriertransformierte bildet, um die gesuchten Filterkoeffizienten zu erhalten.

Somit erhält man die folgende Approximation für die Impulsantwort des gesuchten idealen Tiefpassfilters:

²Die angegebene Formel gilt für gerade m .

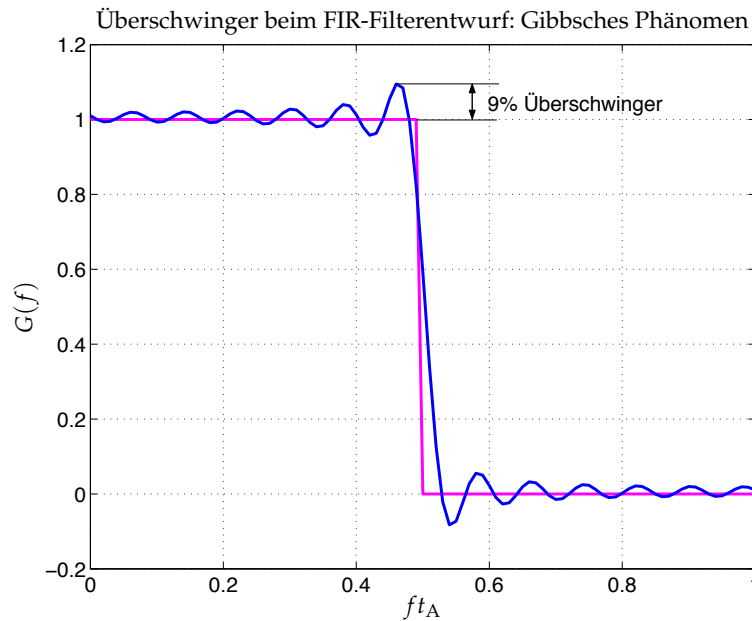


Abbildung 2.7: Fourier-Approximation eines idealen Tiefpass-Filters

$$g_k = \begin{cases} \frac{2\pi f_g t_A}{\pi} \frac{\sin(2\pi f_g t_A (k - \frac{m}{2}))}{2\pi f_g t_A \cdot (k - \frac{m}{2})} & 0 \leq k \leq m \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (2.33)$$

Die Frequenz f_g stellt hierbei die Grenzfrequenz dar.

Durch die endliche Länge der Filterantwort kommt es zu dem in Abbildung 2.7 dargestellten Verlauf des Frequenzgangs. Sowohl im Durchlass- als auch im Sperrbereich kommt es zu Oszillationen, deren Höhe unabhängig von der Filterlänge ist. **Jedoch steigt die Oszillationsfrequenz mit steigender Filterlänge.**

Die endliche Impulsantwort kann auch dargestellt werden als

$$g_k = \frac{2\pi f_g t_A}{\pi} \frac{\sin(2\pi f_g t_A (k - \frac{m}{2}))}{2\pi f_g t_A \cdot (k - \frac{m}{2})} \cdot r_m(k - \frac{m}{2}) \quad (2.34)$$

mit

$$r_m(k - \frac{m}{2}) = \begin{cases} 1 & 0 \leq k \leq m \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (2.35)$$

Um das Übertragungsverhalten des Rechteckfensters in Abb. 2.7 zu verbessern, kann man sich anderer Fensterfunktionen (z. B. Hann-, Hamming-, Kaiserfenster, usw.) bedienen. Jedoch nimmt man dadurch Verschlechterungen der Filtereigenschaften wie z. B. eine Verbreiterung des Hauptmaximums im Frequenzbereich in Kauf, siehe auch [3].

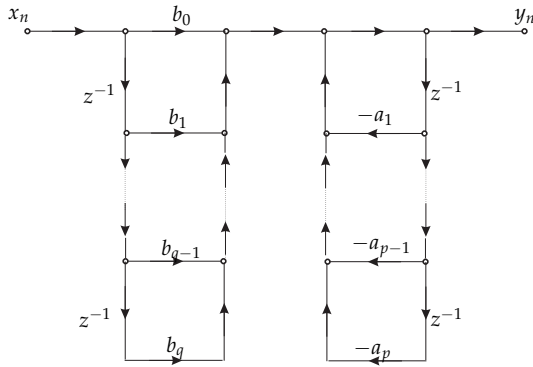


Abbildung 2.8: Realisierung eines IIR-Filters in direkter Form I

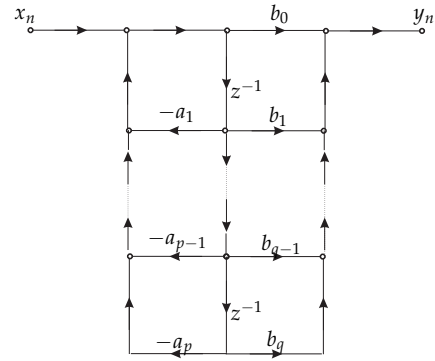


Abbildung 2.9: IIR-Filter in direkter Form II mit $p = q$

2.4.2 IIR-Filter

Die zweite Gruppe von zeitdiskreten Filtern neben den FIR-Filtern sind die IIR („infinite impulse response“)-Filter. Sie verwenden im Gegensatz zu FIR-Filtern vergangene gefilterte Ausgangswerte zur Berechnung des aktuellen Ausgangswertes.

Die Umsetzung der Differenzgleichungen von IIR-Filtern ist mit verschiedenen Strukturen möglich. Auf die am häufigsten verwendeten dieser Strukturen wird hier eingegangen und auf ihre Vorteile hinsichtlich Speicherbedarf, Robustheit usw. hingewiesen.

Die vier Hauptstrukturen digitaler IIR-Filter

Der Eingang x_n und der Ausgang y_n eines kausalen IIR-Filters mit der Übertragungsfunktion

$$G(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{\sum_{k=0}^q b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^p a_k z^{-k}} \quad (2.36)$$

hat die folgende Differenzgleichung:

$$y_n = \sum_{k=0}^q b_k x_{n-k} - \sum_{k=1}^p a_k y_{n-k}. \quad (2.37)$$

Wird die Differenzgleichung mit der Hilfsgröße w_n wie folgt geschrieben:

$$w_n = \sum_{k=0}^q b_k x_{n-k} \quad (2.38)$$

$$y_n = w_n - \sum_{k=1}^p a_k y_{n-k}. \quad (2.39)$$

so handelt es sich um eine serielle (Kaskaden-) Schaltung von zwei Teilen:

$$Y(z) = \frac{1}{A(z)} \left(B(z) X(z) \right) \quad (2.40)$$

und wird *Struktur in direkter Form I* genannt [4]. Die Rechenintensität und der Speicherbedarf dieser Struktur sind folgendermaßen:

- Anzahl Multiplikationen pro Element (Sample): $p + q + 1$
- Anzahl Additionen pro Element: $p + q$
- Anzahl Verzögerungsglieder: $p + q$

Wenn die Reihenschaltung von $1/A(z)$ und $B(z)$ vertauscht ist, folgt

$$Y(z) = B(z) \left(\frac{1}{A(z)} X(z) \right) \quad (2.41)$$

und die Differenzgleichungen lauten:

$$w_n = x_n - \sum_{k=1}^p a_k w_{n-k} \quad (2.42)$$

$$y_n = \sum_{k=0}^q b_k w_{n-k}. \quad (2.43)$$

Diese Schaltung wird *Direkte Form II* genannt und hat den Vorteil, dass die Verzögerungsglieder kombiniert werden können, wie in Abb. 2.9 dargestellt. Dabei wird der Speicherbedarf reduziert. Die Rechenintensität und der Speicherbedarf dieser Struktur ergeben sich zu:

- Anzahl Multiplikationen pro Element (Sample): $p + q + 1$
- Anzahl Additionen pro Element: $p + q$
- Anzahl Verzögerungsglieder: $\max(p, q)$.

Eine Alternative zu den einfachen Strukturen in Direktform I und II ist die Reihenschaltung von Teilfiltern zweiter Ordnung. Dies erfolgt über die Faktorisierung der Übertragungsfunktion $G(z)$:

$$G(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{\sum_{k=0}^q b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^p a_k z^{-k}} = \prod_{n=1}^{N_S} \frac{b_{0,n} + b_{1,n} z^{-1} + b_{2,n} z^{-2}}{1 + a_{1,n} z^{-1} + a_{2,n} z^{-2}}. \quad (2.44)$$

Dabei ist $N_S = \lfloor (N + 1)/2 \rfloor$ die Zahl $(N + 1)/2$ nach unten gerundet. Die Teilfilter können in der Direktform II realisiert werden, um den benötigten Speicherplatz zu minimieren.

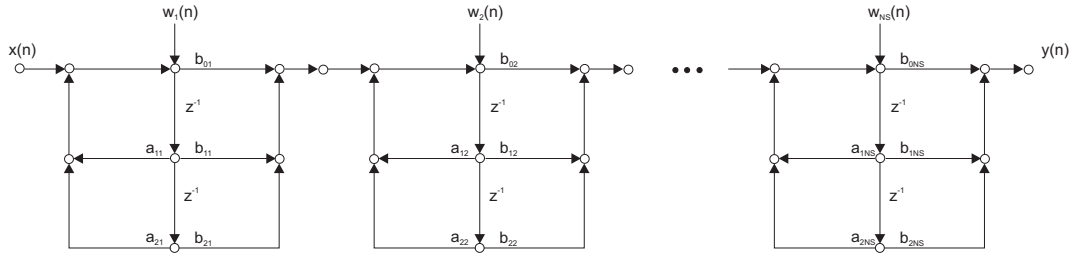


Abbildung 2.10: Reihenschaltung von Teilfiltern 2. Ordnung in direkter Form II

Alternativ zur Reihenschaltung ist darüber hinaus die Parallelschaltung von Systemen erster und zweiter Ordnung denkbar. Die z -Transformierte der einzelnen Subsysteme werden in diesem Fall nicht multipliziert wie bei der Serienschaltung, sondern addiert. Man erhält die Übertragungsfunktion der einzelnen Subsysteme durch Partialbruchzerlegung der Gesamtübertragungsfunktion (siehe Abbildung 2.10).

Die Freiheitsgrade beim Entwurf solcher Filterstrukturen werden repräsentiert durch verschiedene Kombinationen von Null- und Polstellen sowie durch die Reihenfolge der resultierenden Teilstrukturen. Untersuchungen haben gezeigt, dass mittels gewisser Entwurfsrichtlinien diese Struktur hinsichtlich Quantisierungsrauschen optimiert werden kann (siehe Abschnitt 2.5).

Entwurf rekursiver Tiefpass-Filter

Ziel des Filterentwurfs ist die Aufstellung der Übertragungsfunktion

$$G(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{\sum_{k=0}^q b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^p a_k z^{-k}}. \quad (2.45)$$

Der Entwurf eines zeitdiskreten IIR Filters basiert auf der Transformation eines zeitkontinuierlichen Systems mit dem gewünschten Frequenzgang in die z -Ebene. Dies geschieht typischerweise mittels der *bilinearen Transformation*, [2]:

$$s = \frac{2}{T} \cdot \frac{z - 1}{z + 1} \quad (2.46)$$

Die Abbildung bildet die linke Hälfte der s -Ebene in das Innere des Einheitskreises ab, die imaginäre Achse wird auf den Einheitskreis transformiert:

$$\pi f = \frac{1}{t_A} \tan(\pi f t_A) = \frac{1}{t_A} \tan\left(\frac{\omega}{2}\right). \quad (2.47)$$

Es kommt also durch (2.47) zu einer nichtlinearen Vorverzerrung der Frequenzachse. Gleichung (2.47) bildet den Bereich $-\infty \leq f \leq \infty$ der s -Ebene auf den Bereich $-\pi \leq \omega \leq \pi$ der z -Ebene ab. Die kritischen Frequenzen im Toleranzschema des zeitkontinuierlichen Systems müssen gemäß (2.47) vorverzerrt werden; dann nur erfüllt das nach Transformation mit (2.46) erhaltene zeitdiskrete Filter die Spezifikation. Den Sachverhalt der Verzerrung veranschaulicht Abbildung 2.11.

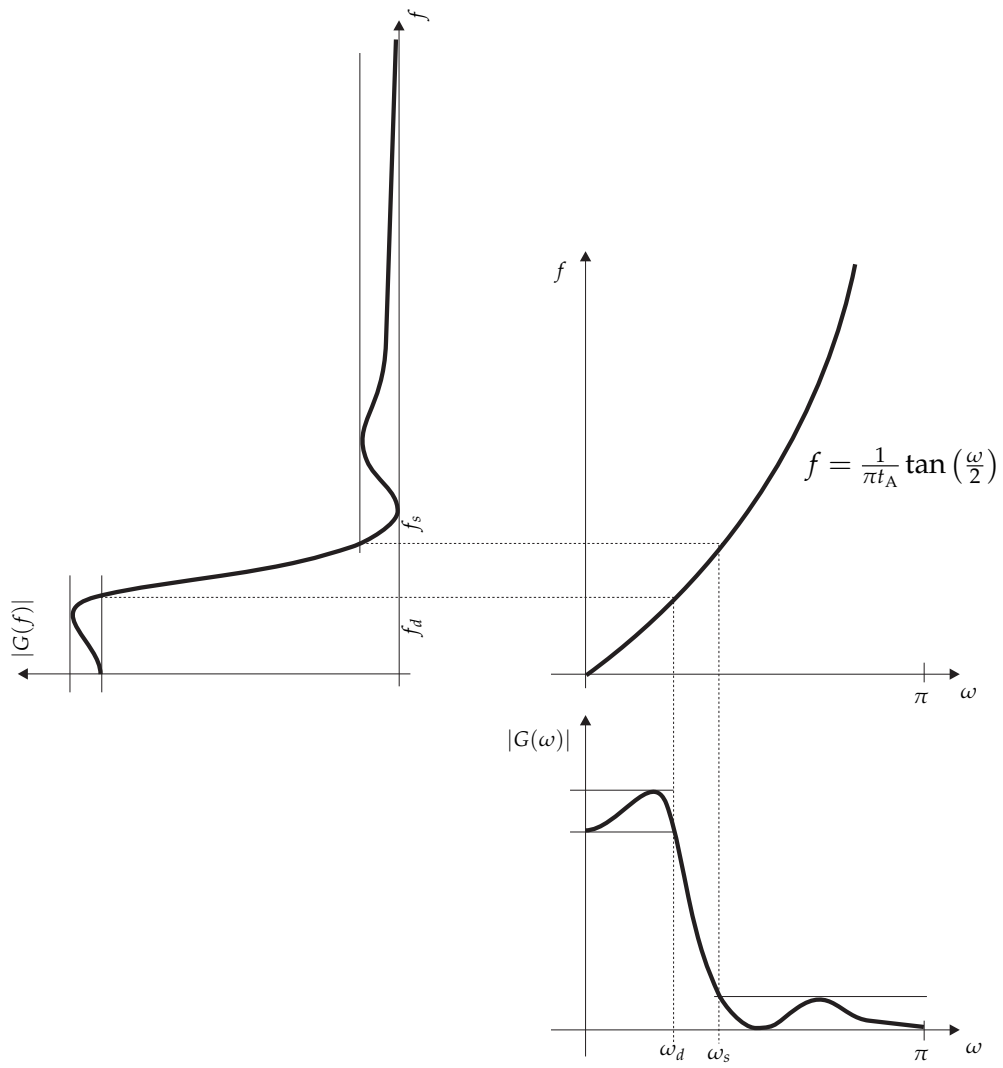


Abbildung 2.11: Frequenzverzerrung aufgrund der Anwendung der bilinearen Transformation

Ein weiterer Effekt der bilinearen Transformation betrifft die Phase. Durch die nicht-lineare Abbildung der Frequenzachse kann beispielsweise der lineare Phasenverlauf eines zeitkontinuierlichen Filters für das korrespondierende zeitdiskrete Filter verloren gehen. Dies muß beim Filterentwurf unbedingt berücksichtigt werden. Die Vorgehensweise beim Entwurf eines digitalen rekursiven Filters kann am einfachsten anhand eines Beispiels beschrieben werden.

Entwurf eines rekursiven digitalen Tiefpass-Filters aus einem analogen BUTTERWORTH-Filter

In der folgenden schrittweisen „Anleitung“ zum Entwurf eines Tiefpass-Filters werden zunächst die Schritte genannt und anschließend Zahlenwerte vorgegeben. Diese sind willkürlich gewählt und sollen ausschließlich der Veranschaulichung dienen.

1. Durchlass- und Sperrbereich im Zeitdiskreten definieren (vgl. Kapitel 2.1.3), d. h. ω_d , ω_s , δ_D und δ_S festlegen:

$$\text{Durchlassbereich:} \quad 0,89125 \leq |G_Z(\omega)| \leq 1, \quad 0 \leq \omega \leq 0,2\pi$$

$$\text{Sperrbereich:} \quad 0 \leq |G_Z(\omega)| \leq 0,17783, \quad 0,3\pi \leq \omega \leq \pi$$

2. Abbildung der zeitdiskreten Grenzfrequenzen auf die entsprechenden zeitkontinuierlichen durch Vorverzerrung gemäß 2.47:

$$\text{Durchlassbereich:} \quad 0,89125 \leq |G_S(f)| \leq 1, \quad 0 \leq f \leq \frac{1}{\pi t_A} \tan\left(\frac{0,2\pi}{2}\right)$$

$$\text{Sperrbereich:} \quad 0 \leq |G_S(f)| \leq 0,17783, \quad \frac{1}{\pi t_A} \tan\left(\frac{0,3\pi}{2}\right) \leq f < \infty$$

3. Einsetzen der Grenzfrequenzen in das Betragsquadrat des Frequenzgangs: BUTTERWORTH-Filter nach Abschnitt 2.3.1, Annahme: $t_A = 1$:

$$|G_S(f)|^2 = \frac{1}{1 + (f/f_C)^{2N}} \quad (2.48)$$

$$1 + \left(\frac{f_d}{f_C}\right)^{2N} = \left(\frac{1}{1 - \delta_D}\right)^2 \approx \left(\frac{1}{0,89}\right)^2 = 1 + \left(\frac{2 \tan(0,1\pi)}{2\pi f_C}\right)^{2N} \quad (2.49)$$

$$1 + \left(\frac{f_s}{f_C}\right)^{2N} = \left(\frac{1}{\delta_S}\right)^2 \approx \left(\frac{1}{0,18}\right)^2 = 1 + \left(\frac{2 \tan(0,15\pi)}{2\pi f_C}\right)^{2N} \quad (2.50)$$

4. Auflösen der beiden Gleichungen 2.49 und 2.50 liefert neben der Grenzfrequenz f_C die Filterordnung N (siehe Gleichung 2.21):

$$\text{Ergebnis:} \quad N = 5,26 \Rightarrow N = 6$$

5. Anpassung von f_C mittels Gleichung 2.50 wegen des Aufrundens in Schritt 4:

$$\Rightarrow f_C = \frac{0,77}{2\pi} = 0,123$$

6. Bestimmung der Pole des BUTTERWORTH-Filters nach Gleichung 2.23:

$$s_{k,\infty} = 2\pi f_C \cdot e^{j \frac{\pi}{2N} (2k+N-1)} \quad (2.51)$$

⇒ Auswahl der Pole der linken Halbebene liefert Pole der Systemfunktion

7. Aufstellen der zeitkontinuierlichen Systemfunktion mittels der Pole:

$$G_S(s) = \frac{0,20}{(s^2 + 0,40s + 0,59)(s^2 + 1,08s + 0,59)(s^2 + 1,48s + 0,59)} \quad (2.52)$$

8. Anwendung der bilinearen Transformation 2.46 unter der Annahme $t_A = 1$ liefert schließlich die zeitdiskrete Übertragungsfunktion und damit die Pole in der z -Ebene:

$$G_Z(z) = \frac{0,0007378 (1 + z^{-1})^6}{(1 - 1,27z^{-1} + 0,71z^{-2})(1 - 1,01z^{-1} + 0,36z^{-2})(1 - 0,90z^{-1} + 0,22z^{-2})} \quad (2.53)$$

Der digitale Filterentwurf für die anderen in Kapitel 2.3 beschriebenen analogen Filter vom Typ TSCHEBYSCHIEFF und CAUER verlaufen auf entsprechende Art und Weise, resultieren jedoch in einem weitaus komplizierteren Rechengang.

Frequenztransformation von IIR-Tiefpassfiltern

Der oben beschriebene Weg zum Entwurf eines zeitdiskreten Tiefpassfilters im Zeitkontinuierlichen unter Anwendung der bilinearen Transformation kann auch für die anderen drei Filter-Grundtypen Hochpass, Bandpass und Bandsperre durchgeführt werden.

Wünschenswert wäre jedoch ein einheitlicher Entwurfsprozess für alle Filter. Aus diesem Grund werden ausgehend von sogenannten *Tiefpassgrundfiltern* durch Anwendung spezieller Transformationen die gewünschten frequenzselektiven Filter gewonnen. Dies kann durchaus auch ein Tiefpassfilter mit einer anderen Grenzfrequenz sein. Es wird eine Abbildung gesucht, welche die Variable Z^{-1} des Grundfilters in geeigneter Weise in die z -Ebene des zu entwerfenden Filters transformiert, so dass also gilt:

$$H(z) = H(Z) \Big|_{Z^{-1} = G(z^{-1})} \quad (2.54)$$

Um ein rationales, kausales und stabiles Grundsystem $H(Z)$ in ein Zielsystem $H(z)$ mit denselben Eigenschaften zu transformieren, müssen für $Z^{-1} = G(z^{-1})$ folgende Bedingungen erfüllt sein:

- $G(z^{-1})$ muss eine rationale Funktion in z^{-1} sein
- Das Innere des Einheitskreises der Z -Ebene muss auch in das Innere des Einheitskreises in der z -Ebene abgebildet werden
- Der Einheitskreis der Z -Ebene muss auf den Einheitskreis in der z -Ebene abgebildet werden.

Auf Basis dieser Kriterien kann eine allgemeine Beziehung für $G(z^{-1})$ hergeleitet werden (siehe auch [4]).

Die Transformationsbedingungen werden schnell sehr kompliziert und können detailliert den einschlägigen Lehrbüchern (z. B. [2], [4]) entnommen werden. An dieser Stelle sollen daher nur die Tiefpass-Tiefpass-Transformation sowie die Tiefpass-Hochpass-Transformation Erwähnung finden. Für erstere ergibt sich die Transformationsvorschrift

$$Z^{-1} = \frac{z^{-1} - \alpha_{TP}}{1 - \alpha_{TP}z^{-1}} \quad (2.55)$$

mit

$$\alpha_{TP} = \frac{\sin\left(\frac{\omega'_p - \omega_p}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega'_p + \omega_p}{2}\right)}. \quad (2.56)$$

Hierbei stellt ω'_p die Grenzfrequenz des bereits bekannten Tiefpassfilters dar und ω_p repräsentiert die Grenzfrequenz des gesuchten Tiefpasses.

Für die Tiefpass-Hochpass-Transformation gilt folgende Abbildungsvorschrift:

$$Z^{-1} = \frac{z^{-1} + \alpha_{HP}}{1 + \alpha_{HP}z^{-1}} \quad (2.57)$$

mit

$$\alpha_{HP} = \frac{\cos\left(\frac{\omega'_p + \omega_p}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\omega'_p - \omega_p}{2}\right)}. \quad (2.58)$$

Die Entwurfsformeln setzen voraus, dass sämtliche Grenzfrequenzen im Intervall $0 \leq \omega \leq \pi$ liegen.

Der Entwurf für Bandpässe und Bandsperren erfolgt analog, jedoch mit komplexeren Transformationen. Somit ist der Grundstein für den IIR-Filterentwurf gelegt.

2.5 Auswirkungen endlicher Rechengenauigkeit

2.5.1 Quantisierung der Koeffizienten

Durch Quantisierung des Wertebereichs kann in digitalen Systemen keine infinitesimale Genauigkeit erzielt werden. Das bedeutet, dass die Koeffizienten einer Differenzengleichung bzw. einer Übertragungsfunktion nur endlich genau vorliegen. Das kann bedeuten, dass Pole und Nullstellen in der z -Ebene verschoben werden und dass damit zwangsläufig eine Abweichung von realisierbarer zu „Wunsch-Übertragungsfunktion“ auftritt. Im schlimmsten Fall kann daraus die Instabilität eines Systems resultieren, wenn die Pole durch Quantisierung den Einheitskreis verlassen.

Die realisierbare Übertragungsfunktion eines quantisierten Systems ergibt sich zu

$$\hat{G}(z) = \frac{\sum_{k=0}^q \hat{b}_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=0}^p \hat{a}_k z^{-k}} \quad (2.59)$$

mit den quantisierten Koeffizienten $\hat{a}_k = a_k + \Delta a_k$ und $\hat{b}_k = b_k + \Delta b_k$. Die Delta-Größen repräsentieren hier den Quantisierungsfehler, das heißt die Abweichung vom idealen Koeffizienten.

Der Quantisierungsfehler *eines* Koeffizienten beeinflusst *alle* Pole der Systemfunktion. Ersichtlich wird diese Tatsache bei Ableitung eines Poles nach dem quantisierten Parameter, vgl. [4]:

$$\frac{\partial z_i}{\partial a_k} = \frac{z_i^{p-k}}{\prod_{j=1, j \neq i}^p (z_i - z_j)} \quad (2.60)$$

Werden nun alle k Koeffizienten durchlaufen, um die resultierende Polverschiebung zu erhalten, so folgt:

$$\Delta z_i = \sum_{k=1}^p \frac{\partial z_i}{\partial a_k} \Delta a_k \quad (2.61)$$

Entsprechend wird durch Quantisierung der Koeffizienten natürlich auch der Frequenzgang des Filters beeinträchtigt.

In den 60er Jahren wurde gezeigt, dass bei Strukturen der direkten Form mit eng beisammen liegenden Polen oder Nullstellen selbst bei kleinen Ungenauigkeiten der Koeffizienten des Nenners bzw. Zählers große Verschiebungen der Pole und Nullstellen verursacht werden können.

Insbesondere schmalbandige Filter reagieren daher sehr empfindlich auf die Quantisierung der Koeffizienten. Für diese wird das Produkt der Abstände im Nenner von (2.60) sehr klein und folglich ist die Empfindlichkeit des i -ten Pols groß gegenüber einer Variation des k -ten Koeffizienten. Gleiches gilt entsprechend für die Nullstellen.

Da bei der Reihenschaltung von Systemen 2. Ordnung die konjugiert komplexen Polpaare und Nullstellen der einzelnen Teilsysteme unabhängig voneinander vorgegeben werden, wirken sich Quantisierungsfehler der Koeffizienten nicht auf *alle* Pole und Nullstellen des Systems aus. Somit können Pole und Nullstellen verschiedener Teilsysteme eng beieinander liegen, ohne sich gegenseitig zu beeinflussen. Die Struktur der Reihenschaltung ist somit sehr viel robuster gegenüber einer Variation der Koeffizienten ihrer Übertragungsfunktion.

Die Parallelschaltung ist hinsichtlich der Robustheit zwar der direkten Form vorzuziehen, ist jedoch aufgrund des Nullstellen-Entwurfs schlechter geeignet als die Reihenschaltung.

Die Standardausführungen der direkten Formen reagieren also anfälliger auf Quantisierungseffekte. Weil die modularen Strukturen hinsichtlich des Speicher- und Schaltungsaufwandes nur unwesentlich aufwändiger sind, werden die direkten Formen beinahe ausschließlich für die Implementierung der Teilmodelle 2. Ordnung verwendet, welche dann ihrerseits in den Reihen- und Parallelschaltungen verwendet werden.

Eine Verbesserung der Quantisierungsrobustheit direkter Formen kann durch sogenannte gekoppelte Strukturen [3] erreicht werden.

2.5.2 Quantisierungsrauschen

Die Ursache des Quantisierungsrauschens ist die endliche Wortbreite, die in digitalen Systemen eine beliebig genaue Berechnung der gewünschten Ergebnisse verhindert.

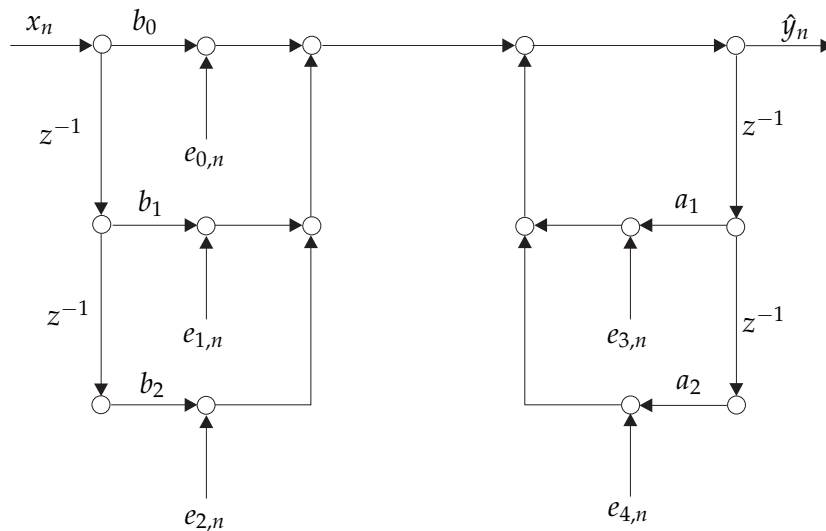


Abbildung 2.12: Lineares Rauschmodell eines Systems in der Grundstruktur Direktform I

Quantisierung bewirkt durch die entstehenden „Treppen“ im Signalverlauf, dass aus dem LTI-System ein nichtlineares System wird. Eine genaue Analyse nichtlinearer Systeme ist sehr schwierig, weshalb mit Hilfe von Simulationen die Effekte der Quantisierung ermittelt werden und überprüft wird, ob die geforderte Spezifikation noch erfüllt wird. Für erste Untersuchungen kann das Verhalten mit einem linearen Rauschmodell beschrieben werden, welches schon gute Ergebnisse liefert.

Lineares Rauschmodell

Das verwendete lineare Rauschmodell wird anhand der Struktur in Direktform I erklärt und kann auf die anderen Grundstrukturen übertragen werden.

Die Einschränkung „endliche Wortlänge“ bedeutet anschaulich das Runden oder Abschneiden der letzten B Stellen einer Zahl. Die Differenz aus quantisiertem und ursprünglichem Signal

$$e_{k,n} = Q[b_k x_n] - b_k \cdot x_n \quad (2.62)$$

kann als Rauschquelle betrachtet werden (siehe hierzu auch Abb. 2.12). $Q[.]$ bezeichnet dabei den Quantisierungsoperator, welcher die Rundung bzw. das Abschneiden von Stellen hervorruft. Für das modellierte Quantisierungsrauschen werden die folgenden Annahmen getroffen:

1. e_n ist weißes Rauschen
2. die Amplitudenverteilung von e_n ist gleichverteilt über einem Quantisierungsintervall
3. die Quantisierungsrauschquelle ist unkorreliert mit ihrem Eingangssignal und mit den anderen Rauschquellen

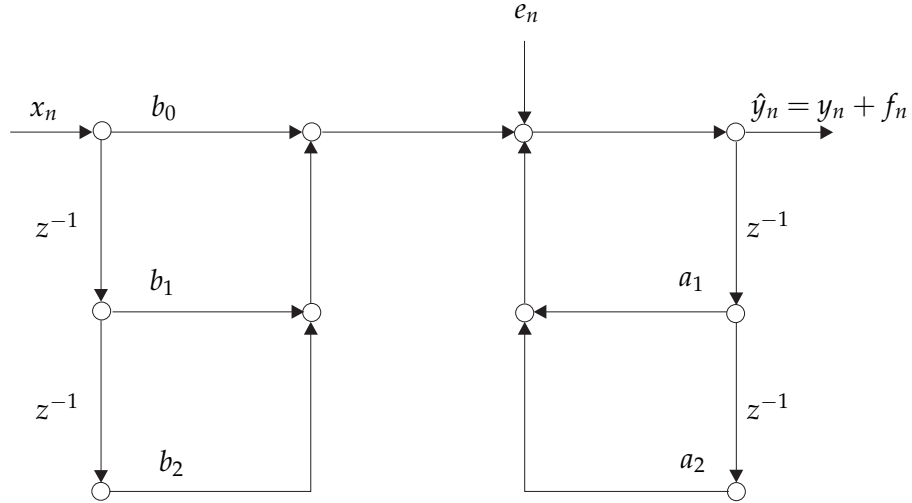


Abbildung 2.13: Vereinfachtes lineares Rauschmodell eines Systems in der Grundstruktur Direktform I

Obwohl Annahme 3 streng genommen nicht gilt, da e_n natürlich von seinem Eingang abhängt, können damit gute Ergebnisse erzielt werden. Dies gilt besonders für breitbandige Signale wie Sprachsignale, da bei solchen Signalen ein schneller Wechsel zwischen unterschiedlichen Quantisierungsstufen erfolgt.

Aufgrund der Eigenschaften 1 bis 3 können die einzelnen Rauschquellen in Abb. 2.12 zusammengefasst werden, was für die direkte Form I zu der Darstellung in Abb. 2.13 führt. Diese Darstellung stellt die Grundlage der weiteren Betrachtungen dar. Für die Gesamtrauschquelle gilt demnach:

$$e_n = \sum_{i=0}^{p+q} e_{i,n} \quad (2.63)$$

$$\sigma_e^2 = \sum_{i=0}^{p+q} \sigma_{ei}^2 = \frac{2^{-2B}}{12} \cdot (q + 1 + p). \quad (2.64)$$

Die Funktion f_n aus Abbildung 2.13 stellt hierbei die Reaktion des Systems auf die Eingangsfolge e_n dar. Auf Basis dieser Signale können nun der Erwartungswert und die Varianz des Ausgangsrauschens bestimmt werden [4]. Je nachdem, ob die z -Übertragungsfunktion, der Frequenzgang oder die Impulsantwort des zeitdiskreten Filters bekannt ist, kann eine der drei folgenden Gleichungen zur Bestimmung von σ_f^2 verwendet werden:

$$\sigma_f^2 = \sigma_e^2 \cdot \int_{-\pi}^{+\pi} |G_{ef}(f)|^2 df \quad (2.65)$$

$$\sigma_f^2 = \sigma_e^2 \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} |g_{ef,n}|^2 \quad (2.66)$$

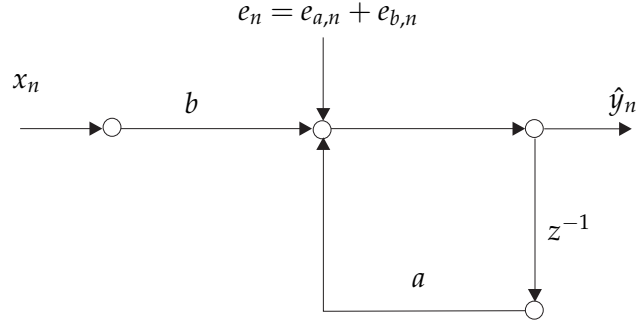


Abbildung 2.14: Rauschmodell für ein System 1. Ordnung in Direktform I

$$\sigma_f^2 = \sigma_e^2 \cdot \frac{1}{2\pi j} \oint_C G_{ef}(z) \cdot G_{ef}(z^{-1}) \cdot z^{-1} dz. \quad (2.67)$$

Das Integral (2.67) kann dabei mit dem CAUCHY-Satz gelöst werden [1]. In den Gleichungen (2.65) bis (2.67) muss beachtet werden, dass die Übertragungsfunktion $G_{ef}(z)$ nur vom Eingang des Rauschens zum Ausgang, *nicht* jedoch durch diejenige durch das Gesamtsystem hindurch verwendet werden muss! Entsprechendes gilt für die Impulsantwort $g_{ef,n}$.

Beispiel: Für ein System 1. Ordnung mit der Struktur in Abb. 2.14 gilt beispielsweise:

$$G_{ef} = \frac{1}{1 - az^{-1}}, \quad (2.68)$$

oder z-rücktransformiert innerhalb des Konvergenzgebietes

$$g_{ef,n} = a^n \cdot \sigma_n, \quad a < |z|. \quad (2.69)$$

Unter Verwendung von (2.64) und (2.66) erhält man also für $q = 0$ und $p = 1$

$$\sigma_f^2 = 2 \cdot \frac{2^{-2B}}{12} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a^{2n} = 2 \cdot \frac{2^{-2B}}{12} \cdot \frac{1}{1 - a^2} \quad (2.70)$$

Man kann erkennen, dass die Varianz des Ausgangsrauschens für $|a| \rightarrow 1$ zunimmt und daher Vorsicht bezüglich der Systemstabilität geboten ist.

Das Rauschmodell, das für die Direktform I präsentiert wurde, kann, wie bereits erwähnt, auf die anderen Formen erweitert werden. Jedoch werden die Betrachtungen dann schnell sehr kompliziert. Eine angemessene Behandlung führt für den Rahmen des Praktikums zu weit.

Allgemein kann man jedoch sagen, dass das Ziel der Betrachtungen des Quantisierungsrauschens stets die Auswirkung auf das Ausgangsrauschen ist, welches durch dessen Varianz σ_f^2 charakterisiert wird. Hierbei ist natürlich wieder die Lage der Polstellen der Übertragungsfunktion von besonderem Interesse.

3 Versuchsaufbau

3.1 Beschreibung des Versuchs

Im ersten Teil des Versuchs arbeiten Sie mit einem Funktionsgenerator sowie mit einem Oszilloskop. Beide werden an ein Analogschaltungsboard angeschlossen, der Funktionsgenerator an den Eingang links, mit dem Oszilloskop überprüfen Sie den Ausgang der Schaltung (BNC-Buchse rechts).

Vergewissern Sie sich, bevor es losgeht, ob alle Geräte, insbesondere die Analogschaltung, an die Spannungsversorgung angeschlossen sind.

Der zweite Teil des Versuchs wird an dem Crashtest-Auto mit Hilfe der *dSPACE AutoBox* sowie eines PCs durchgeführt. Dazu muss zunächst ein Simulink-Modell zum Abtasten der Sensorsignale erstellt und auf der *AutoBox* ausgeführt werden. Mit Hilfe dieses Modells werden Sie die Parameter (Offset, Empfindlichkeit) des Sensors ermitteln. Des Weiteren wird ein Filtermodell erstellt, mit dem die aufgezeichneten Daten eines Crashes offline weiterverarbeitet werden. Am Schluss werden dann Abtast- und Filtermodell zusammen auf die *AutoBox* geladen und nur das gefilterte Signal aufgezeichnet.

Schalten Sie beim Einschalten zwingend zuerst die *AutoBox* und dann den PC ein, beim Ausschalten zuerst den PC und dann die *AutoBox* aus!

Um Zeit und Geld zu sparen, benutzt man in der Elektrotechnik heutzutage unter anderem folgende zwei Verfahren zum Entwickeln und Testen von neuen Produkten:

Rapid Control Prototyping: RAPID CONTROL PROTOTYPING beschreibt das rechnergestützte Verfahren zur Regelungs- und Steuerungsentwicklung. Bei diesem werden ein Modell des zu beschreibenden Systems und ein auf diesem Modell basierendes Regelungsmodell entwickelt. Der Test eines solchen Reglers kann z. B. mit HiL vorgenommen werden:

Hardware in the Loop: Eng mit RAPID CONTROL PROTOTYPING hängt das sogenannte HARDWARE IN THE LOOP-Testen (HiL) zusammen. Dies bedeutet den Echtzeittest von Elektronikkomponenten wie zum Beispiel einem oder mehreren Steuergeräten (um auch die Interaktion zwischen diesen zu untersuchen), bei dem die Ausgangssignale des Steuergeräts auf vorgegebene Sensordaten (Eingangssignale) untersucht werden. Dabei werden die Eingangssignale vom sogenannten HiL-SIMULATOR erzeugt und die Ausgangssignale von diesem erfasst. Diese Methode erlaubt es, in vielen Bereichen der Technik, wie z. B. im Automobilbau oder in der Luftfahrt, auf einfache Weise mit dem HiL-SIMULATOR Simulationen

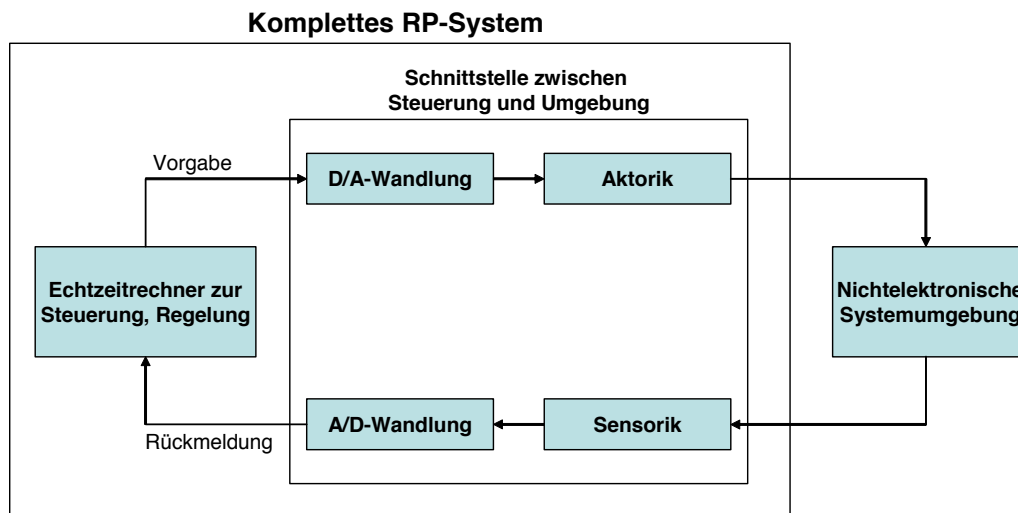


Abbildung 3.1: Rapid Prototyping

durchzuführen, ohne das Steuergerät dabei im realen Einsatz testen zu müssen. Dies bietet unter anderem folgende Vorteile:

- kein Simulieren eines kompletten Szenarios notwendig, sondern z. B. nur von Grenzsituationen
- standardisierte Tests können erstellt werden, bei denen immer die gleichen Eingangssignale auf das zu testende System gegeben werden und zum Beispiel die Reaktionen von verschiedenen Geräteversionen darauf ermittelt werden
- keine katastrophalen Auswirkungen von Fehlern wie Unfälle, Verletzungen etc.
- geringere Kosten

Um einen kleinen Einblick in die Mittel moderner Entwurfs- und Testverfahren zu gewähren, wird in diesem Versuch mit der *dSPACE AutoBox* gearbeitet.

Diese kann unter anderem als Basis für HiL-Simulationen (als HiL-SIMULATOR) eingesetzt werden. Sie kann im Fahrzeug selbst installiert werden und über verschiedene Schnittstellen (Ein-/Ausgabekarten, CAN-Schnittstelle) direkt in das Fahrverhalten des Fahrzeugs eingreifen. Es ist sogar möglich, das gesamte Fahrzeug ohne Fahrer zu steuern.

Um die Komplexität dieses Versuches nicht ausufern zu lassen, wird die *AutoBox* in diesem Versuch allerdings nur zum Abtasten von Signalen verwendet.

3.1.1 Beschreibung der Hardware

Im zweiten Teil dieses Versuches werden Sie mit einer *AutoBox* arbeiten, in der folgende Hardwaremodule installiert sind:

- PROZESSORKARTE DS1005

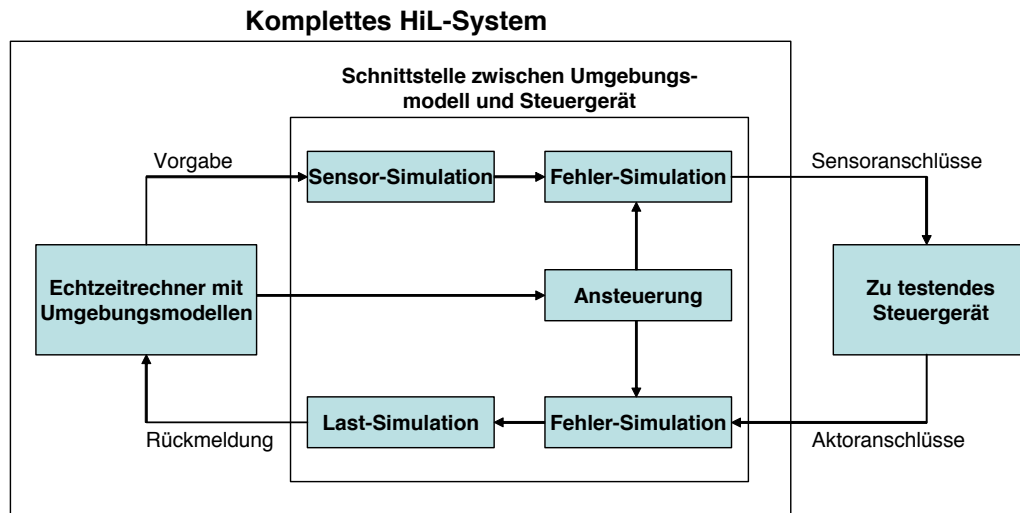


Abbildung 3.2: Hardware in the Loop

- MULTI-CHANNEL AD-KARTE DS2003
- CAN INTERFACE BOARD DS4302
- SERIAL INTERFACE BOARD DS4201-S.

Direkt an die AD-Karte wird das DS2002/DS2003 MUX AD-BOARD angeschlossen, das BNC-Anschlüsse für alle 32 aufzeichnbare Kanäle bietet. An die ersten 3 Kanäle werden die 3 OUTPUT-Ausgänge der Verstärkerbox angeschlossen. Die Ausgangskabel des Crashtest-Autos werden in die SENSOR-Eingänge der Verstärkerbox gesteckt. Der Crashtestschlitten, der in diesem Versuch verwendet wird, ist in Abbildung 3.4 maßstabsgetreu skizziert. Im Versuch wird das Fahrzeug mit drei 50g-Beschleunigungssensoren bestückt. Diese messen die Beschleunigungen in x-, y- und z-Richtung.

Der Schlitten, der das Fahrzeug in Bewegung versetzt, wird mit Hilfe des darunter liegenden Kolbens beschleunigt. Durch einströmende Druckluft in die rechte Öffnung des Kolbens wird der Schlitten gegen das Fahrzeug katapultiert. Hierbei besteht die Möglichkeit, den Weg, den der Schlitten bis zur Übergabe seines Impulses zurücklegt, mit Hilfe eines Bolzens im Kolben auf 100 mm, 150 mm oder 200 mm einzustellen.

Anfangs fährt das Modellfahrzeug in einer Führungsschiene, damit seine Bewegung stabilisiert wird. Diese endet jedoch vor dem Hindernis, damit das Fahrzeug beim Crash in allen Koordinatenachsen frei beweglich ist. Ansonsten würde nur der Beschleunigungssensor in x-Richtung eine negative Beschleunigung bzw. einen Abbremsvorgang registrieren.

Bevor ein weiterer Crash durchgeführt werden kann, muss der Schlitten wieder in seine Ausgangslage gebracht werden. Dies geschieht mit Hilfe der linken Kolbenöffnung. Sobald Druckluft hindurch strömt, wird der Schlitten in Bewegung versetzt und kehrt zu seiner Ausgangsposition zurück.

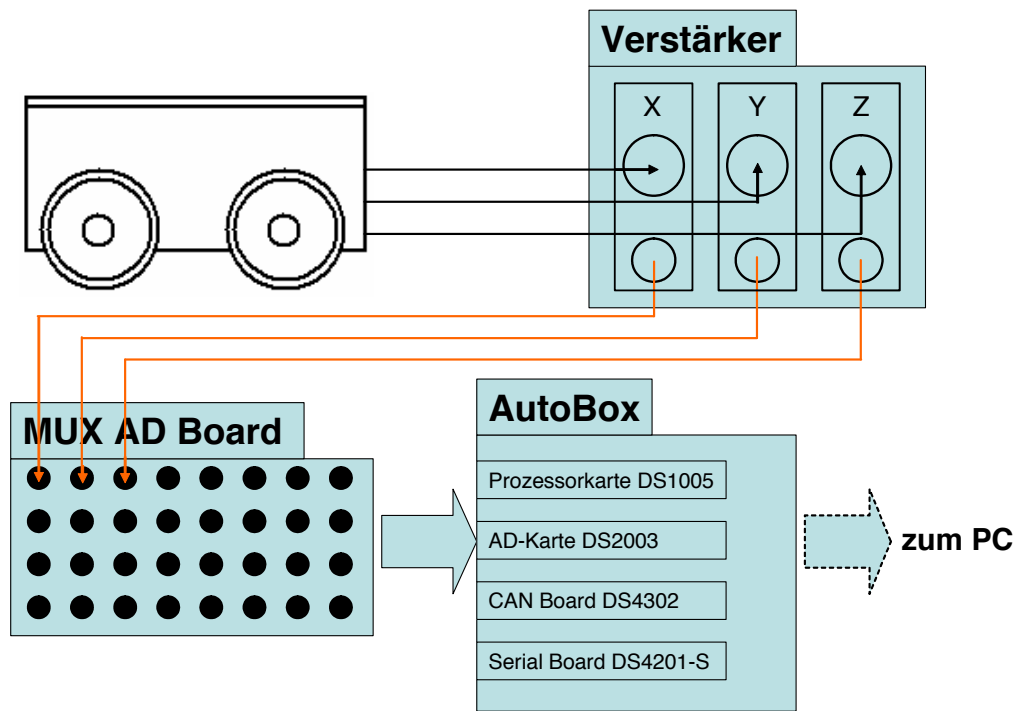


Abbildung 3.3: Verbindungen zwischen den Geräten

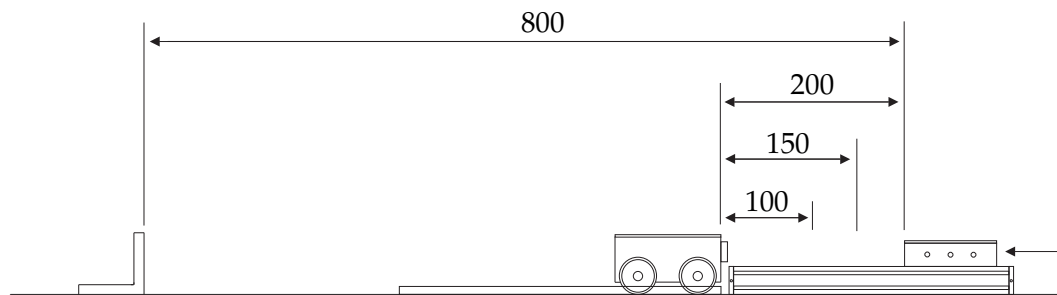


Abbildung 3.4: Maßstabsgetreue Skizze des Crashtestschlittens

3.1.2 Beschreibung der Programme

Zur Ausführung von bestimmten Aufgaben wird die *AutoBox* mit Simulink angesteuert. Dies funktioniert folgendermaßen: In Simulink wird ein Modell erstellt, das Blöcke des von *dSPACE* mitgelieferten REAL-TIME INTERFACE verwendet. Diese Simulink-Modelle werden dann automatisch in die Programmiersprache C übersetzt, kompiliert, auf die *AutoBox* geladen und dort ausgeführt. Zusätzlich zu den Standard-Simulinkbibliotheken gibt es zur Ansteuerung der *AutoBox* eigene Bibliotheken.

Zur Aufnahme von Daten erstellt man ein Simulink-Modell, für das folgende Blöcke wichtig sind:

- der Block MUX_ADC aus dem Untermenü DS2003 der Bibliothek *dSPACE rti1005*. Dieser Multiplexer stellt die gemessenen Daten aller Kanäle zur Verfügung. Folgende Einstellungen von Interesse:

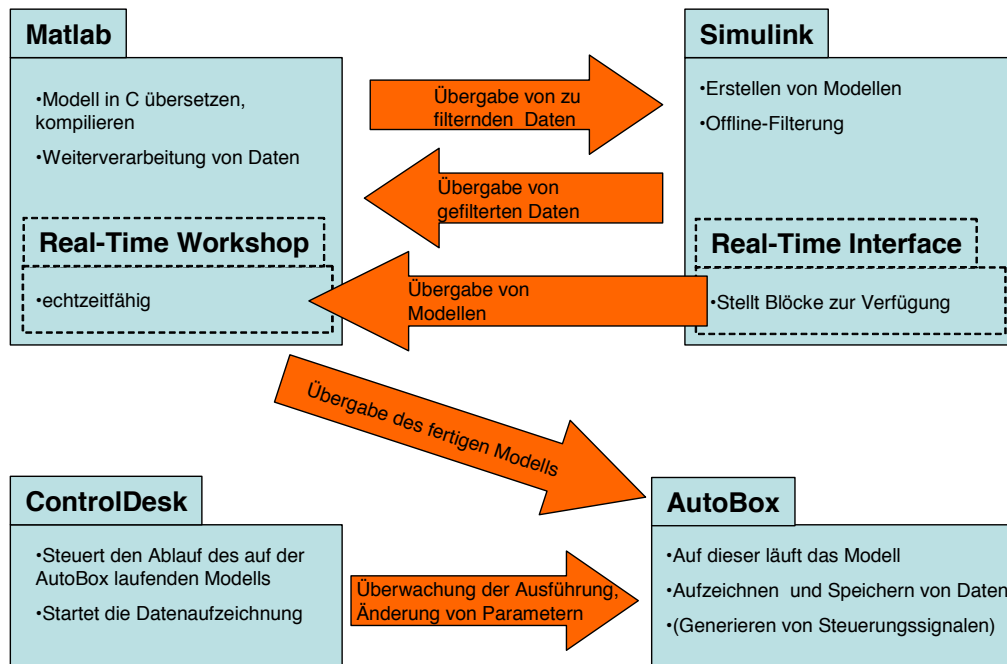


Abbildung 3.5: Interaktionen zwischen den Programmen

- Bei der Registerkarte **Unit** wählt man die Kanäle aus, deren Daten angezeigt werden sollen
- Unter **Range** definiert man den Eingangsspannungsbereich, für jeden Kanal in allen Versuchen ± 10 volt
- Bei **Resolution**: 16 bits
- **Demultiplexer** (zu finden in der Bibliothek **Commonly Used Blocks**): Wird direkt an den Multiplexer angeschlossen und gibt die aufgezeichneten Kanäle einzeln aus. Wichtig ist, dass man in den Einstellungen die korrekte Anzahl der Ausgänge angibt.
- **3 Scopes** (ebenfalls in der Bibliothek **Commonly Used Blocks**) oder andere Anzeige- oder Ausgabeblocke, die mit den Ausgängen des Demultiplexers verbunden werden. Die Signalverläufe im Scope braucht man sich nicht anzuschauen; diese Blöcke werden allerdings zur späteren Weiterverarbeitung der Daten in **ControlDesk** benötigt (bei Verwendung eines **Terminators** ist dies nicht möglich).



Abbildung 3.6: Demultiplexer

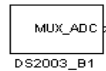


Abbildung 3.7: Multiplexer



Abbildung 3.8: Scope

Zur Einstellung der Modellparameter wählt man im Menü *Simulation* den Unterpunkt *Model Configuration Parameters*. Im Menü *Solver* gibt man bei *Fixed-step size* die Abtastzeit in Sekunden an. Außerdem ist der Solver zu *Discrete* zu wählen.

Alle anderen Einstellungen dürfen nicht verändert werden!

Um das Modell auszuführen, klickt man im Menü *Model Configuration Parameters* unter *Code Generation* auf *build*. Damit wird das Modell in *Matlab* automatisch erstellt und in C-Code umgewandelt, der dann auf der *AutoBox* ausgeführt wird. Die Ausführung des *Simulink*-Modells lässt sich mit Hilfe des dSPACE-Programms *ControlDesk* in Echtzeit steuern, so kann man z. B. Simulationsparameter verändern und Signalverläufe aufzeichnen. Hierbei ist zu beachten, dass *ControlDesk* vor dem Ausführen des Modells geöffnet sein muss.

Zur Speicherung der aufgezeichneten Daten erstellt man in *ControlDesk* mit *File* → *New* → *Project+Experiment* ein neues Experiment. Dazu ist nach dem Eingeben von Projekt- und Experimentname bei *Add Platform/Device* das *DS 1005 PPC Board* auszuwählen. Unter *Select Variable Description* wählt man die *.sdf*-Datei des *Simulink*-Modells aus.

Das neue Projekt enthält dann ein neues Layout, eine grafische Benutzeroberfläche. Dieses ist in Abbildung 3.9 dargestellt. Auf dem Layout platziert man so viele *Plotter*-Elemente, wie Variablen aufgezeichnet werden sollen. Ein einzelnes *Plotter*-Element wird dabei aus dem *Instrument Selector* rechts neben dem Layout auf dieses gezogen.

- Um einem *Plotter* einen Signalverlauf zuzuordnen, muss im *Variable Browser* links unten im *Control Desk*-Fenster die entsprechende *.sdf*-Datei ausgewählt werden. Dann zieht man nach Auswahl der entsprechenden *Simulink*-Blöcke aus dem Fenster rechts neben dem *Variable Browser* die gewünschte *Variable* (für jeden Block jeweils *In1*) auf den *Plotter*.
- Um das Abspeichern der aufgezeichneten Daten vorzubereiten, klickt man auf die Schaltfläche *Measurement Configuration* links neben dem Layout (siehe Abbildung 3.10). Nach Rechtsklick auf *Recorder* und Klick auf *Properties* wählt man im sich daraufhin öffnenden Fenster unter *Stop Condition* das *Time limit* zur gewünschten Dauer der Aufzeichnung. Unter *Storage information* aktiviert man die Checkbox *Automatic export*. Außerdem ist

der Dateityp Automatic export: file type (MATLAB-files) sowie der Ordner anzugeben, in dem die Daten gespeichert werden sollen.

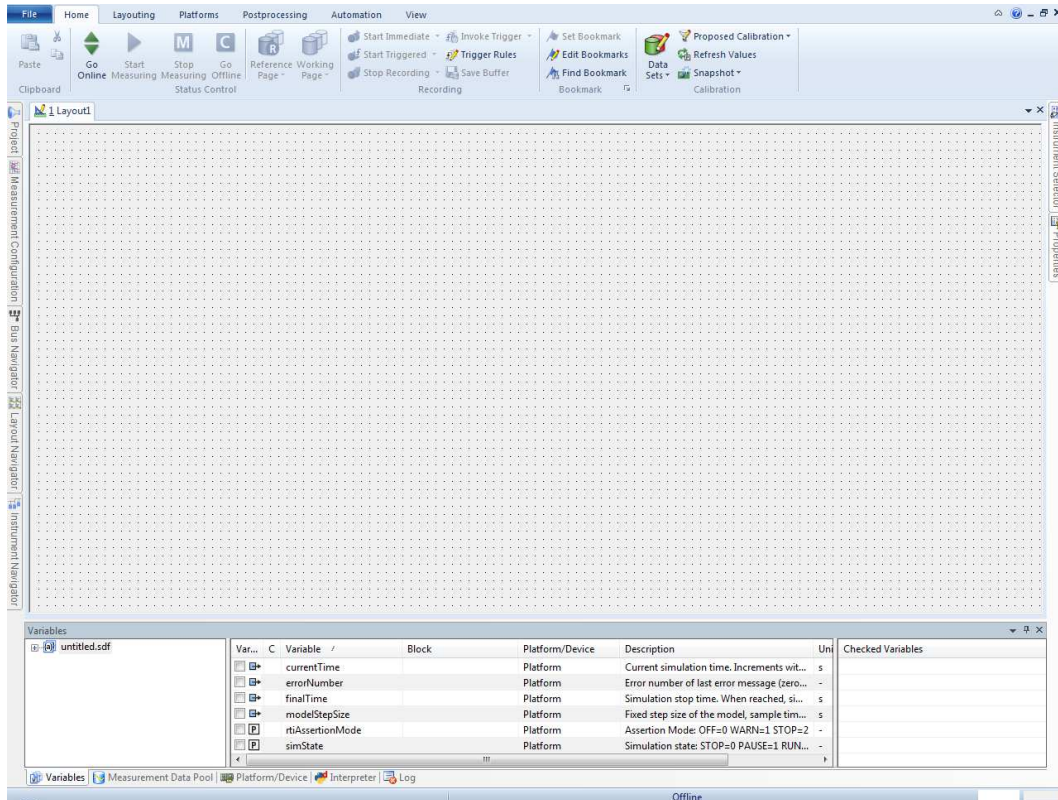


Abbildung 3.9: *ControlDesk*: Fenster mit neu erstelltem Layout

Um die Aufnahme zu starten, klickt man im *ControlDesk*-Hauptfenster auf die Schaltfläche **Start Triggered**. Dadurch wird das Signal für die definierte Zeit aufgezeichnet und mit dem angegebenen Dateinamen gespeichert. Zum Ausführen eines neuen Modells auf der *AutoBox* muss diese im Offline-Modus betrieben werden (**Go Offline**).

Dringend beachten: Die *AutoBox* gibt die gemessenen Signale immer in Relation zum maximalen Eingang an. Wählt man zum Beispiel bei den Optionen des Blocks **DS2003_B1** eine Eingangsspannung von $\pm 10\text{V}$ aus, so entspricht ein von diesem Block ausgegebenes Signal mit der Amplitude 1 einem realen Signal von 10V.

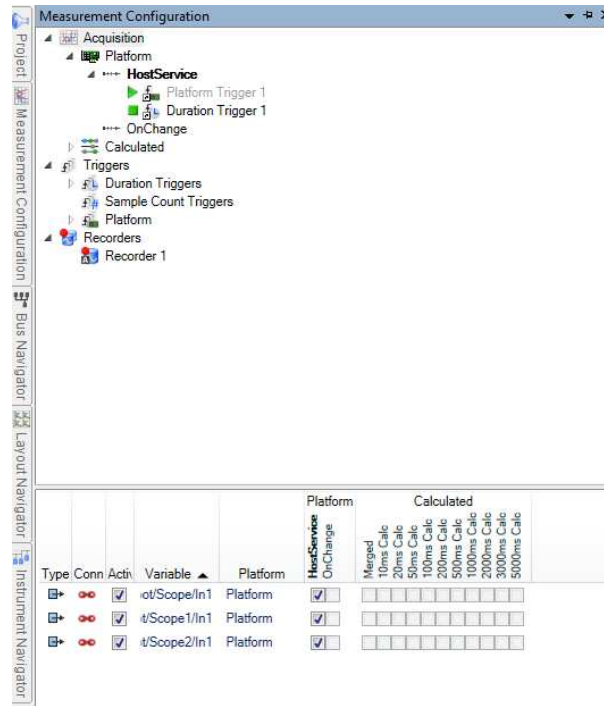


Abbildung 3.10: *ControlDesk*: Measurement Configuration

Für weiterführende Informationen zu *ControlDesk* bietet sich die umfangreiche Hilfe *HelpDesk*, zu finden unter **Help** → **Help Topics**, an.

Die Signalverläufe können auch auf dem nichtflüchtigen Flash-Speicher der *AutoBox* gespeichert und nach Beendigung der Simulation ausgewertet werden (damit kann man z. B. die *AutoBox* im automatisierten Zustand ohne angeschlossenen PC betreiben). Allerdings ergibt sich bei unseren hohen Abtastraten eine so große Datenmenge, dass das Auslesen für unsere Zwecke zu lange dauern würde.

4 Versuchsvorbereitende Aufgaben

Aufgabe 1: Dämpfung

Die Dämpfung eines Filters bei der Knickfrequenz ist normalerweise -3dB . Welcher Leistung und Amplitude entspricht das? Wie lautet die Beziehung zwischen der dB-Skala, der Leistung und der Amplitude?

Aufgabe 2: Frequenzantwort verschiedener Filter

Was ist der Hauptunterschied zwischen den Frequenzantworten eines

- a) BUTTERWORTH-Filter?
- b) TSCHEBYSCHEFF-Filter?
- c) eines CAUER Filter?
- d) Welche Filterart würden Sie empfehlen, wenn die Breite des Übergangsbereiches minimiert werden soll?

Aufgabe 3: Systemfunktion und Frequenzantwort

Welchen Zusammenhang gibt es zwischen der Systemfunktion $G(z)$ und der Frequenzantwort $G(e^{j2\pi f t_A})$?

Aufgabe 4: Phasengang, Gruppenlaufzeit

- a) Wie lautet die Definition des Phasengangs?
- b) Was gilt im Falle eines linearen Phasengangs?
- c) Was bezeichnet die Gruppenlaufzeit?

Aufgabe 5: Linearphasigkeit

- a) Warum können IIR-Filter keine lineare Phase haben?
- b) Welche Bedingungen muss ein FIR-Filter mit reeller Impulsantwort der Länge $N + 1$ erfüllen, um einen linearen Phasengang zu haben?
- c) Welche Gruppenlaufzeit hat es dann?

Aufgabe 6: FIR-Filter

Beantworten Sie die folgenden Fragen. Begründen Sie ihre Aussagen und finden Sie ggf. ein Beispiel oder Gegenbeispiel!

- a) Ist ein FIR-Filter immer stabil?
- b) Ist es immer kausal?
- c) Hat es immer linearen Phasengang?

Aufgabe 7: Pol-Nullstellen-Diagramme

Gegeben sind vier Pol-Nullstellen-Diagramme.

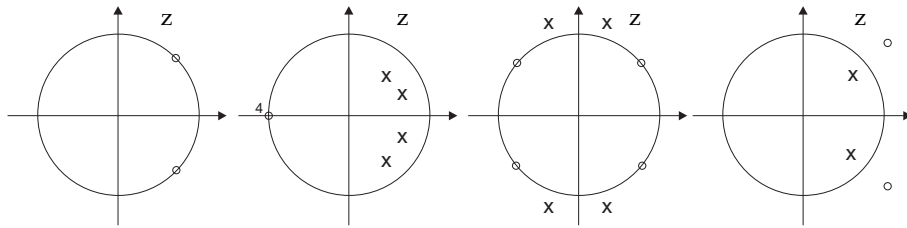


Abbildung 4.1: Pol-Nullstellen-Diagramme der Filter 1-4

- a) Handelt es sich bei den durch sie repräsentierten Filtern um Tiefpass-, Hochpass-, Bandpass-, Bandstop- oder Allpass-Filter?
- b) Sind es FIR- oder IIR-Filter? Welcher Ordnung?
- c) Sind sie stabil?
- d) Ist der Phasengang linear?

Aufgabe 8: Allpassfilter

- a) Welche Motivation steckt hinter dem Entwurf eines Allpassfilters?
- b) Ist es möglich ein FIR-Allpassfilter zu entwerfen?

Aufgabe 9: Down- und Upsampling

- a) Warum sind Filter beim Downsampling notwendig?
- b) Werden sie auch beim Upsampling benötigt? Warum/Warum nicht?

Aufgabe 10: Serienschaltung von Filtern

Zwei Filter haben die Impulsantworten h_1 und h_2 .

- a) Wie lautet die Impulsantwort einer Serienschaltung der beiden Filter?
- b) Wie sieht die Systemfunktion aus?

Aufgabe 11: Differenzengleichung

Ein kausales, lineares, verschiebungsinvariantes System kann mittels der folgenden Differenzengleichung beschrieben werden:

$$y_n = \frac{1}{4}y_{n-1} + \frac{1}{8}y_{n-2} + x_n - x_{n-1} \quad (4.1)$$

Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion $H(z)$, und die Impulsantwort h_n .

5 Versuche am Versuchstag

5.1 Versuche mit der Analoghardware

Arbeiten Sie in diesem Versuchsteil bitte ausschließlich mit der Anologschaltung 1! Diese Schaltung stellt ein lineares Filter unbekannter Charakteristik dar. Ziel ist es, durch Messungen mit Funktionsgenerator und Oszilloskop das Filter zu charakterisieren.

Stellen Sie am Funktionsgenerator eine Sinusspannung mit einer Amplitude von 1 V ein und überprüfen Sie bei Veränderung der Frequenz mittels des Oszilloskops die Ausgangsspannung!

Aufgabe 12:

- Bestimmen Sie die Knickfrequenz der Schaltung ($\pm 3\text{ dB}$)! Welcher Verstärkung entsprechen 3 dB? (Rechnung!)
- Um was für ein Filter handelt es sich (Tiefpass, Hochpass, Bandpass oder Bandsperre)? Begründung!
- Bestimmen Sie durch Wahl eines weiteren geeignet gewählten Messpunktes für die Frequenz die Steigung bzw. das Gefälle des Amplitudenganges! Geben Sie die Frequenz sowie die Verstärkung Ihres Messpunktes an! Welche Ordnung hat das Filter?
- Zeichnen Sie eine mögliche Realisierung der Anologschaltung als passives Netzwerk!

5.2 Versuche am PC

Verwenden Sie zum Bearbeiten der folgenden Aufgabe *Matlab*. Wählen Sie nach dem Start die Plattform RTI1005 und bestätigen Sie danach mit OK. Erstellen Sie im Ordner D:\PDSV\Gruppen\ ein Verzeichnis für Ihre Gruppe. Speichern Sie bitte alle Dateien, die Sie im Laufe des Versuchs erstellen, **nur** in diesem Ordner!

Aufgabe 13: Filterung von Crashtestsignalen mit Matlab

Entwerfen Sie in Matlab einen Tiefpass BUTTERWORTH-Filter, das folgende Spezifikationen erfüllt:

- $f_p = 1\text{ Hz}$, $f_s = 200\text{ Hz}$ (Grenzfrequenzen Durchlass-/Sperrbereich)
- $\delta_D = 1\text{ dB}$, $\delta_S = 15\text{ dB}$ (Durchlass-/Sperrbereichstoleranzen in dB)
- $f_A = 5\text{ kHz}$ (Abtastfrequenz der zu filternden Signale)

Schreiben Sie für diese Aufgabe ein m-file, das den Filterentwurf wie in Abschnitt 2.4.2 gezeigt durchführt. Verwenden Sie den Matlab Befehl `buttord()`. (Achtung: Nyquist Frequenz beachten!)

- a) Welche Ordnung und welche Knickfrequenz hat Ihr Filter?
- b) Geben Sie die Filterkoeffizienten mit Hilfe des Befehls `butter()` an!
- c) Geben Sie mit Hilfe von Matlab für das entworfene IIR-Filter den Pol-Nullstellen-Plan mit `pzmap()` sowie den Frequenzgang mit `freqz()` an! Hinweis: Wie können Sie hier den Befehl `tf()` für zeitdiskrete Übertragungsfunktionen nutzen?
- d) Zeichnen Sie Ihr Toleranzbandschema (so gut es geht) in den von Matlab berechneten Frequenzgang ein! Es reicht aus das Toleranzbandschema per Hand in Ihrem Protokoll einzuzichnen.

Aufgabe 14: Ermittlung der Sensorparameter und Filterung des Crashverlaufs

- a) Erstellen Sie mit Hilfe der Blöcke aus Abschnitt 3.1.2 ein Simulink-Modell zur Aufzeichnung der 3 Sensorsignale.

Hinweis: Arbeiten Sie im Laufe des Versuchs immer mit dem selben Simulink-Modell (mit gleichbleibendem Dateinamen) und modifizieren Sie es entsprechend jeder Aufgabe. Sie können nach jeder Änderung eine Kopie des Modells unter einem anderen Namen für Ihre Unterlagen abspeichern.

Wie können Sie die Parameter der Sensoren, also Empfindlichkeit und Offset, ermitteln (Welcher Spannung entsprechen $0g$, $-1g$, $1g$? Wie können Sie einen Sensor mit exakt $1g$ belasten?)? Bestimmen Sie die Daten jedes Sensors einzeln. Gehen Sie dazu wie folgt vor:

- Wählen Sie im Simulink Modell als Abtastfrequenz 5 kHz und als Auflösung 16 bit .
 - Laden Sie das Modell wie in Abschnitt 3.1.2 beschrieben auf die *AutoBox*.
 - Öffnen Sie *ControlDesk* und erstellen Sie eine Benutzeroberfläche zur Aufnahme der Messdaten.
 - Speichern Sie die Messdaten in *ControlDesk* als *.mat*-Dateien ab, damit Sie sie in Matlab weiterverarbeiten können.
- b) Erweitern Sie Ihr Simulink-Modell so, dass das Signal offsetfrei wird und auf der Y-Achse nicht die gemessene Spannung, sondern die tatsächliche Beschleunigung (in g) aufgetragen wird. Beschriften Sie in allen Plots die Achsen!
 - c) Führen Sie nun einen Crash mit Hilfe der Druckluft-Beschleunigungseinrichtung durch (Druck: 3 bar ; Abtastfrequenz 5 kHz). Experimentieren Sie mit verschiedenen Drücken ($< 5\text{ bar}$) und Beschleunigungswegen.

Schreiben Sie für den folgenden Aufgabenteil ein neues m-file.

- d) Bauen Sie in Simulink ein IIR-Filter in Direktform (vgl. Abbildung 2.9) mit den in Aufgabe 13 berechneten Koeffizienten auf. Führen Sie mit Hilfe der Blöcke

From Workspace und To Workspace eine Filterung der ungefilterten Daten des X-Sensors durch. Plotten Sie danach das Signal für verschiedene Crashes (Je ein plot).

Aufgabe 15: Durchführung der Filterung auf der *AutoBox*

- a) Ihr Simulink-Aufzeichnungsmodell soll nun so erweitert werden, dass die Werte des X-Sensors mit dem Tiefpass auf Aufgabe 14 gefiltert werden. Ergänzen Sie dazu ihr Simulink-Aufzeichnungsmodell (nur X-Sensor) um die Filterstruktur aus Aufgabe 14, sodass die aufgezeichneten Daten das bereits gefilterte Signal wiedergeben.

Hinweis: Im Block z^{-1} muss die Abtastzeit auf -1 für *inherited* geändert werden! Laden sie das Modell auf die Autobox und testen Sie es.

Plotten Sie das ungefilterte und das gefilterte Signal für verschiedene Crashes.

- b) Welche Crashedauer können Sie dem gefilterten Signal entnehmen (der Crash gelte dabei als beendet, wenn die Beschleunigung für 10ms dauerhaft unter der Schwelle $a_x = 0,5g$ liegt)?
- c) Bestimmen Sie die Maximalverzögerung während der Crashphase in g!
- d) Berechnen und plotten Sie die Momentangeschwindigkeit $v(t)$ in ms^{-1} ! Nehmen Sie dabei an, dass das Fahrzeug am Anfang und am Ende in Ruhe ist (Hinweis: Was gilt dann für die Beschleunigung?! Verwenden Sie hierzu ein ungefiltertes und von Offset befreites Messsignal.

Literaturverzeichnis

- [1] Bronstein, I.N. und Semendjajew, K.A.: *Taschenbuch der Mathematik*, Verlag Harri Deutsch, Frankfurt/Main, 1991
- [2] Kiencke, U.: *Signale und Systeme*, 1. Auflage, R. Oldenburg Verlag, München, Wien, 1998
- [3] Kammeyer, K.D. und Kroschel, K.: *Digitale Signalverarbeitung*, 4. Auflage, B.G. Teubner, Stuttgart, 1998
- [4] Oppenheim, Alan V.: *Zeitdiskrete Signalverarbeitung*, 2. Auflage, R. Oldenburg Verlag, München, Wien, 1995