1. Metody rozwiązywania układów równań liniowych

1.1. Metoda eliminacji Gaussa

Układ n równań liniowych można zapisać w postaci:

$$\begin{gathered}
a_{00}^{(0)}x_0 + a_{01}^{(0)}x_1 + \cdots + a_{0n}^{(0)}x_n = b_0^{(0)} \\
a_{10}^{(0)}x_0 + a_{11}^{(0)}x_1 + \cdots + a_{1n}^{(0)}x_n = b_1^{(0)} \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
a_{n0}^{(0)}x_0 + a_{n1}^{(0)}x_1 + \cdots + a_{nn}^{(0)}x_n = b_n^{(0)}
\end{gathered} \tag{1}$$

Indeks w nawiasie oznacza kolejny krok realizowany metodą eliminacji Gaussa. W metodzie tej wyróżnia się dwa etapy:

- postępowanie proste,
- postępowanie odwrotne.

Postępowanie proste polega na sprowadzeniu układu do postaci górnie trójkątnej. W tym celu odejmujemy od i-tego wiersza, wiersz zerowy pomnożony przez mnożnik:

$$m_{i0} = \frac{a_{i0}^{(0)}}{a_{00}^{(0)}} \tag{2}$$

Po wykonaniu tego kroku otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
a_{00}^{(1)}x_0 + a_{01}^{(1)}x_1 + \cdots + a_{0n}^{(1)}x_n &= b_0^{(1)} \\
a_{11}^{(1)}x_1 + \cdots + a_{1n}^{(1)}x_n &= b_1^{(1)} \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots& \\
a_{n1}^{(1)}x_1 + \cdots + a_{nn}^{(1)}x_n &= b_n^{(1)}
\end{aligned} \tag{3}$$

W kolejnym kroku odejmujemy od i-tego wiersza, wiersz pierwszy pomnożony przez mnożnik:

$$m_{i1} = \frac{a_{i1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} \tag{4}$$

Postępujemy tak $n - 1$ razy, aż do uzyskania macierzy w postaci:

$$\begin{aligned}
a_{00}^{(n)}x_0 + a_{01}^{(n)}x_1 + \cdots + a_{0n}^{(n)}x_n &= b_0^{(n)} \\
a_{11}^{(n)}x_1 + \cdots + a_{1n}^{(n)}x_n &= b_1^{(n)} \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots& \\
a_{nn}^{(n)}x_n &= b_n^{(n)}
\end{aligned} \tag{5}$$

W drugim etapie (postępowanie odwrotne) w celu znalezienia rozwiązania układu równań, korzysta się z uzyskanej macierzy trójkątnej górnej i wzorów rekurencyjnych:

$$x_n = \frac{b_n^{(n)}}{a_{nn}^{(n)}}$$
$$x_i = \frac{b_i^{(n)} - \sum_{k=i+1}^{n} a_{ik}^{(n)} x_k}{a_{ii}^{(n)}} \quad dla\ i = n-1, \dots 0 \tag{6}$$

Przykład 1:

$$\begin{cases} 2x_0 + 4x_1 + 2x_2 + 1x_3 = 10 \\ 2x_0 + 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 6 \\ 4x_0 + 2 + 2x_2 + 1x_3 = 6 \\ 0x_0 + 2x_1 + 1x_2 + 1x_3 = 10 \end{cases} \tag{7}$$

Układ równań dany wzorem (7) przedstawiamy w formie macierzy rozszerzonej (na czerwono oznaczono numerację wierszy i kolumn, ostatnia kolumna reprezentuje wektor prawej strony układu):

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 & 1 & 10 \\ 2 & 2 & 3 & 3 & 6 \\ 4 & 2 & 2 & 1 & 6 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \end{array} \tag{8}$$

W pierwszym etapie obliczamy mnożnik:

$$m_{10} = \frac{a_{10}^{(0)}}{a_{00}^{(0)}} = \frac{2}{2} = 1 \tag{9}$$

Następnie odejmujemy od pierwszego wiersza wiersz zerowy pomnożony przez m_{10}. Analogiczne postępujemy dla drugiego wiersza: obliczamy $m_{20} = 2$ i odejmujemy od wiersza drugiego wiersz zerowy pomnożony przez mnożnik m_{20}. To samo liczymy dla trzeciego wiersza. Ostatecznie otrzymujemy same zera pod przekątną dla zerowej kolumny:

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 & 1 & 10 \\ 0 & -2 & 1 & 2 & -4 \\ 0 & -6 & -2 & -1 & -14 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \tag{10}$$

W kolejnym kroku zerujemy pod przekątną kolejną kolumnę (pierwszą). Obliczamy:

$$m_{21} = \frac{a_{21}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}} = \frac{-6}{-2} = 3 \tag{11}$$

Odejmujemy od drugiego wiersza wiersz pierwszy pomnożony przez m_{21}. Powtarzamy kroki dla ostatniego wiersza (trzeciego). Otrzymujemy:

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 & 1 & 10 \\ 0 & -2 & 1 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & -5 & -7 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} \tag{12}$$

Analogicznie kroki wykonujemy dla ostatniego wiersza w celu wyzerowania drugiej kolumny. Ostatecznie otrzymujemy:

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 & 1 & 10 \\ 0 & -2 & 1 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & -5 & -7 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0.2 & -0.8 \end{bmatrix} \tag{13}$$

W drugim etapie (postępowanie odwrotne) w celu znalezienia rozwiązania układu równań, korzystamy z wzorów rekurencyjnych:

$$x_n = \frac{b_n^{(n)}}{a_{nn}^{(n)}}$$

$$x_i = \frac{b_i^{(n)} - \sum_{k=i+1}^{n} a_{ik}^{(n)} x_k}{a_{ii}^{(n)}} \quad dla\ i = n-1, \dots 0$$

$$x_3 = \frac{b_3^{(3)}}{a_{33}^{(3)}} = \frac{-0.8}{0.2} = -4$$

$$x_2 = \frac{b_2^{(3)} - \sum_{k=2+1}^{3} a_{23}^{(3)} x_3}{a_{22}^{(3)}} = \frac{-2-(-7)*(-4)}{-5} = 6 \tag{14}$$

$$x_1 = \frac{-4-[1*6+2*(-4)]}{-2} = 1$$

$$x_0 = \frac{10-[4*1+2*6+1*(-4)]}{2} = -1$$

Przedstawiony wyżej algorytm działa dopóki na przekątnej macierzy nie ma wartości zera. Aby rozwiązać problem „0” na przekątnej można zastosować wybór częściowy (z ang. partial pivoting). Polega on na modyfikacji algorytmu w taki sposób, że zamieniamy kolejność wierszy w macierzy tak, by element na diagonali przez który dzielimy wiersz, był największym elementem w danej kolumnie w sensie wartości bezwzględnej.

Przykład rozwiązywania układu równań z częściowym wyborem dla kilku pierwszych iteracji:

```
Uklad rownan:
2       4       2       1       10
2       2       3       3       6
4       2       2       1       6
0       2       1       1       4


4       2       2       1       6
2       2       3       3       6
2       4       2       1       10
0       2       1       1       4

4       2       2       1       6
0       1       2       2.5     3
2       4       2       1       10
0       2       1       1       4

4       2       2       1       6
0       1       2       2.5     3
0       3       1       0.5     7
0       2       1       1       4

4       2       2       1       6
0       3       1       0.5     7
0       1       2       2.5     3
0       2       1       1       4
```

1.2. Metoda Jacobiego

Metoda Jacobiego jest to metodą iteracyjną rozwiązywania układu równań liniowych. Metody te polegają na konstruowaniu ciągu przybliżeń wektora rozwiązań $x^{(0)}, x^{(1)} \dots x^{(i)}$ określonego wzorem:

$$x^{(i+1)} = Mx^{(i)} + w \tag{15}$$

gdzie: $i = 0,1 \dots$, M – macierz kwadratowa, w – wektor.

Rozważmy układ równań:

$$Ax = b \tag{16}$$

Macierz A rozkładamy na 3 macierze:

$$A = L + D + U \tag{17}$$

gdzie: L – macierz trójkątna dolna, D – macierz diagonalna, U – macierz trójkątna górna.

Wstawiając równanie (17) do (16) możemy przekształcić kolejno:

$$(L + D + U)x = b \tag{18}$$

$$Dx = -(L + U)x + b \tag{19}$$

$$x = -D^{-1}(L + U)x + D^{-1}b \tag{20}$$

Ciąg przybliżeń rozwiązania przyjmuje następującą postać:

$$x^{(i+1)} = -D^{-1}(L + U)x^{(i)} + D^{-1}b \tag{21}$$

Metoda Jacobiego jest zbieżna dla macierzy nieredukowalnych i diagonalnie słabo dominujących.

Macierz $A = (a_{ij})$ nazywamy diagonalnie słabo dominującą jeśli dla $i = 0,1 \dots n$ spełniane są warunki:

$$|a_{ii}| \geq \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}| \tag{22}$$

oraz spełniony jest co najmniej jeden warunek dla dowolnego i:

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}| \tag{23}$$

Przykład 2

```
Uklad rownan:
8       2       2       4       5
2       5       1       1       -4
0       3       4       1       2
-1      -2      1       5       7

Macierz L+U:
0       2       2       4
2       0       1       1
0       3       0       1
-1      -2      1       0

Macierz diagonalna odwrotna (Dodw):
0.125   0       0       0
0       0.2     0       0
0       0       0.25    0
0       0       0       0.2

Rozwiazanie po 5 iteracjach:
x[0]: 0.28535
x[1]: -1.2878
x[2]: 1.28868
x[3]: 0.692447
```

Zad 1. Napisz program, który będzie rozwiązywał układ n równań liniowych o n niewiadomych metodą Gaussa. Wymagania:

a) Dane pobierane są z pliku.
b) W przypadku wystąpienia 0 na przekątnej macierzy, program wypisze stosowny komunikat.
c) W wyniku działania program wypisuje:
   - Macierz rozszerzoną (przed obliczeniami)
   - Macierz rozszerzoną (po pierwszym etapie obliczeń – postępowanie proste)
   - Rozwiązanie układu równań ($x_0 - x_n$)
d) Poprawność działania programu zweryfikować danymi, które podano w przykładzie w rozdziale 1.1.

Na UPEL należy przesłać opracowany program oraz wynik obliczeń w formie zrzutu ekranu (10 pkt).

Zad 2. Zmodyfikuj program (napisać dodatkową funkcję), tak aby rozwiązywał układ n równań liniowych o n niewiadomych z pivoting'iem. Rozwiąż następujący układ równań podany w postaci macierzy rozszerzonej:

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 & 1 & 10 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 6 \\ 4 & 5 & 2 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 9 & 1 \end{bmatrix}$$

Na UPEL należy przesłać opracowany program oraz wyniki obliczeń w formie zrzutu ekranu (5 pkt).

Zad 3. Napisz program, który będzie rozwiązywał układ n równań liniowych o n niewiadomych metodą Jacobiego. Wymagania:

a) Dane pobierane są z pliku.
b) Program wypisze układ równań, sprawdzi czy macierz jest diagonalnie słabo dominująca i wyświetli stosowny komunikat.
c) Warunkiem zatrzymania algorytmu jest podana przez użytkownika ilość iteracji.
d) Program wypisze macierze: $L + U$ oraz D^{-1}.
e) Program wypisze rozwiązanie układu równań.

Na UPEL należy przesłać opracowany programu oraz wynik obliczeń w formie zrzutu ekranu (5 pkt).