

**Dies ist der Titel der Arbeit,
der sich z. B. auch über mehrere
Zeilen verteilen kann.**

Diplomarbeit

vorgelegt von

cand. el. Student



INSTITUT FÜR BIOMEDIZINISCHE TECHNIK
PROF. DR. RER. NAT. OLAF DÖSSEL
KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE
2015

Betreuer: der Betreuer

Eidesstattliche Erklärung

Hiermit erkläre ich an Eides statt, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig und ohne unzulässige fremde Hilfsmittel angefertigt habe. Wörtlich oder inhaltlich übernommene Stellen sind als solche kenntlich gemacht und die verwendeten Literaturquellen im Literaturverzeichnis vollständig angegeben. Die „Regeln zur Sicherung guter wissenschaftlicher Praxis im Karlsruher Institut für Technologie (KIT)“ in ihrer gültigen Form wurden beachtet.

Karlsruhe, den 13.1.2015

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Motivation und Aufgabenstellung	1
1.2	Schwerpunkte der Arbeit	1
2	Mathematische Grundlagen	3
3	Referenzen	5
4	Bilder	7
5	Tabellen	9
6	Formeln	13
6.1	FFT-Algorithmus	13
7	Zusammenfassung	17
8	Ausblick	19
A	Anhang1	21

Einleitung

Bevor du mit dem Schreiben anfängst, lies dir bitte die Anleitung und die Hinweise durch, wie man eine wissenschaftliche Ausarbeitung am IBT verfasst. Du findest Folien und ein Booklet dazu unter https://intern.ibt.uni-karlsruhe.de/wiki/LaTeX_template_for_diploma_thesis_and_student_research_project.

1.1 Motivation und Aufgabenstellung

1.2 Schwerpunkte der Arbeit

Referenzen

Wie mache ich Referenzen auf Kapitel, Bilder... ??

In Kapitel 2 ...

In der Abbildung 4.1 ...

In der Gleichung 6.1 ...

In der Datei rebase.bib gibt es schon fertige Literaturzitate, die aus unserem Bibliothekssystem rebase exportiert werden (nähere Infos im Wiki). Hier ein Beispiel [?].

Auf Bücher sollte man mit Kapitel [? , Chap. 5] oder Seitenzahlen verweisen [? , pp. 239–240]. Paper kann man einfach so referenzieren [?].

Eigene Literaturhinweise können in der Datei literatur.bib hinterlegt werden. Als Vorlage für Einträge nimmt man am Besten die rebase.bib.

Bilder

Wie binde ich eigentlich ein Bild ein ?

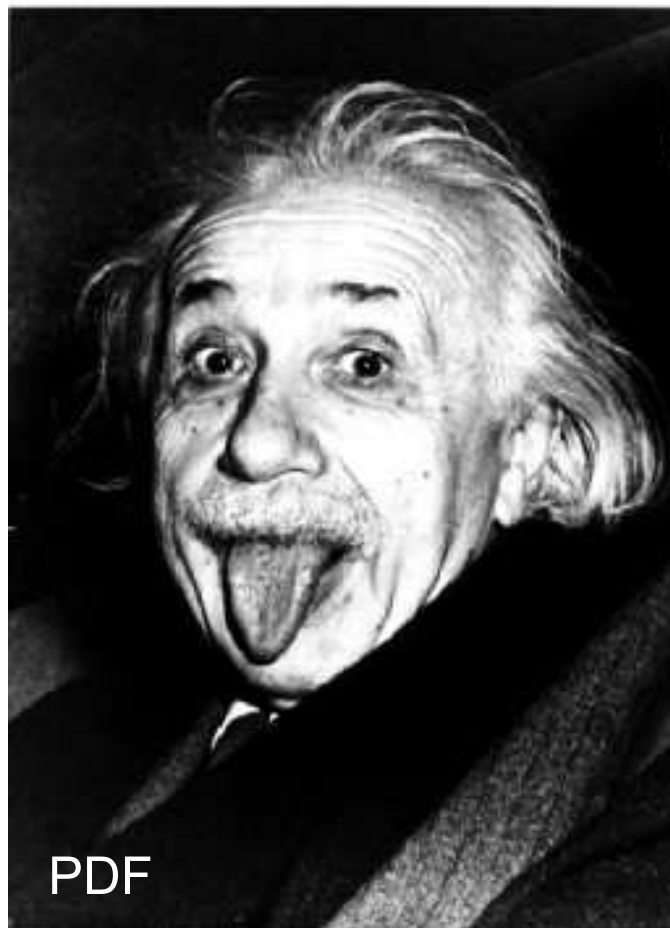


Abb. 4.1. Toller Typ. Das hier ist ein PDF (Vektorgrafik-fähiges Format).

Wie binde ich ein Bild ein, das ich mit Matlabfrag erzeugt habe? (Für eine genauere Erläuterung zu Matlabfrag and Gnuplot schau Dir die Plauderstunde im Wiki zu diesem Thema an.)

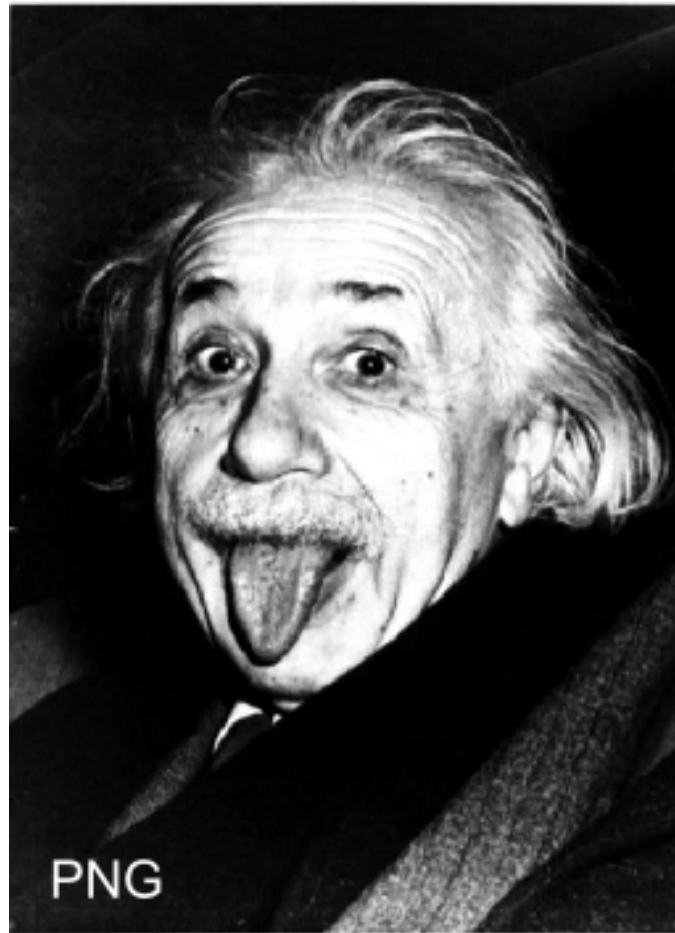


Abb. 4.2. Toller Typ. Das hier ist ein PNG (Bitmap-Format).

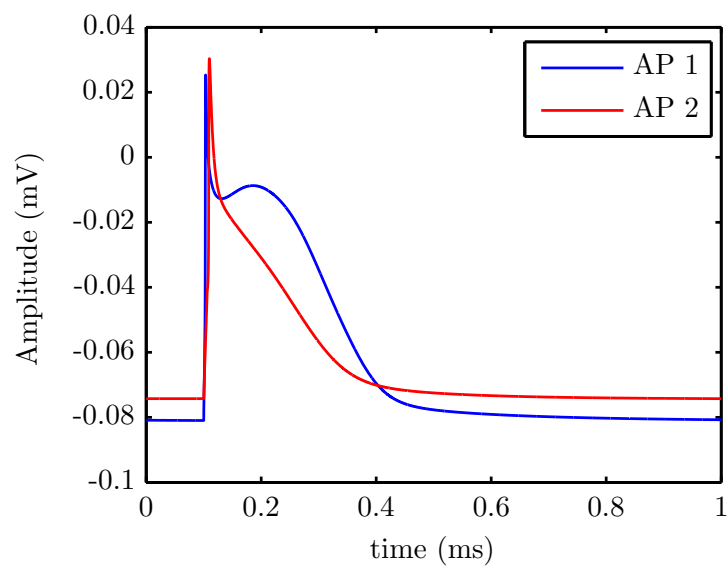


Abb. 4.3. Grafik erzeugt mit Psfrag (der Text in der Grafik wird durch die aktuelle LateX-Schriftart in der passenden Schriftgröße ersetzt)

Tabellen

Wie erzeuge ich eine Tabelle ??

Tabelle 5.1. Rechenvorteil der FFT gegenüber der direkten FT

	direkte FT	FFT	Rechenvorteil
N	N^2	$N \log_2 N$	$\log_2 N / N$
2	4	2	50,0%
4	16	8	50,0%
8	64	24	37,5%
16	256	64	25,0%
32	1.024	160	15,6%
64	4.096	384	9,4%
128	16.384	896	5,5%
256	65.536	2.048	3,1%
512	262.144	4.608	1,8%
1024	1.048.576	10.240	1,0%
2048	4.194.304	22.528	0,5%
4096	16.777.216	49.152	0,3%
8192	67.108.864	106.496	0,2%

Hier ist ein Beispiel für eine colorierte Tabelle

Tabelle 5.2. Typische Verteilung der Ionen im Intra- und Extrazellulärraum einer Muskelzelle [?]. Durch den Konzentrationsunterschied entsteht für jede Ionenart eine sogenannte Nernst-Spannung.

Ionenart	intrazelluläre Konz. [$mmol/kg H_2O$]	extrazelluläre Konz. [$mmol/kg H_2O$]	Nernst- Spannung [mV]
K^+	4,5	160	-95,4
Na^+	144	7	80,2
Ca^{2+}	1,3	0,00001-0,0001	126,5-157,3
Cl^-	114	7	-74,5

In diesem Abschnitt sollen lediglich die grundlegenden Eigenschaften der Fouriertransformation kurz tabellarisch dargestellt werden (Tabelle 5.3). Die Beweise zu den Regeln und alle Eigenschaften sind in [?] zu finden.

Ortsbereich	○—●	Frequenzbereich
Linearität $k_1g(x) + k_2f(x)$		Linearität $k_1G(u) + k_2F(u)$
Symmetrie $F(x)$		Symmetrie $f(-u)$
Ortsskalierung $f(kx)$		reziproke Frequenzskalierung $\frac{1}{ k }F(\frac{u}{k})$
reziproke Ortsskalierung $\frac{1}{ k }f(\frac{x}{k})$		Frequenzskalierung $F(ku)$
Ortsverschiebung $f(x - x_0)$		Phasenverschiebung $F(u)e^{-j2\pi ux_0}$
Modulation $f(x)e^{-j2\pi xu_0}$		Frequenzverschiebung $F(u - u_0)$
gerade Funktion $f_g(x)$		reelle Funktion $F_g(u) = R_g(u)$
ungerade Funktion $f_u(u)$		imaginäre Funktion $F_u(u) = jI_u(u)$
reelle Funktion $f(x) = f_r(u)$		gerader Realteil, ungerader Imaginärteil $F(u) = R_g(u) + jI_u(u)$
imaginäre Funktion $f(x) = jf_i(u)$		ungerader Realteil, gerader Imaginärteil $F(u) = R_u(u) + jI_g(u)$

Tabelle 5.3. Wichtige Eigenschaften der Fouriertransformation

Formeln

Viele, viele bunte Formeln....

6.1 FFT-Algorithmus

Am Beispiel der 1D-DFT soll eine Variante des FFT-Algorithmus an dieser Stelle beschrieben werden: Basis-2-Algorithmus mit Zerlegung im Zeitraum (engl. *decimation in time radix-2 algorithm*) [?].

Zunächst wird die Fouriertransformierte wie folgt umgeschrieben:

$$F(u) = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} f(x) e^{-j2\pi \frac{ux}{N}} = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} f(x) W_N^{ux}, \quad (6.1)$$

$$\text{mit } W_N = e^{-j2\pi \frac{1}{N}} \text{ und } u = 0, 1, \dots, N-1. \quad (6.2)$$

Unter der Annahme, daß N eine Potenz zur Basis 2 ist und n und L zur Menge der natürlichen Zahlen gehören, läßt sich N ausdrücken durch

$$N = 2^n = 2L. \quad (6.3)$$

Durch Substitution von Gl. 6.3 in Gl. 6.1 ergibt sich

$$\begin{aligned} F(u) &= \frac{1}{2L} \sum_{x=0}^{2L-1} f(x) W_{2L}^{ux} \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{L} \sum_{x=0}^{L-1} f(2x) W_{2L}^{u(2x)} + \frac{1}{L} \sum_{x=0}^{L-1} f(2x+1) W_{2L}^{u(2x+1)} \right], \end{aligned} \quad (6.4)$$

und mit $W_{2L}^{2ux} = W_L^{ux}$ (aus Gl. 6.2) folgt schließlich

$$F(u) = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{L} \sum_{x=0}^{L-1} f(2x) W_L^{ux} + \frac{1}{L} \sum_{x=0}^{L-1} f(2x+1) W_L^{ux} W_{2L}^u \right]. \quad (6.5)$$

In einem nächsten Schritt definiert man für gerade und ungerade Funktionswerte je eine Funktion $F(u)$

$$F_{gerade}(u) = \frac{1}{L} \sum_{x=0}^{L-1} f(2x) W_L^{ux} \text{ und} \quad (6.6)$$

$$F_{ungerade}(u) = \frac{1}{L} \sum_{x=0}^{L-1} f(2x+1) W_L^{ux} \text{ für } u = 0, 1, \dots, L-1. \quad (6.7)$$

Durch Einsetzen von Gl. 6.6 und Gl. 6.7 reduziert sich Gl. 6.5 zu

$$F(u) = \frac{1}{2} [F_{gerade}(u) + F_{ungerade}(u) W_{2L}^u]. \quad (6.8)$$

Mit $W_L^{u+L} = W_L^u$, $W_{2L}^{u+L} = -W_{2L}^u$ und den Gl. 6.5 bis Gl. 6.8 ergibt sich

$$F(u+L) = \frac{1}{2} [F_{gerade}(u) - F_{ungerade}(u) W_{2L}^u]. \quad (6.9)$$

Somit besteht der FFT-Algorithmus in der sukzessiven Anwendung der Halbierung der diskreten Funktion $F(u)$. Mit Gl. 6.8 und Gl. 6.9 liegen $N/2$ -Punkt-Transformationen vor. Diese lassen sich wiederum in zwei Transformationen der halben Länge aufteilen. Man erhält ähnliche Gleichungen, nur mit dem Unterschied, daß die Phasenverschiebung sich verdoppelt hat. Die Halbierung muß konsequenterweise für beide Funktionen, gerade und ungerade, durchgeführt werden.

Im letzten Schritt erhält man für $\tilde{u} = 0$:

$$\begin{aligned} F(0) &= \frac{1}{2} [\tilde{F}_{gerade}(0) + \tilde{F}_{ungerade}(0) W_{2\tilde{L}}^0] \\ &= f(0) + f(1) \text{ und} \end{aligned} \quad (6.10)$$

$$\begin{aligned} F(0 + \tilde{L}) &= F(1) = \frac{1}{2} [\tilde{F}_{gerade}(0) - \tilde{F}_{ungerade}(0) W_{2\tilde{L}}^0] \\ &= f(0) - f(1), \end{aligned} \quad (6.11)$$

da $W = 1$ und $\tilde{L} = 1$ sind.

Am Beispiel für $N = 4$ soll dies demonstriert werden. Nach Gl. 6.8 und Gl. 6.9 erhält man ($L = 2$)

$$F(0) = \frac{1}{2} [F_{gerade}(0) + F_{ungerade}(0) W_4^0], \quad (6.12)$$

$$F(2) = \frac{1}{2} [F_{gerade}(0) - F_{ungerade}(0) W_4^0], \quad (6.13)$$

$$F(1) = \frac{1}{2} [F_{gerade}(0) + F_{ungerade}(0) W_4^1], \quad (6.14)$$

$$F(3) = \frac{1}{2} [F_{gerade}(0) - F_{ungerade}(0) W_4^1]. \quad (6.15)$$

Mit Gl. 6.2 gilt

$$W_4^0 = e^{-j2\pi \frac{0}{4}} = 1 \text{ und } W_4^1 = e^{-j2\pi \frac{1}{4}} = -j. \quad (6.16)$$

Weiterhin nach 6.6 und Gl. 6.7 für $u = 0, 1$

$$\begin{aligned}
F_{gerade}(0) &= \frac{1}{2} \sum_{x=0}^1 f(2x)W_2^0 \\
&= \frac{1}{2} [f(0)W_2^0 + f(2)W_2^0] = \frac{1}{2} [f(0) + f(2)], \tag{6.17}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_{ungerade}(0) &= \frac{1}{2} \sum_{x=0}^1 f(2x+1)W_2^0 \\
&= \frac{1}{2} [f(1)W_2^0 + f(3)W_2^0] = \frac{1}{2} [f(1) + f(3)], \tag{6.18}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_{gerade}(1) &= \frac{1}{2} \sum_{x=0}^1 f(2x)W_2^x \\
&= \frac{1}{2} [f(0)W_2^0 + f(2)W_2^1] = \frac{1}{2} [f(0) - f(2)], \tag{6.19}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_{ungerade}(1) &= \frac{1}{2} \sum_{x=0}^1 f(2x+1)W_2^x \\
&= \frac{1}{2} [f(1)W_2^0 + f(3)W_2^1] = \frac{1}{2} [f(1) - f(3)], \tag{6.20}
\end{aligned}$$

mit $W_2^0 = 1$ und $W_2^1 = -1$. Eingesetzt in Gl. 6.12 bis Gl. 6.15 folgt das Ergebnis

$$\begin{aligned}
F(0) &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2} [f(0) + f(2)] + \frac{1}{2} [f(1) + f(3)] \right\} \\
&= \frac{1}{4} \{ [f(0) + f(2)] + [f(1) + f(3)] \}, \tag{6.21}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F(2) &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2} [f(0) + f(2)] - \frac{1}{2} [f(1) + f(3)] \right\} \\
&= \frac{1}{4} \{ [f(0) + f(2)] - [f(1) + f(3)] \}, \tag{6.22}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F(1) &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2} [f(0) - f(2)] + \frac{1}{2} [f(1) - f(3)] (-j) \right\} \\
&= \frac{1}{4} \{ [f(0) - f(2)] - j [f(1) - f(3)] \}, \tag{6.23}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F(3) &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2} [f(0) - f(2)] - \frac{1}{2} [f(1) - f(3)] (-j) \right\} \\
&= \frac{1}{4} \{ [f(0) - f(2)] + j [f(1) - f(3)] \}. \tag{6.24}
\end{aligned}$$

Zusammenfassung

A

Anhang1

Abbildungsverzeichnis

4.1	Einstein-pdf	7
4.2	Einstein-png	8
4.3	Aktionspotential	8

Tabellenverzeichnis

5.1	Rechenvorteil der FFT gegenüber der direkten FT	9
5.2	Typische Verteilung der Ionen im Intra- und Extrazellulärraum einer Muskelzelle.	10
5.3	Wichtige Eigenschaften der Fouriertransformation	11

