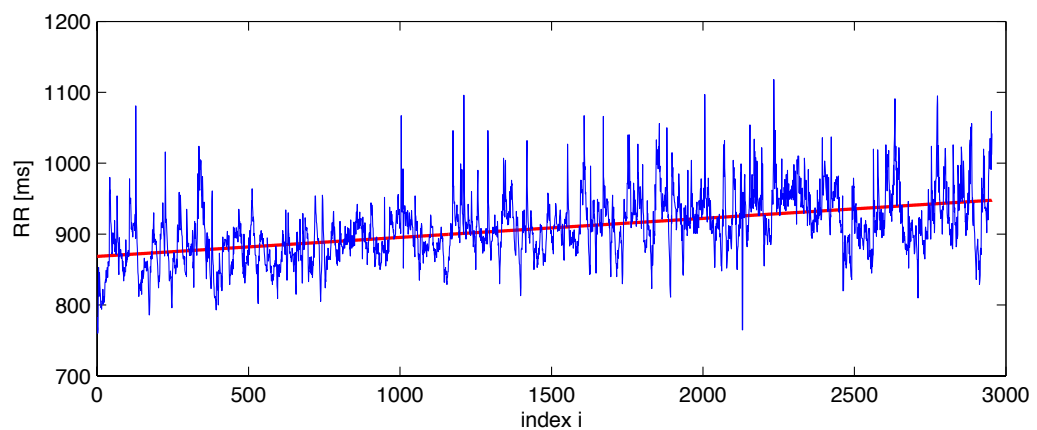


# Analyse Physiologischer Zeitreihen mit ARMA-Modellen

Martin Pfeifer



INSTITUT FÜR BIOMEDIZINISCHE TECHNIK  
PROF. DR. RER. NAT. OLAF DÖSSEL  
KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE  
2013

## Vorbemerkungen

Diese Arbeit entstand im Rahmen einer mehrmonatigen studentischen Forschungstätigkeit am Institut für Biomedizinische Technik (IBT), welches der Fakultät für Elektrotechnik und Informationstechnik des Karlsruher Instituts für Technologie (KIT) angehört. Die Ausarbeitung legt den Fokus auf eine möglichst verständliche und transparente inhaltliche Darstellung. In Anbetracht der beschränkten Zeit und um eine überschaubare Länge des Dokuments zu gewährleisten, muss daher auf einen aufwendigen Formalismus, wie etwa bei studentischen Abschlussarbeiten verzichtet werden.

Das vorliegende Dokument soll in erster Linie als Grundlagenarbeit dienen. Es werden Methoden und Ideen präsentiert, die nicht nur für biomedizinische Fragestellungen relevant sind, sondern auf Zeitreihen verschiedenster Art anwendbar sind. Dabei kann diese Ausarbeitung als Basis für weitere Arbeiten dienen, welche sich dann dem konkreten klinischen Einsatz der vorgestellten Methoden widmen. Dabei sind vielerlei Ansätze denkbar, von denen beispielhaft einige im Verlauf der Ausarbeitung angedeutet werden sollen.

Ein kurzes Dankeschön geht an das IBT unter der Leitung von Prof. Olaf Dössel für die hervorragenden Arbeitsbedingungen. Weiterer Dank geht an die Studienkollegen aus dem Diplomandenraum, die einen wesentlichen Anteil zu einer sehr angenehmen Arbeitsatmosphäre beitragen, in der kreative Gedanken erarbeitet und umgesetzt werden können. Des Weiteren möchte ich mich für die fachlichen Ratschläge und Einwände von Dipl.-Ing. Tobias Oesterlein, Dipl.-Ing. Gustavo Lenis und Dr.-Ing. Tobias Baas und die tatkräftige Mitarbeit von Ina Morath bedanken. Zu guter Letzt bin ich meiner Familie, meinen Freunden und insbesondere meiner Freundin Lena zu großem Dank verpflichtet. Sie alle tragen dazu bei, dass ich weitestgehend sorgenfrei durch das Leben gehen kann.

Martin Pfeifer, Karlsruhe den 27.09.2013

---

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung und Motivation</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Identifikation</b>	<b>5</b>
2.1	Stochastischer Prozess und Stationarität	5
2.2	ARMA-Prozesse und Behandlung instationärer Prozesse	6
2.3	Ermittlung der Ordnungen des ARMA-Modells	9
2.4	Ermittlung der Varianz des ARMA-Modells $\sigma^2$	12
<b>3</b>	<b>Diagnose</b>	<b>15</b>
3.1	Vergleich der Korrelationsfunktionen	15
3.2	Beurteilung der Residualreihe	16
3.3	Monte Carlo Test	17
3.4	Methode des Overfittings	18
<b>4</b>	<b>ARMA und ARIMA-Prozesse im Zustandsraum</b>	<b>19</b>
4.1	Motivation der Zustandsraumdarstellung	19
4.2	Transformation von ARMA-Prozessen in den Zustandsraum	20
4.3	Beispiel	22
4.4	ARIMA-Prozesse im Zustandsraum	23
<b>5</b>	<b>Schätzung des Spektrums mit ARMA-Modellen</b>	<b>27</b>
5.1	Motivation und Vorgehen	27
5.2	Beispiel	28
<b>6</b>	<b>Beispielhafte Modellierung einer RR-Intervall Zeitreihe</b>	<b>31</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>37</b>



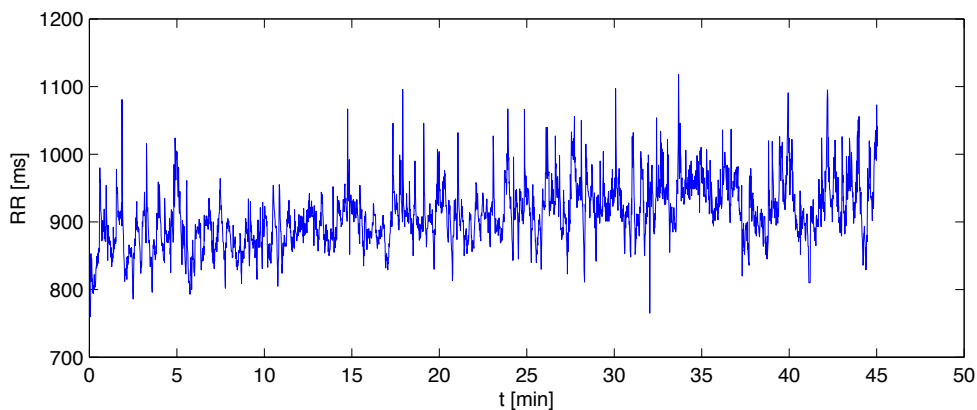
## Einleitung und Motivation

Systemdenken ist eine Grunddisziplin des Ingenieurwesens. Um ein definiertes System zu verstehen ist die Ermittlung eines quantitativen mathematischen Modells zum Verständnis des Ein-/Ausgangsverhaltens von zentraler Bedeutung. In dieser Arbeit soll das dynamische System *Menschliches Herz* entwickelt und analysiert werden. Ein- und Ausgangsvariablen sind dabei Zeitreihen, d.h. zeitabhängige Folgen von Daten physiologischer Parameter wie etwa dem RR-Intervall, dem QT-Intervall oder dem Blutdruck.

**Definition 1.1** Eine Zeitreihe  $y(k)$  ( $k = 1, \dots, N$ ) ist eine zeit- oder indexabhängige Folge von Datenpunkten. Zeitreihen werden oft auch mittels Vektoren dargestellt, weshalb im Folgenden auch die Bezeichnung  $\mathbf{y}$  verwendet wird.

Zeitreihen sind in unterschiedlichsten Bereichen der Forschung verbreitet und treten immer dann auf, wenn die Dynamik und zeitliche Entwicklung realer Systeme empirisch untersucht wird [1]. Ein plakatives Beispiel für Zeitreihen sind Aktienkurse, deren Modellierung und Analyse einen großen Anwendungsbereich innerhalb der Zeitreihenforschung darstellen. Als physiologisches Beispiel einer Zeitreihe ist in Abb. 1.1 der zeitliche Verlauf des RR-Intervalls eines Probanden dargestellt. Die  $N$  Punkte der Zeitreihe wurden aus einem entsprechenden EKG-Signal extrahiert und in einem Vektor hintereinander angeordnet:

$$\mathbf{RR} = [\text{RR}(1) \text{ RR}(2) \dots \text{RR}(N)]^T$$



**Abb. 1.1.** Plot einer Zeitreihe, welche den Verlauf des RR-Intervalls über einen Zeitraum von ca. 45 min widerspiegelt.

Grundsätzlich gibt es die zwei Möglichkeiten, den Verlauf einer Zeitreihe darzustellen. Zum einen können die einzelnen Einträge der Zeitreihe über dem Zeitpunkt des jeweiligen Auftretens aufgetragen werden, zum anderen über einen konsekutiv fortschreitenden Index. Weil viele Überlegungen aus wirtschaftswissenschaftlich orientierten Veröffentlichungen stammen, wird in dieser Ausarbeitung die Indexdarstellung bevorzugt. Aktienkurse berücksichtigen bekannter Maßen auch kein Wochenende.

Die Untersuchung von Zeitreihen hat für biomedizinische Fragestellungen viele denkbare Zielsetzungen, die im Folgenden kurz erwähnt werden sollen:

1. **Analyse von Zeitreihen:** Zeitreihen werden durch möglichst gut zutreffende mathematische Modelle dargestellt. Über die Analyse dieser Modelle erhofft sich der Anwender Rückschlüsse auf den Zustand des erzeugenden Prozesses.

**Beispiel:** In [2] konnte gezeigt werden, dass die Herzkrankheit Myokarditis Änderungen der Eigenschaften der QT- und RR-Zeitserien bewirkt. Dazu wurde eine Parameteranalyse der gewonnenen Systeme herangezogen und mittels statistischer Verfahren eine Separierbarkeit beispielhaft zwischen den Zuständen *Patient gesund* und *Patient hat Myokarditis* demonstriert.

2. **Prädiktion:** Die Vorhersage künftiger Werte auf Basis von Vergangenheitswissen und aktueller Einflüsse lässt eine Beurteilung darüber zu, ob das erwartete Verhalten dem tatsächlich beobachteten Verhalten entspricht. Die Prädiktion setzt wesentlich die Gültigkeit eines stochastischen Modells für den Prozess voraus (andernfalls würde man von Wahrsagerei sprechen). Ist das Modell gültig, können mittels Prädiktionsalgorithmen Vorhersagen getroffen werden, die fehlerhafte, oder nicht-vorhandene Werte einer Zeitreihe korrigieren bzw. ersetzen können.

**Beispiel:** Durch Bewegungen und das damit in Verbindung stehende Verrutschen der Elektroden, sind verschiedene Abschnitte einer 24h-Holter-EKG Aufnahme oft von unbrauchbarer Signalqualität. Zeitserien, die aus dieser EKG Aufnahme extrahiert werden enthalten in den entsprechenden Bereichen unbrauchbare Werte. Diese könnten mit Hilfe von mathematischen Modellen korrigiert werden und so die Analyse erleichtert werden.

3. **Interpretation physiologischer Hintergründe:** Mathematische Modelle sollen auf physiologischer Ebene gedeutet werden, um dadurch ein Verständnis über die Vorgänge im menschlichen Körper zu erlangen.

**Beispiel:** Gedächtnislängen von rekursiven Modellen bilden die Einflusslänge vergangener RR-Intervalle auf den aktuellen Wert des RR-Intervalls ab.

4. **Modellierung physiologischer Zusammenhänge:** Die Erfassung und Quantifizierung von möglichen Zusammenhängen zwischen unterschiedlichen Zeitserien stellt eine wichtige Teildisziplin innerhalb der Zeitserienanalyse dar, was u.a. durch die Nobelpreisvergabe an Clive W.J. Granger, einem herausragenden Denker dieses Gebiets, gewürdigt wurde.

**Beispiel:** Die Beschreibung der QT/RR-Intervall Dynamik ist Zielsetzung einer Reihe von Forschungsarbeiten im Bereich der Biosignalverarbeitung.

Für beide Schwerpunkte ist die Erzeugung eines geeigneten mathematischen Modells zur Beschreibung der Zeitreihe von zentraler Bedeutung. In der Vergangenheit haben sich viele unterschiedliche Ansätze etabliert, von denen wir uns im Folgenden auf die lineare

Theorie der *Autoregressive Moving Average Systeme*, kurz *ARMA-Systeme*, beschränken wollen.

### Aufbau der Arbeit

Zunächst werden im folgenden Kapitel die Methoden zur Gewinnung der oben genannten ARMA-Systeme beschrieben. Dabei sollen die ermittelten Systeme möglichst zutreffend und zugleich sparsam aufgebaut sein, was widersprüchliche Forderungen darstellt. Bei den meisten ökonomischen Fragestellungen hat sich dabei der sogenannte Box-Jenkins-Ansatz durchgesetzt [3]. Dieser umfasst die folgenden vier Schritte:

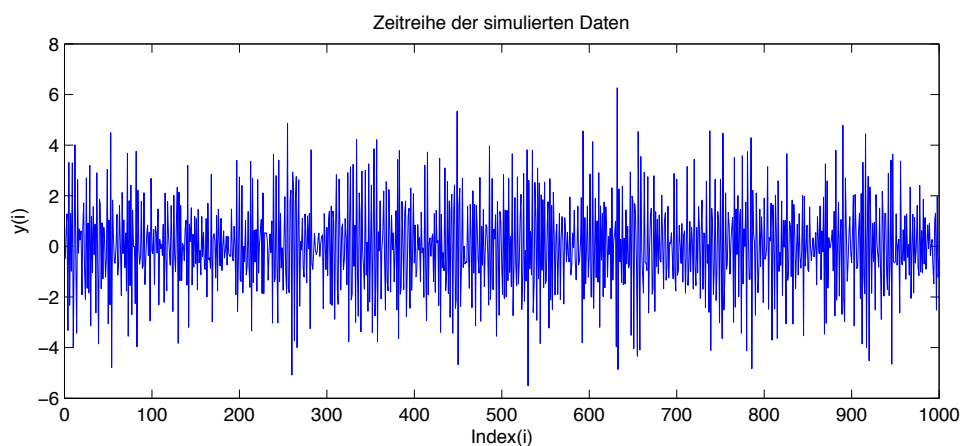
- Modellidentifikation
- Parameterschätzung
- Modelldiagnose
- Prädiktion

In dieser Ausarbeitung liegt der Fokus vornehmlich auf der Modellidentifikation und der Modelldiagnose. Parameterschätzverfahren sind in ausreichendem Maße in den gängigen Tools der Zeitreihenanalyse (z.B. MATLAB/Simulink) implementiert und bedürfen hier deshalb keiner umfassenden Ausführungen.

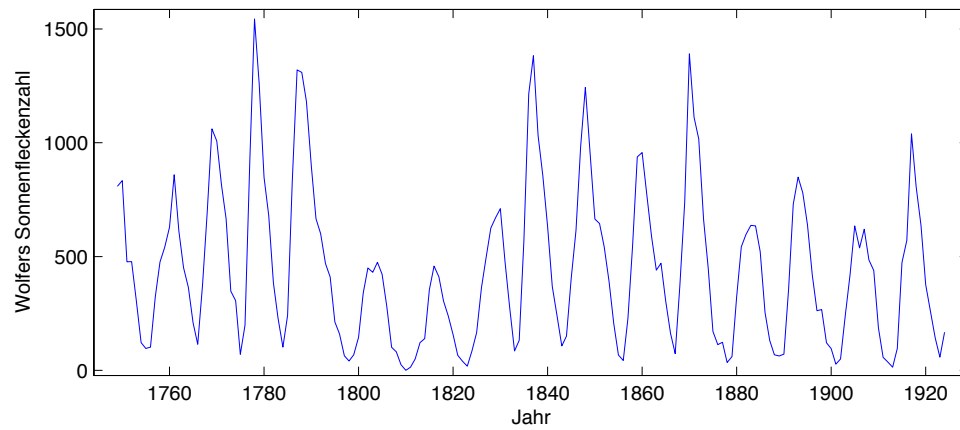
Um die eingeführten Methoden und Ideen zu veranschaulichen, werden diese im Entwicklungsprozess eines Modells immer wieder an zwei Beispielzeitreihen illustriert:

- Zeitreihe SIMULATION: Diese Zeitreihe entsteht durch ein vorgegebenes ARMA-System, welches auf dem Rechner simuliert wird und dadurch eine Zeitreihe mit 1000 Einträgen erzeugt.
- Zeitreihe SUNSPOT: Diese Zeitreihe ist seit Jahrzehnten ein häufig herangezogenes Standardbeispiel zur Beurteilung der Effizienz von Methoden der Zeitreihenanalyse. Sie umfasst Messungen von Wolfers Sonnenfleckenzahlen der Jahre 1759 bis 1924 [4].

In Abb. 1.2 und Abb. 1.3 sind die Plots der Zeitreihen SIMULATION und SUNSPOT dargestellt. Die Daten zur Zeitreihe SUNSPOT sind z.B. in [1] nachzuschlagen.



**Abb. 1.2.** Zeitreihe SIMULATION mit 1000 simulierten Einträgen eines künstlich erzeugten ARMA-Systems.



**Abb. 1.3.** Zeitreihe SUNSPOT mit Wolfers Sonnenfleckenzahlen von 1759 bis 1924.

Nachdem in den Kapiteln 2 bis 5 die Methoden vorgestellt werden, wird zur Veranschaulichung der selbigen in Kapitel 6 beispielhaft eine physiologische Zeitreihe modelliert.



## Identifikation

In diesem Kapitel wird beschrieben, wie aus einer gegebenen Zeitreihe ein mathematisches Modell erzeugt wird. Dabei werden zunächst einige Begrifflichkeiten der Wahrscheinlichkeitstheorie in aller Kürze eingeführt. Grundlage für die meisten Ausführungen sind in [1] und [5] zu finden.

### 2.1 Stochastischer Prozess und Stationarität

Ausgangspunkt aller folgenden Überlegungen ist die Interpretation einer Zeitreihe als Realisierung eines *stochastischen Prozesses*, d.h. eines dynamischen Vorgangs mit Zufallscharakter.

**Definition 2.1** *Ein zeitdiskreter stochastischer Prozess  $\{\mathbf{y}(k)\}$  ( $k \in \mathcal{K}$ ) beschreibt die Zuordnung zwischen einem Elementarereignis aus der Ergebnismenge  $\Omega$  eines Zufallsexperiments zu einer oder mehreren parametrischen Funktionen, genannt Musterfunktionen.*

Der stochastische Prozess ist das Ensemble der Musterfunktionen, weshalb hier die Mengenklammern benutzt werden. Im Folgenden werden nur skalare stochastische Prozesse  $\{y(k)\}$  betrachtet. Zeitreihen sind dann Realisierungen dieses stochastischen Prozesses, sprich Musterfunktionen, und werden deshalb mit  $y(k)$  bezeichnet. Dabei ist  $y$  zu jedem Zeitpunkt  $k$  eine Zufallsvariable. Eine der wichtigsten Eigenschaften eines stochastischen Prozesses ist die *Stationarität*.

**Definition 2.2** *Ein stochastischer Prozess  $\{y(k)\}$  ist schwach stationär, wenn er mittelwert- und kovarianzstationär ist, d.h.:*

- wenn der Mittelwert der Musterfunktionen  $\mu(k)$  konstant ist:

$$\mu(k) =: \mu \text{ für alle } k \in \mathcal{K}$$

- wenn Autokovarianzfunktion  $c_{yy}(k_1, k_2)$  des Prozesses nur von der Entfernung  $\tau := k_1 - k_2$  abhängt:

$$c_{yy}(k_1, k_2) = c_{yy}(\tau) \text{ für alle } k_1, k_2 \in \mathcal{K}$$

Ein schwach stationärer Prozess wird also, was seine Momente erster und zweiter Ordnung betrifft, das gleiche Verhaltensmuster zeigen, gleichgültig in welchem Zeitintervall wir den Prozess betrachten. Im Folgenden wird schwache Stationarität nur noch mit Stationarität bezeichnet, was mathematisch nicht korrekt ist, aber für unsere Betrachtungen zweckmäßig.

Die Beurteilung, ob eine Zeitreihe die Eigenschaft der Stationarität aufweist, ist keinesfalls trivial. Trotzdem lässt sich über die visuelle Analyse des Plots einer Zeitreihe oft eine Tendenz bezüglich der Stationaritätseigenschaft formulieren. So zeigt die Zeitreihe SIMULATION einen zeitlich nahezu konstanten Mittelwert (Abb. 1.2), während bei der Zeitreihe SUNSPOT aufgrund eines zeitvarianten Mittelwerts von einem instationären Prozess ausgegangen werden kann (Abb. 1.3). Die Existenz eines (ggf. linearen) Trends ist also ein Hinweis auf Instationarität.

Ein handfesteres Verfahren um eine Zeitreihe auf Stationarität zu überprüfen, ist die Beurteilung der *empirischen Autokovarianzfunktion* der Reihe. Diese berechnet sich bei einer Zeitreihe  $y(k)$  mit  $k = 1, 2, \dots, N$  und dem Mittelwert  $\bar{y}$  zu:

$$\tilde{c}_{yy}(\tau) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N (y(j) - \bar{y})(y(j + \tau) - \bar{y}) \text{ für alle } \tau = 0, \dots, K \text{ und } K < N. \quad (2.1)$$

Zusätzlich wird die Autokovarianzfunktion häufig auf den Wert 1 bei der Verschiebung  $k = 0$  normiert.

$$c(\tau) = \frac{\tilde{c}(\tau)}{\tilde{c}(0)}. \quad (2.2)$$

Man sieht, dass dieses Vorgehen mathematisch nicht einwandfrei ist. So hat die Autokovarianzfunktion hier nur ein Argument, was nach Def. 2.2 Stationarität voraussetzen würde. Man unterstellt also zunächst Stationarität um danach auf Stationarität beurteilen zu können. In den original Arbeiten von Box/Jenkins wird die Funktion übrigens als empirische Autokorrelationsfunktion bezeichnet, obwohl es sich hierbei eindeutig um eine Kovarianzfunktion handelt.

Weil im Folgenden nur mittelwertfreie Prozesse betrachtet werden, können die Begriffe der Autokovarianzfunktion und der Autokorrelationsfunktion  $r_{yy}(\tau)$  (AKF) synonym verwendet werden. Die AKF stellt ein Maß für die interne Ähnlichkeit der Zeitreihe zur Verschiebung  $\tau$  dar. Notwendige Voraussetzung für eine Stationarität der Zeitreihe ist dabei der Abfall der AKF zu 0 für  $\tau \rightarrow \infty$ . Dabei lassen folgende vier Charakteristika auf eine instationäre Zeitreihe schließen [1]:

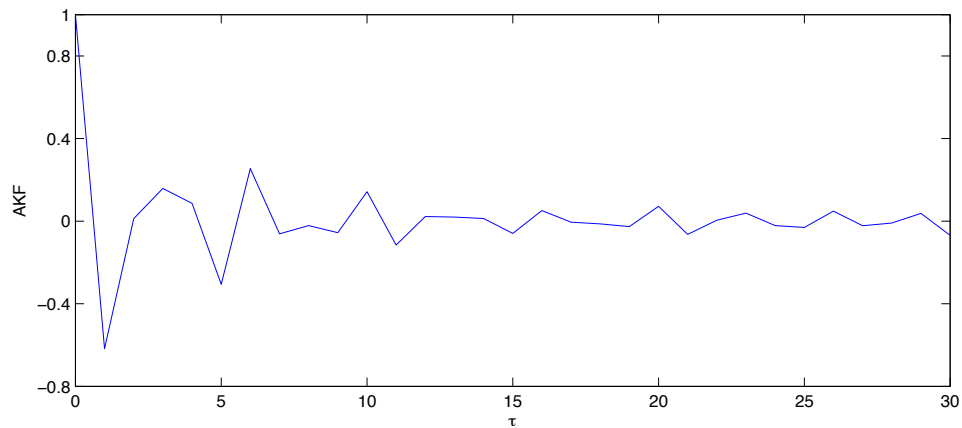
1. Langsames Absinken von +1 bei  $\tau = 0$  zu betragskleineren Werten für  $\tau \rightarrow \infty$
2. Alternierende Werte der AKF mit Amplitudenwerten  $\pm 1$  (eher selten)
3. Sich mit Periode  $\nu$  wiederholende Peaks mit  $\nu \in \mathbb{N}$
4. Schwingungen der Frequenz  $\lambda$  ( $\lambda \in \mathbb{N}$ )

Abb. 2.1 und Abb. 2.2 zeigen die AKFn der Zeitreihen SIMULATION und SUNSPOT. Wie zu sehen ist, lässt das Verhalten der AKF auf Stationarität bei der Reihe SIMULATION und auf Instationarität bei der Reihe SUNSPOT schließen.

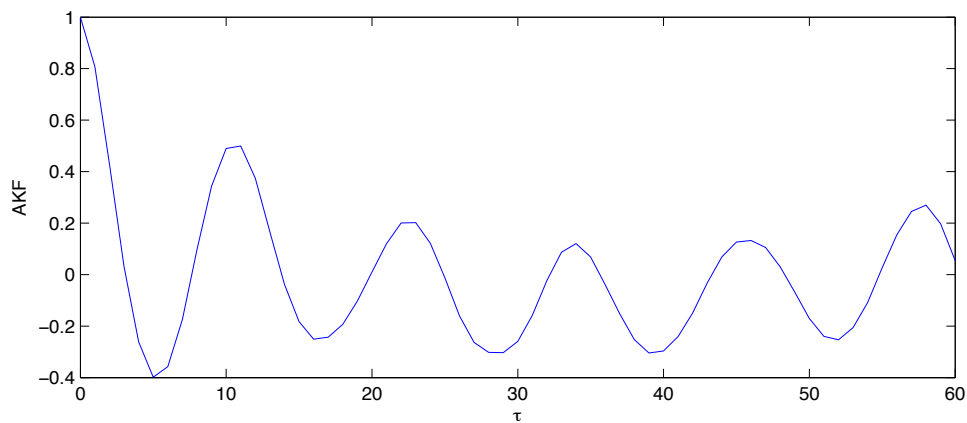
## 2.2 ARMA-Prozesse und Behandlung instationärer Prozesse

Stationarität ist eine wichtige Voraussetzung bei der Untersuchung von Zeitreihen. Dies wird im folgenden Satz aus [6] deutlich, der den Ausgangspunkt für alle weiteren Überlegungen bildet:

**Satz 2.1** *Jeder stationäre stochastische Prozess kann beliebig genau durch einen ARMA-Prozess approximiert werden.*



**Abb. 2.1.** AKF der Zeitreihe SIMULATION. Für  $\tau \rightarrow \infty$  fällt die AKF gegen 0 hin ab und zeigt dabei keine der vier Charakteristika, die auf Instationarität schließen lassen würden. Die Zeitreihe kann als stationär angenommen werden.



**Abb. 2.2.** AKF der Zeitreihe SUNSPOT. Für  $\tau \rightarrow \infty$  fällt die AKF nicht gegen 0 hin ab und es zeigen sich Schwingungen der Frequenz  $\lambda = \frac{1}{12}$  (Fall(4)). Dies lässt eindeutig auf eine instationäre Zeitreihe schließen.

An dieser Stelle ist es unverzichtbar, den Begriff des ARMA-Prozesses, bzw. ARMA-Systems einzuführen.

**Definition 2.3** Gegeben sei das Weiße Rauschen  $\{\epsilon(k)\} \sim \mathcal{N}(0, \sigma_\epsilon^2)$ . Der Prozess  $\{y(k)\}$  heißt Autoregressiver-Moving-Average-Prozess der Ordnung  $(p, q)$  (ARMA( $p, q$ )-Prozess), falls er die stochastische Differenzengleichung

$$y(k) = a_1 y(k-1) + \dots + a_p y(k-p) + \epsilon(k) + c_1 \epsilon(k-1) + \dots + c_q \epsilon(k-q) \quad (2.3)$$

mit  $a_1, \dots, a_p, c_1, \dots, c_q \in \mathbb{R}$  und  $a_p, c_q \neq 0$  erfüllt.

ARMA-Prozesse benötigen also zur Berechnung eines Wertes  $y(k)$  die Information über  $p$  vergangene Werte des stochastischen Prozesses selbst, sowie  $q$  Vergangenheitswerte und den aktuellen Wert des Rauschprozesses  $\epsilon(k)$ .

Unter Zuhilfenahme der z-Transformation mit dem Verschiebungsoperator  $z^{-1}$  formuliert bedeutet das:

$$Y(z)(1 - a_1 z^{-1} - \dots - a_p z^{-p}) = \mathcal{E}(z)(1 + c_1 z^{-1} + \dots + c_q z^{-q}). \quad (2.4)$$

Im weiteren Verlauf dieser Ausarbeitung wird nun nicht nur von ARMA-Prozessen gesprochen, sondern auch von deren systemtheoretischen Pendant - den *ARMA-Systemen*. Bei ARMA-Systemen werden die  $p$  Anfangswerte der Variable  $y(k)$  und konkrete Werte einer Musterfunktion des Rauschprozesses  $\epsilon(k)$  als Eingangsvariablen aufgefasst. Aus diesen Eingangswerten werden mittels der Differenzengleichung 2.3 die Ausgangswerte  $y(k)$  zu jedem Zeitpunkt  $k$  berechnet. Die Zeitreihe SIMULATION ist ein Beispiel für eine Zeitreihe die aus einem ARMA(4,3)-System generiert wurde. Der Zeitreihe liegt folgende Differenzengleichung zugrunde:

$$\begin{aligned} y(k) = & -0.8y(k-1) - 0.2y(k-2) + 0.15y(k-3) + 0.3y(k-4) \\ & + \epsilon(k) - 0.5\epsilon(k-1) - 0.3\epsilon(k-2) + 0.2\epsilon(k-3) \end{aligned} \quad (2.5)$$

Durch die Simulation eines Rauschprozesses  $\epsilon(k) \sim \mathcal{N}(0, 1)$ , d.h. mit Varianz  $\sigma_\epsilon^2 = 1$ , und der Vorgabe der vier Anfangswerte ( $y(-1), y(-2), y(-3), y(-4)$ ) wird so die konkrete Zeitreihe mit  $N = 1000$  Einträgen erzeugt (siehe Abb. 1.2).

Ziel soll es nun sein, eine gegebene Zeitreihe durch einen ARMA-Prozess zu modellieren. Dabei wird zunächst beurteilt, ob es sich bei der gegebenen Zeitreihe um eine stationäre Zeitreihe handelt. Wie im vorherigen Abschnitt gezeigt, ist die Zeitreihe SIMULATION eine stationäre Zeitreihe, während die Beispielreihe SUNSPOT deutlich instationären Charakter aufweist. Je nach Gestalt der Instationarität (vergleiche Charakteristika 1 bis 4) werden nun folgende Filter angewendet, um ein stationäres Verhalten zu erzeugen:

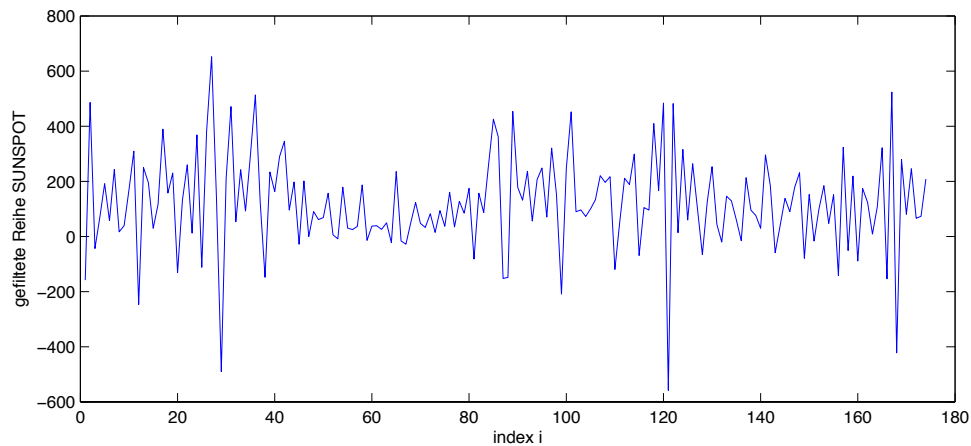
Struktur der AKF	anzuwendendes Filter
1. Langsames Absinken	$(1 - z^{-1})$
2. Alternierende Werte	$(1 + z^{-1})$
3. Peaks bei $\nu \cdot \tau$	$(1 - z^{-\nu})$
4. Schwingungen	$(1 - 2 \cos(2\pi\lambda)z^{-1} + z^{-2})$

**Tabelle 2.1.** Empirische AKF und anzuwendende Filter [1].

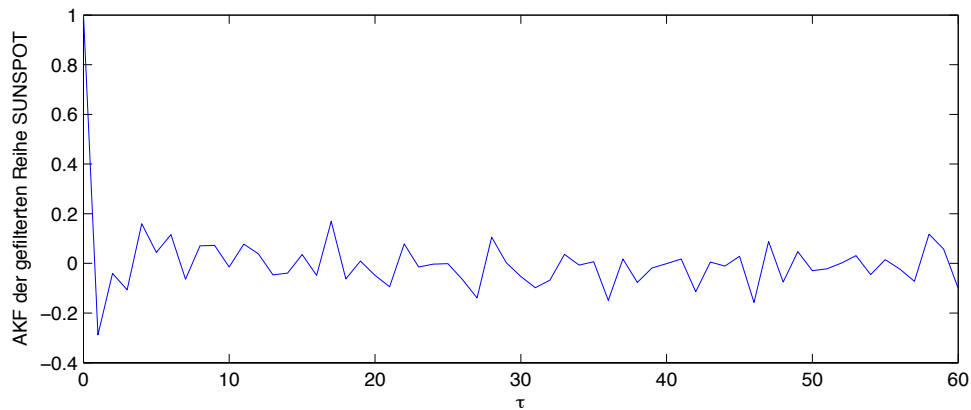
Als Beispiel ist das anzuwendende Filter im 1. Fall einfach eine Differenzenbildung von je zwei aufeinanderfolgenden Werten und die gefilterte Reihe  $z(k)$  ergibt sich somit zu

$$z(k) = y(k) - y(k-1). \quad (2.6)$$

Wie oben beschrieben, zeigt die Reihe SUNSPOT deutlich instationären Charakter, welcher nun durch die Anwendung des entsprechenden 4. Filters mit  $\lambda = \frac{1}{12}$  beseitigt werden soll. Die gefilterte Reihe ist in Abb. 2.3 dargestellt. Die visuelle Analyse des Plots lässt nun bereits auf verbesserte Stationaritätseigenschaften der Reihe schließen. Um dieses Ergebnis zu verifizieren ist in Abb. 2.4 die AKF der gefilterten Zeitreihe dargestellt. Auch diese enthält keinerlei Indizien auf eine weitere Instationarität der gefilterten Zeitreihe. Im Folgenden werden wir also nur noch mit der gefilterten Reihe SUNSPOT:F fortfahren, da sich diese nun als geeignet für die Modellierung mittels ARMA-Systemen erweist.



**Abb. 2.3.** Plot der gefilterten Reihe SUNSPOT:F, welche nun hinsichtlich der Stationarität wesentlich verbesserte Eigenschaften aufweist.



**Abb. 2.4.** AKF der gefilterten Reihe SUNSPOT:F. Verbesserte Eigenschaften hinsichtlich der Stationarität sind wegen einem vergleichsweise schnellen Absinken zu betragskleinen Werten deutlich ersichtlich.

Der Nachteil einer Filterung besteht im Verlust von Langzeitinformation und der Verzerrung spektraler Information. Des Weiteren muss dafür Sorge getragen werden, dass das SNR nach der Filterung hinreichend gut ist, da sich dieses z.B. durch eine Rauschverstärkung des Differenzenfilters signifikant verschlechtert.

## 2.3 Ermittlung der Ordnungen des ARMA-Modells

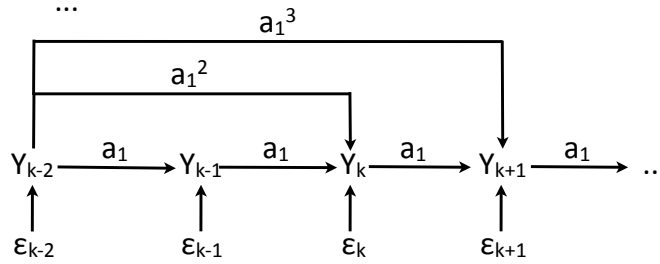
Sind alle Instationaritäten beseitigt, folgt in konsequenter Fortführung der Modellbildung die Ermittlung der Ordnungen  $p$  und  $q$ . Dieser Vorgang stellt dabei eine wesentliche Hürde bei der Gewinnung eines geeigneten Modells dar. Im Folgenden werden verschiedene Ansätze vorgestellt, die sich zum Ziel setzen möglichst passende Modellordnungen für eine gegebene Zeitreihe zu finden.

### Der klassische Box-Jenkins-Ansatz: AKF und PAKF

Der von Box-Jenkins vorgeschlagene Ansatz zur Ermittlung der Ordnungen  $p$  und  $q$  basiert im Wesentlichen auf der Analyse der Autokorrelationsfunktion (AKF) und der *parti-*

ellen Autokorrelationsfunktion (PAKF) [3]. Wie bereits angesprochen, stellt die AKF ein Maß für die interne Ähnlichkeit der Zeitreihe zur Verschiebung  $\tau$  dar. Im Gegensatz zu AKF ist die PAKF eine wenig verbreitete Beschreibungsmethode statistischer Vorgänge. Deshalb soll hier zunächst eine Motivation zur Einführung der PAKF gegeben werden, was an einem AR(1)-Prozess illustriert wird.

Gegeben sei der AR(1)-Prozess  $y(k) = a_1 y(k-1) + \epsilon(k)$ . Die Verknüpfungen zwischen den hier auftretenden Zufallsvariablen können wie folgt veranschaulicht werden:



$y(k-2)$  wirkt sich über den Faktor  $a_1$  direkt auf  $y(k-1)$  aus, welches sich wiederum über  $a_1$  direkt auf  $y(k)$  auswirkt, d.h.  $y(k-2)$  wirkt sich über den Faktor  $a_1^2$  indirekt auf  $y(k)$  aus. Dieser Zusammenhang schlägt sich auch in der Gestalt der AKF nieder, da diese die Abhängigkeit zwischen diesen Zufallsvariablen beschreibt. Ziel der PAKF ist es nun, sich lediglich auf den direkten Einfluss vergangener Werte auf den aktuellen Wert  $y(k)$  zu beschränken. Für das obige Beispiel des AR(1)-Prozesses würde dies bedeuten, dass der direkte Einfluss von  $y(k-1)$  auf  $y(k)$  gerade durch den Faktor  $a_1$  gegeben ist. Alle weiteren Zufallsvariablen  $y(k-\tau)$  ( $\tau \geq 2$ ) wirken sich nicht direkt auf  $y(k)$  aus, weshalb die PAKF dort den Wert 0 hat.

**Definition 2.4** Sei  $\{y(k)\}$  ein stationärer Prozess. Die partielle Autokorrelationsfunktion (PAKF)  $\pi(\tau)$  mit  $\tau \geq 2$  ist die partielle Korrelation von  $y(k)$  und  $y(k-\tau)$  unter Konstanthaltung der dazwischen liegenden Zufallsvariablen  $y(u)$  mit  $k-\tau < u < k$  [1].

Man setzt  $\pi(0) := 1$  und  $\pi(1) := r_{xx}(1)$ , wobei  $r_{xx}(1)$  gerade den Wert der AKF zur Verschiebung  $\tau = 1$  darstellt.

Die konkrete Berechnung der empirischen PAKF für eine gegebene Zeitreihe erfolgt über eine Schätzung der *optimalen linearen Prognose*. Aus Zeit- und Platzgründen erfolgt an dieser Stelle keine detaillierte Beschreibung der mathematischen Hintergründe. Es sei jedoch auf [3] verwiesen, wo die PAKF mittels der *Levinson-Durbin Rekursion* berechnet wird. Wichtig ist die Feststellung, dass die PAKF den direkten Einfluss zwischen den Zufallsvariablen beschreibt und damit Aufschluss über die Ordnung  $p$  des AR-Anteils eines ARMA-Systems gibt [6]. Mit ähnlichen Überlegungen wie zu dem hier betrachteten AR(1)-Prozess, lassen sich Aussagen zu dem Zusammenhang zwischen AKF und der Ordnung  $q$  des MA-Anteils tätigen. Insgesamt ergeben sich verschiedene Zusammenhänge zwischen reinen AR bzw. MA-Prozessen und der Gestalt der PAKF/AKF, was in Tab. 2.2 dargestellt ist.

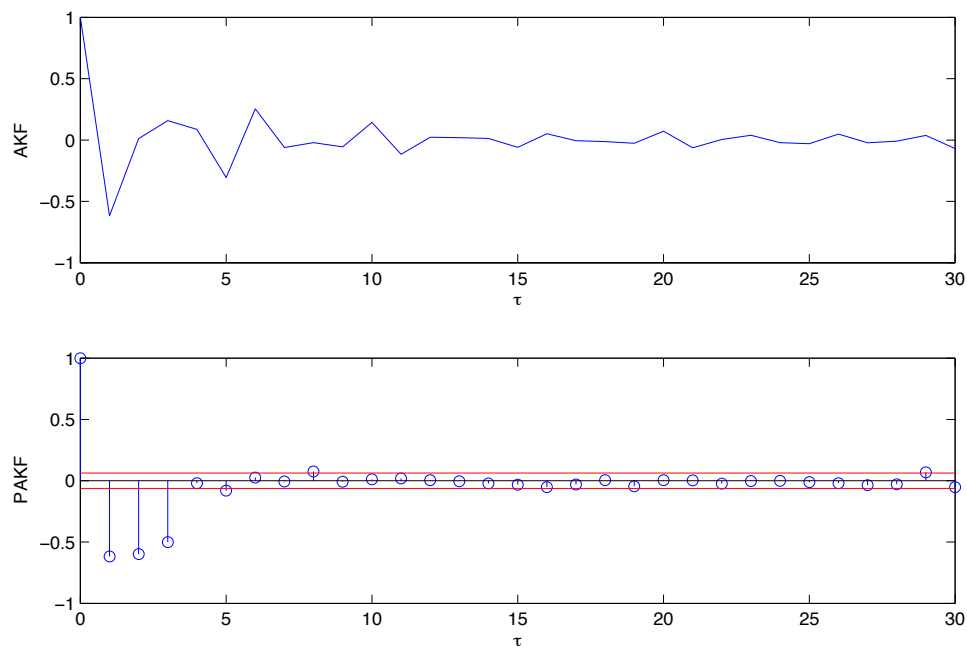
Auch für gemischte Prozesse, d.h. ARMA-Prozesse, ist eine Aussage über die Ordnungen  $p$  und  $q$  möglich. Die Einschätzung ist allerdings im Vergleich zu reinen AR- bzw. MA-Prozessen ungleich schwieriger und erfordert Erfahrung im Umgang mit solch gemischten

Prozess	AKF $r_{xx}(\tau)$	PAKF $\pi_{xx}(\tau)$
AR(p)	unendlich (gedämpfte Exponentialfunktion oder Sinuswellen)	endlich: $\pi_{xx}(\tau) = 0$ für $\tau > p$
MA(q)	endlich: $r_{xx}(\tau) = 0$ für $\tau > q$	unendlich (gedämpfte Exponentialfunktion oder Sinuswellen)

**Tabelle 2.2.** Zusammenhänge zwischen Ordnungen reiner AR- bzw. MA Prozesse und der Gestalt von PAKF und AKF.

Prozessanteilen. Insbesondere sind die Abschätzungen über die Ordnungen keinesfalls eindeutig. Dies soll an den beiden Beispielzeitreihen illustriert werden.

In Abbildung 9 ist die empirische AKF und die empirische PAKF der Zeitreihe SIMULATION dargestellt. Die AKF lässt vermuten, dass das erzeugende System die MA-Ordnung  $q = 1$  hat, weil nur dort ein signifikanter Peak auftritt. Analog dazu lässt die PAKF auf eine AR-Ordnung von  $p = 3$  schließen. Im Vergleich zum erzeugenden ARMA(4,2)-System, werden die Ordnungen also unterschätzt.



**Abb. 2.5.** AKF und PAKF der Reihe SIMULATION. Die AKF lässt auf die MA-Ordnung  $q = 1$  und die PAKF auf die AR-Ordnung  $p = 3$  schließen. Die roten Begrenzungen im Schaubild der PAKF sind die Grenzen des Konfidenzintervalls, welche sich zu  $\pm \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$  berechnen ( $\sigma$ : Standardabweichung des Zeitreihenvektors,  $N$ : Anzahl der Einträge der Zeitreihe).

### Semiautomatische Modellselektion: Das Akaike Informationskriterium

Die Tatsache, dass die AKF und die PAKF im obigen Beispiel nicht die exakten Systemordnungen des erzeugenden Systems wiedergeben ist weniger problematisch, als dies zu Beginn vielleicht zu vermuten ist. Dies liegt an der Tatsache, dass unendlich viele Systeme eine Zeitreihe hinreichend gut beschreiben können. So wird bereits klar, dass jedes ARMA( $p, q$ )-System nur zur Untermenge der ARMA( $p + 1, q$ )-Systeme zählt und

für  $a_{p+1} = 0$  die beiden Systeme identisch sind. Dabei gilt, dass je umfassender ein Modell ist (d.h. je größer die Anzahl der unspezifizierten Parameter ist), desto besser gelingt i.A. die Anpassung des Modells an die Daten.

Ziel der folgenden Überlegungen soll nun sein, ein erzeugendes ARMA( $p, q$ )-System zu ermitteln, welches eine gegebene Zeitreihe möglichst gut beschreibt und zugleich so minimalistisch wie möglich aufgebaut ist, d.h. sich dem *Prinzip der Sparsamkeit* fügt. Aufgabe einer Beurteilungsfunktion (auch als *Informationskriterium* bezeichnet) ist es folglich, eine gute Anpassung an die Zeitreihe zu belohnen und eine verschwenderische Modellordnung zu bestrafen. Das bekannteste Informationskriterium ist das *Akaike Informationskriterium*.

**Definition 2.5** Das Akaike Informationskriterium (AIC) ist definiert durch das Gütemaß[7]

$$AIC(p, q) := \ln(\sigma_e^2(p, q)) + \frac{2(p + q)}{N}. \quad (2.7)$$

Der erste Term belohnt eine gute Anpassung an die Zeitreihe durch kleine Werte der logarithmierten Residualvarianz, während der zweite Term steigende Modellordnungen immer stärker bestraft. Die Residualreihe ergibt sich dabei durch die Differenz zwischen der ursprünglichen Zeitreihe und der optimalen linearen Prognose eines ARMA-Systems, welches mit den Ordnungen  $p$  und  $q$  angesetzt wurde. Für Details zur Berechnung des AIC sei auf [1], [7] oder die MATLAB Dokumentation zu den Befehlen *aic* bzw. *fpe* verwiesen.

Weitere bekannte Informationskriterien sind das *Bayessche Informationskriterium* und das *Schwarz-Bayes Kriterium*. Weil sich diese aber nur marginal zum AIC unterscheiden, wird auf weitere Ausführungen verzichtet. Das weitere Vorgehen basiert daher auf der Verwendung des AIC.

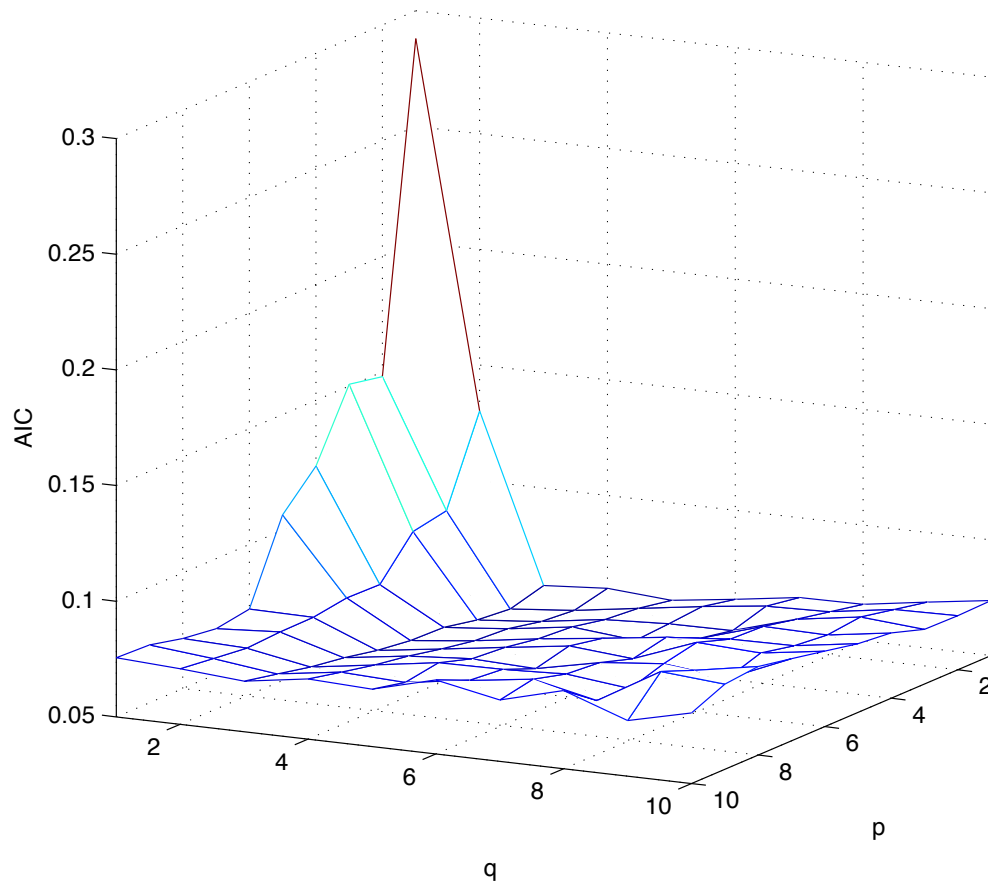
Ein semiautomatisches Modellselektionsverfahren wählt nun die Ordnungen  $p$  und  $q$ , welche das AIC minimieren. Dafür muss vom Benutzer angegeben werden, bis zu welchen Ordnungen  $p_{\max}$  und  $q_{\max}$  das Informationskriterium berechnet werden soll. Abb. 2.6 zeigt das Attraktivitätsgebirge der Zeitreihe SIMULATION, wobei hier  $p_{\max} = q_{\max} = 10$  gesetzt wurde. Das Minimum liegt bei den Werten  $p = 3$  und  $q = 2$ . Das AIC bestätigt also die Erkenntnisse der PAKF, wie dass der AR-Term 4. Ordnung nur unwesentlichen Anteil zur Zeitreihe liefert. D.h. dass die Zeitreihe, die durch ein ARMA(4,2)-System generiert wurde, durch ein ARMA-System mit AR-Ordnung  $p = 3$  bereits ausreichend beschrieben ist.

Für die Zeitreihe SUNSPOT:F wird das AIC für die Parameterwerte  $(p, q) = (29, 31)$  minimiert ( $p_{\max} = q_{\max} = 40$ ). Bei Ordnungen dieser Größe spricht man von Prozessen mit langem Gedächtnis. Diese Prozesse werden durch sogenannte *ARIMA-Modelle*, d.h. ARMA-Modelle mit zusätzlichem integrierendem Anteil, sehr sparsam beschrieben [1].

## 2.4 Ermittlung der Varianz des ARMA-Modells $\sigma_e^2$

Nachdem die Modellordnungen  $p$  und  $q$  mittels der AKF/PAKF und des AICs spezifiziert sind, werden die Parameter  $a_1, \dots, a_p$  und  $c_1, \dots, c_q$  unter Anwendung der gängigen Parameterschätzverfahren bestimmt (LS-Schätzer, Yule-Walker Schätzer, Prediction-Error Methode). Die weiteren Ausführungen erfolgen unter Verwendung der Prediction-Error Methode, welche im Parameterschätzbefehl *armax* in MATLAB/Simulink implementiert





**Abb. 2.6.** Attraktivitätsgebirge des AIC über den Ordnungen  $p$  und  $q$  für die Zeitreihe SIMULATION. Das Minimum liegt bei  $p = 3$  und  $q = 2$ . Systeme kleiner Ordnung besitzen schlechte Approximationseigenschaften, was beim AIC durch eine große Residualvarianz bestraft wird. Für größere Ordnungen wächst das AIC aufgrund des Ordnungsterms.

ist.

**Beispiel:** Für die Reihe SIMULATION gibt *armax* unter den Randbedingungen  $p = 3$  und  $q = 2$  das System

$$y(k) = -1.44y(k-1) - 1.15y(k-2) - 0.54y(k-3) + \epsilon(k) + 0.15\epsilon(k-1) - 0.184\epsilon(k-2) \quad (2.8)$$

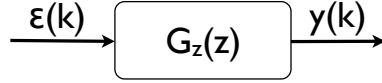
zurück.

Um nun eine vollständige Systembeschreibung zu erhalten, muss die Varianz des per Definition mittelwertfreien weißen Rauschprozesses  $\{\epsilon(k)\}$  noch spezifiziert werden. Grundidee dabei ist, die Varianz der Zufallsvariablen  $\epsilon(k)$  so zu wählen, dass die Zufallsvariable  $y(k)$  die Varianz der zugrunde liegenden Zeitreihe richtig wiedergibt.

Ausgangspunkt für einen funktionalen Zusammenhang zwischen  $\sigma_\epsilon^2$  und  $\sigma_y^2$  ist die Transformation der ARMA-Prozessgleichung in den  $z$ -Bereich (Gleichung 2.4). Als  $z$ -Übertragungsfunktion ergibt sich:

$$G_z(z) = \frac{Y(z)}{\mathcal{E}(z)} = \frac{(1 + c_1 z^{-1} + \dots + c_q z^{-q})}{(1 - a_1 z^{-1} - \dots - a_p z^{-p})}. \quad (2.9)$$

Betrachtet man diese Gleichung aus einer systemtheoretischen Interpretation so ergibt sich ein zeitdiskretes LTI-Übertragungssystem mit  $\epsilon(k)$  als Ein- und  $y(k)$  als Ausgangsgröße.



Der Frequenzgang eines solchen zeitdiskreten Systems berechnet sich unter Verwendung der normierten Abtastzeit  $t_A = 1$  zu

$$G_z(f) = G_z(z = e^{j2\pi f}) = \frac{(1 + c_1 e^{-j2\pi f} + \dots + c_q e^{-j2\pi f q})}{(1 - a_1 e^{-j2\pi f} - \dots - a_p e^{-j2\pi f p})}. \quad (2.10)$$

Weil hier stochastische Signale vorliegen, kann nun die allgemeine Beziehung für Leistungsdichtespektren stochastischer Signale beim Durchlaufen von LTI-Systemen verwendet werden [8]:

$$S_{yy}(f) = |G_z(f)|^2 \cdot S_{\epsilon\epsilon}(f). \quad (2.11)$$

Beachtet man nun, dass das Leistungsdichtespektrum des weißen Rauschprozesses  $\{\epsilon(k)\}$  eine Konstante  $\sigma_\epsilon^2$  ist ergibt sich unmittelbar:

$$S_{yy}(f) = |G_z(f)|^2 \cdot \sigma_\epsilon^2. \quad (2.12)$$

Bringt man diesen Zusammenhang mit der Leistung des stochastischen Prozesses  $\{y(k)\}$  in Verbindung und beachtet dabei, dass aufgrund von  $E[\epsilon(k)] = 0$  direkt auch  $E[y(k)] = 0$  sein muss, so ergeben sich folgende Zusammenhänge

$$P_y = \sigma_y^2 = E[(y(k) - \underbrace{E[y(k)]}_{=0})^2] = E[y(k)^2] = \int_{-1/2}^{1/2} S_{yy}(f) df. \quad (2.13)$$

Dabei ist zu beachten, dass aufgrund der zeitdiskreten Beschreibung die gesamte Energie im Nyquistband  $[-\frac{f_A}{2}, \frac{f_A}{2}]$  bereits enthalten ist. In unseren Betrachtungen ist  $f_A = \frac{1}{t_A} = 1$  die normierte Abtastfrequenz.

Einsetzen von 2.10 in 2.12 und weiter in 2.13 liefert schlussendlich den Zusammenhang zwischen  $\sigma_\epsilon^2$  und  $\sigma_y^2$ :

$$\sigma_y^2 = \int_{-f_A/2}^{f_A/2} \left| \frac{(1 + c_1 e^{-j2\pi f} + \dots + c_q e^{-j2\pi f q})}{(1 - a_1 e^{-j2\pi f} - \dots - a_p e^{-j2\pi f p})} \right|^2 df \cdot \sigma_\epsilon^2. \quad (2.14)$$

Man sieht also, dass ein linearer Zusammenhang zwischen den Varianzen besteht. Aus dem gegebenen  $\sigma_y^2$  einer beliebigen Zeitreihe und den Koeffizienten eines extrahierten ARMA-Prozesses lässt sich somit leicht ein zugehöriges  $\sigma_\epsilon^2$  berechnen.

## Diagnose

---

Um ein nun vollständiges ARMA( $p, q$ )-Modell auf Korrektheit zu überprüfen, muss eine ausführliche Modelldiagnose durchgeführt werden. An dieser Stelle sei erwähnt, dass das Auffinden eines passenden ARMA-Modells keineswegs einer eindeutigen und geradlinigen Vorgehensweise unterliegt. Vielmehr stellt das Prozedere einen iterativen Prozess dar, bei dem infolge der Diagnose möglicherweise Identifikationsschritte wiederholt werden müssen.

In der Literatur finden sich viele Ansätze, um die Güte eines gewonnen Modells zu beurteilen. Insbesondere sei in diesem Zusammenhang auf [1] verwiesen. Aus der Gesamtheit dieser Methoden beschränken wir uns im Verlauf dieser Ausarbeitung auf folgende vier Beurteilungskriterien:

- Visueller Vergleich der theoretischen AKF des ARMA( $p, q$ )-Systems mit der empirischen AKF der Zeitreihe
- Vergleich von Kenngrößen der Residualreihe mit denen eines Weißen Rauschprozesses
- Monte-Carlo-Test
- Methode des Overfittings

### 3.1 Vergleich der Korrelationsfunktionen

Sind stochastische Prozessgrößen in einem Signal beteiligt, wird oft nicht der Signalverlauf selbst beurteilt, sondern geschätzte Kenngrößen des zugrundeliegenden stochastischen Prozesses [9]. Insbesondere wird hier die AKF als Beurteilungsfunktion für die Güte eines angepassten Modells herangezogen. Hierzu wird zunächst die empirische AKF der Zeitreihe, wie im Abschnitt 2.1 vorgestellt, berechnet. Im zweiten Schritt wird die theoretische AKF des gewonnenen ARMA( $p, q$ )-Systems ermittelt. Dies wird über den Umweg des Leistungsdichtespektrums des ARMA( $p, q$ )-Modells bewerkstelligt. Das Betragsspektrum eines ARMA( $p, q$ )-Prozesses ergibt wie in Abschnitt gezeigt zu:

$$|G_z(f)|^2 = \left| \frac{(1 + c_1 e^{-j2\pi f} + \dots + c_q e^{-j2\pi f q})}{(1 - a_1 e^{-j2\pi f} - \dots - a_p e^{-j2\pi f p})} \right|^2. \quad (3.1)$$

Interpretiert man dieses Betragsspektrum nun als spektrale Leistungsdichte des ARMA-Prozesses, so erhält man durch inverse Fourier-Transformation eine Funktion die proportional zur AKF des ARMA-Prozesses ist:

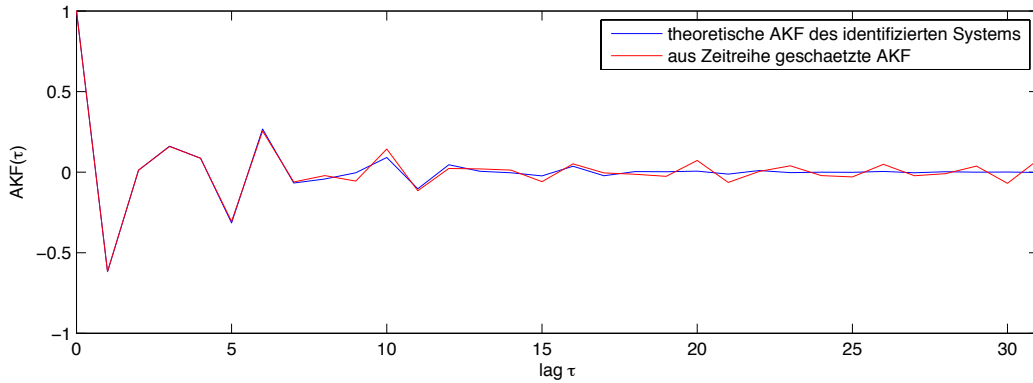
$$\tilde{r}_{xx}(\tau) = \mathcal{F}^{-1}\{|G_z(f)|^2\} = \int_{-\infty}^{\infty} |G_z(f)|^2 e^{j2\pi f \tau} df. \quad (3.2)$$

Durch Normierung wird dieser Ausdruck zur eigentlichen AKF:

$$r_{xx,ARMA}(\tau) = \frac{\tilde{r}_{xx}(\tau)}{\tilde{r}_{xx}(0)} \quad (3.3)$$

Wenn nun ein gewonnenes  $ARMA(p, q)$ -Modell eine Zeitreihe gut beschreiben soll, müssen deren statistischen Eigenschaften übereinstimmen. Im Kontext der AKF bedeutet dies, dass sich die empirische AKF der Zeitreihe  $r_{xx,ts}(\tau)$  und die theoretische AKF des  $ARMA(p, q)$ -Modells  $r_{xx,ARMA}(\tau)$  möglichst gleichen sollten.

In Abb. 3.1 sind die empirische AKF der Zeitreihe SIMULATION (rot) und die theoretische AKF des unter Verwendung des AIC identifizierten  $ARMA(3, 2)$ -Systems (blau) dargestellt. Die Funktionsverläufe und damit die statistischen Eigenschaften sind weitestgehend übereinstimmend und das  $ARMA(3, 2)$ -System zur Beschreibung der Zeitreihe geeignet.

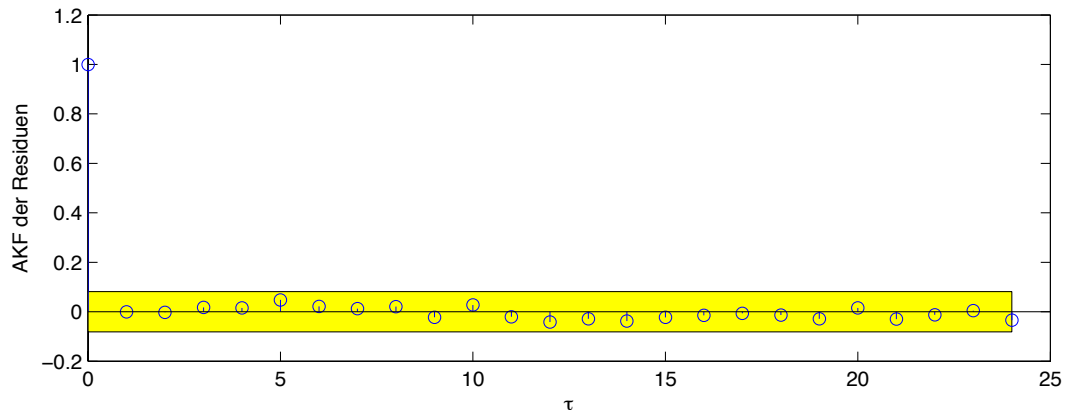


**Abb. 3.1.** Empirische AKF der Zeitreihe SIMULATION (rot) und die theoretische AKF des identifizierten  $ARMA(3,2)$ -Systems (blau). Die Verläufe der Funktionen sind sehr ähnlich, was auf eine hinreichende Approximation der Zeitreihe durch das  $ARMA(3,2)$ -System schließen lässt.

### 3.2 Beurteilung der Residualreihe

Wenn das ausgewählte Modell die Zeitreihe gut beschreibt, dürfen die Residuen (d.h. die Abweichung zwischen der optimalen linearen Prognose und der Zeitreihe selbst, siehe Formel 2.7) keinerlei Abhängigkeit zueinander aufweisen. Andernfalls würde ein systematischer Fehler vorliegen. Statistisch ausgedrückt sollte die Residualreihe die Realisierung eines Weißen Rauschprozesses mit der Varianz  $\sigma^2$  darstellen. Dabei hat die AKF eines diskreten weißen Rauschprozesses die Gestalt  $r_{xx}(\tau = 0) = 1$  und  $r_{xx}(\tau) = 0$  für  $\tau \geq 1$ . Die empirische AKF der Residualreihe sollte für ein gut angepasstes Modell also möglichst der AKF des Weißen Rauschprozesses folgen.

In Abb. 3.2 ist die AKF der Residualreihe des  $ARMA(3,2)$ -Systems dargestellt, welches an die Reihe SIMULATION angepasst wurde. Das 99%-Konfidenzintervall ist in gelb dargestellt. Alle Werte liegen innerhalb des Toleranzbereichs, womit das Modell als zufriedenstellend beurteilt wird.



**Abb. 3.2.** AKF der Residualreihe unter Verwendung des angepassten ARMA(3,2)-Systems. Alle Werte der AKF liegen für  $\tau \geq 1$  innerhalb des 99%-Konfidenzintervalls. Die Residualreihe kann somit als Realisierung eines Weißen Rauschprozesses interpretiert werden und das Modell wird als zufriedenstellend bewertet.

### 3.3 Monte Carlo Test

Ein etwas rechenaufwändigerer Weg um die Qualität eines ARMA( $p, q$ )-Modells zu beurteilen, ist der Monte-Carlo-Test. Die folgenden Ausführungen sind [1] entnommen. Um zum Signifikanzniveau  $\alpha$  zu prüfen, ob die Nullhypothese „Zeitreihe wird durch ARMA( $p, q$ )-Modell hinreichend gut beschrieben“ mit festen  $p$  und  $q$  angenommen werden kann, werden  $M - 1$  Realisierungen der Länge  $N$  dieses Prozessmodells zufällig erzeugt. Für jede der  $M - 1$  Realisierungen, sowie für die Ausgangszeitreihe berechnet man die Statistik

$$D := \sqrt{N} \cdot \sum_{i=1}^m (r_{xx,ts}(\tau) - r_{xx,ARMA}(\tau)) \text{ mit } m = \lceil \sqrt{N} \rceil. \quad (3.4)$$

Dabei gibt  $m$  also an, bis zu welchem Index die Werte der AKF zur Berechnung der Statistik berücksichtigt werden.  $D$  ist ein Maß dafür, wie stark die AKF einer zufällig simulierten Zeitreihe der theoretischen AKF des zugrundeliegenden Systems ähnelt. Sinnvoller bei der Betrachtung wäre ein quadratisches Summenargument, weil sich in obiger Form negative und positive Abweichungen auslöschen. Um aber den Ausführungen in [1] zu folgen, wird die Statistik wie in Formel 3.4 verwendet. Dabei geht mit wachsendem  $D$  i.A. eine stärkere Abweichung einher. Nach der Berechnung der Statistik  $D$  für jede Realisierung, sowie für die Ausgangszeitreihe, sortiert man diese  $M$  Werte der Größe nach. Ist der  $D$ -Wert der Ausgangsreihe einer der  $\alpha M$  größten Werte, wird die Nullhypothese abgelehnt, d.h. das Modell als nicht zutreffend bewertet. Üblicherweise wird  $M = 1000$  und  $\alpha = 0.05$  gewählt.

Für die Zeitreihe SIMULATION wird die Nullhypothese „Zeitreihe wird durch ARMA(3,2)-Modell hinreichend gut beschrieben“ durch die Monte-Carlo-Diagnose angenommen.

Die ungefilterte Reihe SUNSPOT wird in der Literatur häufig durch einen AR(2)-Prozess modelliert, siehe z.B. [3]. Der Monte-Carlo-Test deckt die Unzulänglichkeit dieses Modells auf und liefert das Ergebnis: Die Nullhypothese „Zeitreihe wird durch ARMA(2,1)-Modell hinreichend gut beschrieben“ wird durch Monte-Carlo-Diagnose abgelehnt.

### 3.4 Methode des Overfittings

Für die *Methode des Overfittings* werden Schätzungen von  $\text{ARMA}(p+1, q)$  und  $\text{ARMA}(p, q+1)$ -Systemen analysiert und in Relation zu dem gewonnenen  $\text{ARMA}(p, q)$ -System gesetzt. Dabei sollten Zweifel an der Gültigkeit des  $\text{ARMA}(p, q)$ -Systems aufkommen, wenn einer der folgenden drei Fälle vorliegt:

1. Parameter instabil, d.h. deutlich unterschiedliche Parameterschätzungen bei einer Modellerweiterung
2. Die neu hinzugekommenen Parameter sind signifikant unterschiedlich von 0
3. Die Residualvarianz sinkt deutlich bei einer Erweiterung des Modells

In der Praxis ist dieser Diagnoseschritt oft mit Vorsicht durchzuführen, weil keine eindeutigen Grenzen vorliegen. Dies wird am Beispiel der Zeitreihe SIMULATION deutlich:

	ARMA(3,2)	ARMA(4,2)	ARMA(3,3)
$a_1$	-1.4367	-1.7579	-1.4355
$a_2$	-1.1525	-1.5781	-1.1034
$a_3$	-0.5349	-0.9025	-0.5274
$c_1$	0.1452	0.4649	0.1395
$c_2$	-0.1836	-0.1740	-0.2344

**Tabelle 3.1.** Parameterwerte von extrahiertem ARMA(3,2)-Modell und erweiterten Modellen für die Zeitreihe SIMULATION

Neu hinzugekommene Parameter sind dabei  $a_4 = -0.1736$  bei dem ARMA(4, 2)-Prozess bzw.  $c_3 = 0.0744$  bei dem ARMA(3, 3)-Prozess. Obwohl alle anderen Diagnosemethoden die Gültigkeit des ARMA(3, 2)-Modells bestätigen, lässt die Methode des Overfittings beim erweiterten ARMA(4, 2)-Modell Zweifel aufkommen. Die Residualvarianz zeigt jedoch, dass ein ARMA(4, 2)-Modell keine wesentlich verbesserten Approximationseigenschaften aufweist:

- Residualvarianz des ARMA(3, 2)-Systems: 1.0336
- Residualvarianz des ARMA(4, 2)-Systems: 1.0299
- Residualvarianz des ARMA(3, 3)-Systems: 1.0315

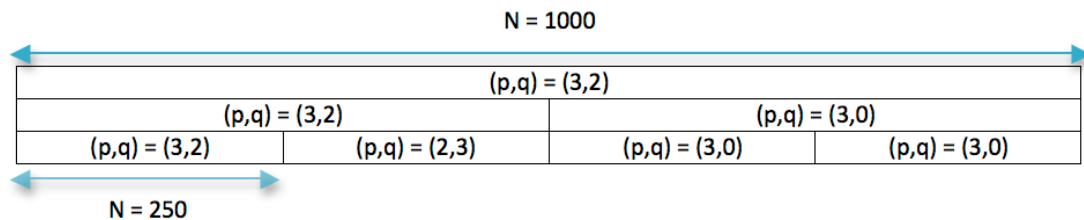
Trotzdem wäre an dieser Stelle die vollständige Diagnose eines ARMA(4,2)-Modells erstrebenswert.

## ARMA und ARIMA-Prozesse im Zustandsraum

### 4.1 Motivation der Zustandsraumdarstellung

Die Tatsache, dass die Gewinnung von ARMA-Modellen aus einer gegebenen Zeitreihe kein eindeutiger Vorgang ist, erschwert die Analyse ungemein. Dies wird deutlich, wenn man beispielsweise mehrere Zeitreihen analysieren will, für die derselbe stochastische Erzeugungsprozess zugrunde liegt.

Teilt man die Zeitreihe SIMULATION ( $N = 1000$ ) in der Mitte, so erhält man zwei Zeitreihen, welche jeweils die halbe Länge besitzen ( $N = 500$ ). Das gleiche Vorgehen kann dann auch mit einer Viertelung anstatt einer Zweiteilung durchgeführt werden ( $N = 250$ ). Für jede der einzelnen Zeitreihen wird nun eine Modellidentifikation und eine Modelldiagnose, wie in den Abschnitten 2 und 3 vorgestellt, durchgeführt. Die sich ergebenden Ordnungen für die einzelnen Zeitreihen sind in folgender Abbildung dargestellt.



Aufgrund der unterschiedlichen Ordnungen liegt es auf der Hand, dass die Parameter der ARMA-Modelle zueinander abweichende Werte annehmen. Obwohl also immer derselbe stochastische Erzeugungsprozess zugrunde liegt, ist hier eine Parameteranalyse nicht ohne weiteres durchführbar.

Wünschenswert wären folglich eine Klasse von Parametern, die keine Rekursionsbeziehung definieren, sondern vielmehr eine Aussage zu übergeordneten Prozesseigenschaften, wie beispielsweise dem Dynamikverhalten, zulassen. *Zustandsraummodelle* repräsentieren eine geeignete Struktur, um Aussagen zu übergeordneten Prozesseigenschaften treffen zu können.

**Definition 4.1** Die lineare diskrete Zustandsraumdarstellung ist die mathematische Repräsentation eines zeitdiskreten dynamischen Systems mit den Eingangsgrößen  $\mathbf{u}(k)$  und den Ausgangsgrößen  $\mathbf{y}(k)$ , welche durch eine Systemgleichung (Gleichung 4.1) und eine Ausgangsgleichung (Gleichung 4.2) verknüpft werden.

$$\mathbf{x}(k+1) = \Phi \cdot \mathbf{x}(k) + \mathbf{H} \cdot \mathbf{u}(k) \quad (4.1)$$

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C} \cdot \mathbf{x}(k) + \mathbf{D} \cdot \mathbf{u}(k) \quad (4.2)$$

## 4.2 Transformation von ARMA-Prozessen in den Zustandsraum

Es existieren viele unterschiedliche Vorschriften um ein ARMA-Modell in den Zustandsraum zu transformieren, von denen im Folgenden drei erläutert werden sollen. Um Grundgedanken und prinzipielles Vorgehen der Transformationen darzustellen, wird die erste Transformation detailliert erklärt und die weiteren Transformationen nur angegeben.

- **Transformation I:**

Betrachtet man die ARMA-Prozessgleichung

$$y(k) = a_1 y(k-1) + \dots + a_p y(k-p) + \epsilon(k) + c_1 \epsilon(k-1) + \dots + c_q \epsilon(k-q) \quad (4.3)$$

zum Zeitpunkt  $k+1$ , so ergibt sich

$$y(k+1) = a_1 y(k) + \dots + a_p y(k-p+1) + \epsilon(k+1) + c_1 \epsilon(k) + \dots + c_q \epsilon(k-q+1). \quad (4.4)$$

Wählt man nun den Zustandsvektor

$$\mathbf{x}(k) = \begin{bmatrix} y(k) \\ y(k-1) \\ \vdots \\ y(k-p+1) \\ \epsilon(k) \\ \epsilon(k-1) \\ \vdots \\ \epsilon(k-q+1) \end{bmatrix}, \quad (4.5)$$

so ergibt sich Gleichung 4.4 in Vektor-Matrix-Schreibweise zu

$$\begin{bmatrix} y(k+1) \\ y(k) \\ \vdots \\ y(k-p+2) \\ \epsilon(k+1) \\ \epsilon(k) \\ \vdots \\ \epsilon(k-q+2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_{p-1} & a_p & c_1 & c_2 & \dots & c_{q-1} & c_q \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(k) \\ y(k-1) \\ \vdots \\ y(k-p+1) \\ \epsilon(k) \\ \epsilon(k-1) \\ \vdots \\ \epsilon(k-q+1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \epsilon(k+1) \quad (4.6)$$



$$y(k) = [1 \ 0 \ \dots \ 0 \ \dots \ 0] \cdot \mathbf{x}(k). \quad (4.7)$$

Der Vorteil dieser Darstellung liegt in der transparenten Wahl der Zustandsgrößen und der daraus resultierenden übersichtlichen Struktur des Zustandsraummodells. Daher eignet sich diese Transformation vor allem zur didaktischen Veranschaulichung. Wie in Gleichung 4.6 zu sehen ist, hat diese Realisierung jedoch immer eine singuläre Systemmatrix  $\Phi$  zur Folge. Des weiteren ist die Darstellung im Vergleich zu den anderen Realisierungen wenig sparsam und findet daher in der Praxis kaum Verwendung.

- **Transformation II:**

Die folgende Transformation in den Zustandsraum ist [10] entnommen. Dabei wird durch einen verschachtelten Aufbau des Zustandsvektors eine sparsamere Realisierung als mit Transformation I erzielt. Zunächst wird eine neue Ordnungsvariable eingeführt:

$$n = \max\{p, q + 1\}. \quad (4.8)$$

Der Zustandsvektor wird gewählt zu:

$$\mathbf{x}(k) = \begin{bmatrix} y(k) \\ a_2 y(k-1) + \dots + a_r y(k-n+1) + c_1 \epsilon(k) + \dots + c_{n-1} \epsilon(k-n+2) \\ a_3 y(k-1) + \dots + a_r y(k-n+2) + c_2 \epsilon(k) + \dots + c_{n-1} \epsilon(k-n+3) \\ \vdots \\ a_n y(k-1) + c_{n-1} \epsilon(k) \end{bmatrix}. \quad (4.9)$$

Um die ursprüngliche Systemgestalt nicht zu verändern werden dann die Parameter  $a_i$  ( $i = p + 1, \dots, n$ ) und  $c_j$  ( $j = q + 1, \dots, n - 1$ ) zu 0 gesetzt. Hieraus ergibt sich für das Zustandsraummodell:

$$\mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ a_2 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ a_{n-1} & 0 & \dots & 0 & 1 \\ a_n & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{n-2} \\ c_{n-1} \end{bmatrix} \epsilon(k+1) \quad (4.10)$$

$$y(k) = [1 \ 0 \ \dots \ 0 \ 0] \cdot \mathbf{x}(k). \quad (4.11)$$

Der Vorteil dieser Darstellung liegt wie oben erwähnt in der sparsamen Ordnung des Zustandsraummodells. Im Vergleich zu Transformation I ergibt sich anstatt einer Ordnung  $n = p + q$  eine reduzierte Ordnung  $n = \max\{p, q + 1\}$ . Der Nachteil dieser Darstellung liegt in der Tatsache, dass außer bei der ersten Zustandsgröße keine anschauliche Interpretation der Zustandsgrößen mehr möglich ist.

- **Transformation III:**

Die dritte vorgestellte Transformation überführt den ARMA-Prozess direkt in die *Beobachtungsnormalform*, welche eine kanonische Normalform der Zustandsraumdarstellung repräsentiert. Auch hier wird eine neue Ordnungsvariable eingeführt, jedoch mit abweichender Berechnung im Vergleich zu Transformation II:

$$n = \max\{p, q\}. \quad (4.12)$$

Die Berechnungsvorschrift für das Zustandsraummodell lautet nach [11]:

$$\mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & a_n \\ 1 & 0 & \dots & 0 & a_{n-1} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & a_1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} a_n \\ c_{n-1} + a_{n-1} \\ c_{n-2} + a_{n-2} \\ \vdots \\ c_1 + a_1 \end{bmatrix} \epsilon(k) \quad (4.13)$$

$$y(k) = [0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1] \cdot \mathbf{x}(k) + \epsilon(k). \quad (4.14)$$

Diese Realisierung stellt die Systemstruktur besonders klar dar. Dies wird deutlich, wenn man sich das zugehörige Blockschaltbild in der *2. Standardform* (auch *2. Normalform* genannt) betrachtet [11]. Nichts desto trotz ist auch hier das Auftreten einer Singularität in der Systemmatrix  $\Phi$  möglich. Dies tritt z.B. für den Fall  $a_n = 0$  ein, d.h. wenn die AR-Ordnung  $p$  des Prozesses kleiner ist als die MA-Ordnung  $q$ .

An dieser Stelle soll bemerkt sein, dass darüber hinaus zahlreiche weitere Transformationsvorschriften mit unterschiedlichen Vor- und Nachteilen existieren. Im Folgenden wird aufgrund der kleinsten Systemordnung die Beobachtungsnormalform, wie in Transformation III vorgestellt, verwendet. Die so erhaltenen Zustandsraummodelle können auf eine Reihe von Eigenschaften wie beispielsweise Stabilität, Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit analysiert werden [11]. Die Lage der Eigenwerte der Systemmatrix  $\Phi$  in der  $z$ -Ebene gibt Aufschluss über das dynamische Verhalten des Systems.

### 4.3 Beispiel

Das ARMA(3,2)-Modell für die Zeitreihe SIMULATION hat nach Durchführung von Transformation III die äquivalente Zustandsraumdarstellung:

$$\mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -0.53 \\ 1 & 0 & -1.15 \\ 0 & 1 & -1.44 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} -0.53 \\ -1.34 \\ -1.29 \end{bmatrix} \epsilon(k) \quad (4.15)$$

$$y(k) = [0 \ 0 \ 1] \cdot \mathbf{x}(k) + \epsilon(k). \quad (4.16)$$

Eine Systemanalyse liefert die Erkenntnis, dass das Modell vollständig steuer- und beobachtbar und stabil ist. Die Eigenwerte der Systemmatrix liegen in der  $z$ -Ebene bei  $z_{1/2} = -0.31 \pm j0.74$  und  $z_3 = -0.83$ .

Unterteilt man, wie in Abschnitt 4.1 beschrieben, die Zeitreihe SIMULATION in zwei bzw. vier gleich große Abschnitte, so ergeben sich nach der Transformation der einzelnen ARMA-Modelle in den Zustandsraum (Transformation III) folgende Eigenwert-Konfigurationen:

N=1000			
$z_{1/2} = -0.31 \pm j0.74$ $z_3 = -0.83$			
$z_{1/2} = -0.30 \pm j0.73$ $z_3 = -0.88$		$z_{1/2} = -0.29 \pm j0.76$ $z_3 = -0.73$	
$z_{1/2} = -0.28 \pm j0.68$ $z_3 = -0.93$	$z_{1/2} = -0.23 \pm j0.80$ $z_3 = 0$	$z_{1/2} = -0.26 \pm j0.81$ $z_3 = -0.80$	$z_{1/2} = -0.32 \pm j0.71$ $z_3 = -0.64$
N=250			

**Bemerkungen:**

- Die Eigenwerte liefern eine zuverlässige Aussage über die dynamischen Vorgänge innerhalb einer Zeitreihe. Die leichten Unterschiede sind auf tatsächliche Abweichungen zwischen den jeweiligen Abschnitten zurückzuführen.
- Die zugrundeliegende ARMA-Modell-Ordnung besitzt großen Einfluss auf Anzahl und Gestalt der Eigenwerte. Die Anzahl ist durch die Ordnung  $n = \max\{p, q\}$  gegeben. Weil im vorliegenden Fall für alle Teilabschnitte  $n = 3$  gilt, besitzt jedes Teilmodell genau drei Eigenwerte. Dabei sind für  $p < q$  gerade  $q - p$  Eigenwerte 0, was zum Beispiel beim zweiten Abschnitt der viergeteilten Zeitreihe festzustellen ist.
- Durch Transformation der s-Ebene mit der konformen Abbildung  $z = e^{st_A}$  erhält man im z-Bereich den Einheitskreis als Stabilitätsgrenze. Eigenwerte die nahe am Einheitskreis liegen repräsentieren deshalb schwingungsfreudiges Verhalten der Ausgangsgröße  $y(k)$ .
- Anstatt der Eigenwerte der Systemmatrix könnten auch die Pole und Nullstellen der ARMA-Übertragungsfunktion analysiert werden.

**4.4 ARIMA-Prozesse im Zustandsraum**

Bisher wurde die Zustandsraumdarstellung von ARMA-Prozessen behandelt. Diese Prozessklasse vermag allerdings nur einen sehr speziellen Typ von Zeitreihen zu beschreiben - die Klasse stationärer Zeitreihen. Eine Erweiterung dieses Ansatzes bilden die *Autoregressive Integrated Moving Average Prozesse*, kurz *ARIMA-Prozesse*. Ausgangspunkt ist eine instationäre Zeitreihe, bei welcher durch  $d$ -malige Differenzenbildung (vergleiche Filter 1 in Tab. 2.1) hinreichend stationäres Verhalten erzielt werden kann. Für physiologische Zeitreihen ist eine einmalige Filterung, d.h.  $d = 1$ , teilweise ausreichend. Es sei darauf hingewiesen, dass die  $\Delta$ -Notation hier nicht nur eine Differenzenbildung, sondern eine Filterung im Allgemeinen beschreiben kann.

Die Idee der ARIMA-Prozesse ist nun, diese im Allgemeinen  $d$ -malige Differentiation durch eine  $d$ -malige Integration im Prozessmodell rückgängig zu machen und so eine Beschreibung für die ursprüngliche Zeitreihe zu erhalten. Die Zustandsraumdarstellung bietet hierbei eine optimale Grundlage zur Erweiterung eines ARMA-Modells zu einem ARIMA-Modell.

Gegeben sei eine instationäre Zeitreihe  $y(k)$  ( $k = 1, \dots, N$ ) die durch eine einmalige Differenzenbildung in die Zeitreihe  $\Delta y(k)$  überführt wird. Zeigt  $\Delta y(k)$  weiterhin instationären

Charakter, so wird diese Zeitreihe ein weiteres mal differenziert, was auf die Zeitreihe  $\Delta^2 y(k)$  führt. Dieses Vorgehen kann so lange fortgesetzt werden bis die Zeitreihe  $\Delta^d y(k)$  für hinreichend stationär beurteilt wird. Aufgrund der Tatsache, dass die Zeitreihe  $\Delta^d y(k)$  als stationär angenommen werden kann, besteht die Möglichkeit diese mittels eines ARMA-Prozesses zu modellieren, d.h.

$$\Delta^d y(k) = a_1 \Delta^d y(k-1) + \dots + a_p \Delta^d y(k-p) + \epsilon(k) + c_1 \epsilon(k-1) + \dots + c_q \epsilon(k-q). \quad (4.17)$$

Hierbei wird für den MA-Teil ein neuer, ungefilterter Rauschprozess angesetzt, weshalb hier keine  $\Delta$ -Notation vonnöten ist. Um aus dem Modell für  $\Delta^d y(k)$  ein Modell für  $\Delta^{d-1} y(k)$  zu erzeugen, muss man nur den vergangenen Wert von  $\Delta^{d-1} y(k)$ , sprich  $\Delta^{d-1} y(k-1)$  mit dem Wert der Änderung der Zufallsvariablen in Zeitschritt  $k$  addieren, sprich  $\Delta^d y(k)$ . Mathematisch ergibt sich folgender Zusammenhang:

$$\Delta^{d-1} y(k) = \Delta^{d-1} y(k-1) + \Delta^d y(k). \quad (4.18)$$

Führt man dieses Prinzip fort, so erhält man für den Prozess  $\Delta^{d-2} y(k)$  den Ausdruck

$$\Delta^{d-2} y(k) = \Delta^{d-2} y(k-1) + \Delta^{d-1} y(k) \quad (4.19)$$

und nach rekursivem Einsetzen von Formel 4.18 schließlich

$$\Delta^{d-2} y(k) = \Delta^{d-2} y(k-1) + \Delta^{d-1} y(k-1) + \Delta^d y(k). \quad (4.20)$$

Für eine  $d$ -malige Integration gilt nach rekursivem Einsetzen analog:

$$y(k) = \Delta^0 y(k) = y(k-1) + \Delta y(k-1) + \dots + \Delta^{d-1} y(k-1) + \Delta^d y(k). \quad (4.21)$$

Durch den rekursiven Aufbau lässt sich die Berechnung eines Wertes  $y(k)$  also vollständig auf Werte des ARMA-Prozesses  $\Delta^d y(k)$ , der nach Gleichung 4.17 verfügbar ist, zurückführen. Im Zustandsraum lässt sich dieses Prinzip sehr einfach über eine Erweiterung des Zustandsvektors umsetzen. Ausgangspunkt bildet die ARMA-Prozess-Beschreibung von  $\Delta^d y(k)$  nach Transformation III:

$$\mathbf{x}(k+1) = \Phi \cdot \mathbf{x}(k) + \mathbf{h} \cdot \epsilon(k) \quad (4.22)$$

$$\Delta^d y(k) = \mathbf{c}^T \cdot \mathbf{x}(k) + \epsilon(k) \quad (4.23)$$

Wird der Zustandsvektor um die Vergangenheitswerte erweitert, so ergibt sich als Umsetzung von Gleichung 4.21 für die Ausgangsgleichung:

$$y(k) = \underbrace{[\mathbf{c}^T \ 1 \ 1 \ \dots \ 1]}_{:= \mathbf{c}_e^T} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{x}(k) \\ \Delta^{d-1} y(k-1) \\ \Delta^{d-2} y(k-1) \\ \vdots \\ y(k-1) \end{bmatrix}}_{:= \mathbf{x}_e(k)} + \epsilon(k). \quad (4.24)$$

Die Zustandsgleichung muss ebenfalls entsprechend angepasst werden:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{x}(k+1) \\ \Delta^{d-1}y(k) \\ \Delta^{d-2}y(k) \\ \vdots \\ y(k) \end{bmatrix}}_{=\mathbf{x}_e(k+1)} = \underbrace{\begin{bmatrix} \Phi & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}}_{:=\Phi_e} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{x}(k) \\ \Delta^{d-1}y(k-1) \\ \Delta^{d-2}y(k-1) \\ \vdots \\ y(k-1) \end{bmatrix}}_{=\mathbf{x}_e(k)} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{h} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}}_{=\mathbf{h}_e} \cdot \epsilon(k). \quad (4.25)$$

Sowohl in Gleichung 4.24, als auch in Gleichung 4.25 entsteht  $y(k)$  durch eine Integration vergangener Zustandsvariablen. Dies kann zu der Vermutung führen, dass bei obiger Form ein mal zu viel integriert wird. Tatsächlich wird in der Zustandsgleichung (4.24) gerade  $(d-1)$ -mal aufintegriert. Die letzte, also  $d$ -te Integration erfolgt in Form der Ausgangsgleichung (4.24). Diese „eilt“ der Systemgleichung immer um einen Zeitschritt voraus, was bedeutet, dass der Zeitschritt  $k$  in der Systemgleichung dem Zeitschritt  $k-1$  in der Ausgangsgleichung entspricht. Eine bessere Formulierung der Ausgangsgleichung wäre also:

$$y(k+1) = \mathbf{c}_e^T \cdot \mathbf{x}_e(k+1) + \epsilon(k+1). \quad (4.26)$$

Weil diese Schreibweise für den Zustandsraum aber eher unüblich ist, wird im Folgenden davon abgesehen.

ARIMA-Modelle führen einen entscheidenden Nachteil mit sich, der diese Modellklasse zur Beschreibung physiologischer Zeitreihen stark eingrenzt. Simuliert man ein ARIMA-Modell mit  $d > 0$ , so werden die resultierenden Zeitreihen für einen großen Simulationshorizont ( $N \rightarrow \infty$ ) gegen eine unendliche Varianz ( $\sigma_y^2 \rightarrow \infty$ ) streben [12]. Dies soll im Folgenden für eine einfache Integration, d.h.  $d = 1$  illustriert werden.

Für einen Integrator gilt die Gleichung  $y_{\text{int}}(k) = y_{\text{int}}(k-1) + u(k)$ , wenn  $u(k)$  gerade die Eingangsvariable darstellt. Im  $z$ -Bereich führt dies auf die Form  $Y_{\text{int}}(z) = Y_{\text{int}}(z)z^{-1} + U(z)$  bzw.  $Y_{\text{int}}(z)(1 - z^{-1}) = U(z)$ . Daraus ergibt sich für einen einfachen Integrator die  $z$ -Übertragungsfunktion:

$$G_{\text{int}}(z) = \frac{Y_{\text{int}}(z)}{U(z)} = \frac{1}{1 - z^{-1}}. \quad (4.27)$$

Integriert man nun ein den Ausgang eines ARMA-Modells auf, so wird dies systemtheoretisch durch die Multiplikation der  $z$ -Übertragungsfunktion des ARMA-Modells und des Integrators bewerkstelligt:  $G_{\text{ARIMA}}(z) = G_{\text{ARMA}}(z) \cdot G_{\text{int}}(z)$ . Berechnet man nun die Varianz des Ausgangssignals  $y_{\text{ARIMA}}$  ergibt sich bei analogen Überlegungen wie in Gleichung 2.14 der Zusammenhang:

$$\sigma_y^2 = \int_{-1/2}^{1/2} \left| \frac{1}{1 - e^{-j2\pi f}} \right|^2 \left| \frac{(1 + c_1 e^{-j2\pi f} + \dots + c_q e^{-j2\pi f q})}{(1 - a_1 e^{-j2\pi f} - \dots - a_p e^{-j2\pi f p})} \right|^2 df \cdot \sigma_\epsilon^2, \quad (4.28)$$

wobei der Faktor vor den eigentlichen Koeffizienten auf den Integrator zurückzuführen ist. Schaut man sich diese Faktor genauer an erhält man einen anschaulicheren Ausdruck dafür:

$$\begin{aligned}
\left| \frac{1}{1 - e^{-j2\pi f}} \right|^2 &= \frac{1}{|1 - e^{-j2\pi f}|^2} \\
&= \frac{1}{|1 - (\cos(-2\pi f) + j \sin(-2\pi f))|^2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{(1 - \cos(2\pi f))^2 + (-\sin(2\pi f))^2}} \\
&= \frac{1}{1 - 2 \cos(2\pi f) + \cos^2(2\pi f) + \sin^2(2\pi f)} \\
&= \frac{1}{1 - 2 \cos(2\pi f) + \cos^2(2\pi f) + (1 - \cos^2(2\pi f))} \\
&= \frac{1}{2 - 2 \cos(2\pi f)}
\end{aligned} \tag{4.29}$$

Nach Gleichung 2.14 konvergiert das Integral über den Betragsterm der Koeffizienten und lässt sich daher mit einer Konstanten  $c \in \mathbb{R}$  nach oben hin abschätzen. Weil aber das Integral von  $-1/2$  bis  $+1/2$  über 4.29 nicht konvergiert, divergiert der Ausdruck 4.28 insgesamt. Deshalb gilt bei ARIMA Modellen für lange Simulationshorizonte ( $N \rightarrow \infty$ ):

$$\boxed{\sigma_{y,\text{ARIMA}}^2 \rightarrow \infty} \tag{4.30}$$

#### Bemerkungen:

- Das Integral in Gleichung 4.28 würde konvergieren, wenn das zugehörige ARMA-Modell eine Nullstelle in  $z = 1$  besäße. Diese würde dann gerade die Polstelle des Integrators bei  $z = 1$  kompensieren, damit jedoch gleichzeitig das integrierende Verhalten eliminieren.
- Das Ergebnis in 4.30 ist sinnvoll, denn die Varianz (d.h. im Falle eines mittelwertfreien Signals auch die Leistung) einer Zeitreihe, welche durch die Simulation eines ARMA-Modells entstanden ist, ist endlich. Integriert man nun im Zuge des ARIMA-Modells ein Signal mit endlicher Leistung auf, so erhält man i.A. ein Signal mit einer zeitlich steigenden Leistung. Im Falle von mittelwertfreien ARMA-Signalen, bleibt die Eigenschaft der Mittelwertfreiheit auch für die ARIMA-Signale erhalten.
- Aufgrund einer mit der Zeit steigenden Varianz sind ARIMA-Modelle nur bedingt zur Modellierung physiologischer Zeitreihen geeignet.
- Die Überführung eines ARMA- in ein ARIMA-Modell enthält bis auf die Aussage über die Anzahl der Integrationen  $d$  keine weitere Information über die Dynamik der zugrundeliegenden Zeitreihe. Daher sind ARIMA-Modelle für diagnostische Fragestellungen von eher geringem Interesse.
- Die Zustandsraumdarstellung ermöglicht es, auf sehr einfachem Weg beliebige Filteroperationen umzukehren (siehe Kap. 6).
- ARIMA-Modelle sind in der Lage kurze Zeitreihenabschnitte ( $N < 100$ ) sinnvoll zu simulieren.

## Schätzung des Spektrums mit ARMA-Modellen

### 5.1 Motivation und Vorgehen

Eine weitere Anwendung von ARMA-Modellen im Zusammenhang mit Zeitreihen ist die Schätzung des Frequenzspektrums einer Zeitreihe mittels ARMA-Modellen. Aufgrund der Zeitvarianz vieler physiologischer Zeitreihen, ist die Berechnung des Spektrums mittels der diskreten Fouriertransformation streng genommen nicht zulässig und führt zu starken Unregelmäßigkeiten des Spektrums. Um das Problem zu beheben bedient man sich sehr kurzen Zeitreihenabschnitten (z.B.  $N = 128$ ), um dort möglichst zeitinvariantes Verhalten zu gewährleisten. Die Auflösung der Fourier-Transformierten hängt jedoch stark von der Anzahl der hinzugezogenen Punkte ab und nimmt mit einer sinkenden Anzahl an Einträgen ab. Dieser Konflikt wird durch die Schätzung des Spektrums mittels ARMA-Modellen behoben und führt zu einer Methodik, die erlaubt Spektren mit fast beliebiger Auflösung zu schätzen.

Bei einer gegebenen Zeitreihe, die i.A. nicht äquidistant abgetastet ist, müssen die Abtastpunkte zunächst gleichmäßig interpoliert werden. Dabei sollte die vorhandene Information möglichst unverfälscht wiedergegeben werden und gleichzeitig kein Overfitting entstehen. In [13] wird die Abtastfrequenz  $f_A = 4\text{Hz}$  vorgeschlagen, welche auch für unsere Zwecke sinnvoll erscheint. Die Abtastpunkte werden daher mittels einer kubischen Spline-Interpolation äquidistant auf 4 Hertz interpoliert.

Auf Basis der interpolierten Zeitreihe wird nun ein ARMA-Modell erzeugt. In der Literatur wird für Herzraten-Zeitreihen u.a. ein AR(16)-Modell vorgeschlagen [13]. Eigene Untersuchungen legten jedoch offen, dass eine fest vorgegebene Modellordnung oft die Gefahr eines Informationsverlustes in sich birgt. So kann ein AR(16)-Modell bei einer Abtastfrequenz von 4 Hertz maximal Frequenzanteile mit einer Perdiendendauer von  $T = \frac{16}{4\text{Hz}} = 4\text{s}$  wiedergeben, was niederfrequente physiologische Prozesse von der Beurteilung ausschließt.

Um das Spektrum abzuschätzen bedient man sich dem Leistungsdichtespektrum eines ARMA-Modells, das mit den in Kapitel 2 vorgestellten Methoden aus der interpolierten Zeitreihe identifiziert wird. Lediglich die Ordnungen werden vom Benutzer vorgegeben und im Zuge eines iterativen Prozesses von Hand optimiert. Das Leistungsdichtespektrum des identifizierten ARMA-Prozesses berechnet sich, wie in Gleichung (2.12) angegeben, zu

$$S_{yy}(f) = |G_z(f)|^2 \cdot \sigma_\epsilon^2. \quad (5.1)$$

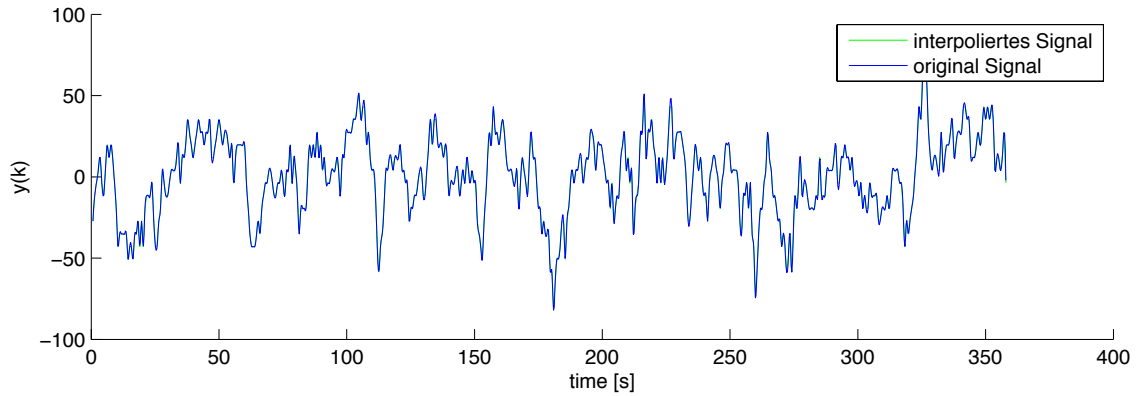
Durch den Zusammenhang

$$G_z(f) = G_z(z = e^{j2\pi f}) = \frac{(1 + c_1 e^{-j2\pi f} + \dots + c_q e^{-j2\pi f q})}{(1 - a_1 e^{-j2\pi f} - \dots - a_p e^{-j2\pi f p})}. \quad (5.2)$$

lässt sich das Leistungsdichtespektrum dann für beliebige Frequenzen auswerten. Eine Alternative zu diesem Vorgehen stellt die Welch-Methode für nicht-äquidistant abgetastete Signale dar.

## 5.2 Beispiel

In diesem Kapitel soll auf Basis einer RR-Intervall Zeitreihe mit  $N = 512$  Einträgen die Leistungsfähigkeit des Verfahrens veranschaulicht werden. Das original Signal und das mit  $f_A = 4\text{Hz}$  interpolierte Signal sind in Abbildung 5.1 ohne Berücksichtigung des Mittelwertes dargestellt.



**Abb. 5.1.** Original Signal und interpoliertes Signal der RR-Intervall Zeitreihe. Die Stützstellen des ursprünglichen Signals werden adäquat wiedergegeben und es treten keine Overfitting-Effekte auf, was für eine geeignete Wahl der Abtastfrequenz spricht.

Das Betragsquadrat der Fast-Fourier-Transformierten des interpolierten Signals ist in Abbildung 5.2 dargestellt. Es treten viele nicht erklärbare Peaks auf, die eine physiologische Interpretation der Vorgänge nahezu unmöglich machen. Im Gegensatz hierzu weist das Leistungsdichtespektrum, welches über ein AR(16)-Modell geschätzt wurde, einen undefinierten und stark geglätteten Verlauf auf (Abb. 5.3), was auf eine zu geringe Modellordnung zurückzuführen ist.

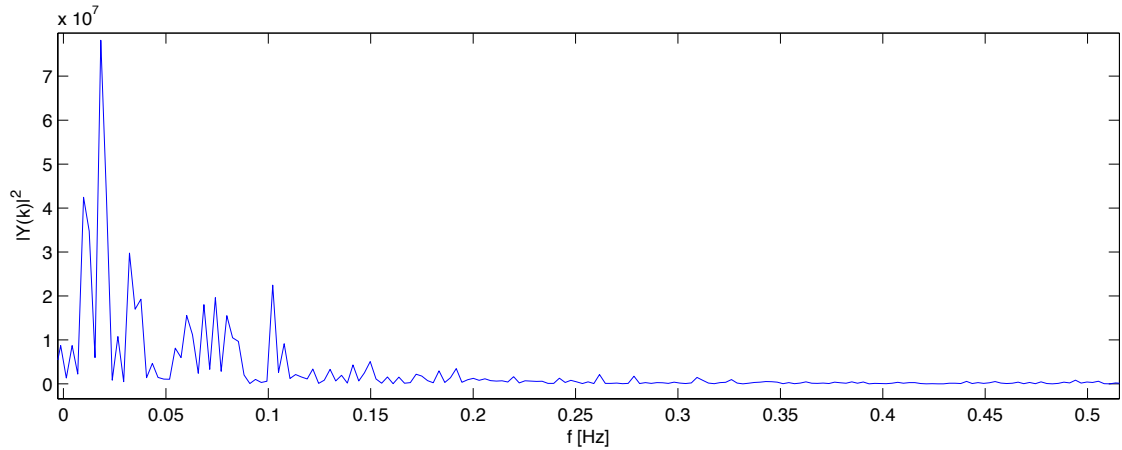
Abhilfe schafft eine Erhöhung der Modellordnung, z.B.  $(p, q) = (100, 30)$  (siehe Abb. 5.4), was einen definierten Verlauf des Leistungsdichtespektrums zur Folge hat. Hierbei korrespondieren die Erhöhungen im Spektrum mit physiologischen Mechanismen zur Regulation der Herzrate. Der Einfluss der Thermoregulation wird bei  $f = 0.03\text{Hz}$  offenbar, die Aktivität der Barorezeptoren bei  $f = 0.1\text{Hz}$  und die respiratorische Sinusarrhythmie bei Frequenzen  $f > 0.18\text{Hz}$  [13]. Zum Vergleich wurde in Abbildung 5.4 außerdem das Spektrum nach der Methode von Welch dargestellt. Wie man sieht gleichen sich die Verläufe vorallem hinsichtlich der Position der Peaks.

Um die Korrektheit des Verfahrens zu überprüfen wurde die Leistung der interpolierten Zeitreihe, welche sich über die Formel

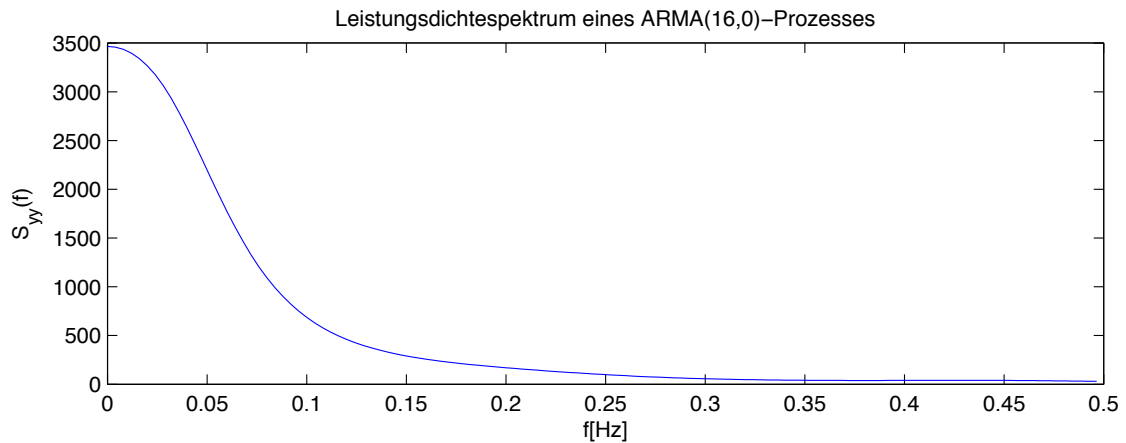


$$P = \frac{1}{512} \sum_{j=1}^{512} |y_{4Hz}(k)|^2 \quad (5.3)$$

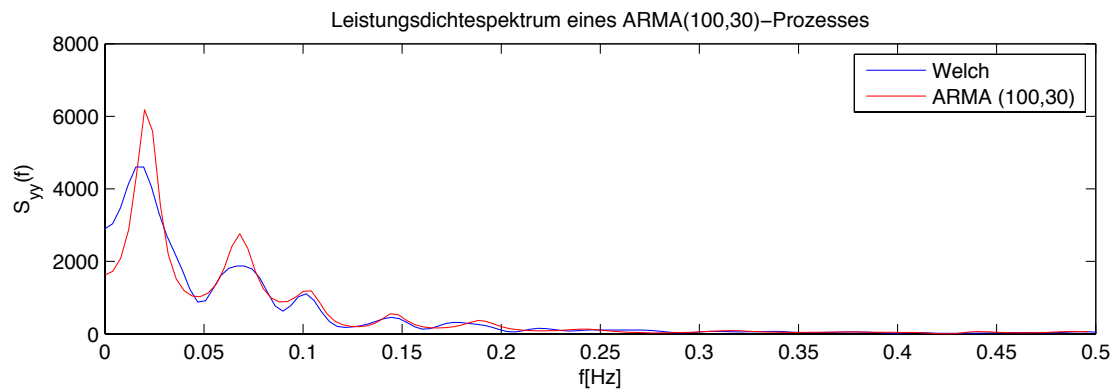
berechnet und mit der Leistung verglichen, die sich bei der Integration des ARMA- Leistungsdichtespektrums über alle Frequenzen des Nyquistbandes  $[-\frac{f_A}{2}, \frac{f_A}{2}]$  ergibt. Dabei wurde lediglich eine Abweichung von 0.047% festgestellt, was für die Richtigkeit des vorgestellten Verfahrens spricht.



**Abb. 5.2.** Betragsquadrat der Fourier-Transformierten des interpolierten Signals. Der Verlauf macht eine physiologische Interpretation nahezu unmöglich.



**Abb. 5.3.** Leistungsdichtespektrum eines AR(16)-Prozesses. Der Verlauf ist stark geglättet und ermöglicht deshalb keine Interpretation bezüglich verschiedener physiologischer Vorgänge.

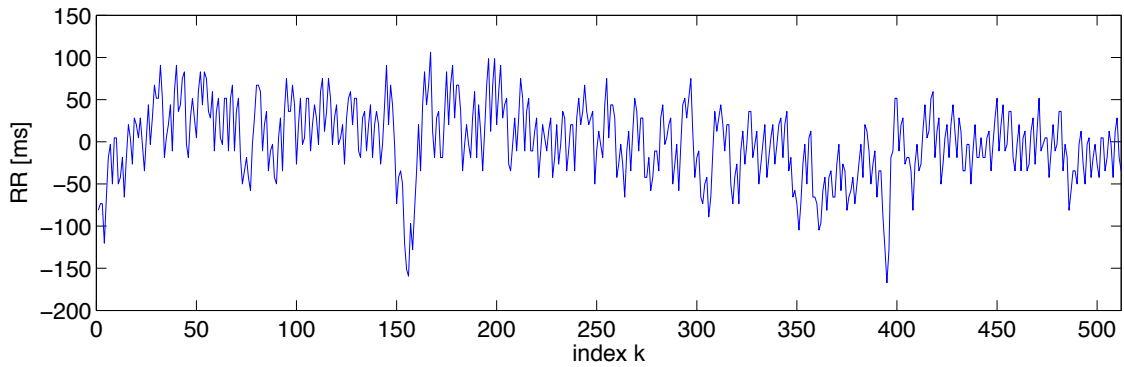


**Abb. 5.4.** Leistungsdichtespektrum des identifizierten ARMA(100,30)-Prozesses (rot) und Schätzung über die Welch Methode (blau). Beide Methoden liefern ähnliche Verläufe mit Peaks bei  $f = 0.03\text{Hz}$  (Thermoregulation),  $f = 0.1\text{Hz}$  (Barorezeptoren) und  $f > 0.18\text{Hz}$  (respiratorische Sinusarrhythmie).

## Beispielhafte Modellierung einer RR-Intervall Zeitreihe

In diesem Kapitel sollen die vorgestellten Methoden anhand eines Beispiels veranschaulicht werden. Ausgangspunkt ist eine Zeitreihe mit 512 Einträgen, welche den Verlauf des RR-Intervalls während einer EKG Aufnahme widerspiegelt. Die Daten entsprechen einem ca. 8-minütigen Abschnitt von *Proband01* aus dem RR-Intervall *Yoga*-Datensatz der Online-Datenbank *physionet.org* und sind für jedermann frei verfügbar [14].

Der Plot der Zeitreihe ist in Abbildung 6.1 dargestellt, wobei der Mittelwert bereits entzogen wurde. Wie zu erkennen ist, liegt das Signal ohne sichtbare Störungen vor. Des Weiteren sind keine Auswirkungen von Extrasystolen, oder anderen physiologischen Irregularitäten zu erkennen. In den Indexbereichen um  $k = 150$  und  $k = 390$  zeigt die RR-Intervall Zeitreihe deutliche Einbrüche, was Instationarität vermuten lässt.



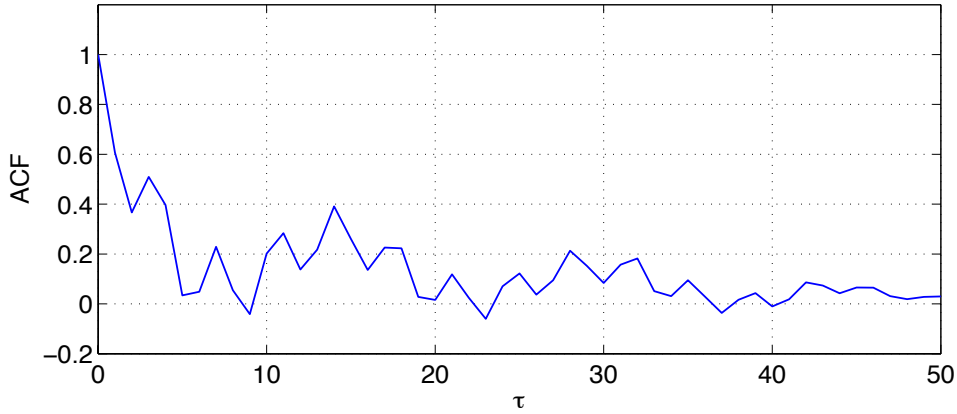
**Abb. 6.1.** RR-Intervall Zeitreihe mit 512 Einträgen, welche zu acht Minuten einer EKG-Aufnahme korrespondieren. Die Einbrüche im Signal in den Indexbereichen um  $k = 150$  und  $k = 390$  legen instationäres Verhalten nahe.

Eine Analyse der AKF, die in Abb. 6.2 dargestellt ist, untermauert diese Vermutung mit dem Auftreten eines langsamen Abfalls der Funktion (z.B.  $r_{yy}(\tau = 28) = 0.2$ ). Die Zeitreihe wird daher als nicht-stationär beurteilt und nach Tabelle 2.1 mit einem Differenzenfilter der Form

$$\Delta RR(k) = RR(k + 1) - RR(k) \quad (6.1)$$

gefiltert.

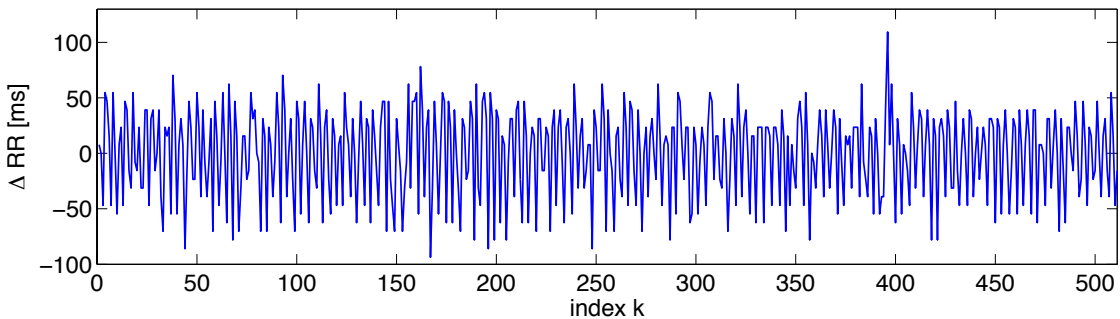
Die gefilterte Zeitreihe, die sichtlich verbesserte Stationaritätseigenschaften aufweist, ist in Abb. 6.3 dargestellt. Eine Analyse der AKF dieser gefilterten Zeitreihe (Abb. 6.4)



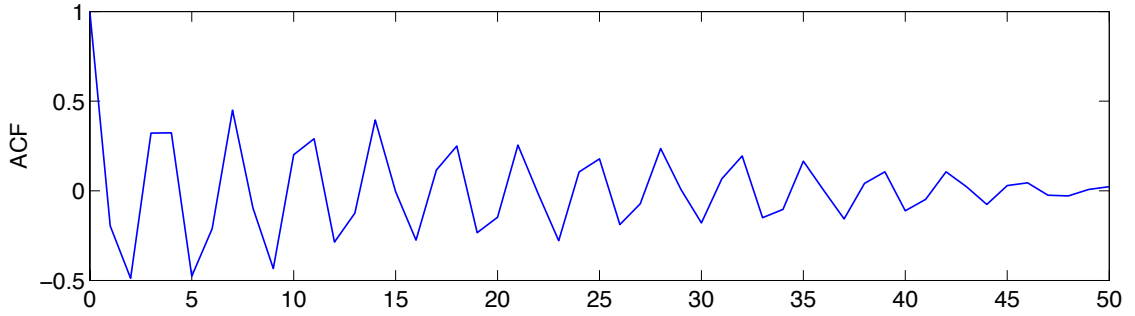
**Abb. 6.2.** AKF der RR-Intervall Zeitreihe. Ein langsamer Abfall der AKF mit Werten von 0.2 bei  $\tau = 28$  legt instationäres Verhalten offen.

lässt jedoch ein physiologisch erstaunliches Verhalten zu Tage treten: eine *Zyklizität von  $\Delta RR$ -Intervallen*. Dabei besitzt die AKF ein periodisches Verhalten, mit Peaks in den Abständen von  $\tau = 3$  oder  $\tau = 4$ , was mit einem zyklischen Verhalten der  $\Delta RR$ -Intervalle mit eben dieser Periodendauer von drei bis vier Herzzyklen korrespondiert. Dieses Phänomen wurde bei weiteren Probanden des *physionet.org*-Yoga-Datensatzes beobachtet, weshalb zwei mögliche Erklärungsansätze entwickelt wurden:

- Das zyklische Verhalten ist auf den Einfluss der Atmung zurückzuführen. Ein nicht-repräsentativer Laborversuch ergab, dass ein junger Mann während einer Minute in sitzender Position 63 Herzzyklen und 16 Atemzyklen aufweist. Dies entspräche einem Verhältnis von ca. 4 Herzschlägen pro Atemzyklus, was mit der obigen Periodendauer sehr gut in Einklang zu bringen ist.
- Interpretiert man die körpereigene Regelung der Herzrate als geschlossenen physiologischen Regelkreis, so existiert eine Zeitverzögerung bzw. Totzeit im Rückführzweig des Regelkreises. Diese ist auf unterschiedliche Orte von körpereigener Sensorik (z.B. Barorezeptor) und Aktorik (z.B. Sinusknoten) zurückzuführen. Eine solche Totzeit im Rückführzweig eines Regelkreises führt häufig zu Schwingungen im Verlauf der Regelgröße.



**Abb. 6.3.**  $\Delta RR$ -Intervall Zeitreihe, die sichtbar verbesserte Stationaritätseigenschaften aufweist. Erst die Analyse der AKF dieser Zeitreihe legt ein zyklisches Verhalten der  $\Delta RR$ -Intervalle mit einer Periode von 3 bis 4 Herzzyklen offen.



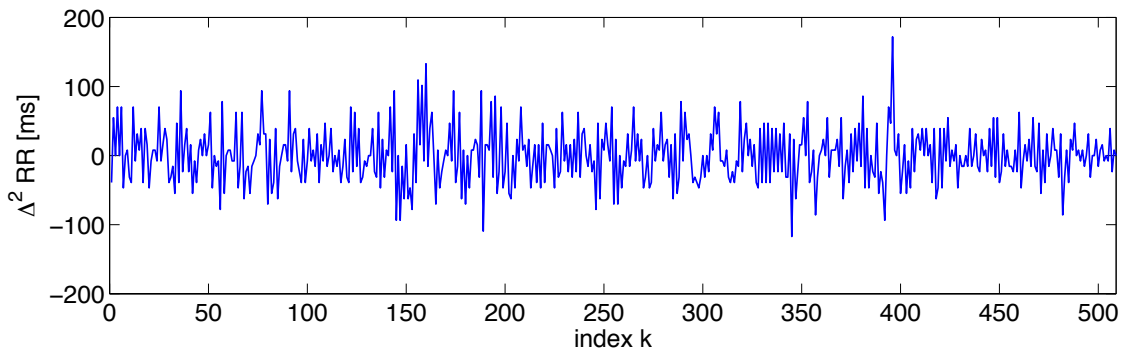
**Abb. 6.4.** AKF der  $\Delta\text{RR}$ -Intervall Zeitreihe mit periodischem Verhalten. Dieser Verlauf lässt auf ein zyklisches Verhalten der  $\Delta\text{RR}$ -Intervalle schließen.

Obige Ausführungen ändern nichts an der Tatsache, dass die gefilterte Zeitreihe im Sinne einer Zeitreihenanalyse immernoch instationär ist. Deshalb bedarf es einer weiteren Filteroperation, welche nun auf Basis von Tabelle 2.1 wie folgt gewählt wurde:

$$\Delta^2\text{RR}(k) = \Delta\text{RR}(k+2) - 2\cos(2\pi f)\Delta\text{RR}(k+1) + \Delta\text{RR}(k). \quad (6.2)$$

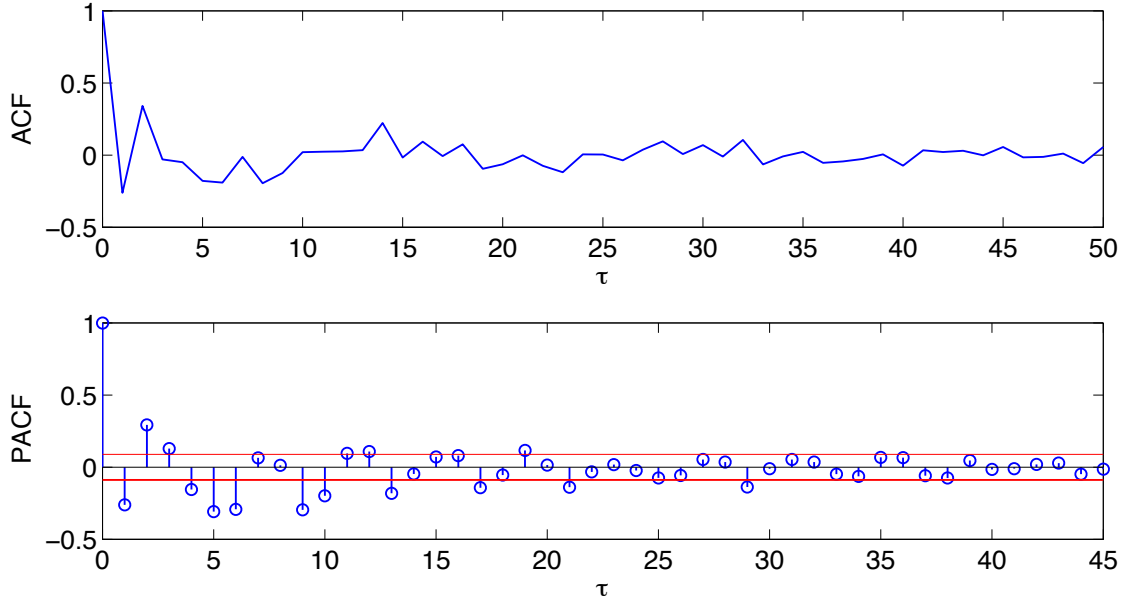
Dabei wurde als Filter-Frequenz  $f = \frac{1}{4}$  benutzt. Die Bezeichnung  $\Delta^2$  gibt hier den Hinweis darauf, dass es sich um eine Zeitreihe handelt, die durch zwei Filteroperationen entstanden ist. Insbesondere handelt es sich bei der  $\Delta^2\text{RR}$ -Intervall Zeitreihe nicht um die Differenzzeitreihe konsekutiver  $\Delta\text{RR}$ -Intervalle.

Die entstehende  $\Delta^2\text{RR}$ -Intervall Zeitreihe ist in Abb. 6.5 dargestellt. Die visuelle Analyse des Plots lässt ein stationäres Verhalten vermuten. Betrachtet man die AKF der Zeitreihe (Abb. 6.6), so bestätigt sich dieser Eindruck durch einen schnellen Abfall zu betragskleinen Werten. Folglich wird die Zeitreihe als stationär beurteilt und kann nun mittels eines ARMA-Modells beschrieben werden. Hierbei werden auf Basis der AKF und der PAKF zunächst  $(p_{\max}, q_{\max}) = (14, 10)$  als maximale Ordnungen angesetzt. Berechnet man das AIC mit allen Kombinationen bis zu diesen Werten, so erhält man das bei Minimum des AIC bei der Ordnungskonfiguration  $(p_{\text{opt}}, q_{\text{opt}}) = (4, 8)$ .



**Abb. 6.5.**  $\Delta^2\text{RR}$ -Intervall Zeitreihe, die nun sichtbar stationäres Verhalten zeigt.

Im Folgenden werden die Parameter des (4,8)-Modells geschätzt. Eine Modelldiagnose mit den in Kapitel 3 beschriebenen Methoden lässt keine Zweifel an der Gültigkeit des ARMA(4,8)-Modells aufkeimen. Der resultierende ARMA-Prozess ist in Gleichung 6.3 dargestellt. Über die Varianz der  $\Delta^2\text{RR}$ -Intervall Zeitreihe ( $\sigma_{\Delta^2\text{RR}}^2 = 1540.5(\text{ms})^2$ ) und



**Abb. 6.6.** AKF und PAKF der  $\Delta^2\text{RR}$ -Intervall Zeitreihe. Das schnelle Absinken der AKF legt offen, dass die Zeitreihe nun stationär ist und mittels eines ARMA-Modells beschrieben werden kann. Die maximalen Ordnungen, bis zu denen das AIC berechnet wird, wurden auf Basis der AKF zu  $q_{\max} = 14$  und auf Basis der PAKF zu  $p_{\max} = 10$  festgelegt.

aufösen der Beziehung in Gleichung 2.14 nach  $\sigma_\epsilon^2$  erhält man die Rauschvarianz  $\sigma_\epsilon^2 = 748.1(\text{ms})^2$ . Der resultierende ARMA-Prozess lautet:

$$\begin{aligned} \Delta^2\text{RR}(k) = & 1.04 \cdot \Delta^2\text{RR}(k-1) - 0.96 \cdot \Delta^2\text{RR}(k-2) + 1.09 \cdot \Delta^2\text{RR}(k-3) \\ & - 0.59 \cdot \Delta^2\text{RR}(k-4) + \epsilon(k) - 1.41 \cdot \epsilon(k-1) + 2.07 \cdot \epsilon(k-2) \\ & - 2.40 \cdot \epsilon(k-3) + 1.64 \cdot \epsilon(k-4) - 1.20 \cdot \epsilon(k-5) \\ & + 0.56 \cdot \epsilon(k-6) - 0.19 \cdot \epsilon(k-7) - 0.01 \cdot \epsilon(k-8). \end{aligned} \quad (6.3)$$

Bevor Gleichung 6.3 nun in den Zustandsraum überführt wird, sollen die beiden Filteroperationen, die im Laufe der Analyse angewendet wurden, rückgängig gemacht werden. Ausgangspunkt ist hierbei die ARMA-Prozessgleichung für die  $\Delta^2\text{RR}$ -Intervall Zeitreihe in Summenschreibweise:

$$\Delta^2\text{RR}(k) = \sum_{m=1}^4 a_m \Delta^2\text{RR}(k-m) + \epsilon(k) + \sum_{n=1}^8 c_n \epsilon(k-n). \quad (6.4)$$

Die Filtergleichung der zweiten Filteroperation lässt sich nun so umstellen, dass aus vergangenen Werten und dem ARMA-Prozess eine Beschreibung für die ursprüngliche  $\Delta\text{RR}$ -Intervall Zeitreihe entsteht:

$$\begin{aligned} \Delta^2\text{RR}(k) &= \Delta\text{RR}(k+2) - 2\cos(2\pi f)\Delta\text{RR}(k+1) + \Delta\text{RR}(k) \\ \Leftrightarrow \Delta\text{RR}(k+2) &= \Delta^2\text{RR}(k) + 2\cos(2\pi f)\Delta\text{RR}(k+1) - \Delta\text{RR}(k). \end{aligned} \quad (6.5)$$

Mit dem gleichen Prinzip kann man auch die erste Filteroperation rückgängig machen:

$$\begin{aligned}
\Delta\text{RR}(k) &= \text{RR}(k+1) - \text{RR}(k) \\
\Leftrightarrow \text{RR}(k+1) &= \text{RR}(k) + \Delta\text{RR}(k) \\
\Leftrightarrow \text{RR}(k+3) &= \text{RR}(k+2) + \Delta\text{RR}(k+2)
\end{aligned} \tag{6.6}$$

Setzt man nun den letzten Ausdruck von Gleichung 6.5 in den letzten Ausdruck von Gleichung 6.6 ein, so erhält man auf Basis des ARMA-Modells eine Beschreibung für die ursprüngliche RR-Intervall Zeitreihe:

$$\Rightarrow \text{RR}(k+3) = \text{RR}(k+2) + 2\cos(2\pi f)\Delta\text{RR}(k+1) - \Delta\text{RR}(k) + \Delta^2\text{RR}(k), \tag{6.7}$$

wobei  $\Delta^2\text{RR}(k)$  gerade durch Gleichung 6.4 treffend beschrieben wird. Soll also nun ein Modell für die ursprüngliche RR-Intervall Zeitreihe im Zustandsraum gebildet werden, so muss man drei Zustände hinzufügen, um die Filteroperationen umzukehren:  $\text{RR}(k+2)$ ,  $\Delta\text{RR}(k+1)$  und  $\Delta\text{RR}(k)$ . Das resultierende Zustandsraummodell, welches das ARMA-Modell nach Transformation III (d.h. den Gleichungen 4.13 und 4.14) in den Zustandsraum transformiert und die Filterung rückgängig macht, lautet dann:

$$\mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.75 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0.36 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0.24 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -0.03 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0.43 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2\cos(2\pi f) & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2\cos(2\pi f) & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} -0.20 \\ 0.66 \\ -0.67 \\ -0.06 \\ -0.21 \\ -0.47 \\ 0.83 \\ -0.36 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \epsilon(k) \tag{6.8}$$

$$\text{RR}(k) = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1] \cdot \mathbf{x}(k) + \epsilon(k). \tag{6.9}$$

Dabei sind die letzten drei Zustände für die Revision der Filteroperationen zuständig. Für den Rauschprozess gilt weiterhin wie oben erläutert  $\epsilon(k) \sim \mathcal{N}(0, 748.1(\text{ms})^2)$ .

### Fazit:

Das vorgestellte Verfahren ist transparent und für eine sehr weite Klasse von Zeitreihen einsetzbar. Neben der Miteinbeziehung von dynamischer Information (z.B. Eigenwerte der Matrix in Gleichung 6.8), geht auch phänomenologisches Wissen in das resultierende Modell ein. Das zyklische Verhalten der  $\Delta\text{RR}$ -Intervalle stellt hierfür ein gutes Beispiel dar. Die entwickelten Modelle müssen vor ihrem Einsatz in weiterführenden Zusammenhängen unbedingt auf Stabilität überprüft werden (z.B. Lage der Eigenwerte). Sind diese stabil, so liefern sie robuste Ergebnisse für z.B. Ein-Schritt-Prädiktoren. So könnten solche Modelle auch über die reine Analyse hinaus zur Korrektur von Zeitreihen eingesetzt werden, die in gewissen Abschnitten fehlerhafte Werte annehmen (z.B. RR-Intervalle eines 24h-Holter-EKGs).





---

## Literaturverzeichnis

1. R. Schlittgen & B. Streitberg, *Zeitreihenanalyse*. Oldenbourg München, 1991.
2. T. Oesterlein, T. Baas, H. Malberg, & O. Dössel, "Multivariate AR model parameter estimation on time series extracted from the ECG of myocarditis patients," in *Biomedizinische Technik / Biomedical Engineering (Proceedings BMT2011)*, vol. 56, 2011.
3. G. Box, "Box and Jenkins: Time Series Analysis, Forecasting and Control," *A Very British Affair* ~ autofilled ~, p. 161, 1994.
4. T. W. Anderson, *The statistical analysis of time series*, vol. 19. Wiley, 2011.
5. J. D. Hamilton, *Time series analysis*, vol. 2. Cambridge University Press, 1994.
6. B. Wilfling, "Folien zur Vorlesung Zeitreihenanalyse." Vorlesungsskript, 2012.
7. H. Akaike, "Information theory and an extension of the maximum likelihood principle," in *Selected Papers of Hirotugu Akaike*, pp. 199–213, Springer, 1998.
8. U. Kiencke & R. Eger, *Messtechnik*. Springer DE, 2007.
9. M. Kluwe, "Stochastische Regelungssysteme; Vorlesungsskript," 2013.
10. J. Durbin & S. J. Koopman, *Time series analysis by state space methods*, vol. 38. Oxford University Press, 2012.
11. M. Kluwe, "Regelung linearer Mehrgrößensysteme; Vorlesungsskript," 2012.
12. U. Hassler, "Zeitabhängige Volatilität und instationäre Zeitreihen: Zum Nobelpreis an Robert F. Engle und Clive WJ Granger," *Wirtschaftsdienst*, vol. 83, no. 12, pp. 811–816, 2003.
13. A. Boardman, F. S. Schlindwein, A. P. Rocha, & A. Leite, "A study on the optimum order of autoregressive models for heart rate variability," *Physiological measurement*, vol. 23, no. 2, p. 325, 2002.
14. C.-K. Peng, J. E. Mietus, Y. Liu, G. Khalsa, P. S. Douglas, H. Benson, & A. L. Goldberger, "Exaggerated heart rate oscillations during two meditation techniques," *International journal of cardiology*, vol. 70, no. 2, pp. 101–107, 1999.

