Harmonogramowanie zadań wielomaszynowych z przezbrojeniami

Michał Zimniak, Norbert Januszek

Uniwersytet Wrocławski

zimniak.michal@gmail.com traspie@wp.pl

14 października 2016

Wstęp

Będziemy rozpatrywać problem szeregowania zadań wielomaszynowych z przezbrojeniami maszyn. Chcemy zminimalizować iloczyn liczby użytych maszyn i długość wykonywania wszystkich zadań.

Specyfikacja problemu

Dane wejściowe

- Zbiór zadań $\mathcal{J} = \{1, 2, \ldots, n\}$
  - Zadanie $i \in \mathcal{J}$ wymaga jednocześnie $size_i$ maszyn przez $p_i > 0$ jednostek czasu.
- Zbiór maszyn $\mathcal{M} = \{1, 2, \ldots, m\}$
  - Maszyny $l, k \in \mathcal{M}$ nazywamy sąsiednimi, jeżeli $k = l + 1$ lub $k = l - 1$.
  - Przez $s_{i,j}$ oznaczamy czas przezbrojenia pomiędzy zadaniem i, a zadaniem j.

Specyfikacja problemu

Założenia

- Żadna maszyna nie może wykonywać więcej niż jedno zadanie w danym momencie.
- Wykonywanie zadania nie może być przerwane.
- Każde zadanie jest wykonywane na wymaganej liczbie sąsiednich maszyn.
- Pomiędzy kolejno wykonywanymi zadaniami należy wykonać przezbrojenie maszyny.
- Zakładamy, że liczba maszyn $m \geqslant \max\{size_i : i \in \mathcal{J}\}$, czyli jesteśmy w stanie wykonać każde zadanie.

Specyfikacja problemu

Rozwiązanie

- Należy dla każdego zadania wyznaczyć podzbiór maszyn oraz momentów rozpoczęcia jego wykonywania spełniając wymienione ograniczenia, tak żeby zminimalizować iloczyn liczby użytych maszyn i długość wykonywania wszystkich zadań.

Rozwiązanie może być reprezentowane przez parę $\Theta = (\mathcal{Q}, \mathcal{S})$ taką, że:

- $\mathcal{Q} = (\mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2, \ldots, \mathcal{Q}_n)$, gdzie $\mathcal{Q}_i \subseteq \mathcal{M}$ to zbiór maszyn na których będzie wykonywane zadanie $i \in \mathcal{J}$.
- $\mathcal{S} = (\mathcal{S}_{1,1}, \ldots, \mathcal{S}_{1,m}, \mathcal{S}_{2,1}, \ldots, \mathcal{S}_{2,m}, \ldots, \mathcal{S}_{n,1}, \ldots, \mathcal{S}_{n,m})$, gdzie $\mathcal{S}_{i,j}$ jest momentem rozpoczęcia wykonywania zadania i na maszynie j. Jeżeli $j \notin \mathcal{Q}_i$ to $\mathcal{S}_{i,j} = -\infty$.

Specyfikacja problemu

Funkcja celu

- $F(\Theta) = C_{max}(\Theta) \cdot M_{max}(\Theta)$
- $C_{max} = max\{\mathcal{S}_{i,j} + p_i : i \in \mathcal{J}, j \in \mathcal{M}\}$ jest momentem zakończenia wykonywania wszystkich zadań.
- $M_{max} = max\{j : j \in \mathcal{Q}_i, i \in \mathcal{J}\}$ jest maksymalnym numerem maszyny spośród wszystkich przydzielonych do wykonywania zadań.

Oznaczmy przez Ω zbiór wszystkich rozwiązań. Problem harmonogramowania zadań polega na wyznaczeniu rozwiązania $\Theta^* \in \Omega$ takiego, że:

$$F(\Theta^*) = min\{F(\Theta) : \Theta \in \Omega\}.$$

Charakterystyka problemu

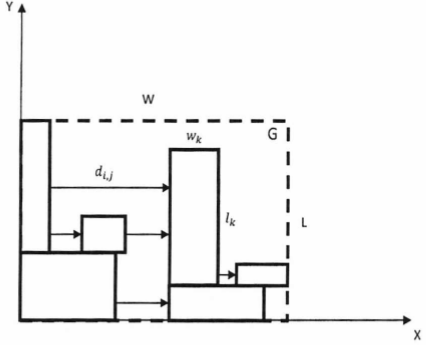
- Okazuje się, że problem jest równoważny pewnemu uogólnieniu dwuwymiarowego problemu pakowania.
- Są to problemy NP-trudne. Algorytmy wyznaczania rozwiązania optymalnego mają wykładniczą złożoność, dlatego mogą być stosowane jedynie do rozwiązywania przykładów o niewielkich rozmiarach.
- Algorytmy przybliżone często dają bardzo zadowalające wyniki różniące się od najlepszych rozwiązań o mniej niż 15%.
- Oczywiste dolne oszacowanie rozwiązania optymalnego problemu pakowania może być sumą pól wszystkich prostokątów.

Dwuwymiarowy problem pakowania

Należy tak rozmieścić prostokąty, aby zajmowany przez nie obszar G miał minimalne pole powierzchni. W rozważanym wariancie prostokąty, które stykają się bokami należy odsunąć od siebie na pewną odległość.

Specyfikacja

- $\mathcal{R} = \{r_1, r_2, \ldots, r_n\}$ - zbiór prostokątów
- (l_k, w_k) - wysokość i szerokość prostokąta r_k
- $d_{i,j}$ - odległość o jaką należy odsunąć prostokąt r_i od r_j, gdy występują bezpośrednio obok siebie



Algorytm pakowania

Niech $\alpha = (r_1, r_2, \ldots, r_n)$ będzie pewnym ciągiem prostokątów. Rozpatrujemy prostokąty zgodnie z kolejnością ich występowania w α. Zbiór P_{i-1} zawiera pozycje, na których można umieścić rozpatrywany prostokąt r_i.

$G \leftarrow \emptyset, P_0 \leftarrow \{(0,0)\}$
for $i \leftarrow 1, n$ **do**
  $O \leftarrow \emptyset$
  for z in P_{i-1} **do** $O \leftarrow O \cup \{insert(G, z, r_i)\}$
  $G \leftarrow$ wybrany na podstawie ustalonej strategii obszar z O powstały po wstawieniu r_i na pozycję $z = (x, y)$.
  $P_i \leftarrow P_{i-1} \setminus \{z\} \cup \{(x + d_{r_c, r_i} \cdot \delta, y), (x + d_{r_c, r_i} \cdot \delta, y + l_i)\}$

$\delta \in \{0, 1\}$ i przyjmuje wartość 1, jeżeli wstawiany prostokąt r_i został przesunięty o wielkość d_{r_c, r_i}, a pozycja z została utworzona w wyniku wstawienia prostokąta r_c.

Strategie pakowania

1. *minimalnego obszaru* - wybierana jest pozycja, powodująca minimalne powiększenie bieżącego obszaru.
2. *pole-wymiary* - obliczana jest wartość współczynnika na podstawie pola powierzchni tymczasowego obszaru i różnicy długości jego boków. Zastosowanie tego współczynnika ma na celu tworzenie obszarów o równomiernym kształcie (zbliżonym do kwadratu).
3. *ruletki* - pozycja wstawienia prostokąta jest losowana zgodnie z zasadą ruletki. Prawdopodobieństwo wylosowania jest proporcjonalne do wielkości tymczasowego obszaru.
4. *XYZ* - pozycja jest losowana zgodnie z rozkładem jednostajnym.

Algorytm symulowanego wyżarzania

Przykładowe rozwiązanie dopuszczalne można obliczyć za pomocą algorytmu pakowania na podstawie losowo wyznaczonego ciągu α. Takie rozwiązanie możne jednak znacznie odbiegać od optymalnego. Pojawia się pomysł, aby generować otoczenie poprzez modyfikację rozpatrywanego rozwiązania i w przypadku gdy bieżące rozwiązanie jest gorsze niż to z sąsiedztwa, zastąpić je nim.
Algorytm symulowanego wyżarzania rozszerza ten pomysł i dodatkowo przyjmuje następujące parametry:

- temperatura początkowa
- funkcja prawdopodobieństwa z jakim są akceptowane rozwiązania gorsze od bieżącego
- schemat schładzania temperatury (zmniejszania wartości)

Wybór tych parametrów wpływa na częstość akceptowania rozwiązań gorszych od bieżącego, a więc na zdolność algorytmu do opuszczania minimów lokalnych, jak i stabilność poszukiwań.

Algorytm symulowanego wyżarzania

Przez $\mathcal{N}(\alpha)$ oznaczamy otoczenie, przez $G(\alpha)$ pole obszaru wewnątrz którego są umieszczone prostokąty, a przez t parametr kontrolny (temperaturę).

$\alpha_{best} \leftarrow \alpha$
repeat
    repeat
        $\beta \leftarrow$ losowy element z otoczenia $\mathcal{N}(\alpha)$
        if $G(\beta) < G(\alpha)$ **then** $\alpha \leftarrow \beta$
        else
            if $e^{\frac{G(\alpha)-G(\beta)}{t}} > random$ **then** $\alpha \leftarrow \beta$
        if $G(\beta) < G(\alpha_{best})$ **then** $\alpha_{best} \leftarrow \beta$
    until zmienić parametr kontrolny
    zmień parametr kontrolny t
until warunek końca

Paragraphs of Text

Sed iaculis dapibus gravida. Morbi sed tortor erat, nec interdum arcu. Sed id lorem lectus. Quisque viverra augue id sem ornare non aliquam nibh tristique. Aenean in ligula nisl. Nulla sed tellus ipsum. Donec vestibulum ligula non lorem vulputate fermentum accumsan neque mollis.

Sed diam enim, sagittis nec condimentum sit amet, ullamcorper sit amet libero. Aliquam vel dui orci, a porta odio. Nullam id suscipit ipsum. Aenean lobortis commodo sem, ut commodo leo gravida vitae. Pellentesque vehicula ante iaculis arcu pretium rutrum eget sit amet purus. Integer ornare nulla quis neque ultrices lobortis. Vestibulum ultrices tincidunt libero, quis commodo erat ullamcorper id.

Bullet Points

- Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit
- Aliquam blandit faucibus nisi, sit amet dapibus enim tempus eu
- Nulla commodo, erat quis gravida posuere, elit lacus lobortis est, quis porttitor odio mauris at libero
- Nam cursus est eget velit posuere pellentesque
- Vestibulum faucibus velit a augue condimentum quis convallis nulla gravida

Blocks of Highlighted Text

Block 1

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Integer lectus nisl, ultricies in feugiat rutrum, porttitor sit amet augue. Aliquam ut tortor mauris. Sed volutpat ante purus, quis accumsan dolor.

Block 2

Pellentesque sed tellus purus. Class aptent taciti sociosqu ad litora torquent per conubia nostra, per inceptos himenaeos. Vestibulum quis magna at risus dictum tempor eu vitae velit.

Block 3

Suspendisse tincidunt sagittis gravida. Curabitur condimentum, enim sed venenatis rutrum, ipsum neque consectetur orci, sed blandit justo nisi ac lacus.

Multiple Columns

Heading

1. Statement
2. Explanation
3. Example

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Integer lectus nisl, ultricies in feugiat rutrum, porttitor sit amet augue. Aliquam ut tortor mauris. Sed volutpat ante purus, quis accumsan dolor.

Table

Treatments	**Response 1**	**Response 2**
Treatment 1	0.0003262	0.562
Treatment 2	0.0015681	0.910
Treatment 3	0.0009271	0.296

Tabela: Table caption

Theorem (Mass–energy equivalence)

$E = mc^2$

Verbatim

Example (Theorem Slide Code)

```
\begin{frame}
\frametitle{Theorem}
\begin{theorem}[Mass--energy equivalence]
$E = mc^2$
\end{theorem}
\end{frame}
```

Figure

Uncomment the code on this slide to include your own image from the same directory as the template .TeX file.

Citation

An example of the `\cite` command to cite within the presentation:

This statement requires citation [Smith, 2012].

References

John Smith (2012)
Title of the publication
Journal Name 12(3), 45 – 678.

The End