POLYTECH INTL GROUP

Année :	2024 - 2025	**Nature :**	Test
Filière :	Prépa IE & 3M	**Date et heure :**	23/02/2025
Classe :	$1^{\text{ère}}$ Année	**Durée :**	2H00
Module :	Algèbre II	**Documents :**	Non Autorisés / ~~Autorisés~~
Enseignant :	HAOUALA M^{ed} Marouene	**Calculatrice :**	~~Non Autorisée~~ / Autorisée

***Exercice* 1.**

Soient G le sous-espace de $\mathbb{R}^4$ engendré par les vecteurs :

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}; \quad v = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}; \quad w = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

et $H = \Big\{X \in \mathbb{R}^4 \mid x + t = 0 \;\text{ et }\; x - y + z - 2t = 0\Big\}$.

(1) Déterminer la dimension de G.

(2) Montrer que H est un sous-espace de $\mathbb{R}^4$ et déterminer sa dimension.

***Exercice* 2.**

$E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$, $F = \{f \in E \mid f(\pi) = 0\}$ et G l'ensemble des fonctions constantes.
Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de E.

***Exercice* 3.**

On considère la fonction $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par :

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y - 2z \\ -x + y + 2z \\ x - z \end{pmatrix},$$

et $\mathcal{B} = \{e_1,\ e_2,\ e_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$

1) Montrer que f est une application linéaire.

2) Déterminer le vecteur a base de $Ker(f)$, la fonction f est-elle injective ?

3) Donner un vecteur $b \in \mathbb{R}^3$ tel que $a = f(b)$

4) Montrer que $E_1 = \{X \in \mathbb{R}^3, \;\; f(X) = X\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, donner un vecteur non nul $c \in E_1$

5) Montrer que $\mathcal{B}' = \{a,\ b,\ c\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

6) Déduire une base de $Im(f)$.