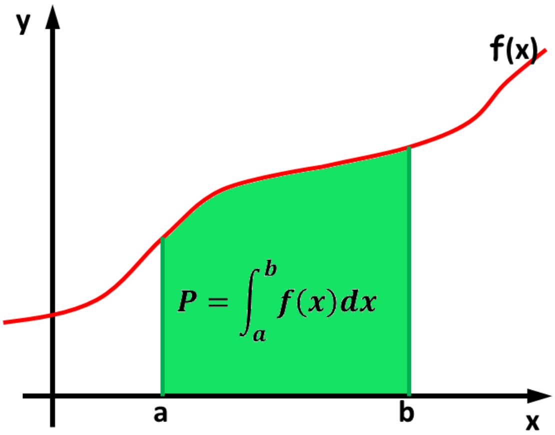
# 1. Całkowanie numeryczne

## 1.1. Metoda prostokątów

Metoda prostokątów to metoda całkowania, która oparta jest na geometrycznej interpretacji całki (Rys. 1).




Rys. 1. Geometryczna interpretacja całko oznaczonej

Metoda prostokątów polega na przybliżeniu obszaru ograniczonego wykresem funkcji na przedziale $< a, b >$ za pomocą $n$ elementarnych prostokątów. Wartość całki w zadanym przedziale $< a, b >$ otrzymujemy sumując pola wszystkich prostokątów:

$$\int_a^b f(x) \approx s \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i + \frac{1}{2}s) \tag{1}$$

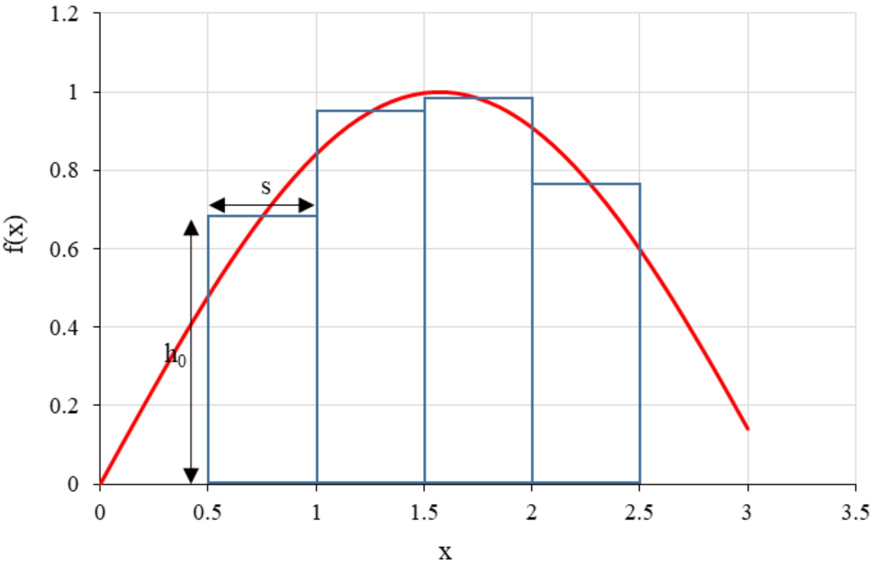
$$s = \frac{b-a}{n} \tag{2}$$

Gdzie: $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} = b$

**Przykład obliczeń**

Dla funkcji $f(x) = \sin(x)$ oblicz całkę metodą prostokątów na przedziale $< 0.5, 2.5 >$ dla $n = 4$.

Podział przybliżanego obszaru na przedziale $< 0.5, 2.5 >$ na 4 prostokąty schematycznie przedstawiono na Rys. 2.




Rys. 2. Podział przybliżanego obszaru na prostokąty.

Obliczamy:

$$s = \frac{2.5 - 0.5}{4} = 0.5$$

$$h_0 = f\left(x_0 + \frac{1}{2}s\right) = \sin(0.5 + 0.25) = 0.682$$

$$h_1 = f\left(x_1 + \frac{1}{2}s\right) = \sin(1 + 0.25) = 0.949$$

$$h_2 = f\left(x_2 + \frac{1}{2}s\right) = \sin(1.5 + 0.25) = 0.984$$

$$h_3 = f\left(x_3 + \frac{1}{2}s\right) = \sin(2.0 + 0.25) = 0.778$$

$$\int_{0.5}^{2.5} sin(x)dx \approx 0.5(\,0.682 + 0.949 + 0.984 + 0.778) = 1{,}6963$$

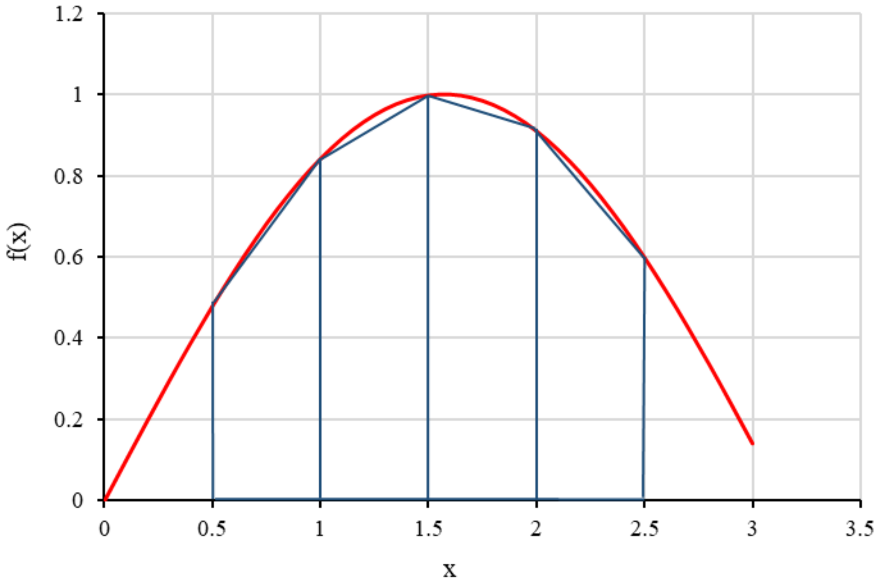
### 1.2. Metoda trapezów

Obliczenie całki metodą trapezów:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2}\big(f(a)+f(b)\big) \tag{3}$$

Dla funkcji $f(x) = \sin(x)$ na przedziale $< 0.5, 2.5 >$ oraz dla $n = 4$ otrzymamy:

$$\int_{0.5}^{2.5} sin(x)dx \approx 1{,}6436$$




Rys. 3. Podział przybliżanego obszaru na trapezy.

### 1.3. Metoda Simpsona (parabol)

Obliczenie całki metodą Simpsona:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6}\left(f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right) \tag{4}$$

### 1.4. Kwadratury Gaussa-Lagendre'a

Kwadratury Gaussa-Legendre'a to kwadratury interpolacyjne, czyli takie, w których funkcja podcałkowa jest przybliżana wielomianem interpolacyjnym. Wzór ogólny na obliczenie wartości całki za pomocą kwadratury można zapisać jako:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} A_i f(x_i) \tag{5}$$

gdzie: $A_i$ – wagi węzłów kwadratury, $x_i$ – węzły kwadratury, $n$ – liczba węzłów.

Ważnym ograniczeniem kwadratur tego typu jest fakt, że przedział całkowania musi być równy [-1,1]. Wynika to z zastosowania bazy wielomianów ortogonalnych, które są ortogonalne tylko na takim przedziale. Tę niedogodność jednak łatwo ominąć. Wystarczy przeskalować odpowiednio zadanie wykorzystując fakt, że całkowanie jest operatorem liniowym, więc możemy zapisać:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} f(t)dt = \frac{b-a}{2}\sum_{i=1}^{n} A_i f(t_i) \tag{6}$$

gdzie:

$$t_i = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}x_i \tag{7}$$

Wagi i węzły dla poszczególnych kwadratur są stablicowane:

| Liczba węzłów kwadratury | Węzły kwadratury | Wagi węzłów |
|---|---|---|
| 2 | $x_1 = -\frac{\sqrt{3}}{3}$<br>$x_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}$ | $A_1 = 1$<br>$A_2 = 1$ |
| 4 | $x_1 = -\frac{1}{35}\sqrt{525+70\sqrt{30}}$<br>$x_2 = -\frac{1}{35}\sqrt{525-70\sqrt{30}}$<br>$x_3 = \frac{1}{35}\sqrt{525-70\sqrt{30}}$<br>$x_4 = \frac{1}{35}\sqrt{525+70\sqrt{30}}$ | $A_1 = \frac{1}{36}(18-\sqrt{30})$<br>$A_2 = \frac{1}{36}(18+\sqrt{30})$<br>$A_3 = \frac{1}{36}(18+\sqrt{30})$<br>$A_4 = \frac{1}{36}(18-\sqrt{30})$ |

**Przykład obliczeń:**

Oblicz wartość całki: $\int_{0.5}^{2.5} sin(x)\,dx$. Wykorzystaj schemat dwu- i cztero-węzłowy.

**Schemat dwuwęzłowy:**

Węzły kwadratury oraz ich wagi:

$x_1 = -0.57735 \qquad A_1 = 1$
$x_2 = 0.57735 \qquad A_2 = 1$

Skalowanie funkcji:

$t_1 = 0.92265$
$t_2 = 2.07735$

Wynik:

$$\int_{0.5}^{2.5} sin(x)\, dx \approx 1.67163$$

**Schemat czterowęzłowy:**

Węzły kwadratury oraz ich wagi:

$$x_1 = -0.861136 \qquad A_1 = 0.347855$$
$$x_2 = -0.339981 \qquad A_2 = 0.652145$$
$$x_3 = 0.339981 \qquad A_3 = 0.652145$$
$$x_4 = 0.861136 \qquad A_4 = 0.347855$$

Skalowanie funkcji:

$$t_1 = 0.638864$$
$$t_2 = 1.16002$$
$$t_3 = 1.83998$$
$$t_4 = 2.36114$$

Wynik:

$$\int_{0.5}^{2.5} sin(x)\, dx \approx 1.67873$$

**Zad 1.** Napisz program, który obliczy całkę z dowolnej funkcji podcałkowej za pomocą metody prostokątów, trapezów i parabol (trzy funkcje). Funkcja podcałkowa powinna być jednym z argumentów dla funkcji obliczających wartość całki daną metodą. Dodatkowe argumenty funkcji to: przedział całkowania, liczba przedziałów.

Program powinien wyświetlać:

- Wzór całkowanej funkcji
- Przedział całkowania
- Liczbę przedziałów
- Wynik obliczony metodą prostokątów, trapezów i parabol.

Oblicz następujące całki (dla n=4):

- $\int_{0.5}^{2.5} sin(x)dx$
- $\int_{0.5}^{5} (x^2 + 2x + 5)\, dx$
- $\int_{0.5}^{5} exp(x)\, dx$

Na UPEL należy przesłać sprawozdanie zawierające wyniki obliczeń oraz plik *.cpp (13p).

**Zad 2.** Napisz funkcję, która obliczy całkę z dowolnej funkcji podcałkowej za pomocą metody Gaussa- Legendre’a dla kwadratury dwu- i cztero-węzłowej. Funkcja podcałkowa powinna być jednym z argumentów dla funkcji obliczających wartość całki. Dodatkowe argumenty funkcji to: przedział całkowania.

Oblicz następujące całki wykorzystując schemat dwu- i czterowęzłowy:

- $\int_{0.5}^{2.5} sin(x)dx$
- $\int_{0.5}^{5} (x^2 + 2x + 5)\, dx$
- $\int_{0.5}^{5} exp(x)\, dx$

Na UPEL należy przesłać sprawozdanie zawierające wyniki obliczeń oraz plik *.cpp (7p).