

# **ODPOWIEDŹ PRZEKROJU ZESPOŁONEGO NA ZGINANIE UKOŚNE Z SIŁĄ OSIOWĄ**

Response of composite sections to oblique  
bending with axial load.

(praca o charakterze numerycznym)

Autor: Michał Ziobro

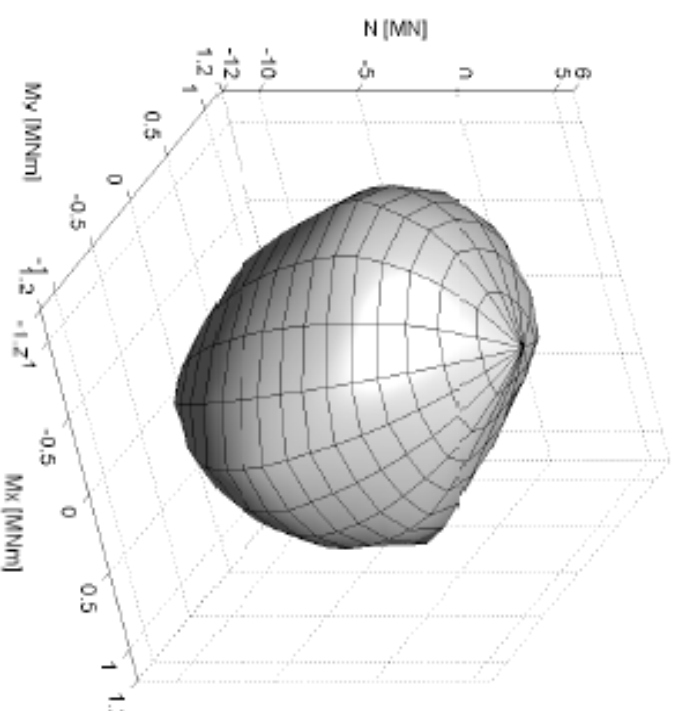
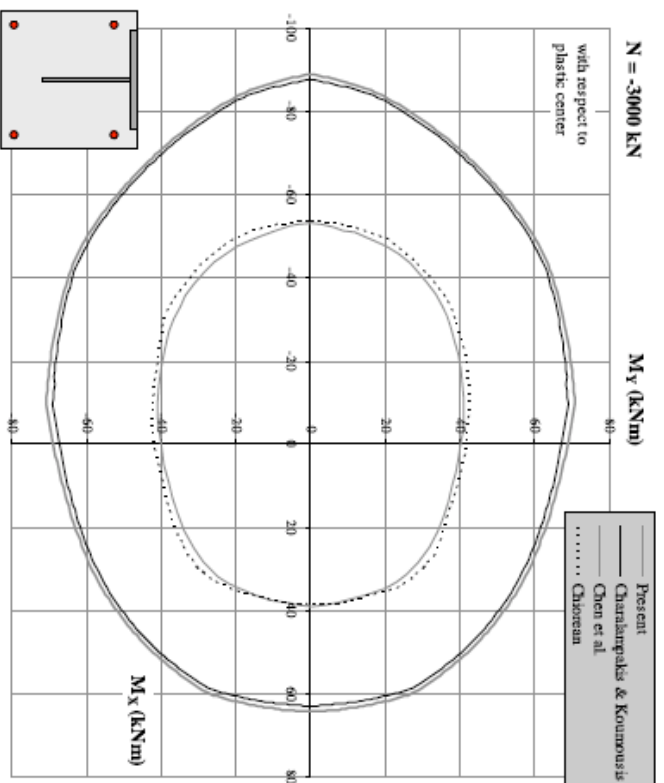
Promotor: dr inż. Adam Zaborski

# Podstawy merytoryczne:

- Vassilis K. Papanikolaou, Analysis of arbitrary composite sections in biaxial bending and axial load, Computers and Structures 98-99 (2012)
- Cosmin G. Chioorean, A Computer Method for Rapid Design Of Composite Steel-concrete Cross-sections, The Open Civil Engineering Journal 01/2013; 7(1):1-17
- Eurokod EC4 (konstrukcje zespolone), PN-EN 1994-1-1
- Eurokod EC2 (konstrukcje żelbetowe), PN-EN 1992-1-1
- Eurokod EC3 (konstrukcje metalowe, PN-EN 1993-1-1
- Rosati L, Marmo F, Serpieri R. Enhanced solution strategies for ultimate strength analysis of composite steel-concrete sections subject to axial force and biaxial bending, Comput Methods Appl Mech Eng 2008; 197; 1033-55
- [mathworld.wolfram.com](http://mathworld.wolfram.com), [wikipedia.org](http://wikipedia.org), (formuły numeryczne)

# Cel Pracy Inżynierskiej

Stworzenie programu umożliwiającego uzyskiwanie krzywych interakcji (powierzchni interakcji) sił przekrojowych dla dowolnego przekroju zespolonego.



# Założenia do obliczeń

- Techniczna teoria zginania
- Jednoosiowy stan naprężenia (pomijane naprężenia styczne)
- Hipoteza płaskich przekrojów (Bernoulliego)
- Związki konstytutywne dla betonu i stali wg EC4

## Główne etapy obliczeń

- Sterowanie kinematyczne – dla zadanego rozkładu odkształceń w normowo dopuszczalnych granicach
- Określenie rozkładu naprężenia (związek  $\sigma - \epsilon$ )
- Siły przekrojowe ( $M_x$ ,  $M_y$ ,  $N$ ) drogą całkowania naprężenia w poprzedziałach  
(zamiana całek powierzchniowych na całki krzywoliniowe)

# 1. Środowisko Programowania

- Język C/C++
- Biblioteka programistyczna QT
- QT użyte głównie w celu stworzenia graficznego interfejsu użytkownika: wprowadzanie przekroju, rysowanie przekroju, rysowanie wykresów krzywych interakcji
- Obiektowy zapis przekroju zespolonego
- Główne obliczenie numeryczne w języku C++

## 2. Zapis przekroju

3 rodzaje komponentów:

- Powierzchnie (Surface)
- Elementy liniowe (Line)
- Zbrojenie (FiberGroup)

- Dziedziczą po klasie Points

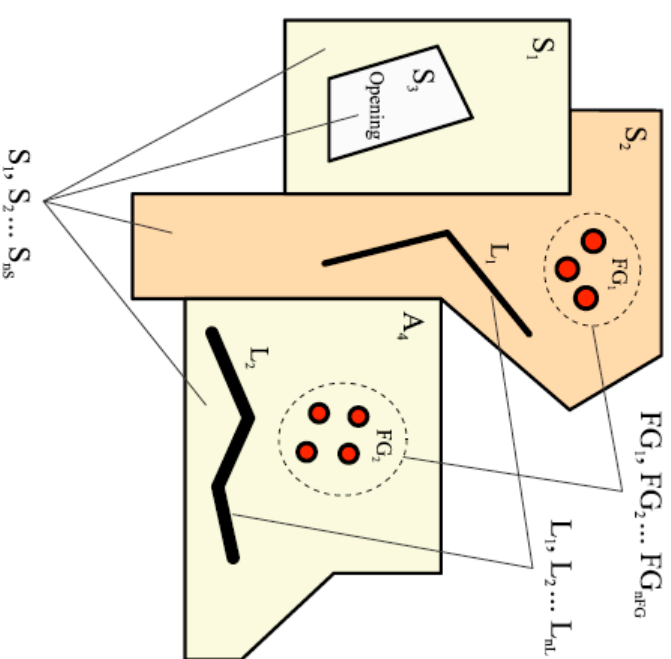
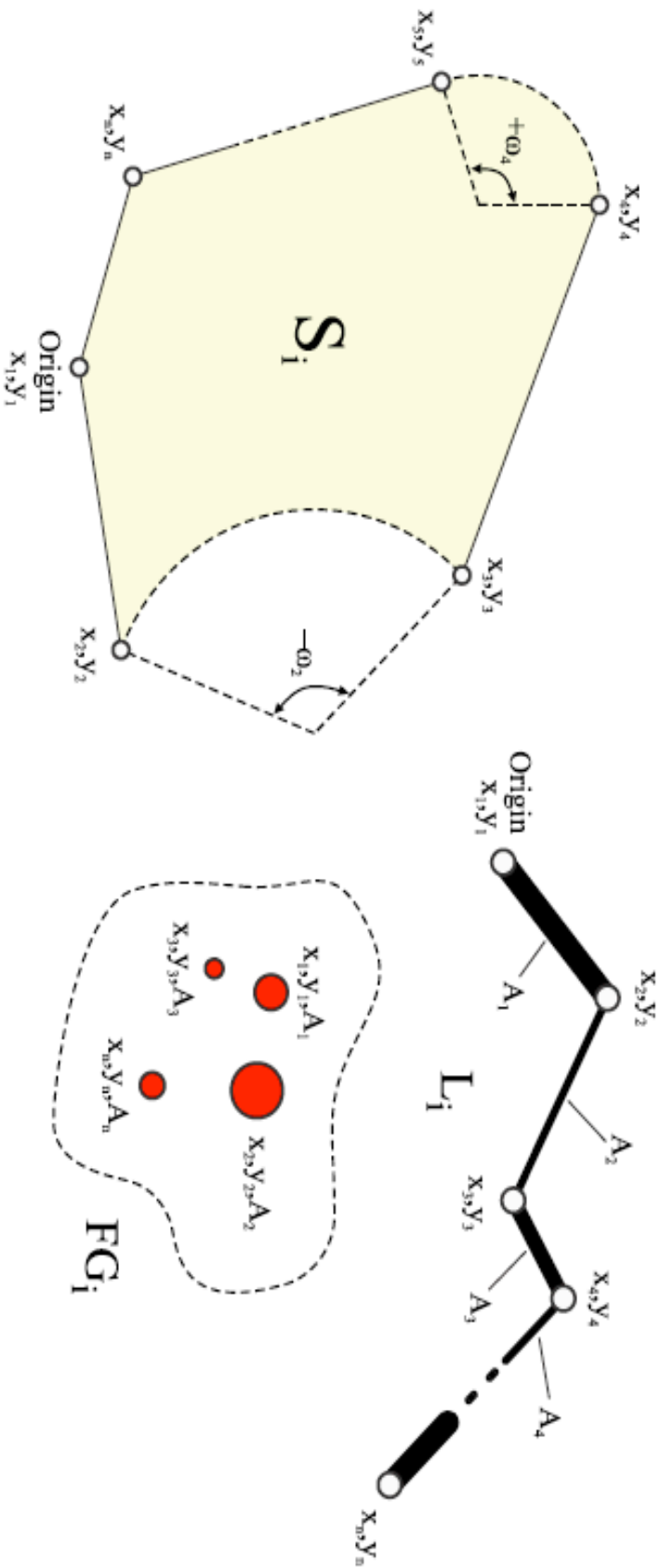


Fig. 1. Composition of arbitrary composite section.

# Zapis numeryczny komponentów

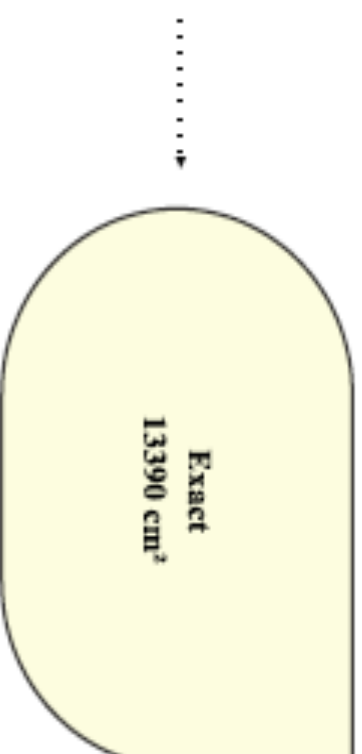
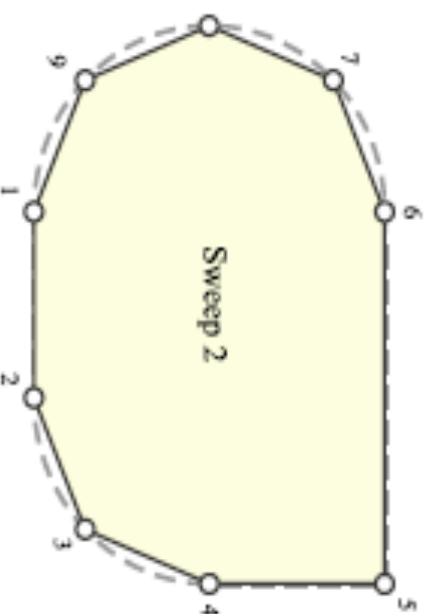
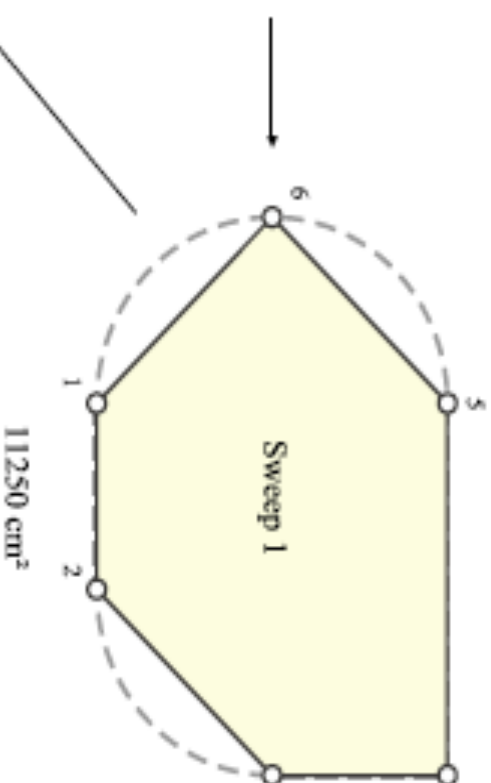
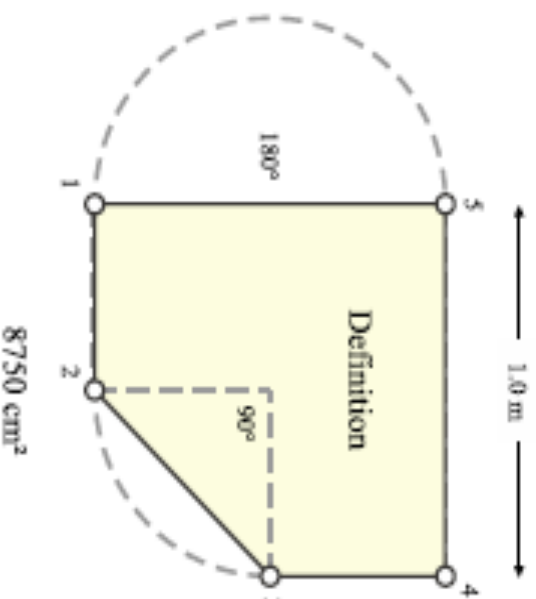


$S_i \rightarrow [(x_1, y_1, \omega_1), (x_2, y_2, \omega_2) \dots (x_n, y_n, \omega_n)]$  Surface

$L_i \rightarrow [(x_1, y_1, A_1), (x_2, y_2, A_2) \dots (x_{n-1}, y_{n-1}, A_{n-1}), (x_n, y_n)]$  Line

$FG_i \rightarrow [(x_1, y_1, A_1), (x_2, y_2, A_2) \dots (x_n, y_n, A_n)]$  FiberGroup

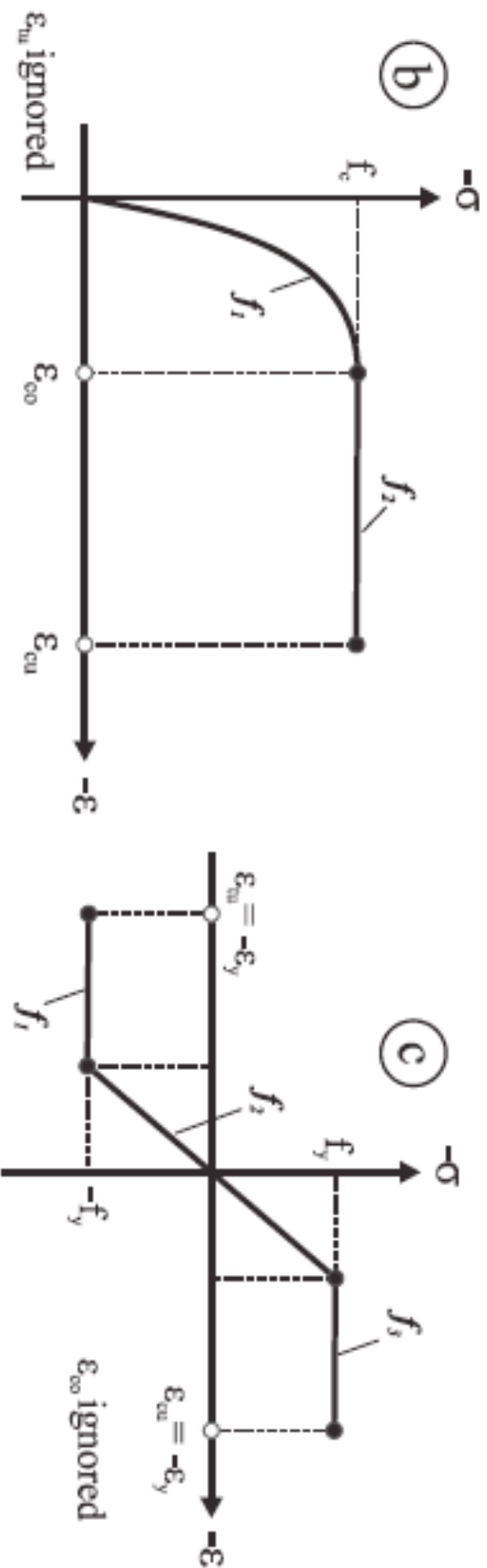
# Aproksymacja powierzchni wielobokiem



12803 cm<sup>2</sup> → 13240 cm<sup>2</sup> → 13352 cm<sup>2</sup> → 13381 cm<sup>2</sup> ...



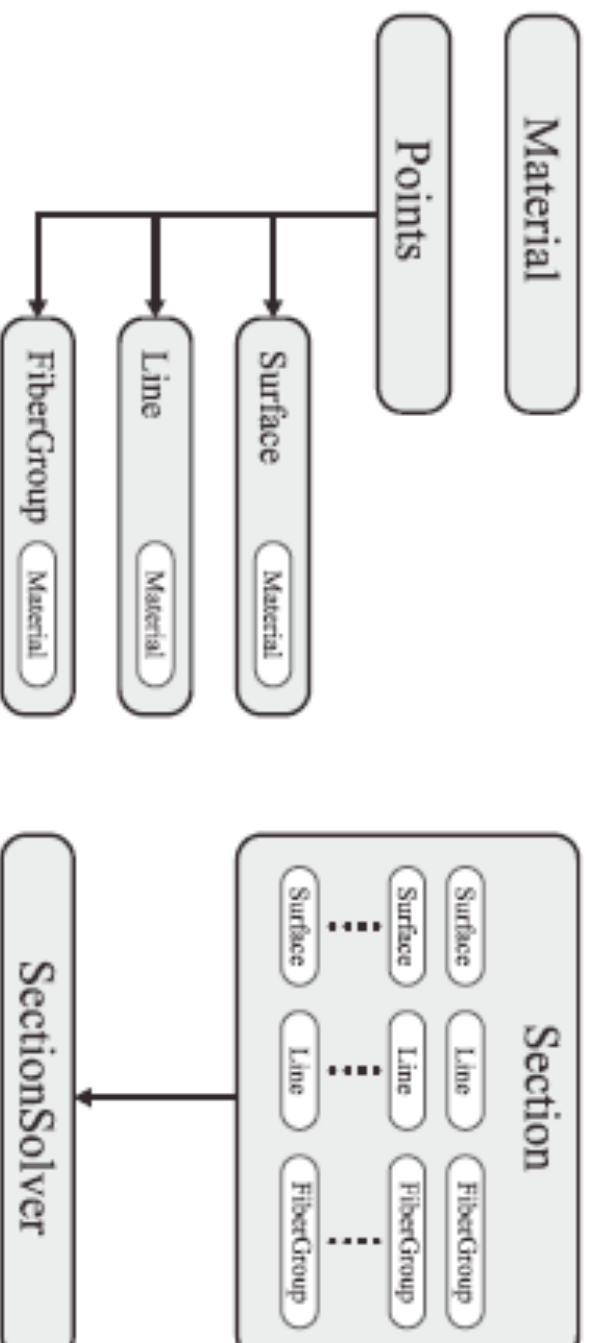
### 3. Zdefiniowanie materiału



Ograniczenie do predefiniowanych materiałów:  
Beton, Stal konstrukcyjna, Stal zbrojeniowa

Podczas definiowania przekroju można określić materiał każdego komponentu.

# Obiektowy zapis w języku C++



**Fig. 6.** Object-oriented formulation of the analysis engine.

# 4. Sterowanie odkształceniami

## 1. Opcja – Sterowanie osią obojętną

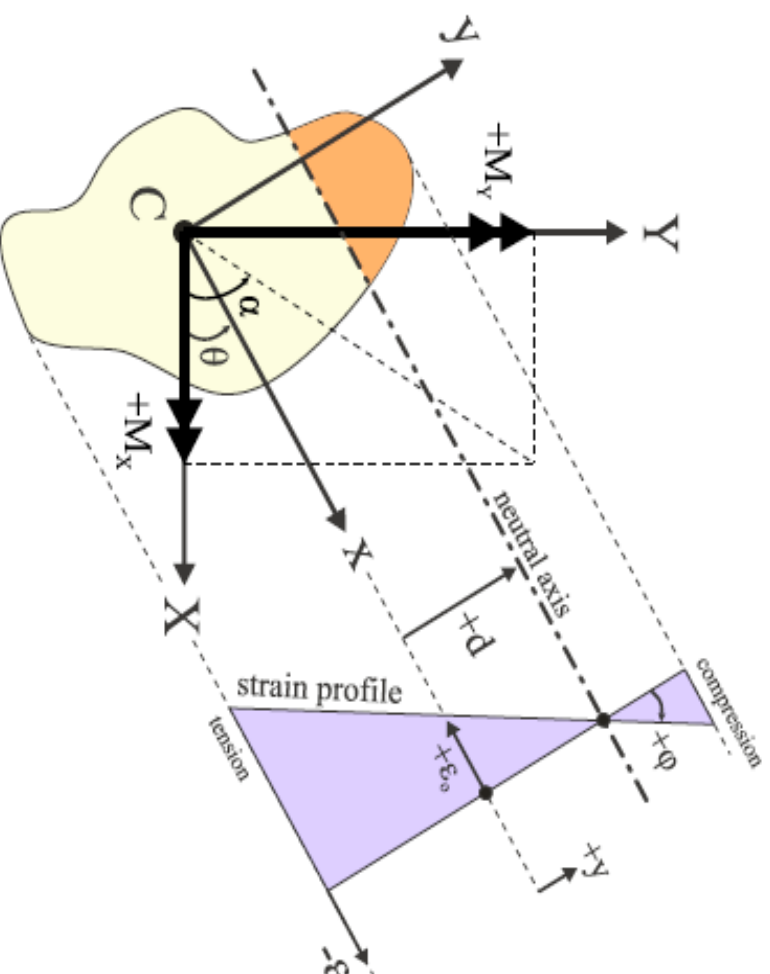
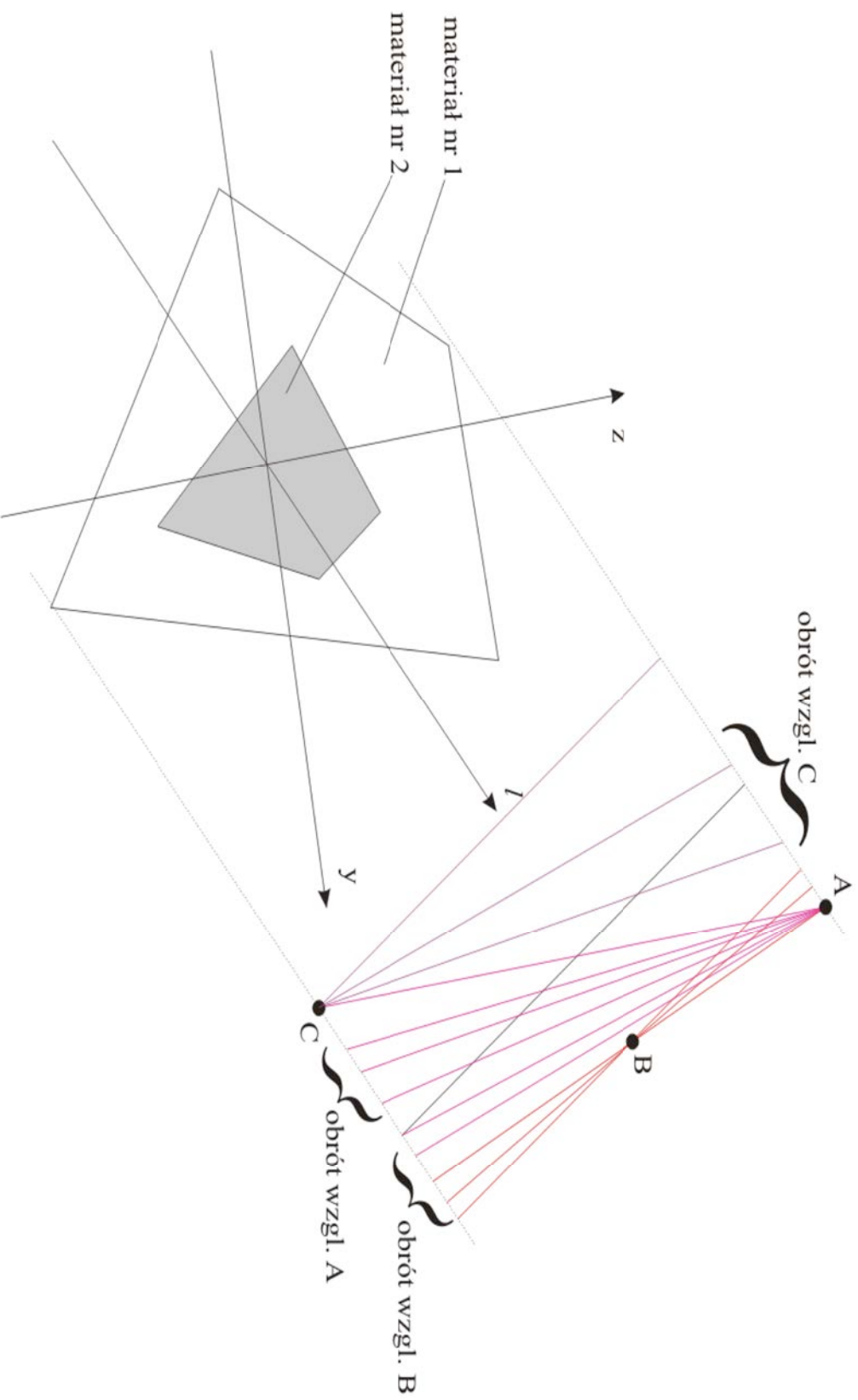


Fig. 5. Definition of section loading parameters.

## 2. Opcja – Sterowanie odkształceniami (w obrębie odkształceń granicznych)



$y, z$  - osie główne centralne (geometryczne)  
 $l$  - oś równoległa do osi obojętnej (prostopadła do płaszczyzny obciążenia)

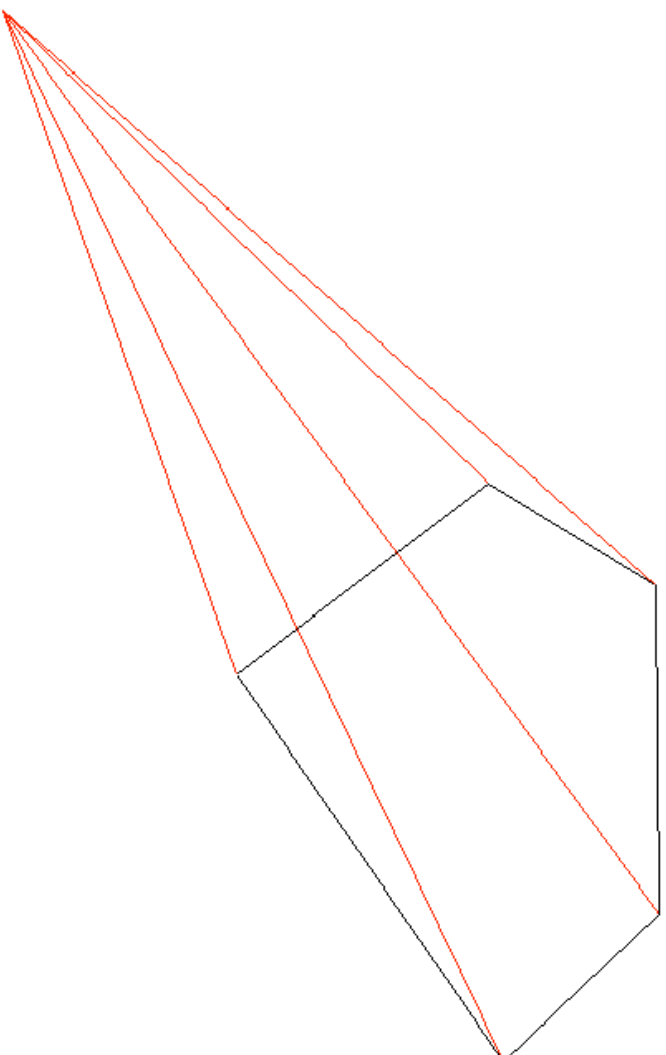
## **5. Odkształcenia → Naprężenia**

- Z poszczególnych profili odkształceń otrzymanych w wyniku sterowania odkształceniami w granicach odkształceń dopuszczalnych na podstawie zależności naprężenie – odkształcenie otrzymujemy naprężenia w podobszarach przekroju zespolonego.
- Oprócz sterowania odkształceniami (iteracja po profilach odkształceń) iteracyjnie obracamy układ lokalny przekroju (obróć profilu odkształceń do około przekroju)

# Potrzebne wzory:

- 1) Pole dowolnego wielokąta
- 2) Punkt środkowy łuku
- 3) Momenty statyczne i bezwładności dowolnego wielokąta (Suma momentów trójkątów tworzonych przez wektory wodzące końców poszczególnych boków wielokąta)
- 4) Wyznaczanie prowadzonego środka ciężkości całego przekroju zespolonego
- 5) Transformacje współrzędnych z układu globalnego do układu lokalnego

# Momenty statyczne wielokąta



wielkości są obliczane dla elementów trójkątnych,  
na jakie rozbija się przekrój

# Przykładowy kod w C++

```
double Surface::getGeometricalCenterX(void)
{
    double x_c = 0;
    double xi, yi, xi_1, yi_1;
    int numOffPoints = this->numberOfPoints();

    for(int i=0; i< numOffPoints; i++) {

        xi = points[i]->getX();
        yi = points[i]->getY();

        if( i+1 < numOffPoints) {
            xi_1 = points[i+1]->getX();
            yi_1 = points[i+1]->getY();
        } else {
            xi_1 = points[0]->getX();
            yi_1 = points[0]->getY();
        }

        x_c +=(xi + xi_1) * (xi*yi_1 - xi_1*yi);
    }

    x_c /= 6* this->calculatePolygonArea();

    return x_c;
}
```



# Całkowanie naprężeń

Obliczenie wynikowych sił wewnętrznych przekroju zespolonego, tj. siły osiowej N i momentów  $M_x$ ,  $M_y$  dla zadanego kierunku osi obojętnej (zadanego obrotu układu lokalnego - kąt  $\Theta$ ) oraz profilu odkształceń.

1. Sterowanie kierunkiem osi obojętnej (kątem  $\Theta$ )
2. Sterowanie odkształceniami dla ustalonego kąta  $\Theta$
3. Całkowanie poszczególnych profili odkształceń  $\rightarrow (M_x, M_y, N)$

$$R = \sum_{i=1}^{n_S} [\text{sign}(S_i) R_{S,i}] + \sum_{i=1}^{n_L} [\text{sign}(L_i) R_{L,i}] + \sum_{i=1}^{n_{FG}} [\text{sign}(F_{G,i}) R_{FG,i}]$$

Siły przekrojowe R są wynikiem sumowania udziału od poszczególnych komponentów: powierzchni, lini, zbrojenia.

# Metoda Kwadratury Gaussa

- Całkowanie komponentów powierzchniowych

$$R_{S,i} = \iint_{S_i} x^r y^s \sigma(y) dx dy \quad (\text{twierdzenie Greena})$$

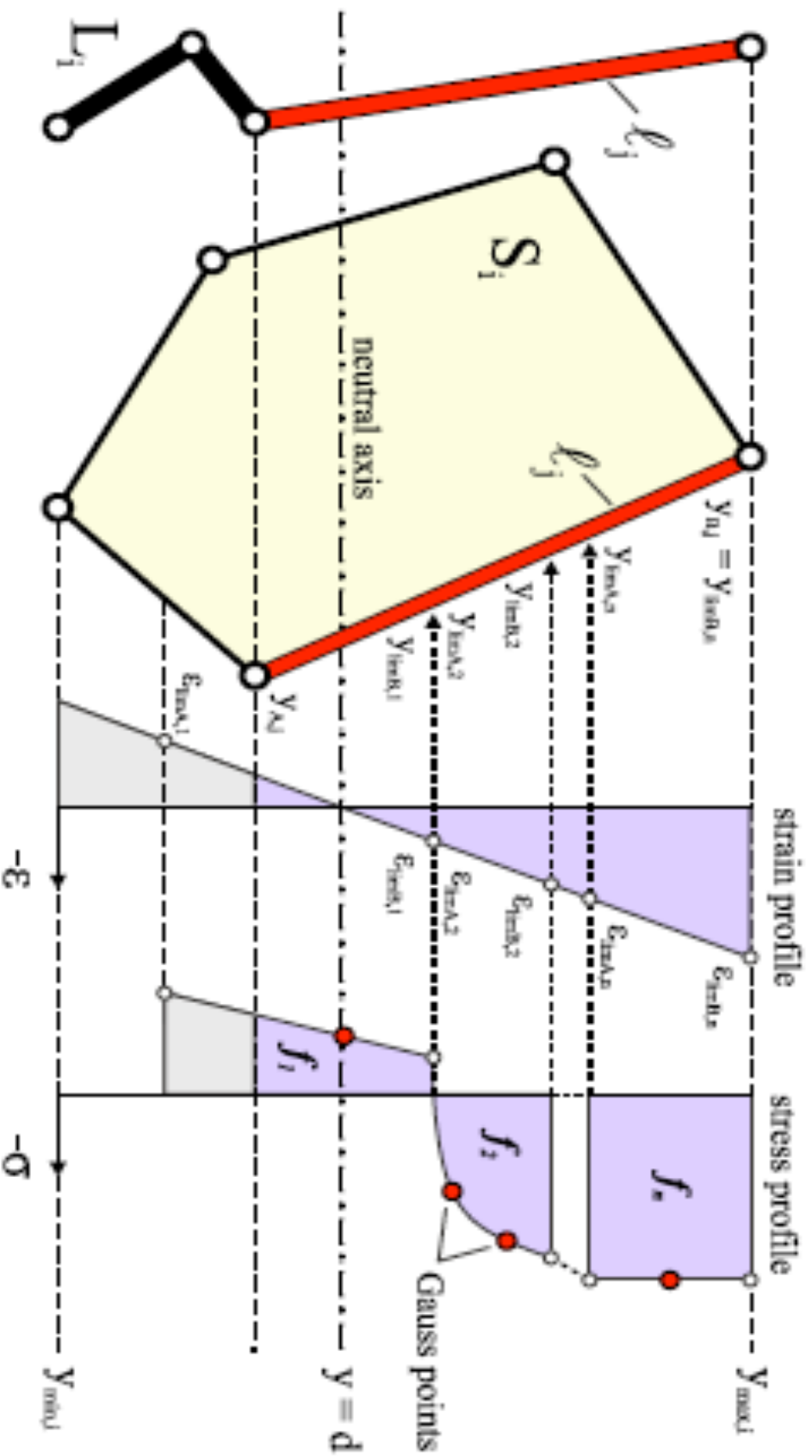
$$\begin{aligned} R_{S,i} &= \frac{1}{r+1} \int_{L_i} \phi x^{r+1} y^s \sigma(y) dy = \frac{1}{r+1} \sum_{j=1}^{n_{L_i}} \left[ \int_{\ell_j} \phi x^{r+1} y^s \sigma(y) dy \right] \\ &= \frac{1}{r+1} \sum_{j=1}^{n_{L_i}} I_j \end{aligned}$$

- Całkowanie komponentów liniowych i zbrojenia

$$\begin{aligned} R_{L,i} &= \oint_{L_i} x^r y^s t(y) \sigma(y) dy = \sum_{j=1}^{n_{L_i}} \left[ t_j \oint_{\ell_j} \phi x^r y^s \sigma(y) dy \right] = \sum_{j=1}^{n_{L_i}} I_j \\ R_{FG,i} &= \sum_{j=1}^{n_{FG_i}} [A_j x_j^r y_j^s \sigma(\varepsilon_0 - \varphi y_j)] \end{aligned}$$

# Całkowanie naprężeń

Odcinkowy charakter funkcji sigma-epsilon



# Całkowanie krawędzi wielokąta

$$\ell_j \mapsto x = a_j y + b_j$$

$$I_j = \oint_{\ell_j} (a_j y + b_j)^{r+1} y^s \sigma(y) dy = \oint_{\ell_j} F_j(y) dy \qquad \mathcal{N}(\varepsilon) = (\varepsilon - \varepsilon_o)/\varphi$$

$$I_j = \oint_{\ell_j} F_j(y) dy = \sum_{k=1}^{n_f} \left[ \frac{1}{2} (y_{\text{lim}B,k} - y_{\text{lim}A,k}) \sum_{m=1}^{n_{G_k}} [w_m F_j(y_m)] \right]$$

$$y_m = \frac{1}{2}(y_{\text{lim}B,k} + y_{\text{lim}A,k}) + \frac{\lambda_m}{2}(y_{\text{lim}B,k} - y_{\text{lim}A,k})$$

$$F_j(y_m) = (a_j y_m + b_j)^{r+1} y_m^s f_k(\varepsilon_o - \varphi y_m)$$

# Tablica z punktami Gaussa

Wielomian Legendre	Liczba punktów Gauss'a [nG]	Współrzędne punktów [ $\xi_m$ ]	Wagi [ $w_m$ ]
$P_0(\xi)$	0	-	-
$P_1(\xi)$	1	0	2
$P_2(\xi)$	2	$-\sqrt{\frac{1}{3}}, +\sqrt{\frac{1}{3}}$	1
$P_3(\xi)$	3	0	$\frac{8}{9}$
		$-\sqrt{\frac{3}{5}}, +\sqrt{\frac{3}{5}}$	$\frac{5}{9}$
$P_4(\xi)$	4	$-\sqrt{\frac{(3-2\sqrt{\frac{6}{5}})}{7}}, +\sqrt{\frac{(3-2\sqrt{\frac{6}{5}})}{7}}$	$\frac{18+\sqrt{30}}{36}$
		$-\sqrt{\frac{(3+2\sqrt{\frac{6}{5}})}{7}}, +\sqrt{\frac{(3+2\sqrt{\frac{6}{5}})}{7}}$	$\frac{18-\sqrt{30}}{36}$
		0	$\frac{128}{225}$
$P_5(\xi)$	5	$-\frac{1}{3}\sqrt{5-2\sqrt{\frac{10}{7}}}, +\frac{1}{3}\sqrt{5-2\sqrt{\frac{10}{7}}}$	$\frac{322+13\sqrt{70}}{900}$
		$-\frac{1}{3}\sqrt{5+2\sqrt{\frac{10}{7}}}, +\frac{1}{3}\sqrt{5+2\sqrt{\frac{10}{7}}}$	$\frac{322-13\sqrt{70}}{900}$
		0	$\frac{128}{225}$

# Całkowanie odcinka elementu liniowego

$$I_j = t_j \oint_{t_j} (a_j y + b_j)^T y^5 \sigma(y) dy = t_j \oint_{t_j} F_j(y) dy$$

$$I_j = t_j \oint_{t_j} F_j(y) dy = \sum_{k=1}^{n_f} \left[ \frac{A_k}{2} \sum_{m=1}^{n_{G_k}} [w_m F_j(y_m)] \right]$$

$$A_k = A_j \left| \frac{y_{limB,k} - y_{limA,k}}{y_{B,j} - y_{A,j}} \right|$$

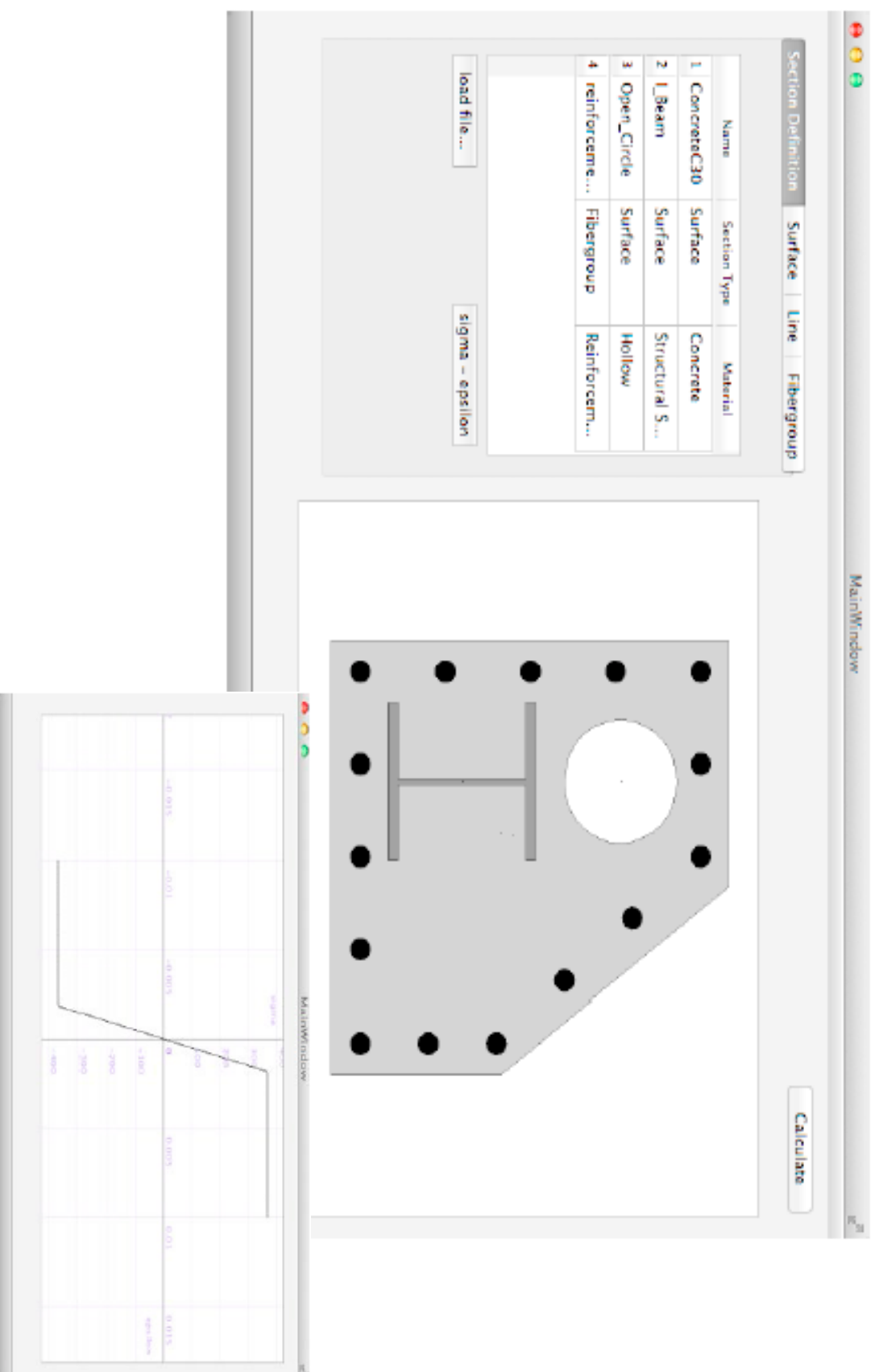
# Wpływ od zbrojenia

$$R_{RC,j} = \sum_{j=1}^{nRC_j} [A_j x_j^T y_j^5 \sigma(\varepsilon_o - \varphi y_j)]$$

# Krzywe i powierzchnie interakcji

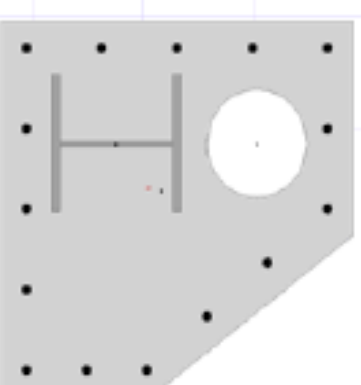
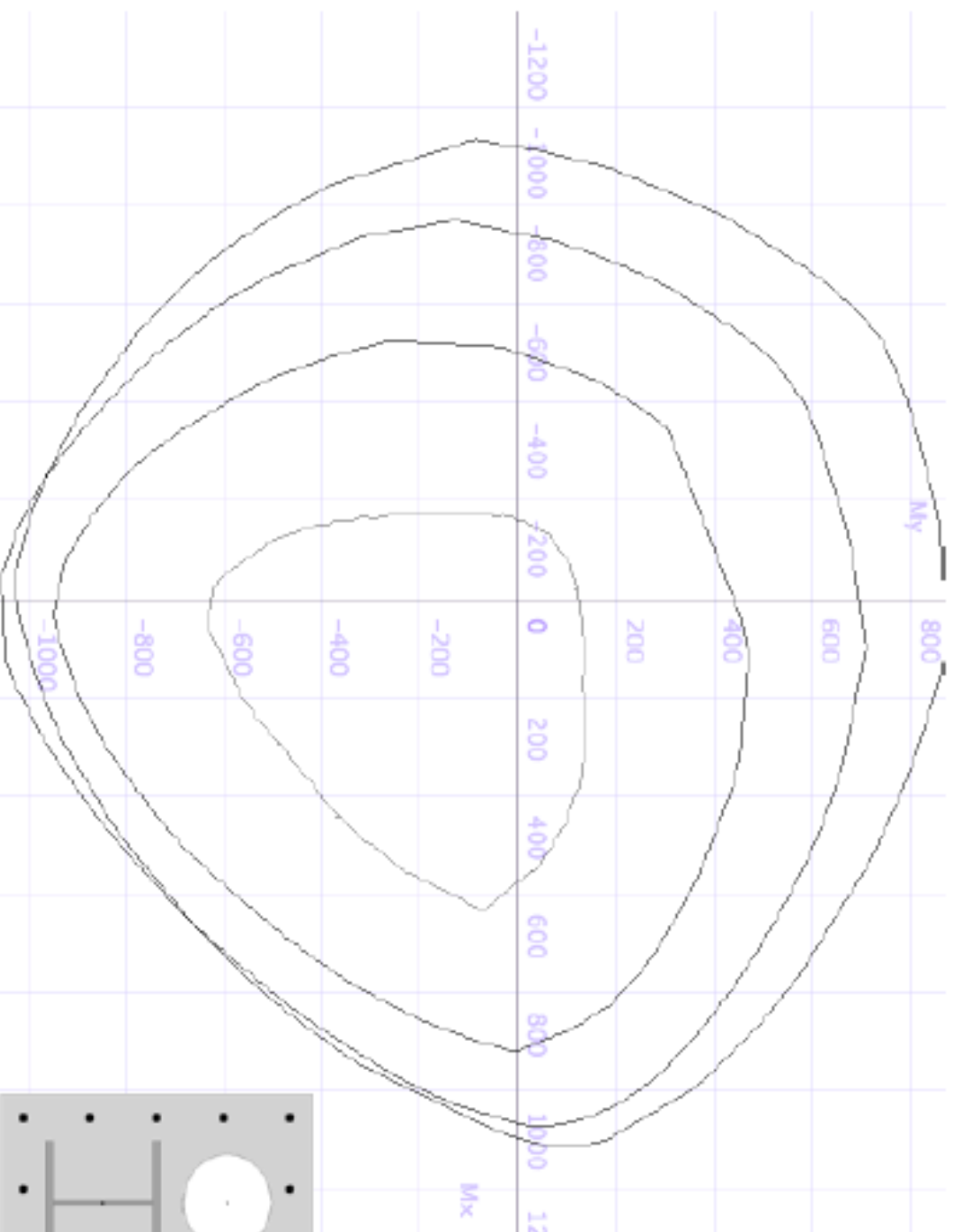
- W wyniku całkowania otrzymujemy siły wewnętrzne.
- Siły wewnętrzne otrzymane dla poszczególnych komponentów sumujemy (uwzględnienie przecięć powierzchni)
- Ostatecznie otrzymujemy zbiory dopuszczalnych sił ( $M_x$ ,  $M_y$ ,  $N$ )
- Rysujemy krzywe interakcji przekroju.

# Program komputerowy

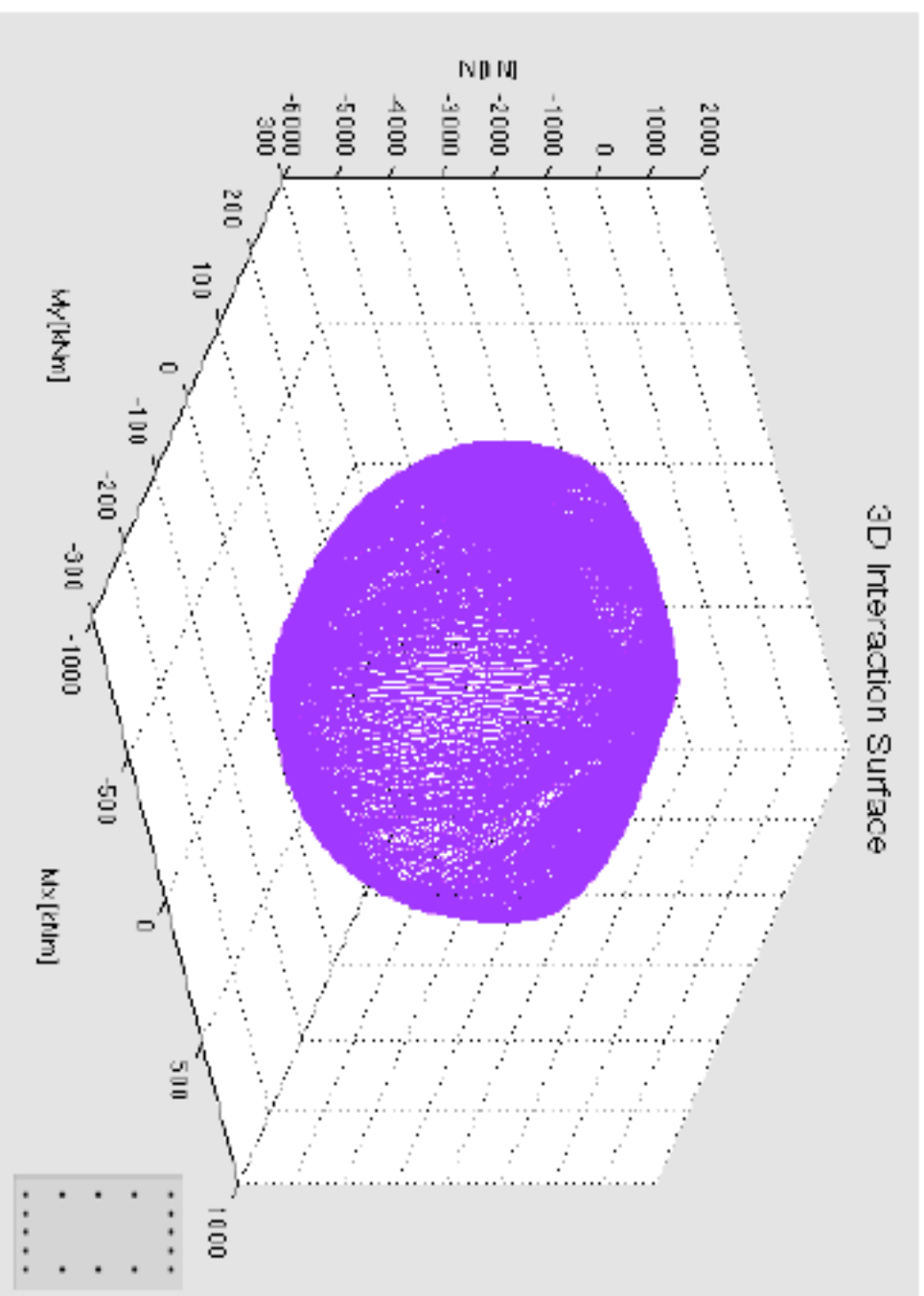




# Przykładowe krzywe interakcji



# Powierzchnie interakcji (MatLab)



# Bibliografia (prezentacja)

- Vassilis K. Papanikolaou, Analysis of arbitrary composite sections in biaxial bending and axial load, Computers and Structures 98-99 (2012)
- Notatki z konsultacji z dr inż. Adamem Zaborskim