ODPOWIEDŹ PRZEKROJU ZESPOLONEGO NA ZGINANIE UKOŚNE Z SIŁĄ OSIOWĄ

Response of composite sections to oblique bending with axial load.

Autor: Michał Ziobro

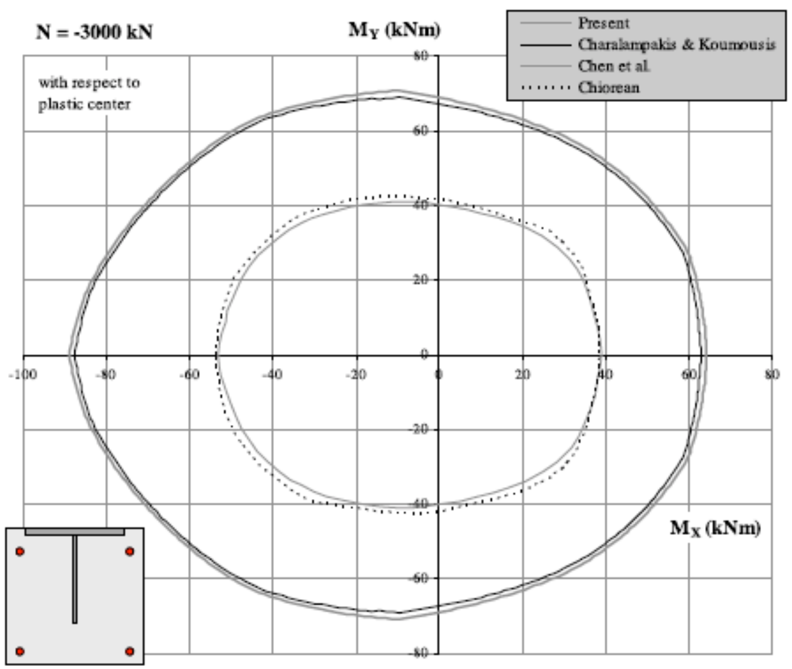
Promotor: dr inż. Adam Zaborski

Podstawy merytoryczne:

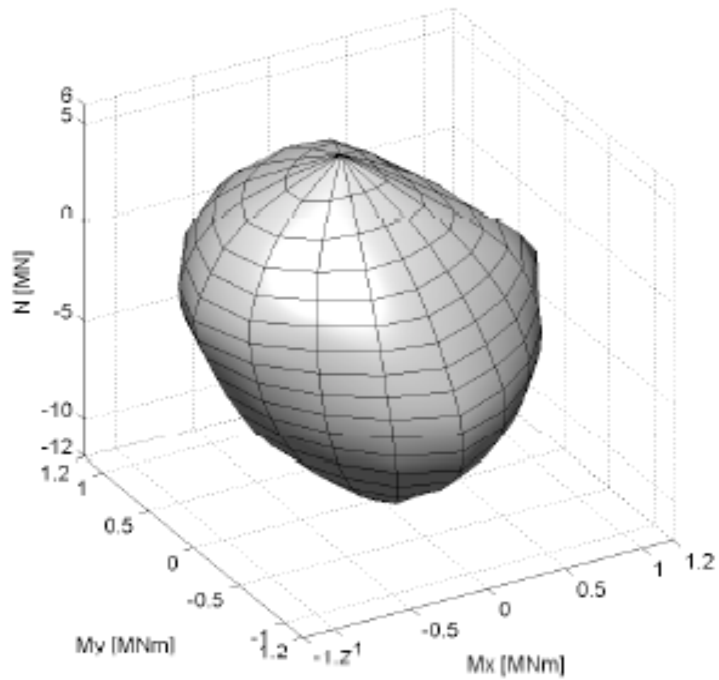
- Vassilis K. Papanikolaou, Analysis of arbitrary composite sections in biaxial bending and axial load, Computers and Structures 98-99 (2012)
- Cosmin G. Chiorean, A Computer Method for Rapid Design Of Composite Steel-concrete Cross-sections, The Open Civil Engineering Journal 01/2013; 7(1):1-17
- Eurokod EC4 (konstrukcje zespolone), PN-EN 1994-1-1
- Eurokod EC2 (konstrukcje żelbetowe), PN-EN 1992-1-1
- Eurokod EC3 (konstrukcje metaloe, PN-EN 1993-1-1
- Rosati L, Marmo F, Serpieri R. Enhanced solution strategies for ultimate strength analysis of composite steel-concrete sections subject to axial force and biaxial bending, Comput Methods Appl Mech Eng 2008; 197; 1033-55
- mathworld.wolfram.com, wikipedia.org, (formuły numerycze)

Cel Pracy Inżynierskiej

Stworzenie programu umożliwiającego uzyskiwanie krzywych interakcji (powierzchni interakcji) sił przekrojowych dla dowolnego przekroju zespolonego.



Rys.1 Krzywe interakcji [1]



Rys.2 Powierzchnia interakcji [3]

Założenia do obliczeń

Techniczna teoria zginania:

- Jednoosiowy stan naprężenia
  (pomijane naprężenia styczne)
- Hipoteza płaskich przekrojów (Bernoulliego)

Związki konstytutywne dla betonu i stali wg EC4

Główne etapy obliczeń

- Sterowanie kinematyczne – dla zadanego rozkładu odkształceń w normowo dopuszczalnych granicach
- Określenie rozkładu naprężenia (związek $\sigma - \varepsilon$)
- Siły przekrojowe (M_x, M_y, N) drogą całkowania naprężenia w podprzedziałach
  (zamiana całek powierzchniowych na całki krzywoliniowe)

1. Środowisko Programowania

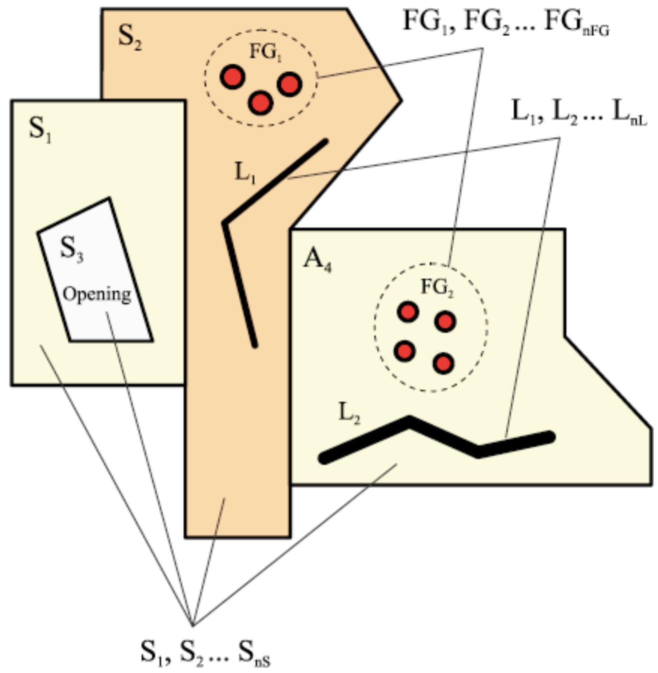
- Język C/C++
- Biblioteka programistyczna QT
- QT użyte głównie w celu stworzenia graficznego interfejsu użytkownika: wprowadzanie przekroju, rysowanie przekroju, rysowanie wykresów krzywych interakcji
- Obiektowy zapis przekroju zespolonego
- Główne obliczenie numeryczne w języku C++

2. Zapis przekroju

3 rodzaje komponentów:

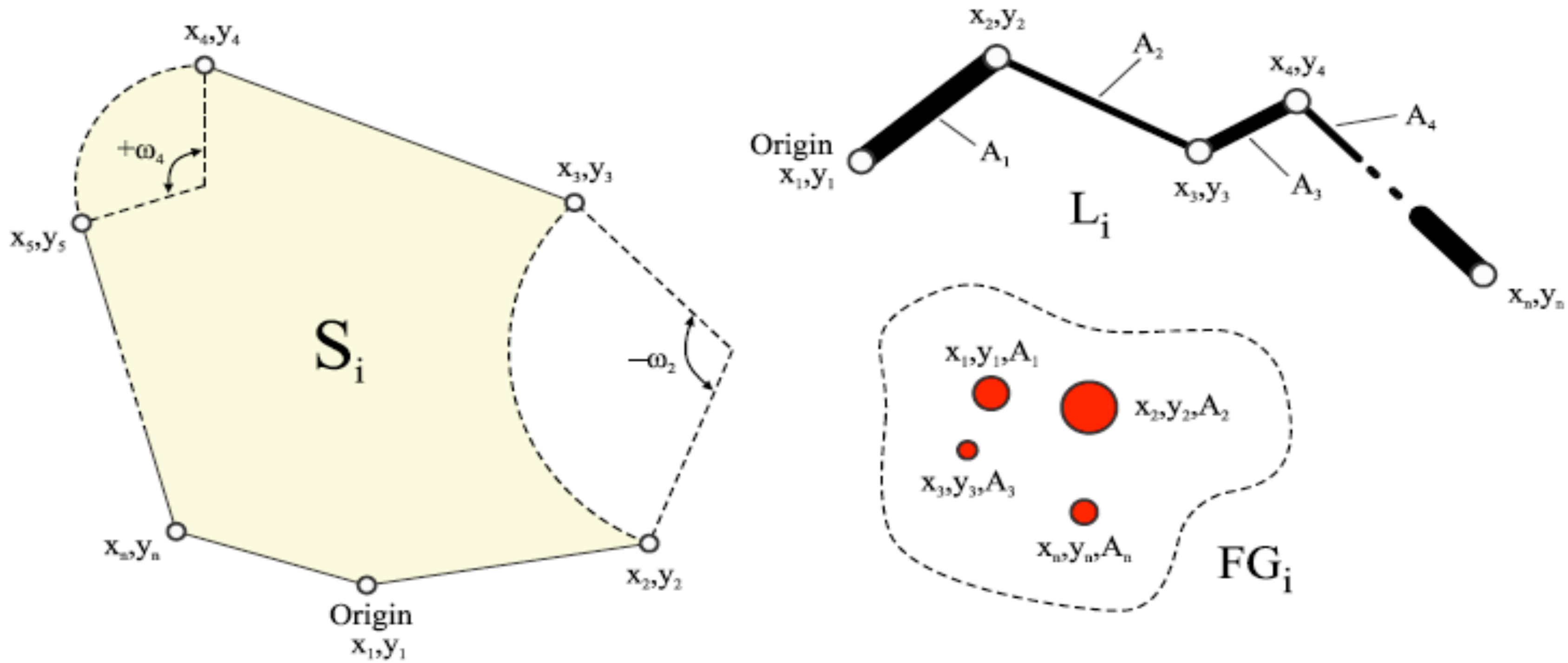
- Powierzchnie (Surface)
- Elementy liniowe (Line)
- Zbrojenie (FiberGroup)

- Dziedziczą po wspólnej klasie Points.



Rys. 3 Definicja komponentów [1]

Zapis numeryczny komponentów



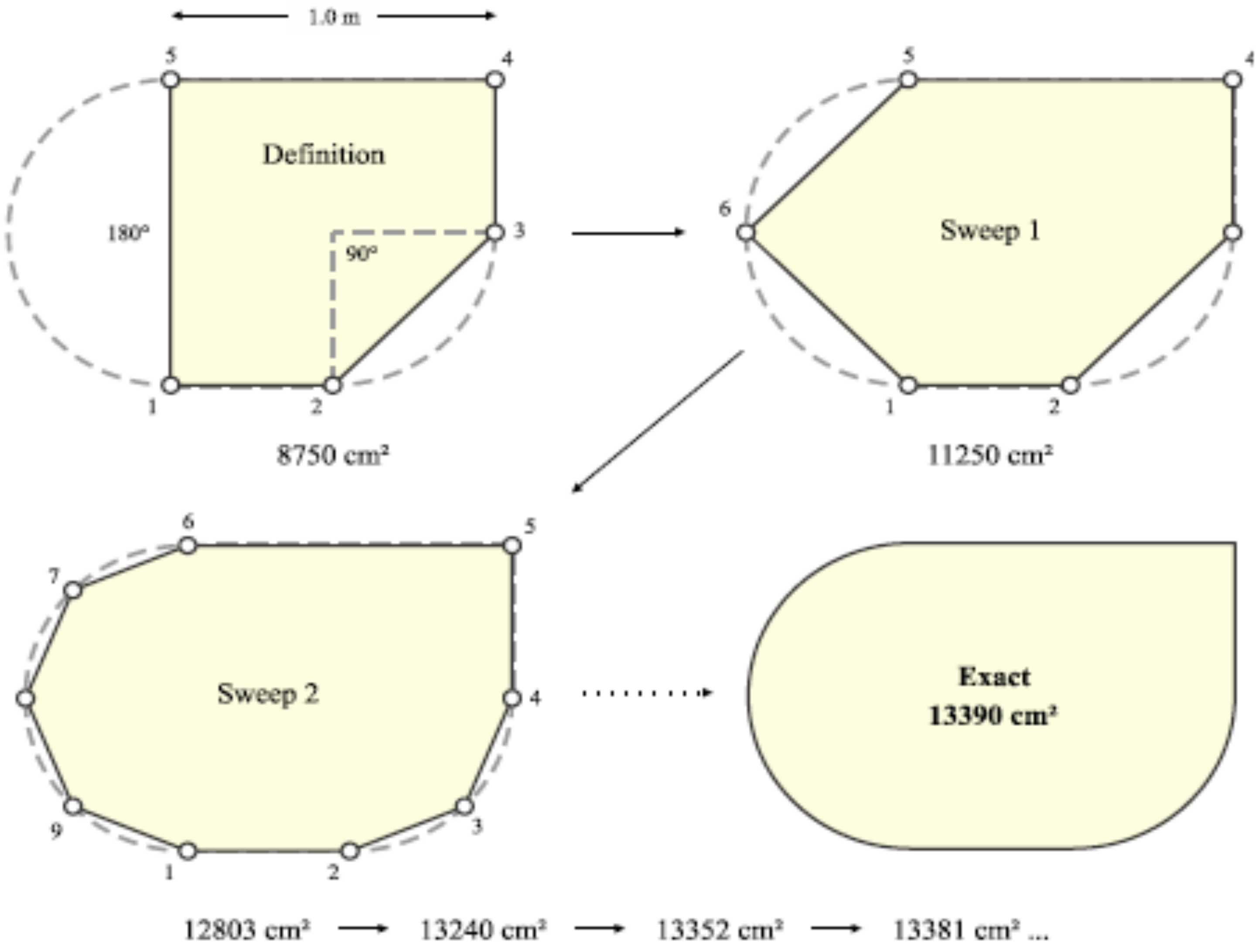
Rys. 4 Sposób zapisu różnych komponentów przekroju [1]

$S_i \rightarrow [(x_1, y_1, \omega_1), (x_2, y_2, \omega_2) \ldots (x_n, y_n, \omega_n)]$ Surface

$L_i \rightarrow [(x_1, y_1, A_1), (x_2, y_2, A_2) \ldots (x_{n-1}, y_{n-1}, A_{n-1}), (x_n, y_n)]$ Line

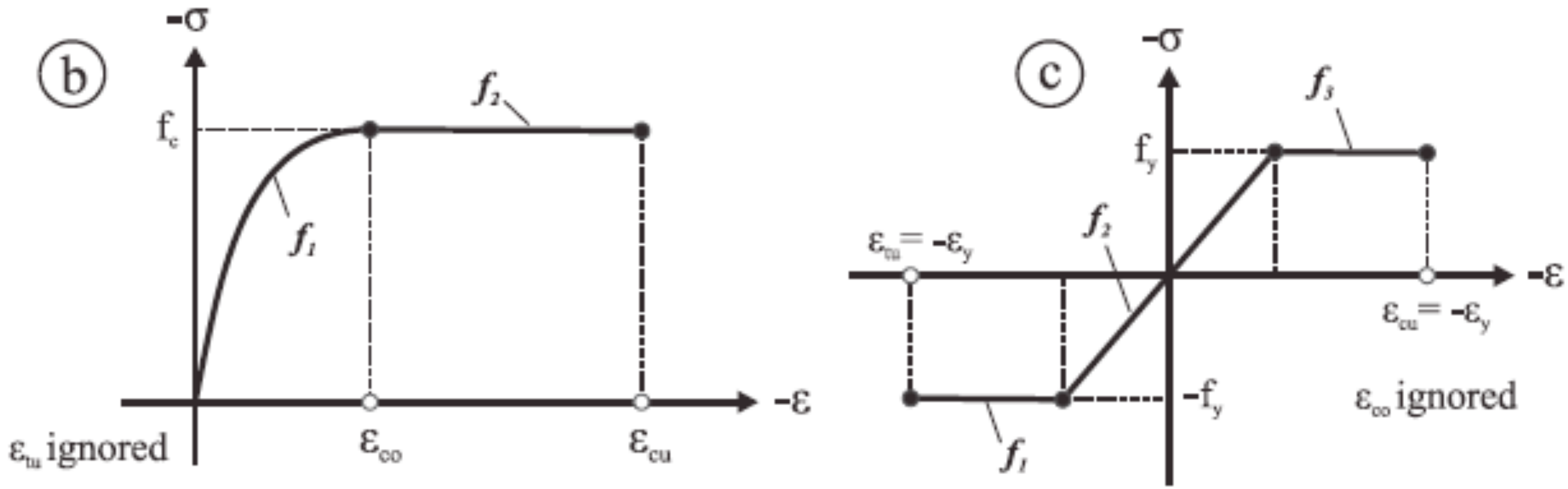
$FG_i \rightarrow [(x_1, y_1, A_1), (x_2, y_2, A_2) \ldots (x_n, y_n, A_n)]$ FiberGroup

Aproksymacja powierzchni wielobokiem



Rys. 5 Linearyzacja przekrojów zespolonych [1]

3. Zdefiniowanie materiału

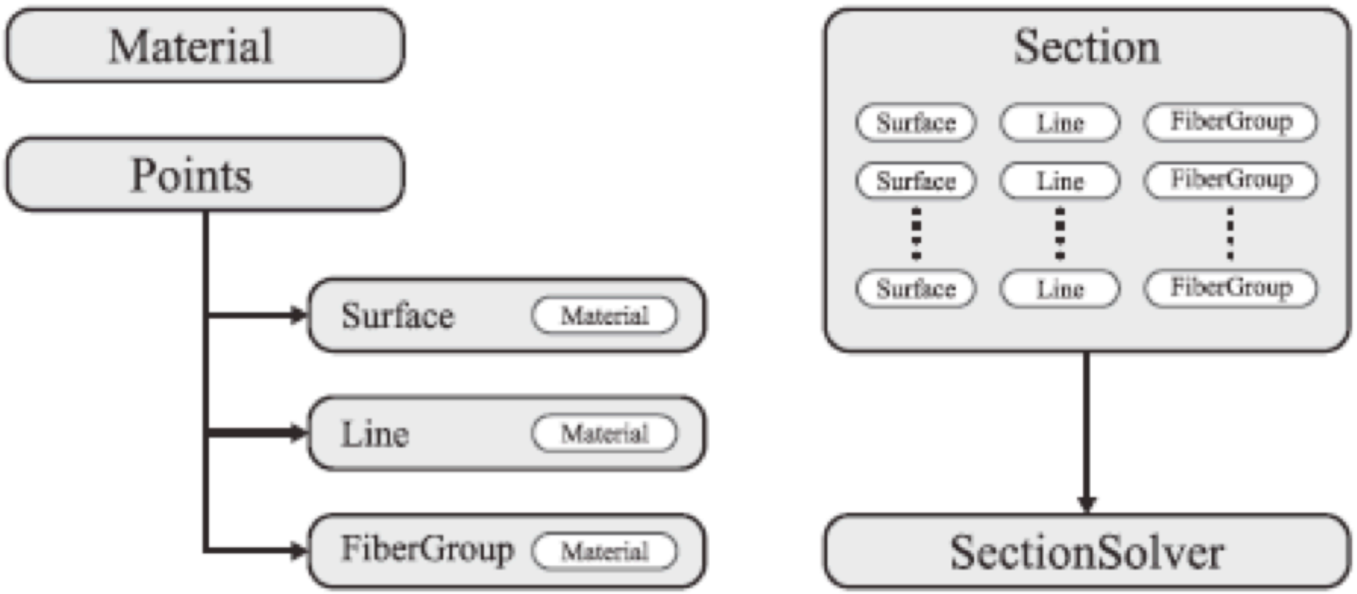


Rys. 6 Związki konstytutywne odcinkowo wielomianowe dla betonu i stali [1]

Ograniczenie do predefiniowanych materiałów:
Beton, Stal konstrukcyjna, Stal zbrojeniowa

Podczas definiowania przekroju można określić materiał każdego komponentu.

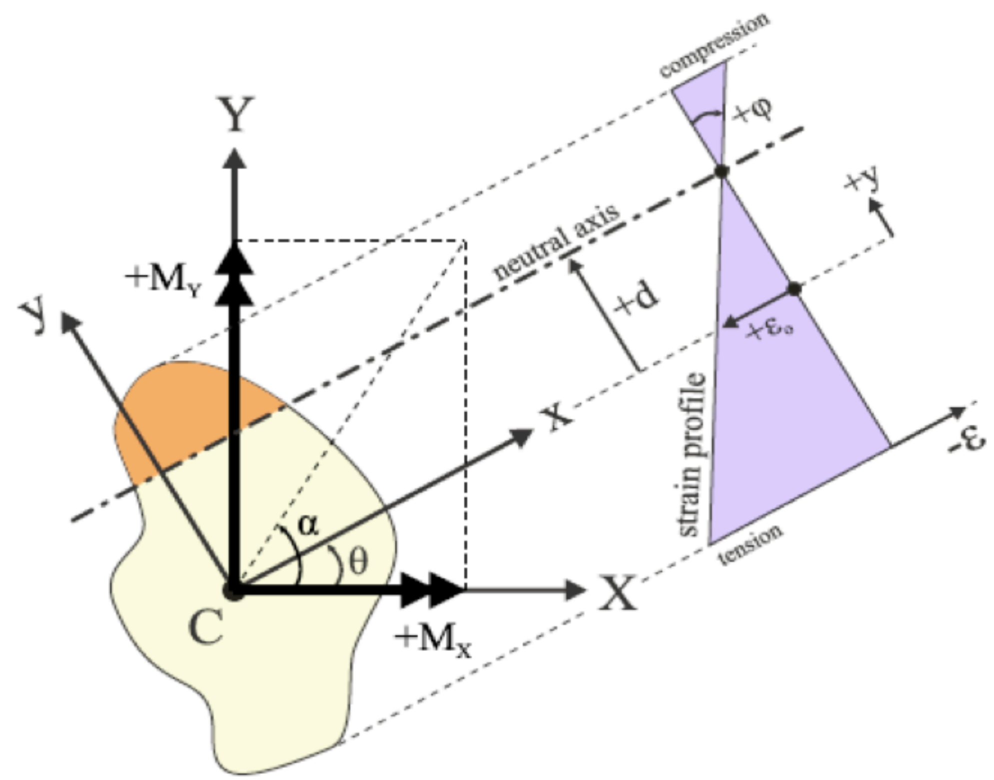
Obiektowy zapis w języku C++



Rys. 7 Obiektowy zapis przekroju w kodzie programu [1]

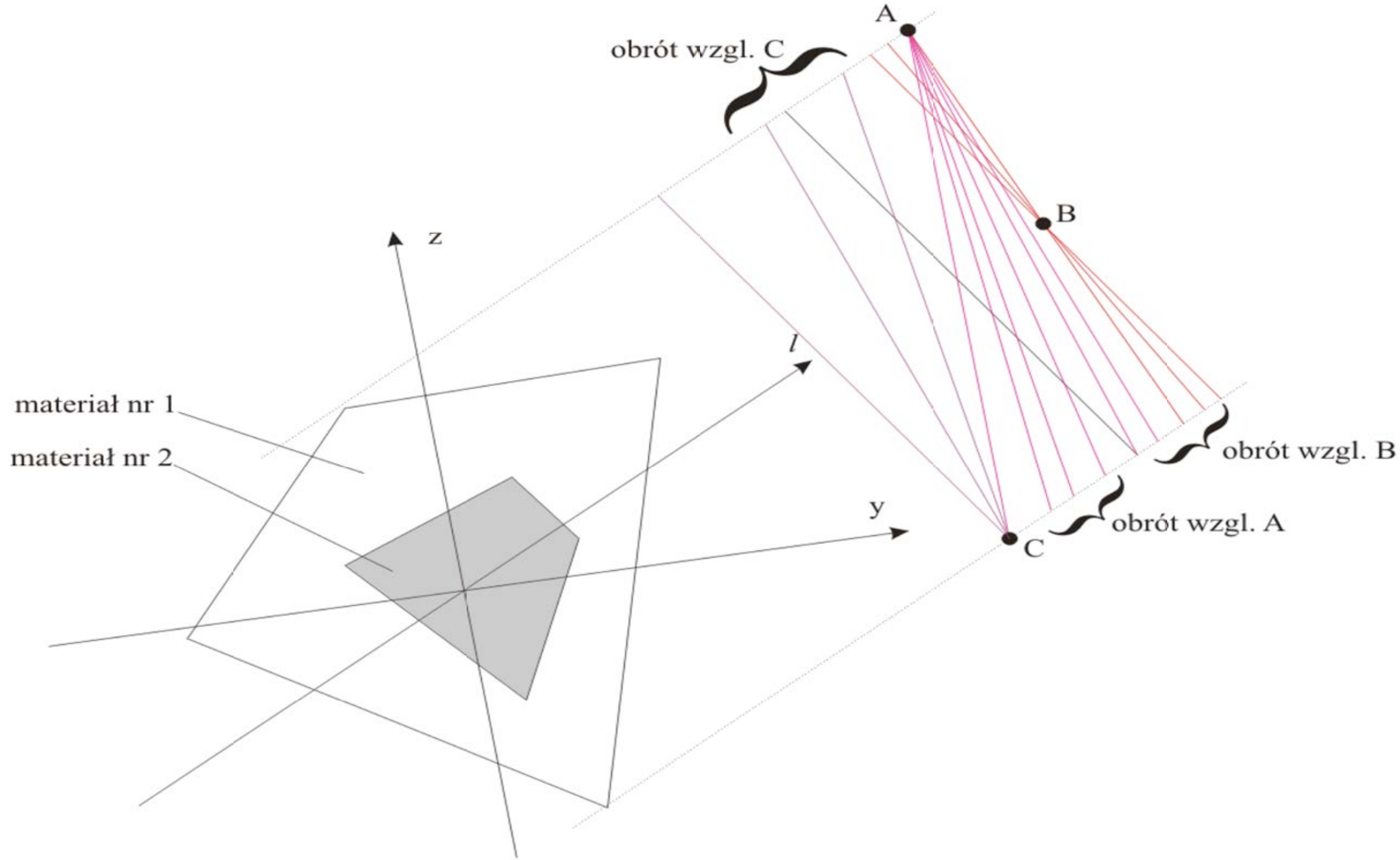
4. Sterowanie odkształceniami

1. Opcja – Sterowanie osią obojętną



Rys. 8 Sterowanie profilem odkształceń [1]

2. Opcja – Sterowanie odkształceniami (w obrębie odkształceń granicznych)



y, z - osie główne centralne (geometryczne)
l - oś równoległa do osi obojętnej (prostopadła do płaszczyzny obciążenia)

Rys. 9 Sterowanie odkształceniami, opcja wykorzystana w programie

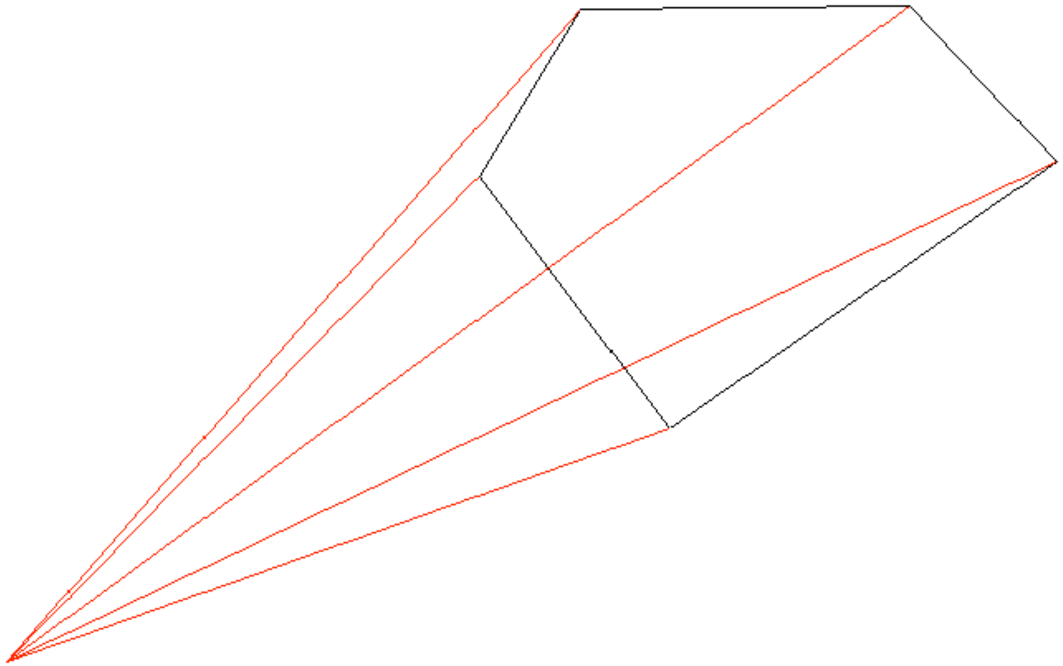
5. Odkształcenia → Naprężenia

- Z poszczególnych profili odkształceń otrzymanych w wyniku sterowania odkształceniami w granicach odkształceń dopuszczalnych na podstawie zależności naprężenie – odkształcenie otrzymujemy naprężenia w podobszarach przekroju zespolonego.
- Oprócz sterowania odkształceniami (iteracja po profilach odkształceń) iteracyjnie obracamy układ lokalny przekroju (obrót profilu odkształceń do okoła przekroju)

Potrzebne wzory:

1) Pole dowolnego wielokąta
2) Punkt środkowy łuku
3) Momenty statyczne i bezwładności dowolnego wielokąta (Suma momentów trójkątów tworzonych przez wektory wodzące końców poszczególnych boków wielokąta)
4) Wyznaczanie sprowadzonego środka ciężkości całego przekroju zespolonego
5) Transformacje współrzędnych z układu globalnego do układu lokalnego

Momenty statyczne wielokąta



Rys. 10 Charakterystyki geometryczne wielokątów

wielkości są obliczane dla elementów trójkątnych, na jakie rozbija się przekrój

Przykładowy kod w C++

```cpp
double Surface::getGeometricalCenterX(void)
{
        double x_c = 0;
        double xi, yi, xi_1, yi_1;
        int numOfPoints = this->numberOfPoints();

        for(int i=0; i< numOfPoints; i++) {

             xi = points[i]->getX();
             yi = points[i]->getY();

            if( i+1 < numOfPoints) {
                xi_1 = points[i+1]->getX();
                yi_1 = points[i+1]->getY();
            } else {
                xi_1 = points[0]->getX();
                yi_1 = points[0]->getY();
            }

            x_c +=(xi + xi_1) * (xi*yi_1 - xi_1*yi);
        }

        x_c /= 6* this->calculatePolygonArea();

        return x_c;
}
```

Całkowanie naprężeń

Obliczenie wynikowych sił wewnętrznych przekroju zespolonego, tj. siły osiowej N i momentów Mx, My dla zadanego kierunku osi obojętnej (zadanego obrotu układu lokalnego - kąt Θ) oraz profilu odkształceń.

1. Sterowanie kierunkiem osi obojętnej (kątem Θ)
2. Sterownie odkształceniami dla ustalonego kąta Θ
3. Całkowanie poszczególnych profili odkształceń → (Mx, My, N)

$$R = \sum_{i=1}^{nS} [\mathrm{sign}(S_i) R_{S,i}] + \sum_{i=1}^{nL} [\mathrm{sign}(L_i) R_{L,i}] + \sum_{i=1}^{nFG} [sign(FG_i) R_{FG,i}]$$

Siły przekrojowe R są wynikiem sumowania udziału od poszczególnych komponentów: powierzchni, lini, zbrojenia.

Metoda Kwadratury Gaussa

- Całkowanie komponentów powierzchniowych

$$R_{S,i} = \iint_{S_i} x^r y^s \sigma(y)\,dx\,dy$$ (twierdzenie Greena)

$$R_{S,i} = \frac{1}{r+1} \oint_{L_i} x^{r+1} y^s \sigma(y)\,dy = \frac{1}{r+1} \sum_{j=1}^{n\ell_i} \left[\oint_{\ell_j} x^{r+1} y^s \sigma(y)\,dy \right]$$

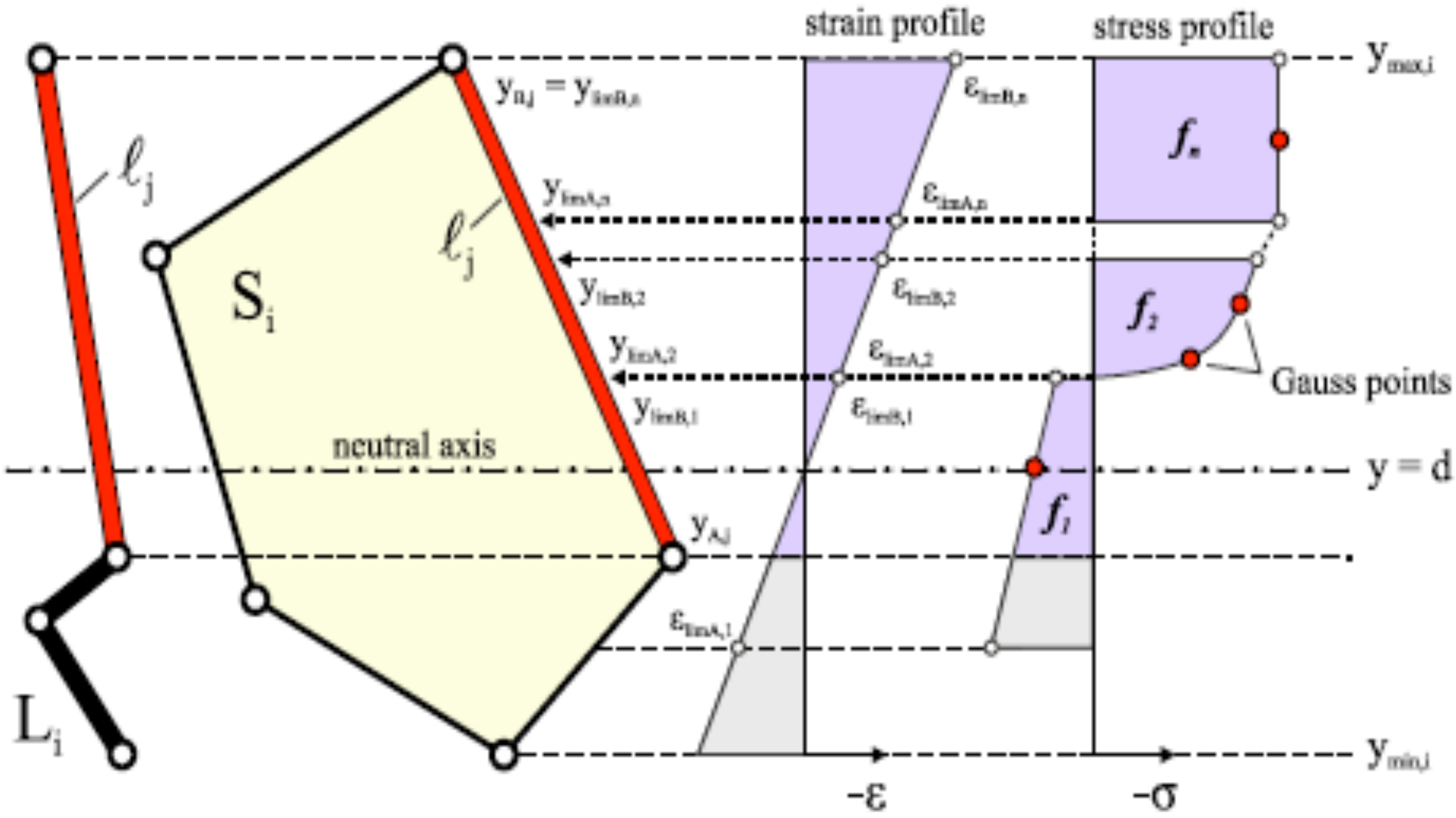
$$= \frac{1}{r+1} \sum_{j=1}^{n\ell_i} I_j$$

- Całkowanie komponentów liniowych i zbrojenia

$$R_{L,i} = \oint_{L_i} x^r y^s t(y) \sigma(y)\,dy = \sum_{j=1}^{n\ell_i} \left[t_j \oint_{\ell_j} x^r y^s \sigma(y)\,dy \right] = \sum_{j=1}^{n\ell_i} I_j \qquad R_{FG,i} = \sum_{j=1}^{nFG_i} [A_j x_j^r y_j^s \sigma(\varepsilon_0 - \varphi y_j)]$$

Całkowanie naprężeń

Odcinkowy charakter funkcji sigma-epsilon



Rys. 11 Mapowanie odkształceń na krawędź wieloboku [1]

Całkowanie krawędzi wielokąta

$$\ell_j \rightarrow x = a_j y + b_j$$

$$I_j = \oint_{\ell_j} (a_j y + b_j)^{r+1} y^s \sigma(y) dy = \oint_{\ell_j} F_j(y) dy \qquad y(\varepsilon) = (\varepsilon - \varepsilon_o)/\varphi$$

$$I_j = \oint_{\ell_j} F_j(y) dy \doteq \sum_{k=1}^{nf} \left[\frac{1}{2}(y_{\lim B,k} - y_{\lim A,k}) \sum_{m=1}^{nG_k} [w_m F_j(y_m)] \right]$$

$$y_m = \frac{1}{2}(y_{\lim B,k} + y_{\lim A,k}) + \frac{\lambda_m}{2}(y_{\lim B,k} - y_{\lim A,k})$$

$$F_j(y_m) = (a_j y_m + b_j)^{r+1} y_m^s f_k(\varepsilon_o - \varphi y_m)$$

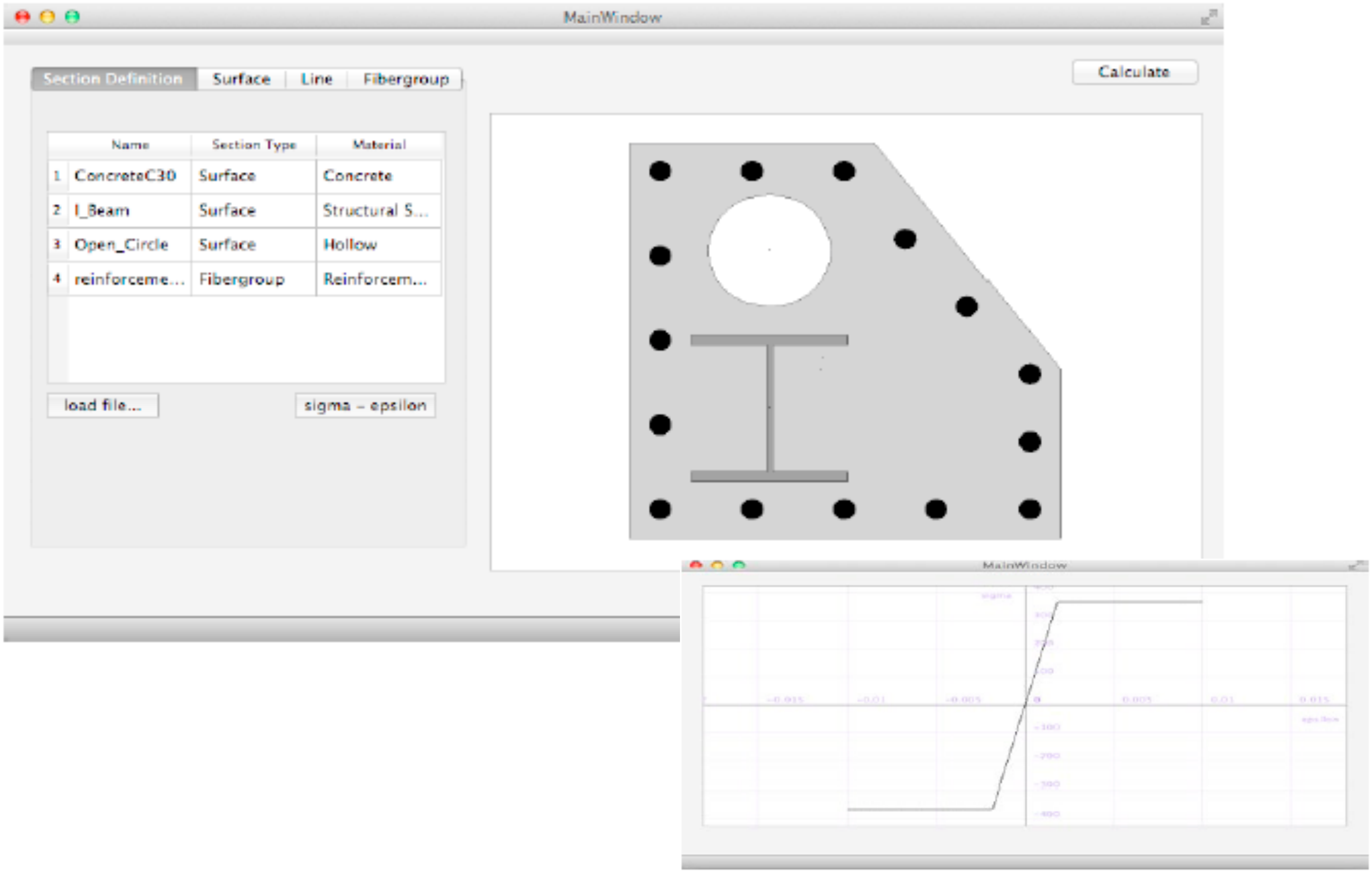
Krzywe i powierzchnie interakcji

- W wyniku całkowania otrzymujemy siły wewnętrze.
- Siły wewnętrzne otrzymane dla poszczególnych komponentów sumujemy

(uwzględnienie przecięć powierzchni)

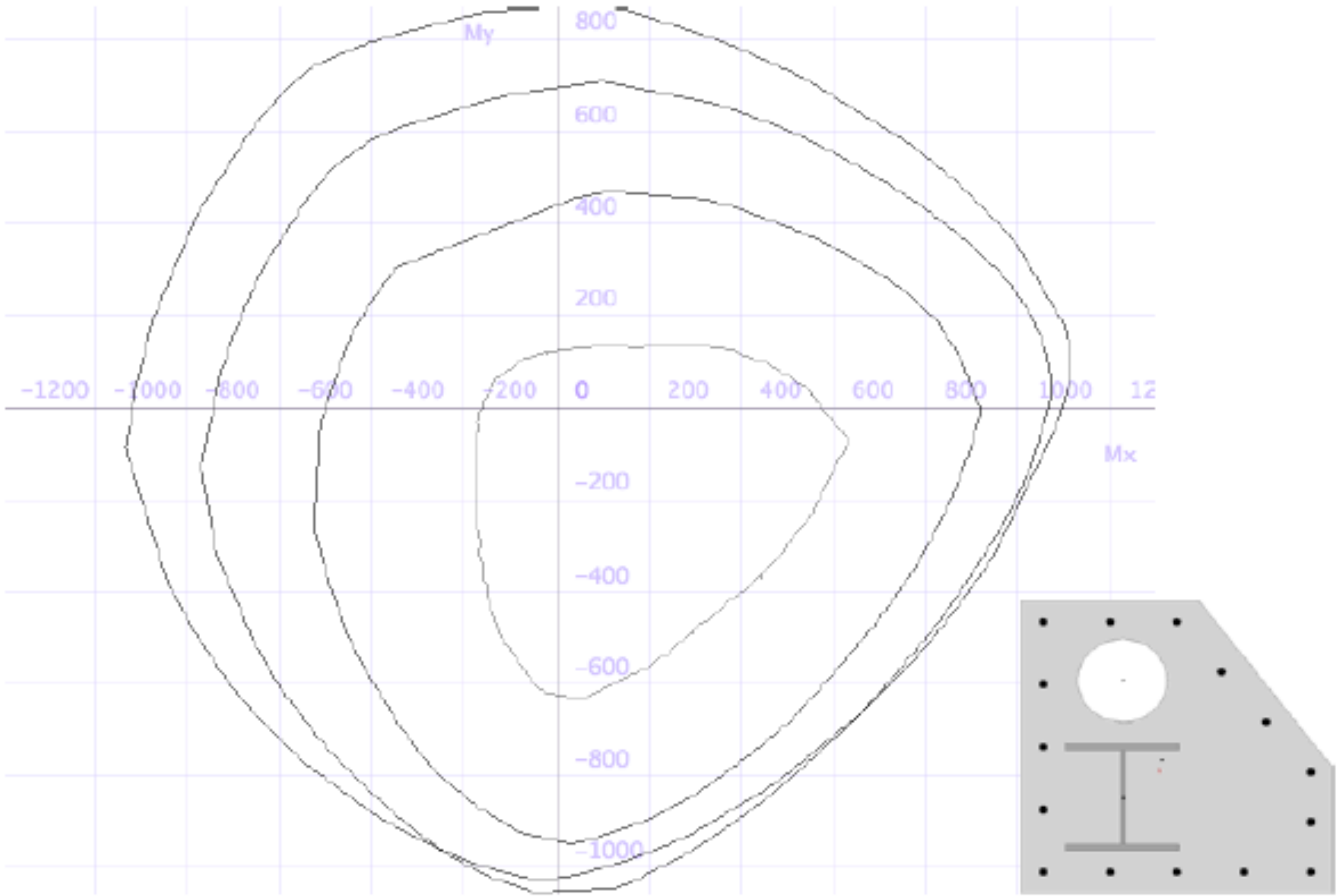
- Ostatecznie otrzymujemy zbiory dopuszczalnych sił (Mx, My, N)
- Rysujemy krzywe interakcji przekroju.

Program komputerowy



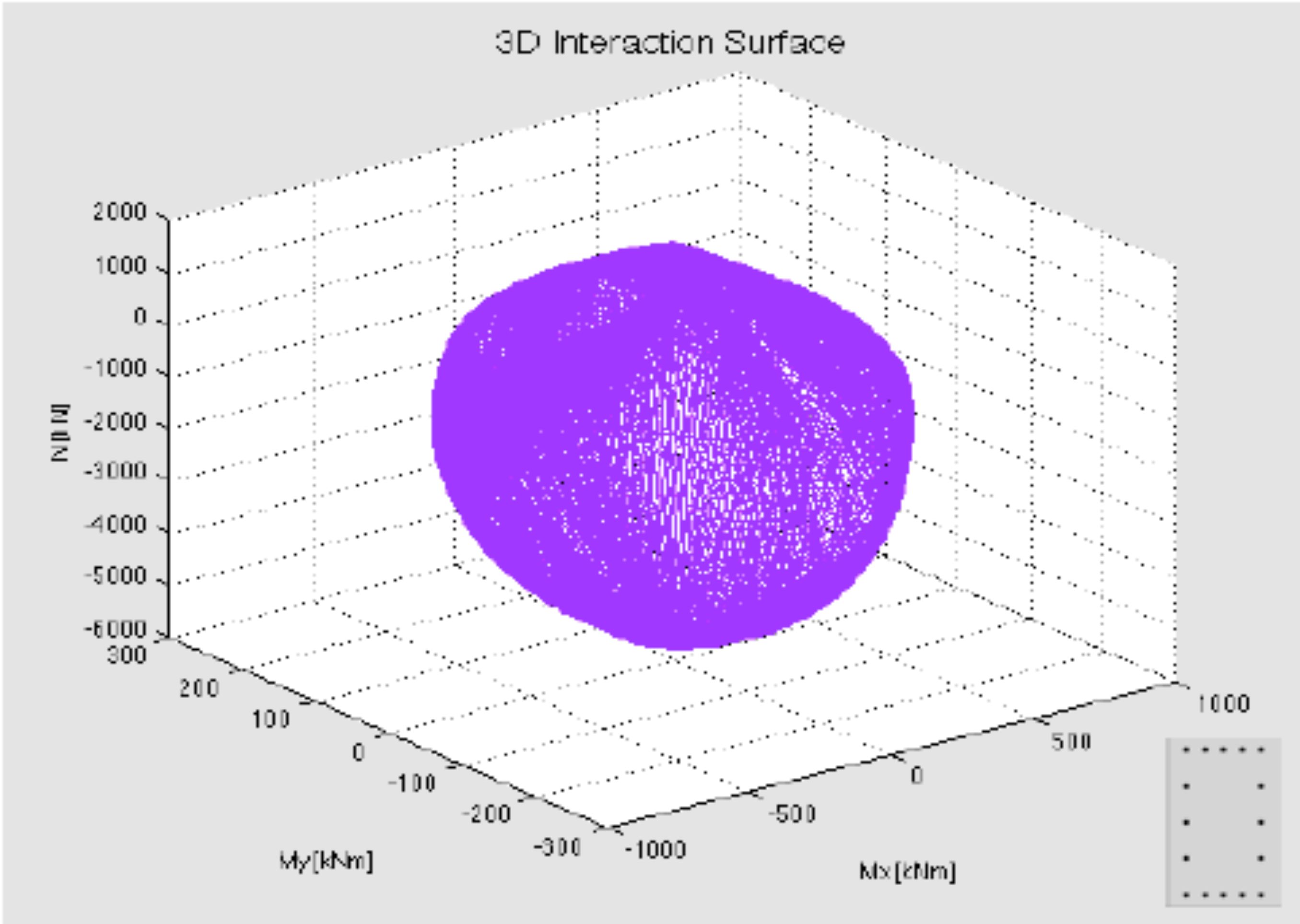
Rys. 12 Okno główne aplikacji oraz okno definicji materialu

Przykładowe krzywe interakcji



Rys. 13 Krzywe interakcji wygenerowane programem dla przekroju Chen et al z [2]

Powierzchnie interakcji (MatLab)



Rys. 13 Powierzchnia interakcji dla przekroju żelbetowego narysowana w MatLab'ie na podstawie wyników z programu

Bibliografia (prezentacja)

[1] Vassilis K. Papanikolaou, Analysis of arbitrary composite sections in biaxial bending and axial load, Computers and Structures 98-99 (2012)

[2] Cosmin G. Chiorean, A Computer Method for Rapid Design Of Composite Steel-concrete Cross-sections, The Open Civil Engineering Journal 01/2013; 7(1):1-17

[3] Rosati L, Marmo F, Serpieri R. Enhanced solution strategies for ultimate strength analysis of composite steel-concrete sections subject to axial force and biaxial bending, Comput Methods Appl Mech Eng 2008; 197; 1033-55

[4] Eurokod EC4 (konstrukcje zespolone), PN-EN 1994-1-1

[5] http://en.wikipedia.org/wiki/Gaussian_quadrature

[6] http://mathworld.wolfram.com/PolygonArea.html