1. Aproksymacja

Przyczyny stosowania aproksymacji:

- chęć zastąpienia funkcji niedogodnej do obliczeń numerycznych inną, dogodniejszą funkcją, która będzie niewiele odbiegać od funkcji wyjściowej,
- potrzeba wyznaczenia wartości funkcji danej dyskretnie (na skończonej liczbie punktów) w innym punkcie obszaru,
- konieczność znalezienia dostatecznie gładkiej funkcji ciągłej przechodzącej w pobliżu zadanych punktów,
- różniczkowanie numeryczne.

1.1. Aproksymacja średniokwadratowa w bazie wielomianów

Dane są wartości pewnej funkcji $y = f(x)$, która na zbiorze X punktów $x_0, x_1 \dots x_m$ przyjmuje wartości $y_0, y_1 \dots y_m$. Zadaniem aproksymacji średniokwadratowej jest wyznaczenie takiej funkcji $F(x)$, aby zminimalizować błąd średniokwadratowy:

$$E = \sum_{i=0}^{m} w(x_i)\,[f(x_i) - F(x_i)]^2 \tag{1}$$

gdzie: $w(x_i)$ – funkcja wagowa, m – ilość punktów – 1.

Poszukujemy wielomianu w postaci:

$$F(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j \varphi_j(x) \tag{2}$$

gdzie: a_j – współczynniki wielomianu, n – stopień wielomianu, $\varphi_j(x)$ – funkcja bazowa.

Podstawiając (2) do (1) otrzymujemy:

$$E = \sum_{i=0}^{m} w(x_i) \left[f(x_i) - \sum_{j=0}^{n} a_j \varphi_j(x_i) \right]^2 \tag{3}$$

Aby zminimalizować błąd średniokwadratowy obliczamy pochodne cząstkowe funkcji E względem parametrów $a_0 \dots a_n$ (warunek na ekstremum funkcji):

$$\frac{\partial E}{\partial a_k} = -2 \sum_{i=0}^{m} w(x_i) \left[f(x_i) - \sum_{j=0}^{n} a_j \varphi_j(x_i) \right] \varphi_k(x_i) = 0 \tag{4}$$

gdzie: $k = 0,1,2, \dots n$

Przyjmujemy bazę przestrzeni funkcji aproksymujących w postaci:

$$\begin{gathered} \varphi_j(x) = x^j, dla\ j = 0,1,2, \dots n \\ \varphi_k(x) = x^k, dla\ k = 0,1,2, \dots n \end{gathered} \tag{5}$$

Po uproszczeniu i zmianie kolejności sumowania równania (4) otrzymujemy:

$$\sum_{i=0}^{m} \varphi_k(x_i) f(x_i) w(x_i) - \sum_{i=0}^{m} \varphi_k(x_i) \varphi_j(x_i) w(x_i) \sum_{j=0}^{n} a_j = 0 \tag{6}$$

Wprowadzamy następujące oznaczenia:

$$g_{kj} = \sum_{i=0}^{m} \varphi_k(x_i) \varphi_j(x_i) w(x_i) \tag{7}$$

$$F_k = \sum_{i=0}^{m} \varphi_k(x_i) f(x_i) w(x_i) \tag{8}$$

Wtedy równanie (6) przyjmuje postać:

$$\sum_{j=0}^{n} g_{kj}\, a_j = F_k, dla\ k = 0,1,2, \ldots, n \tag{9}$$

Układ równań liniowych w postaci macierzowej ma następującą postać:

$$\begin{bmatrix} g_{00} & g_{01} & \cdots & g_{0j} & \cdots & g_{0n} \\ g_{10} & g_{11} & \cdots & g_{1j} & \cdots & g_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{k0} & g_{k1} & \cdots & g_{kj} & \cdots & g_{kn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n0} & g_{n1} & \cdots & g_{nj} & \cdots & g_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_0 \\ F_1 \\ \vdots \\ F_k \\ \vdots \\ F_n \end{bmatrix} \tag{10}$$

lub:

$$g \cdot a = F \tag{11}$$

1.2. Przykład

Mamy dane punkty: (1, 2), (2, 4), (3, 3), (4, 5), (5, 6), (6, 9), (7, 11), (8, 11). Przyjmujemy, że podane punkty chcemy opisać funkcją liniową. Zakładamy, że dla wszystkich punktów waga jest równa 1. Następnie podstawiając odpowiednie dane do wzorów (7) i (8) otrzymujemy:

$$\begin{gathered} g_{00} = 8 \\ g_{01} = 36 \\ g_{10} = 36 \\ g_{11} = 204 \end{gathered} \tag{12}$$

$$\begin{gathered} F_0 = 51 \\ F_1 = 288 \end{gathered} \tag{13}$$

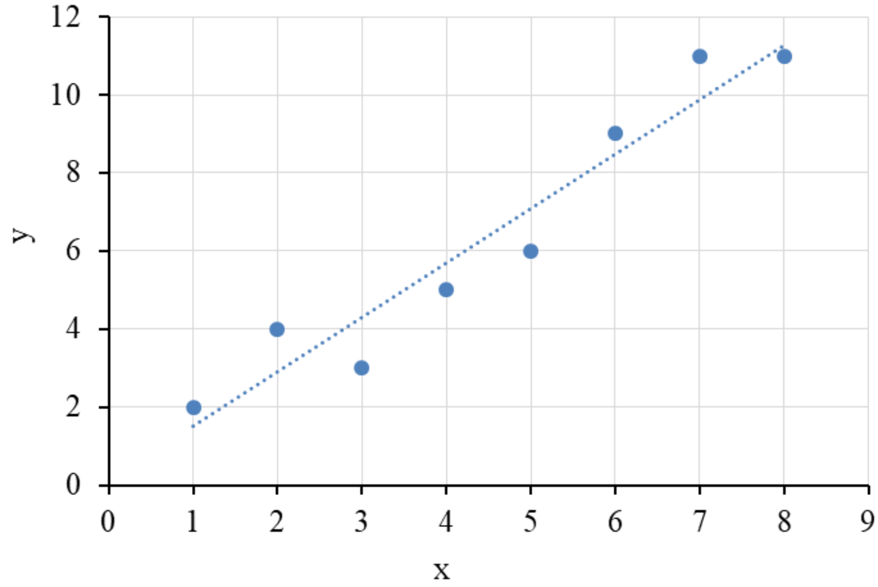
W rezultacie otrzymujemy układ równań w postaci:

$$\begin{bmatrix} 8 & 36 \\ 36 & 204 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 51 \\ 288 \end{bmatrix} \tag{14}$$

Rozwiązanie układu równań (14) jest następujące:

$$\begin{aligned} a_0 &= 0.107 \\ a_1 &= 1.392 \end{aligned} \tag{15}$$

Wykres przebiegu funkcji aproksymującej przedstawiono na Rys. 1.



Rys. 1. Wykres liniowej funkcji aproksymującej

Zad 1. Napisz program, który będzie obliczał współczynniki dla wielomianu aproksymującego dowolnego stopnia. Wymagania:

a) Liczba węzłów, węzły aproksymacji, wartości aproksymowanej funkcji i funkcja wagowa są podawane w kodzie programu.
b) W wyniku działania program wypisuje:
    - Liczbę węzłów
    - Podane węzły aproksymacji i wartości w węzłach oraz obliczone wartości funkcji aproksymującej w węzłach aproksymacji
    - Współczynniki wielomianu aproksymującego

Przeprowadzić aproksymację za pomocą funkcji liniowej dla punktów podanych w przykładzie.

Na UPEL należy przesłać opracowany program oraz wynik obliczeń w formie zrzutów ekranu (13 pkt).

Do rozwiązania układu równań wykorzystać metodę eliminacji Gaussa zaimplementowaną na poprzednich zajęciach.

Zad 2. Dane są punkty: (1, 3), (3, 4), (4, 11), (7, 10), (9, 11), (13, 10), (14, 8), (16, 6). Wyznacz wielomiany drugiego stopnia aproksymujące podane wyżej dane dla następujących funkcji wagowych: $w_1(x) = 1$ i $w_2(x) = x^2$.

W sprawozdaniu zamieść zrzuty ekranu prezentujące wyniki działania programu dla obu uzyskanych funkcji aproksymujących. Wykonaj wykres dla uzyskanych funkcji. Na wykresie należy zamieścić zbiór przybliżanych punktów (seria punktowa) oraz przebieg uzyskanych funkcji aproksymujących (seria punktowa z wygładzonymi liniami). Dane zamieszczone w sprawozdaniu należy odpowiednio opisać (7 pkt).

Na UPEL należy przesłać zmodyfikowany program oraz krótkie sprawozdanie z wynikami (7 pkt).