

Harmonogramowanie zadań wielomaszynowych z przebrojeniami

Michał Zimniak, Norbert Januszek

Uniwersytet Wrocławski

zimniak.michal@gmail.com traspie@wp.pl

16 grudnia 2016

Będziemy rozpatrywać problem szeregowania zadań wielomaszynowych z przebiegami maszyn. Chcemy zminimalizować iloczyn liczby użytych maszyn i długość wykonywania wszystkich zadań.

Dane wejściowe

- Zbiór zadań $\mathcal{J} = \{1, 2, \dots, n\}$
 - Zadanie $i \in \mathcal{J}$ wymaga jednocześnie $size_i$ maszyn przez $p_i > 0$ jednostek czasu.
- Zbiór maszyn $\mathcal{M} = \{1, 2, \dots, m\}$
 - Maszyny $l, k \in \mathcal{M}$ nazywamy sąsiednimi, jeżeli $k = l + 1$ lub $k = l - 1$.
 - Przez $s_{i,j}$ oznaczamy czas przebrojenia pomiędzy zadaniem i , a zadaniem j .

Założenia

- Żadna maszyna nie może wykonywać więcej niż jedno zadanie w danym momencie.
- Wykonywanie zadania nie może być przerwane.
- Każde zadanie jest wykonywane na wymaganej liczbie sąsiednich maszyn.
- Pomiędzy kolejno wykonywanymi zadaniami należy wykonać przebrojenie maszyny.
- Zakładamy, że liczba maszyn $m \geq \max\{size_i : i \in \mathcal{J}\}$, czyli jesteśmy w stanie wykonać każde zadanie.

Rozwiązanie

- Należy dla każdego zadania wyznaczyć podzbiór maszyn oraz momentów rozpoczęcia jego wykonywania spełniając wymienione ograniczenia, tak żeby zminimalizować iloczyn liczby użytych maszyn i długość wykonywania wszystkich zadań.

Rozwiązanie może być reprezentowane przez parę $\Theta = (\mathcal{Q}, \mathcal{S})$ taką, że:

- $\mathcal{Q} = (\mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2, \dots, \mathcal{Q}_n)$, gdzie $\mathcal{Q}_i \subseteq \mathcal{M}$ to zbiór maszyn na których będzie wykonywane zadanie $i \in \mathcal{J}$.
- $\mathcal{S} = (\mathcal{S}_{1,1}, \dots, \mathcal{S}_{1,m}, \mathcal{S}_{2,1}, \dots, \mathcal{S}_{2,m}, \dots, \mathcal{S}_{n,1}, \dots, \mathcal{S}_{n,m})$, gdzie $\mathcal{S}_{i,j}$ jest momentem rozpoczęcia wykonywania zadania i na maszynie j . Jeżeli $j \notin \mathcal{Q}_i$ to $\mathcal{S}_{i,j} = -\infty$.

Funkcja celu

- $F(\Theta) = C_{max}(\Theta) \cdot M_{max}(\Theta)$
- $C_{max} = \max\{S_{i,j} + p_i : i \in \mathcal{J}, j \in \mathcal{M}\}$ jest momentem zakończenia wykonywania wszystkich zadań.
- $M_{max} = \max\{j : j \in \mathcal{Q}_i, i \in \mathcal{J}\}$ jest maksymalnym numerem maszyny spośród wszystkich przydzielonych do wykonywania zadań.

Oznaczmy przez Ω zbiór wszystkich rozwiązań. Problem harmonogramowania zadań polega na wyznaczeniu rozwiązania $\Theta^* \in \Omega$ takiego, że:

$$F(\Theta^*) = \min\{F(\Theta) : \Theta \in \Omega\}.$$

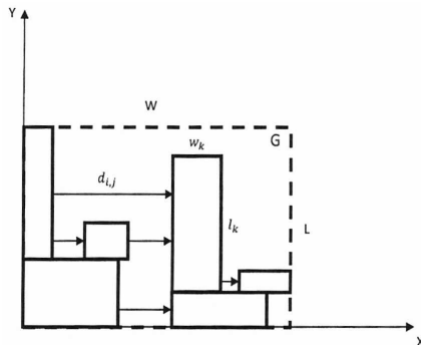
- Okazuje się, że problem jest równoważny pewnemu uogólnieniu dwuwymiarowego problemu pakowania.
- Są to problemy NP-trudne. Algorytmy wyznaczania rozwiązania optymalnego mają wykładniczą złożoność, dlatego mogą być stosowane jedynie do rozwiązywania przykładów o niewielkich rozmiarach.
- Algorytmy przybliżone często dają bardzo zadowalające wyniki różniące się od najlepszych rozwiązań o mniej niż 15%.
- Oczywiste dolne oszacowanie rozwiązania optymalnego problemu pakowania może być sumą pól wszystkich prostokątów.

Dwuwymiarowy problem pakowania

Należy tak rozmieścić prostokąty, aby zajmowany przez nie obszar G miał minimalne pole powierzchni. W rozważanym wariancie prostokąty, które stykają się bokami należy odsunąć od siebie na pewną odległość.

Specyfikacja

- $\mathcal{R} = \{r_1, r_2, \dots, r_n\}$ - zbiór prostokątów
- (l_k, w_k) - wysokość i szerokość prostokąta r_k
- $d_{i,j}$ - odległość o jaką należy odsunąć prostokąt r_i od r_j , gdy występują bezpośrednio obok siebie



Algorytm pakowania

Niech $\alpha = (r_1, r_2, \dots, r_n)$ będzie pewnym ciągiem prostokątów. Rozpatrujemy prostokąty zgodnie z kolejnością ich występowania w α . Zbiór P_{i-1} zawiera pozycje, na których można umieścić rozpatrywany prostokąt r_i .

$G \leftarrow \emptyset, P_0 \leftarrow \{(0, 0)\}$

for $i \leftarrow 1, n$ **do**

$O \leftarrow \emptyset$

for $z \in P_{i-1}$ **do** $O \leftarrow O \cup \{\text{insert}(G, z, r_i)\}$

$G \leftarrow$ wybrany na podstawie ustalonej strategii obszar z O powstały po wstawieniu r_i na pozycję $z = (x, y)$.

$P_i \leftarrow P_{i-1} \setminus \{z\} \cup \{(x + d_{r_c, r_i} \cdot \delta, y), (x + d_{r_c, r_i} \cdot \delta, y + l_i)\}$

$\delta \in \{0, 1\}$ i przyjmuje wartość 1, jeżeli wstawiany prostokąt r_i został przesunięty o wielkość d_{r_c, r_i} , a pozycja z została utworzona w wyniku wstawienia prostokąta r_c .

- ❶ *minimalnego obszaru* - wybierana jest pozycja, powodująca minimalne powiększenie bieżącego obszaru.
- ❷ *pole-wymiary* - obliczana jest wartość współczynnika na podstawie pola powierzchni tymczasowego obszaru i różnicy długości jego boków. Zastosowanie tego współczynnika ma na celu tworzenie obszarów o równomiernym kształcie (zbliżonym do kwadratu).
- ❸ *ruletki* - pozycja wstawienia prostokąta jest losowana zgodnie z zasadą ruletki. Prawdopodobieństwo wylosowania jest proporcjonalne do wielkości tymczasowego obszaru.
- ❹ *XYZ* - pozycja jest losowana zgodnie z rozkładem jednostajnym.

Algorytm symulowanego wyżarzania

Przykładowe rozwiązanie dopuszczalne można obliczyć za pomocą algorytmu pakowania na podstawie losowo wyznaczonego ciągu α . Takie rozwiązanie można jednak znacznie odbiegać od optymalnego. Pojawia się pomysł, aby generować otoczenie poprzez modyfikację rozpatrywanego rozwiązania i w przypadku gdy bieżące rozwiązanie jest gorsze niż to z sąsiedztwa, zastąpić je nim.

Algorytm symulowanego wyżarzania rozszerza ten pomysł i dodatkowo przyjmuje następujące parametry:

- temperatura początkowa
- funkcja prawdopodobieństwa z jakim są akceptowane rozwiązania gorsze od bieżącego
- schemat schładzania temperatury (zmniejszania wartości)

Wybór tych parametrów wpływa na częstość akceptowania rozwiązań gorszych od bieżącego, a więc na zdolność algorytmu do opuszczania minimów lokalnych, jak i stabilność poszukiwań.

Algorytm symulowanego wyżarzania

Przez $\mathcal{N}(\alpha)$ oznaczamy otoczenie, przez $G(\alpha)$ pole obszaru wewnątrz którego są umieszczone prostokąty, a przez t parametr kontrolny (temperaturę).

$\alpha_{best} \leftarrow \alpha$

repeat

repeat

$\beta \leftarrow$ losowy element z otoczenia $\mathcal{N}(\alpha)$

if $G(\beta) < G(\alpha)$ **then** $\alpha \leftarrow \beta$

else

if $e^{\frac{G(\alpha)-G(\beta)}{t}} > \text{random}$ **then** $\alpha \leftarrow \beta$

if $G(\beta) < G(\alpha_{best})$ **then** $\alpha_{best} \leftarrow \beta$

until zmienić parametr kontrolny

 zmień parametr kontrolny t

until warunek końca

Własności omawianych algorytmów zostały przebadane na podstawie specjalnie przygotowanego programu do pakowania prostokątów.

Specyfikacja

- Implementacja w języku $F\#$ bez wielowątkowości
github.com/michlord/Praktyka-optimalizacji/tree/master/BinPacking
- Program został uruchomiony na komputerze z procesorem AMD 4.1GHz i 8GB RAM
- Parametry alg. symulowanego wyżarzania
 - temperatura początkowa $t_0 = 125$
 - współczynnik zmiany temperatury $\lambda = 0,98$
 - zmiana temperatury co 100 iteracji
 - powrót do temperatury początkowej co 500 iteracji
 - maksymalna liczba iteracji - 5000

Wykonano serię testów dla następujących parametrów

- Ilość prostokątów - 50; Ilość maszyn - 160
- Ilość typów prostokątów - [3, 5, 8, 10, 12, 15, 20]
- Strategie pakowania - [min. obszaru, pole-wymiary, losowa]

Wyniki umieszczono w tabeli. Przyjęto następujące oznaczenia

- Typy - liczba typów prostokątów
- Dokładność - suma pól wszystkich prostokątów podzielona przez pole otrzymanego obszaru
- Pole obszaru - pole obszaru zawierającego upakowane prostokąty
- Krótszy, dłuższy bok - długość krótszego i dłuższego boku pola obszaru
- Ratio - stosunek dłuższego boku do krótszego
- Czas - czas obliczeń w sekundach

Tabela: Strategia minimalnego obszaru

Typy	Dokładność	Pole obszaru	Krótszy bok	Dłuższy bok	Ratio	Czas
3	0.72582547	10176	64	159	2.484375	32.40533
5	0.6454418	7130	46	155	3.369565	32.93213
8	0.63224276	8008	52	154	2.961538	32.24017
10	0.67144928	6900	46	150	3.26087	34.18809
12	0.66198157	4340	28	155	5.535714	34.17906
15	0.65539995	7426	47	158	3.361702	33.93743
20	0.63566308	5580	36	155	4.305556	34.0191

Rysunek: Strategia minimalnego obszaru

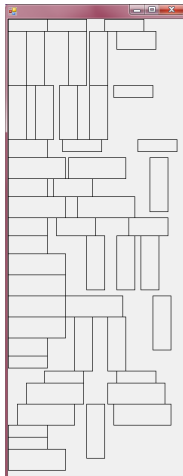


Tabela: Strategia współczynnika pole-wymiary

Typy	Dokładność	Pole obszaru	Krótszy bok	Dłuższy bok	Ratio	Czas
3	0.7006058	9409	97	97	1	33.80433
5	0.55073462	4356	66	66	1	32.71974
8	0.64316966	14399	119	121	1.016807	32.67322
10	0.60982973	8281	91	91	1	32.84179
12	0.64555766	8464	92	92	1	32.82862
15	0.58703512	7744	88	88	1	33.57598
20	0.59922251	5402	73	74	1.013699	33.12795

Rysunek: Strategia współczynnika pole-wymiary

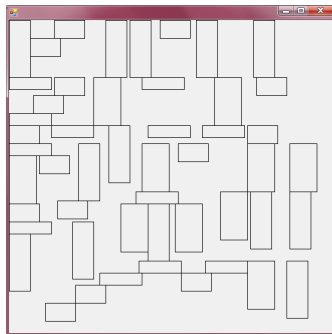
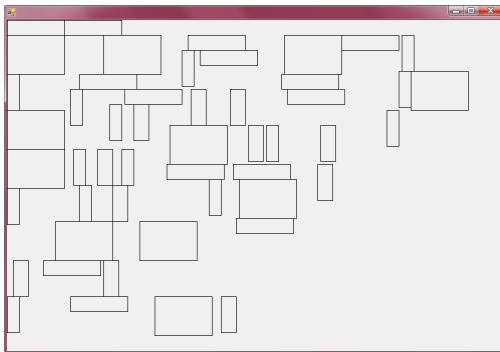


Tabela: Strategia losowa

Typy	Dokładność	Pole obszaru	Krótszy bok	Dłuższy bok	Ratio	Czas
3	0.41735141	23975	134	207	1.544776	28.1288
5	0.25686275	17850	89	188	2.11236	29.11801
8	0.26661892	23738	79	265	3.35443	28.92327
10	0.26665419	16032	107	190	1.775701	28.91002
12	0.25339877	20375	140	145	1.035714	29.44653
15	0.23601826	27375	127	174	1.370079	28.42857
20	0.18061538	19500	100	169	1.69	28.92149

Przykładowe upakowanie

Rysunek: Strategia losowa



- Najlepsze wyniki uzyskano stosując strategię minimalnego obszaru. Wartości współczynnika *Ratio* były zdecydowanie większe od wartości otrzymanych dla innych strategii.
- Wyniki strategii współczynnika-wymiary były niewiele gorsze. Natomiast dla tej strategii otrzymano najmniejsze wartości współczynnika *Ratio* bliskie 1.00. Oznacza to, że kształt wyznaczanego obszaru był zbliżony do kwadratu.
- Wartości otrzymane za pomocą strategii losowej były znacząco gorsze od pozostałych. Jediną zaletą strategii był krótszy czas wykonywania obliczeń.
- Można wywnioskować, że w przypadku problemu harmonogramowania zadań wieloprocessorowych, wybór strategii zależy od relacji kosztu czasu wykorzystania procesorów, a liczbą użytych procesorów.

Sed iaculis dapibus gravida. Morbi sed tortor erat, nec interdum arcu. Sed id lorem lectus. Quisque viverra augue id sem ornare non aliquam nibh tristique. Aenean in ligula nisl. Nulla sed tellus ipsum. Donec vestibulum ligula non lorem vulputate fermentum accumsan neque mollis.

Sed diam enim, sagittis nec condimentum sit amet, ullamcorper sit amet libero. Aliquam vel dui orci, a porta odio. Nullam id suscipit ipsum. Aenean lobortis commodo sem, ut commodo leo gravida vitae. Pellentesque vehicula ante iaculis arcu pretium rutrum eget sit amet purus. Integer ornare nulla quis neque ultrices lobortis. Vestibulum ultrices tincidunt libero, quis commodo erat ullamcorper id.

- Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit
- Aliquam blandit faucibus nisi, sit amet dapibus enim tempus eu
- Nulla commodo, erat quis gravida posuere, elit lacus lobortis est, quis porttitor odio mauris at libero
- Nam cursus est eget velit posuere pellentesque
- Vestibulum faucibus velit a augue condimentum quis convallis nulla gravida

Blocks of Highlighted Text

Block 1

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Integer lectus nisl, ultricies in feugiat rutrum, porttitor sit amet augue. Aliquam ut tortor mauris. Sed volutpat ante purus, quis accumsan dolor.

Block 2

Pellentesque sed tellus purus. Class aptent taciti sociosqu ad litora torquent per conubia nostra, per inceptos himenaeos. Vestibulum quis magna at risus dictum tempor eu vitae velit.

Block 3

Suspendisse tincidunt sagittis gravida. Curabitur condimentum, enim sed venenatis rutrum, ipsum neque consectetur orci, sed blandit justo nisi ac lacus.

Heading

- 1 Statement
- 2 Explanation
- 3 Example

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Integer lectus nisl, ultricies in feugiat rutrum, porttitor sit amet augue. Aliquam ut tortor mauris. Sed volutpat ante purus, quis accumsan dolor.

Table

Treatments	Response 1	Response 2
Treatment 1	0.0003262	0.562
Treatment 2	0.0015681	0.910
Treatment 3	0.0009271	0.296

Tabela: Table caption

Theorem

Theorem (Mass–energy equivalence)

$$E = mc^2$$

Example (Theorem Slide Code)

```
\begin{frame}  
\frametitle{Theorem}  
\begin{theorem}[Mass--energy equivalence]  
$E = mc^2$  
\end{theorem}  
\end{frame}
```

Figure

Uncomment the code on this slide to include your own image from the same directory as the template .TeX file.

An example of the `\cite` command to cite within the presentation:

This statement requires citation [**Smith, 2012**].



John Smith (2012)

Title of the publication

Journal Name 12(3), 45 – 678.

The End