

# Analyse spectrale et équation équivalente

*UF « Modélisation et calcul scientifique »*  
*Formation ModIA « Modélisation et Intelligence Artificielle »*

Nicolas Bertier (nicolas.bertier@onera.fr)

INSA, 4A

*Version du document : 2.0 (dernières modification le 10/01/2023)*

Sauf exceptions dûment mentionnées, le contenu de ce cours est sous licence **Creative Commons Attribution - Partage dans les Mêmes Conditions** 4.0 International © ⓘ.

Pour accéder à une copie de cette licence, merci de vous rendre à l'adresse suivante : <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/>

## Plan du cours

- Exemples de simulations numérique récentes en CFD
- Introduction aux méthodes de différences finies
- Le point sur l'intégration temporelle
- **Analyse spectrale et équation équivalente**
- Monotonie et limiteurs
- Introduction aux méthodes de volumes finis
- Vers la résolution des équations de Navier-Stokes

## Rappel de l'équation modèle de convection-diffusion

### Equation modèle de convection-diffusion

On rappelle l'expression de l'équation de convection-diffusion :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} - \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

### Description du problème modèle

- On cherche à résoudre cette équation d'évolution sur un domaine de taille  $L$ , avec conditions aux limites de périodicité  $u(0, t) = u(L, t)$  et une condition initiale  $u(x, 0)$ .
- On peut alors définir un nombre de Reynolds basé sur la longueur caractéristique  $L$  :

$$\mathcal{R}_L = \frac{aL}{\kappa}$$

# Etude de l'équation modèle de convection-diffusion

## Développement en série de Fourier

La solution  $u(x, t)$  étant périodique en espace, elle peut s'écrire sous la forme d'un développement en série de Fourier infini par rapport à  $x$  :

$$u(x, t) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}} A_{\alpha}(t) e^{j k_{\alpha} x}$$

- Comme la solution dépend du temps, les coefficients  $A_{\alpha}(t)$  de la série de Fourier en dépendent également.
- Pour déterminer l'expression des  $A_{\alpha}(t)$ , on réinjecte le développement en série de Fourier dans l'équation modèle

$$\sum_{\alpha \in \mathbb{Z}} e^{j k_{\alpha} x} \left( \frac{dA_{\alpha}}{dt} + j a A_{\alpha} k_{\alpha} + \kappa A_{\alpha} k_{\alpha}^2 \right) = 0$$

## Etude de l'équation modèle de convection-diffusion

### Détermination de l'expression des coefficients $A_\alpha(t)$

Les  $e^{jk_\alpha x}$  forment une famille libre, on a alors :

$$\frac{dA_\alpha}{dt} + A_\alpha (\kappa k_\alpha^2 + j a k_\alpha) = 0$$

On pose alors :

$$\lambda_\alpha = - (\kappa k_\alpha^2 + j a k_\alpha)$$

Soit :

$$\frac{dA_\alpha(t)}{A_\alpha(t)} = \lambda_\alpha dt$$

Cette équation différentielle homogène du premier ordre a pour solution :

$$A_\alpha(t) = B_\alpha e^{\lambda_\alpha t}$$

## Etude de l'équation modèle de convection-diffusion

On réinjecte l'expression de  $A_\alpha(t)$  dans la décomposition en série de Fourier de  $u(x, t)$  :

$$u(x, t) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}} B_\alpha e^{\lambda_\alpha t} e^{jk_\alpha x} = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}} B_\alpha e^{jk_\alpha x + \lambda_\alpha t}$$

### Détermination de l'expression de la constante d'intégration $B_\alpha$

$B_\alpha$  est déterminée en utilisant la condition initiale  $u(x, 0)$  :

$$u(x, 0) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}} B_\alpha e^{jk_\alpha x}$$

Il s'agit maintenant d'une série de Fourier « classique », pour laquelle le coefficient de Fourier  $B_\alpha$  est défini par l'intégrale :

$$B_\alpha = \frac{1}{L} \int_0^L u(x, 0) e^{-jk_\alpha x} dx$$

# Etude de l'équation modèle de convection-diffusion

Synthèse de l'écriture de l'équation modèle de convection-diffusion sous forme d'une série de Fourier infinie

$$u(x, t) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}} B_{\alpha} e^{j k_{\alpha} x + \lambda_{\alpha} t} \quad \text{avec} \quad B_{\alpha} = \frac{1}{L} \int_0^L u(x, 0) e^{-j k_{\alpha} x} dx$$



## Notion de vitesse complexe

### Définition de la vitesse complexe

La solution  $u(x, t)$  peut également s'écrire :

$$u(x, t) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}} B_{\alpha} e^{j k_{\alpha} (x - v_{\alpha} t)}$$

avec la **vitesse complexe**  $v_{\alpha}$ , définie par :

$$v_{\alpha} = j \frac{\lambda_{\alpha}}{k_{\alpha}}$$

### Expression de la vitesse complexe en fonction de $a$ et $\kappa$

En remplaçant  $\lambda_{\alpha}$  par son expression, il vient :

$$v_{\alpha} = a - j \kappa k_{\alpha}$$

## Equation de dispersion

### Equation de dispersion

$$\frac{v_\alpha}{a} = 1 - j \frac{\kappa k_\alpha}{a} = 1 - j \frac{k_\alpha L}{\mathcal{R}_L}$$

- La partie **réelle** de l'équation de dispersion est associée à l'**advection** et la partie **imaginaire** à la **diffusion**
- Pour un Reynolds de maille fixé, les petites longueurs d'onde sont plus diffusées que les grandes.

## Ecriture matricielle du schéma

### Développement au premier ordre de $F(U)$

Développement au premier ordre de  $F(U)$  autour d'un état  $U_e$  :

$$F(U) = F(U_e) + \frac{\partial F}{\partial U} (U - U_e)$$

$F$  étant linéaire par rapport à  $U$  (équation modèle et schéma linéaires), ce développement est ici exact.

### Matrice jacobienne $J$

Soit  $J$  la matrice jacobienne du second membre  $F$  par rapport au vecteur d'état  $U$  :

$$J = \frac{\partial F}{\partial U}$$

## Ecriture matricielle du schéma

Développement de  $F(U)$  en fonction de  $U_e$  et  $J$

$F$  étant linéaire par rapport à  $U$ , la matrice jacobienne ne dépend pas de l'état considéré et on peut écrire :

$$F(U) = F(U_e) + J(U - U_e)$$

Etat d'équilibre  $U_e$

On postule que  $U_e$  est un **état d'équilibre** soit, par définition :

$$\dot{U}_e = F(U_e) = 0$$

Le développement de  $F(U)$  peut alors se réduire à :

$$F(U) = J(U - U_e)$$

## Ecriture matricielle du schéma

### Changement de variable

Afin de simplifier l'écriture du système, on pose  $U^* = U - U_e$ , soit :

$$\dot{U}^* = JU^*$$

On se ramène ainsi à un système d'EDO sans second membre.

### Changement de notation

Pour alléger l'écriture et se conformer aux notations standards, on utilisera dans la suite du cours la notation  $U$  à la place de  $U^*$  :

$$\dot{U} = JU$$

$U$  représente donc une **variation par rapport à un état d'équilibre** et non directement un état (sauf dans le cas où  $U_e = 0$ ).

## Matrice de permutation circulaire $P_m$

Construction de  $P_m$  :

$$\begin{pmatrix} u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_m \\ u_1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{P_m} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{m-1} \\ u_m \end{pmatrix}$$

Propriété :

L'application de cette matrice aux points du cercle discrétisé permet de les faire "tourner" d'une unité dans le sens trigonométrique, en prenant également en compte la condition de périodicité imposant  $u_{m+1} = u_1$ .

## Diagonalisation de $P_m$

### Valeurs propres

Par construction de  $P_m$ , ses  $m$  valeurs propres  $\lambda_m$  sont toutes des racines  $m$ -ièmes de l'unité :

$$\lambda_{m_\alpha} = \left[ \exp \left( j \frac{2\pi}{m} \right) \right]^\alpha$$

### Système $P_m$ diagonalisé

En utilisant la matrice de changement de base  $S_m$  et son inverse  $S_m^{-1}$ ,  $P_m$  peut s'écrire dans sa base propre sous la forme :

$$P_m = S_m \Lambda_m S_m^{-1}$$

où :

- $\Lambda_m$  est une matrice diagonale contenant les valeurs propres de  $P_m$
- $S_m$  s'obtient à partir des vecteurs propres de  $P_m$ .

## Vecteurs propres à droite et à gauche de $P_m$

### Vecteurs propres de $P_m$ à droite $V_\alpha$

Par définition des vecteurs propres à droite  $V_\alpha$  de  $P_m$ , on peut écrire :

$$P_m V_\alpha = \lambda_{m_\alpha} V_\alpha$$

### Vecteurs propres de $P_m$ à gauche $W_\alpha$

Par définition des vecteurs propres à gauche de  $P_m$ , on peut écrire :

$$W_\alpha^t P_m = \lambda_{m_\alpha} W_\alpha$$



- └ Décomposition en série de Fourier de l'équation semi-discrète
- └ Etude des propriétés de la matrice de permutation circulaire  $P_m$

## Matrice de changement de base $S_m$

### Matrice de changement de base $S_m$

La matrice de changement de base  $S_m$  peut s'écrire, par définition, à partir des vecteurs propres à droite  $V_\alpha$  de  $P_m$  :

$$S_m = (V_1 \ V_2 \ \dots \ V_m)$$

### Inverse de la matrice de changement de base $S_m^{-1}$

L'inverse de la matrice de changement de base peut s'écrire, par définition, à partir des vecteurs propres à gauche  $W_\alpha$  de  $P_m$  :

$$S_m^{-1} = \begin{pmatrix} W_1^t \\ W_2^t \\ \vdots \\ W_m^t \end{pmatrix}$$

## Ecriture de la matrice de permutation circulaire $P_m$ diagonalisée

### Matrice de permutation circulaire $P_m$ diagonalisée

Ecriture faisant apparaître explicitement ses valeurs et vecteurs propres :

$$P_m = (V_1 \ V_2 \ \dots \ V_m) \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_m \end{pmatrix}}_{\Lambda_m} \begin{pmatrix} W_1^t \\ W_2^t \\ \vdots \\ W_m^t \end{pmatrix}$$

## Diagonalisation de $J$

### Valeurs propres de $J$

Point fondamental : le système  $J(P_m)$  se **diagonalise dans la même base** que  $P_m$  :

$$J(P_m) = S_m \cdot \bar{A}(\lambda_m) \cdot S_m^{-1}$$

- La matrice de changement de base  $S_m$  et son inverse  $S_m^{-1}$  restent donc inchangées
- L'expression de  $\bar{A}$  se construira à partir des **valeurs propres de  $P_m$**  et du **schéma de discrétisation spatial** considéré.

## Etude du schéma décentré d'ordre 2 UPO2VF

### Rappel du schéma semi-discret

$$\frac{du_i}{dt} = -\frac{a}{4\Delta x} (u_{i+1} + 3u_i - 5u_{i-1} + u_{i-2}) \quad \forall a > 0$$

### Ecriture du système semi-discret fonction de $P_m$

$$\dot{U} = -\underbrace{\frac{a}{4\Delta x} (P_m + 3I_d - 5P_m^{-1} + P_m^{-2})}_{J(P_m)} U$$

### Ecriture de la matrice jacobienne associée

$$J(P_m) = S_m \left[ \underbrace{\left( -\frac{a}{4\Delta x} \right) (\Lambda_m + 3I_d - 5\Lambda_m^{-1} + \Lambda_m^{-2})}_{\bar{\Lambda}(\lambda_m)} \right] S_m^{-1}$$

## Rappel nombre d'ondes/angle de phase

### Nombre d'onde $k_\alpha$

- Il représente le **nombre de longueurs d'ondes**  $\mathcal{L}_\alpha$  dans  $2\pi$ .
- Dimensionnellement c'est donc **l'inverse d'une longueur** ( $m^{-1}$ ).
- Chaque nombre d'onde est un multiple du plus petit nombre d'onde :

$$k_\alpha = \alpha k_{min} = \alpha \frac{2\pi}{L}$$

### Nombre d'onde réduit ou angle de phase $\varphi_\alpha$

- Il est défini à partir de  $k_\alpha$  comme :

$$\varphi_\alpha = \Delta x k_\alpha$$

- Il est **sans dimension** et peut se réécrire :

$$\varphi_\alpha = \alpha \frac{2\pi \Delta x}{L} = \alpha \frac{2\pi}{m}$$

## Etude du schéma décentré d'ordre 2 UPO2VF

### Valeurs propres de $J$

La matrice des valeurs propres  $\overline{\lambda}(\lambda_m)$  étant diagonale, on peut écrire directement :

$$\overline{\lambda}_\alpha = -\frac{a}{4\Delta x} \left\{ \left[ e^{\left(\frac{2j\pi}{m}\right)} \right]^\alpha + 3 - 5 \left[ e^{-\left(\frac{2j\pi}{m}\right)} \right]^\alpha + \left[ e^{-2\left(\frac{2j\pi}{m}\right)} \right]^\alpha \right\}$$

A l'aide de quelques transformations trigonométriques (cf. TD), on arrive à :

$$\overline{\lambda}_\alpha = -\frac{a}{2\Delta x} \left[ (1 - \cos(\varphi_\alpha))^2 + j \sin(\varphi_\alpha) (3 - \cos(\varphi_\alpha)) \right]$$

## Etude du schéma décentré d'ordre 1 FOU

### Rappel du schéma semi-discret FOU

$$\frac{du_i}{dt} = -\frac{a}{\Delta x} (u_i - u_{i-1}) \quad \forall a > 0$$

### Matrice jacobienne $J$

$$J = -\frac{a}{\Delta x} (I_m - P_m^{-1})$$

### Valeurs propres

$$\overline{\lambda_\alpha} = -\frac{a}{\Delta x} \left\{ 1 - \left[ e^{-j\frac{2\pi}{m}} \right]^\alpha \right\}$$

Soit, en séparant les parties réelle et imaginaire :

$$\overline{\lambda_\alpha} = -\frac{a}{\Delta x} [(1 - \cos \varphi_\alpha) + j \sin \varphi_\alpha]$$

# Stabilité

## Stabilité au sens de Liapounov

Soit le système semi-discrète en espace :

$$\dot{U} = J(U - U_e)$$

On dit que la position d'équilibre  $U_e$  de ce système d'EDO est **stable au sens de Liapounov** ssi,  $\forall t > 0$  :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \rho > 0 \text{ tel que } |U_0 - U_e| < \rho \Rightarrow |U(t) - U_e| < \epsilon \quad \forall t > 0$$

## Stabilité asymptotique

La position d'équilibre d'un système d'EDO est dite asymptotiquement stable si elle est stable au sens de Liapounov et si on vérifie de plus que :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} U(t) = U_e$$

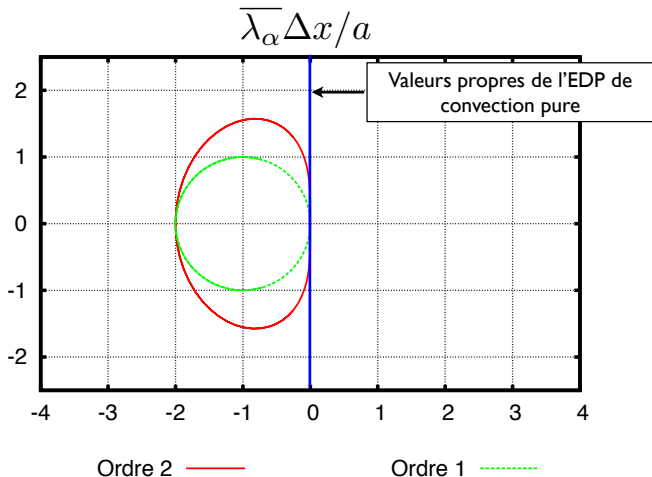


# Stabilité

## Théorème

- Si toutes les valeurs propres  $\bar{\lambda}$  de la matrice  $J$  ont leurs **parties réelles négatives ou nulles**, la position d'équilibre  $U_e$  du système linéaire est **stable** au sens de Liapounov.
- Si toutes les valeurs propres de la matrice  $J$  ont leurs parties réelles négatives strictement, la stabilité du système est alors asymptotique.

## Lieux de $\overline{\lambda}_\alpha \Delta x / a$ pour les schémas FOU et UPO2VF



## Solution exacte du système semi-discret en espace

### Réécriture du système semi-discret

$$\begin{aligned}
 \dot{U}(t) &= JU(t) \\
 \dot{U}(t) &= S_m \bar{\Lambda} S_m^{-1} U(t) \\
 S_m^{-1} \dot{U}(t) &= \bar{\Lambda} S_m^{-1} U(t) \\
 S_m^{-1} \dot{U}(t) (S_m^{-1} U(t))^{-1} &= \bar{\Lambda}
 \end{aligned}$$

### Intégration en temps exacte du système semi-discret

Intégration du système par rapport à la variable  $(S_m^{-1} \bar{U})$  :

$$\begin{aligned}
 \ln [S_m^{-1} \bar{U}(t)] &= \bar{\Lambda} t + C \\
 S_m^{-1} \bar{U}(t) &= e^{\bar{\Lambda} t} C'
 \end{aligned}$$

Rappel : on note bien  $\bar{U}$  la solution exacte du système semi-discret.

## Solution exacte du système semi-discrét en espace

### Détermination de la constante $C'$

On applique la condition initiale pour déterminer  $C'$  :

$$\overline{U}(t = 0) = U^0 \implies C' = S_m^{-1} U^0$$

### Forme finale du système semi-discrét en espace

Soit, en remplaçant  $C'$  par son expression :

$$S_m^{-1} \overline{U}(t) = U^0 \exp(\overline{\Lambda} t) S_m^{-1}$$

et finalement :

$$\overline{U}(t) = S_m \exp(\overline{\Lambda} t) S_m^{-1} U^0$$

Cette solution, issue d'une **intégration temporelle exacte** permet de mettre en évidence les propriétés de la **discrétisation spatiale seule**.

## Solution exacte du système semi-discrét en espace

### Formulation au point courant

$$\bar{u}_i(t) = \frac{1}{m} \sum_{\beta=1}^m \sum_{\alpha=1}^m u_{\beta}^0 \exp [j\varphi_{\alpha}(i - \beta) + \bar{\lambda}_{\alpha} t]$$

Enfin, on peut la mettre sous la forme :

$$\bar{u}_i(t) = \sum_{\alpha=1}^m B_{\alpha} \exp (i\varphi_{\alpha}j + \bar{\lambda}_{\alpha} t) \quad \text{avec} \quad B_{\alpha} = \frac{1}{m} \sum_{\beta=1}^m u_{\beta}^0 \exp (-j\varphi_{\alpha}\beta)$$

## Solution exacte du système semi-discret en espace

### Remarques sur le système semi-discret

- Cette forme met en évidence les liens existants avec la décomposition exacte en série de Fourier de l'équation aux dérivées partielles et la solution de l'équation discrétisée en espace (semi-discrétisée).
- $B_\alpha$  n'est qu'une décomposition en série finie de Fourier de la condition initiale
- la dépendance de la solution par rapport au schéma de discrétisation spatiale utilisé se fait uniquement à travers les valeurs propres  $\bar{\lambda}_\alpha$  de la matrice jacobienne  $J$ .

## Exemple de reconstruction de la solution exacte du système semi-discrét en espace

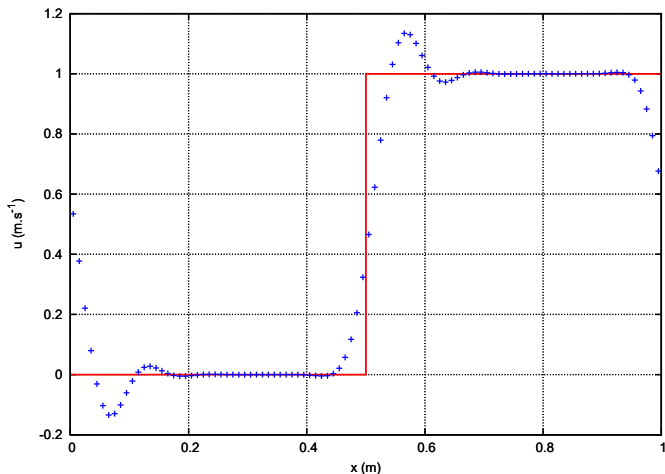
### Description du cas-test

On considère une solution  $u$  convectée à la vitesse constante  $a = 1$  dont la condition initiale est :

$$\begin{cases} u(x, 0) = 1, & \forall x > x_0 \\ u(x, 0) = 0, & \forall x \leq x_0 \end{cases}$$

- Domaine de calcul de longueur  $L = 1$ , discrétisé en  $m = 100$  points.
- On s'intéresse à la solution obtenue au terme d'un temps  $T_f = 1$
- Méthodes numériques : schéma de discrétisation spatiale décentré d'ordre deux UPO2VF et intégration temporelle exacte.

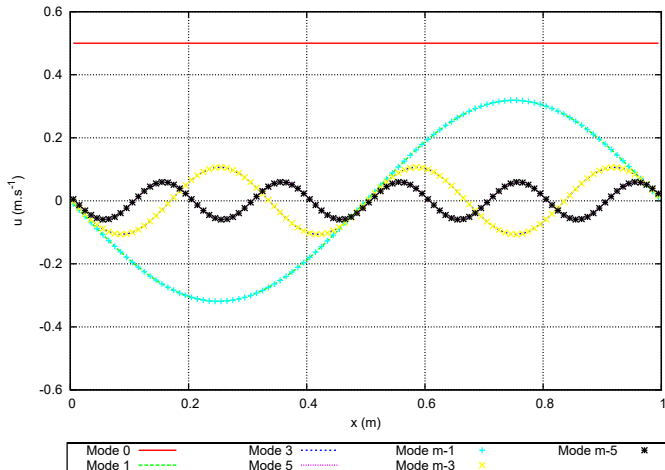
## Solution exacte du système semi-discret en espace



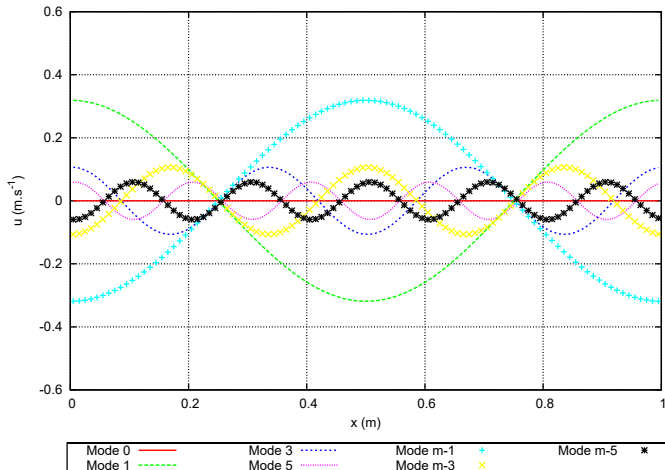
- : Mode 0 , + : Exact



## Partie réelle des 7 premiers modes non-nuls



## Partie imaginaire des 7 premiers modes non-nuls



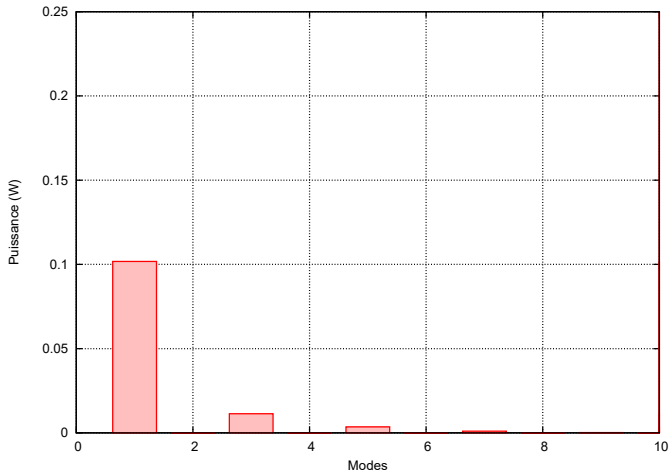
## Décomposition modale de la solution

### Quelques observations :

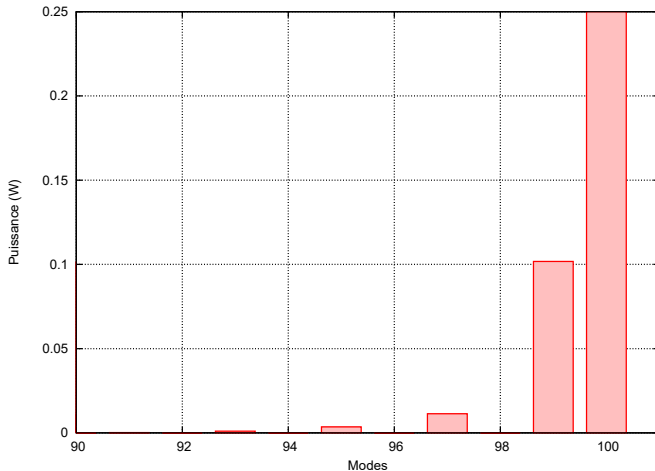
- Les modes pairs sont identiquement nuls
- Les modes 0 et  $m$  sont égaux, et représentent la moyenne des autres modes.
- Sur les intervalles  $[1, m/2]$  et  $[m/2, m - 1]$ , les modes imaginaires sont de même amplitude et en opposition de phase deux à deux (1 avec  $m - 1$ , 3 avec  $m - 3$  ...). Leur moyenne est donc nulle, ce qui assure à la solution d'être purement réelle.
- Sur ces mêmes intervalles, les modes réels sont également de même amplitude, mais en phase.

⇒ on pourra se limiter à l'étude du problème sur la moitié des modes :  
 $\alpha \in [0, m/2]$ .

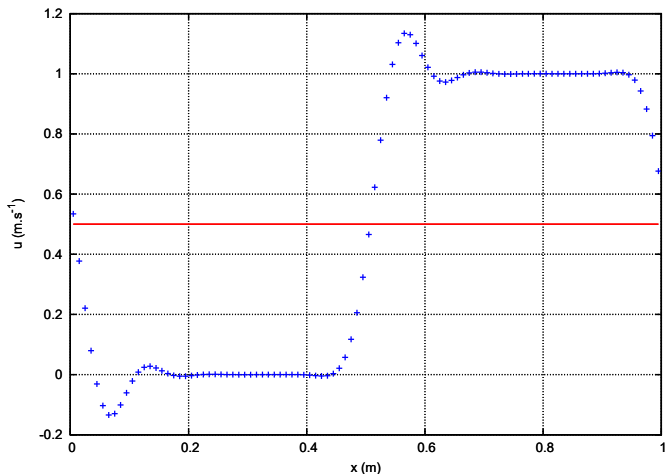
## Puissance contenue dans les 10 premiers modes (0 exclu)



## Puissance contenue dans les 10 derniers modes (m inclus)

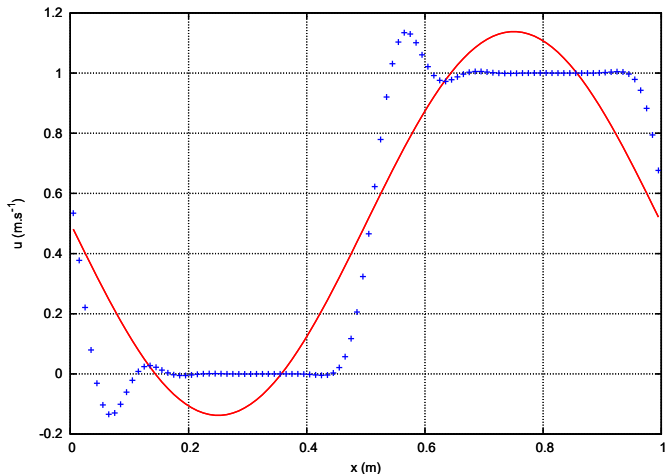


## Solution exacte du système semi-discret en espace



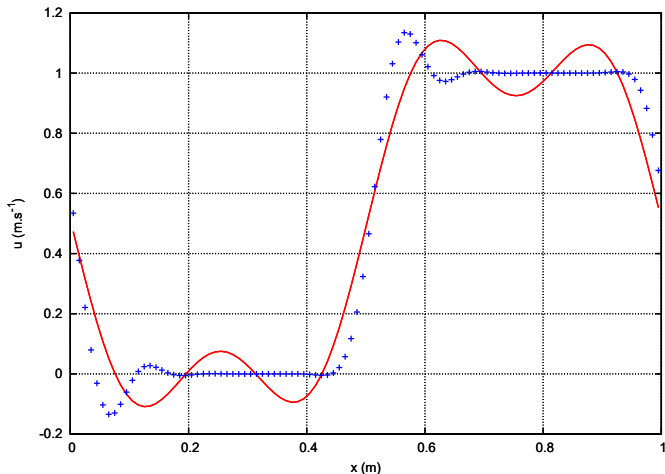
- : Mode 0 , + : Exact

# Solution exacte du système semi-discrét en espace



- :  $\left[ \text{Mode } 0 + 2 \sum_{\alpha=0}^1 \text{Mode } \alpha \right]$ , + : Exact

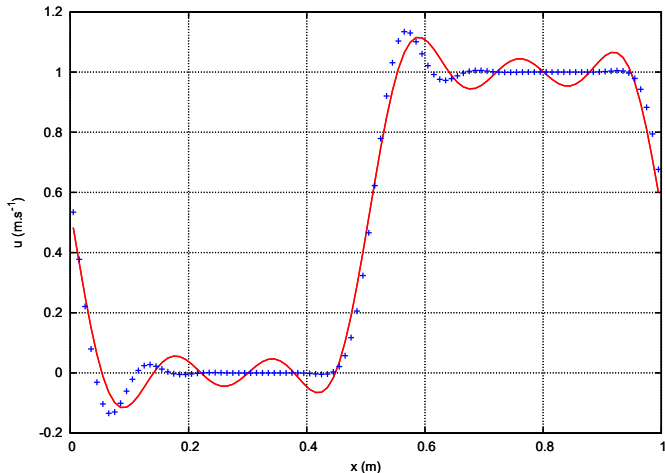
# Solution exacte du système semi-diskrèt en espace



$$- : \left[ \text{Mode } 0 + 2 \sum_{\alpha=0}^3 \text{Mode } \alpha \right], + : \text{Exact}$$

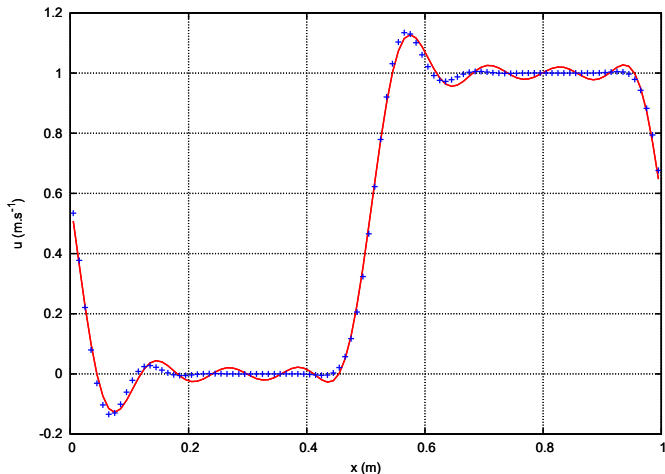


# Solution exacte du système semi-diskrèt en espace



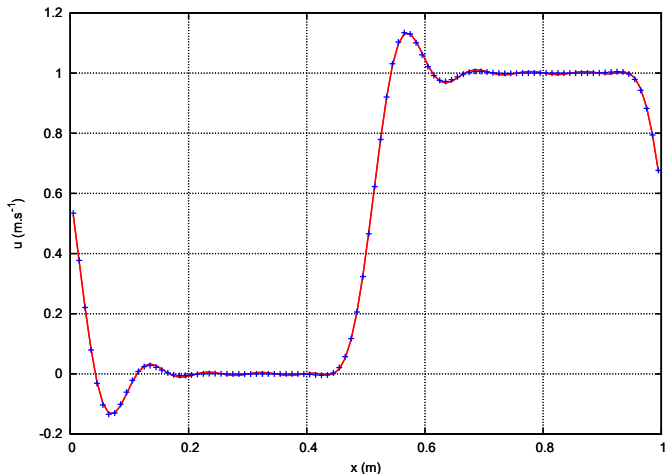
$$- : \left[ \text{Mode } 0 + 2 \sum_{\alpha=0}^5 \text{Mode } \alpha \right], + : \text{Exact}$$

## Solution exacte du système semi-discrét en espace



$$- : \left[ \text{Mode } 0 + 2 \sum_{\alpha=0}^7 \text{Mode } \alpha \right], + : \text{Exact}$$

# Solution exacte du système semi-discrét en espace



$$- : \left[ \text{Mode } 0 + 2 \sum_{\alpha=0}^9 \text{Mode } \alpha \right], + : \text{Exact}$$

## Equation de dispersion

Vitesse complexe associée à l'équation semi-discrète

$$\bar{u}_i(t) = \sum_{\alpha=1}^m B_{\alpha} e^{jk_{\alpha}(i\Delta x - \bar{v}_{\alpha}t)}$$

où la vitesse complexe  $v_{\alpha}$  s'écrit :

$$\bar{v}_{\alpha} = j \frac{\overline{\lambda_{\alpha}}}{k_{\alpha}} = -\frac{\Im(\overline{\lambda_{\alpha}})}{k_{\alpha}} + j \frac{\Re(\overline{\lambda_{\alpha}})}{k_{\alpha}}$$

## Equation de dispersion

### Equation de dispersion

En prenant le quotient de la vitesse complexe et de la vitesse physique de déplacement de la solution  $a$  on obtient :

$$\frac{\bar{v}_\alpha}{a} = -\frac{\Im(\bar{\lambda}_\alpha)}{ak_\alpha} + j\frac{\Re(\bar{\lambda}_\alpha)}{ak_\alpha}$$

Les parties réelle et imaginaire de l'équation de dispersion représentent respectivement la **dispersion** et la **dissipation** du schéma.

On en déduit une forme discrète représentative d'un schéma parfait (mais inaccessible ...) en faisant apparaître le Reynolds de maille et le nombre d'onde réduit :

$$\frac{\bar{v}_\alpha}{a} = 1 - j\frac{\varphi_\alpha}{\mathcal{R}_\Delta}$$

## Equation de dispersion

### Dispersion du schéma

La dispersion est définie par :

$$\overline{\xi_\alpha} = -\frac{\Im(\overline{\lambda_\alpha})}{ak_\alpha}$$

Propriétés :

- Si  $\overline{\xi_\alpha} > 1$  le mode  $\alpha$  de la solution se déplace plus rapidement que la vitesse de convection physique  $a$ .
- Au contraire, si  $\overline{\xi_\alpha} < 1$ , le mode est ralenti.
- Dans les deux cas, tous les longueurs d'onde ne sont pas transportés à la même vitesse ce qui induit une déformation de la solution.

## Equation de dispersion

### Dissipation du schéma

La dissipation est définie par :

$$\overline{\nu}_\alpha = -\frac{\Re(\overline{\lambda}_\alpha)}{ak_\alpha}$$

Propriétés :

- Si  $\overline{\nu}_\alpha > \nu_\alpha = \frac{\varphi_\alpha}{\mathcal{R}_\Delta}$ , le mode est dissipé numériquement, ce qui dégrade la qualité de la solution.
- Si  $\overline{\nu}_\alpha < \nu_\alpha = \frac{\varphi_\alpha}{\mathcal{R}_\Delta}$ , le mode est amplifié, ce qui peut mener à une instabilité.
- Dans le cas de l'équation d'advection pure (i.e sans diffusion),  $\overline{\nu}_\alpha > 0$  traduit la présence de dissipation numérique.

## Coefficients d'erreur et ordre de la méthode

D.L. de l'équation de dispersion pour  $\varphi_\alpha \rightarrow 0$

Pour les grandes longueurs d'onde :

$$\frac{\overline{v_\alpha}}{a} = 1 + \overline{E}_0 - j\overline{E}_1\varphi_\alpha + \overline{E}_2\varphi_\alpha^2 - j\overline{E}_3\varphi_\alpha^3 + \dots$$

Cette équation permet le calcul de coefficients d'erreur par identification, tout en reliant leur action numérique à des phénomènes physiques.

- les termes du développement **d'indice pair** proviennent de la vitesse de transport, et représentent donc la **dispersion** du schéma.
- les termes **d'indice impair** représentent la **dissipation**.
- $\overline{E}_0$  doit être nul pour que le schéma soit consistant
- les termes d'erreur doivent ensuite être les plus petits possible pour une précision optimale.



## Equation équivalente

### Un changement de point de vue...

- au lieu de considérer que le schéma numérique permet de résoudre de façon approchée une EDP modèle...
- on considère plutôt qu'il résout de façon **exacte l'équation équivalente** dont le second membre est constitué par les termes d'erreur :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = a \Delta x \overline{E}_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a \Delta x^2 \overline{E}_2 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + a \Delta x^3 \overline{E}_3 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \mathcal{O}(\Delta x^4)$$

Une méthode est alors dite d'ordre  $n$  si les  $n - 1$  premiers termes d'erreur sont nuls.

## Etude de la précision du schéma FOU

Equation de dispersion :

$$\frac{\overline{v}_\alpha}{a} = -\frac{1}{\varphi_\alpha} [-\sin(\varphi_\alpha) + j(1 - \cos(\varphi_\alpha))]$$

Identification des coefficients d'erreur

Développement de l'équation de dispersion (cf. TD) :

$$\frac{\overline{v}_\alpha}{a} = 1 - j\frac{1}{2}\varphi_\alpha - \frac{1}{6}\varphi_\alpha^2 + j\frac{1}{24}\varphi_\alpha^3 + \mathcal{O}(\varphi_\alpha^4)$$

Coefficients d'erreur :

$$\overline{E}_1 = +\frac{1}{2}; \overline{E}_2 = -\frac{1}{6}; \overline{E}_3 = -\frac{1}{24}$$

Le schéma obtenu est bien consistant et d'ordre un ( $\overline{E}_1$  non nul).

## Etude de la précision du schéma décentré d'ordre deux

Equation de dispersion :

$$\frac{\overline{v_\alpha}}{a} = -\frac{1}{2\varphi_\alpha} \left[ -\sin(\varphi_\alpha) (3 - \cos(\varphi_\alpha)) + j (1 - \cos(\varphi_\alpha))^2 \right]$$

Identification des coefficients d'erreur

Développement de l'équation de dispersion :

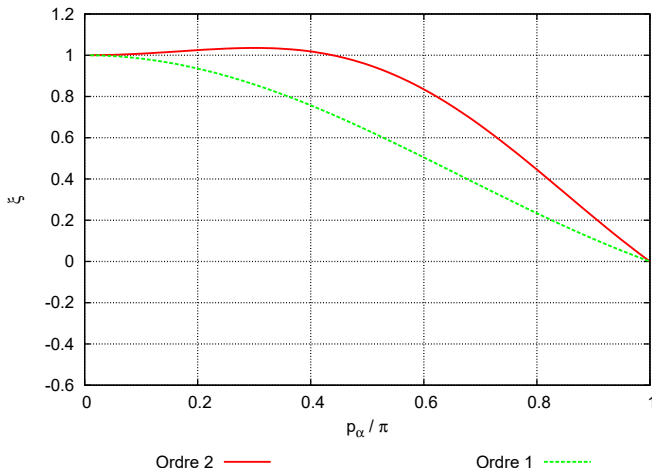
$$\frac{\overline{v_\alpha}}{a} = 1 + \frac{1}{12}\varphi_\alpha^2 - j\frac{1}{8}\varphi_\alpha^3 + \mathcal{O}(\varphi_\alpha^4)$$

Coefficients d'erreur :

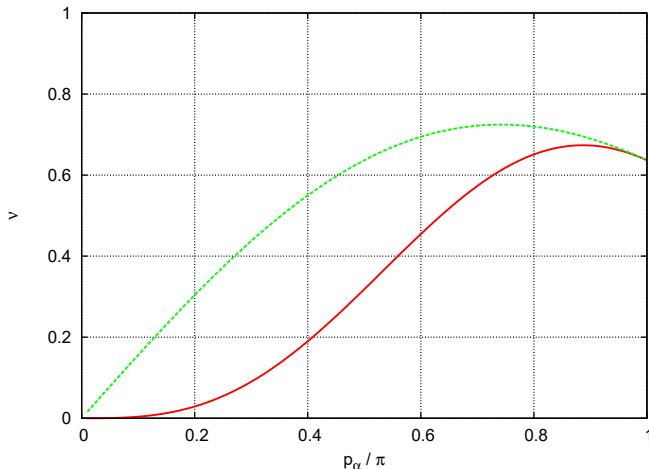
$$\overline{E}_1 = 0; \overline{E}_2 = \frac{1}{12}; \overline{E}_3 = -\frac{1}{8}$$

Le schéma obtenu est bien consistant et d'ordre deux ( $\overline{E}_1$  nul,  $\overline{E}_2$  non nul).

# Dispersion des schémas décentrés d'ordre un et deux en fonction du nombre d'ondes



# Dissipation des schémas décentrés d'ordre un et deux en fonction du nombre d'ondes



## Observations sur l'évolution de la dissipation et de la dispersion en fonction du nombre d'onde

- les courbes de dissipation et de dispersion du schéma d'ordre deux sont plus "plates" à l'origine que celles du schéma d'ordre un.
- Cela traduit une **plus grande précision** de ce schéma sur les petits nombres d'onde (*i.e* les **grandes longueurs d'onde**), liée au fait que ses premiers termes d'erreur sont moins importants que ceux du schéma d'ordre un.
- Les grands nombres d'onde (*i.e* les petites longueurs d'onde) sont mal pris en compte par les deux schémas, tant du point de vue du retard de phase que de la dissipation

## Rôle du schéma d'intégration temporelle

### Système semi-discret en espace

On rappelle que le système semi-discret en espace peut s'écrire :

$$\dot{U} = F(U)$$

### Système discret en espace et en temps

Le processus d'intégration temporelle permet de transformer le système d'EDO rappelé ci-dessus en une suite numérique :

$$U^{n+1} = \mathcal{P}(J\Delta t) U^n \text{ avec } J = \frac{\partial F}{\partial U}$$

où  $\mathcal{P}$  est une matrice fonction de la matrice Jacobienne  $J$ .

# Stabilité du schéma d'intégration temporelle seul

## Définition

Le processus itératif d'intégration temporelle est dit stable si la suite géométrique qu'il définit est convergente.

## En pratique...

La stabilité de ce processus itératif est obtenue ssi le module de  $\mathcal{P}$  est inférieur à l'unité, quelle que soit la valeur propre considérée :

$$|\lambda_{\mathcal{P}}| < 1$$

Le domaine de stabilité du schéma d'intégration temporelle dans le plan complexe est déterminé de façon complètement indépendante de la discrétisation spatiale.



# Stabilité du système discret en espace et en temps

## Pré-requis

Schéma dont les étapes de discrétisation temporelle et intégration spatiale peuvent être **formellement découplées**

## Méthodologie

La stabilité du schéma discret en espace et en temps s'étudie en confrontant le **lieu des valeurs propres**  $\bar{\lambda}$  du système d'EDO discret en espace avec la **limite de stabilité du schéma d'intégration temporelle**.

- Si le lieu des valeurs propres  $\bar{\lambda}$  est **entièrement contenu** en deçà de la limite de stabilité du schéma d'intégration temporelle, le schéma discret en espace et en temps sera **stable**.
- Si une seule valeur propre  $\bar{\lambda}_\alpha$  se trouve **au delà** de la limite de stabilité du schéma d'intégration temporelle, le schéma discret en espace et en temps sera **instable**.

# Type de stabilité du schéma d'intégration temporelle seul

## Terminologie

- **Inconditionnellement instable** si son domaine de stabilité se réduit au demi-plan de droite de  $\mathbb{C}$ .
- **Conditionnellement stable** si son domaine de stabilité recouvre partiellement le demi-plan gauche de  $\mathbb{C}$ . On parle de stabilité conditionnelle car les valeurs propres  $\bar{\lambda}$  ne resteront dans le domaine de stabilité du schéma d'intégration temporelle qu'à la condition de vérifier un critère numérique (par exemple sur  $\mathcal{C}$ ).
- **A-stable** si son domaine de stabilité absolue contient le demi-plan de gauche de  $\mathbb{C}$  en entier.

Note : il existe d'autres types de stabilité plus ou moins contraignants (B-Stabilité, AN-Stabilité...)

## Schéma d'Euler explicite

### Rappel du schéma d'Euler explicite

Le schéma d'Euler explicite peut s'écrire sous forme matricielle :

$$\delta U = JU^n \text{ avec } U^{n+1} = U^n + \Delta t \delta U$$

### Expression en fonction de $\mathcal{P}$

Identification de la matrice  $\mathcal{P}$  :

$$U^{n+1} = \underbrace{(I + \Delta t J)}_{\mathcal{P}} U^n$$

Valeurs propres  $\lambda_{\mathcal{P}}$  de  $\mathcal{P}$  :

$$\lambda_{\mathcal{P}} = 1 + z \text{ avec } z = \bar{\lambda} \Delta t$$

## Calcul de la limite de stabilité du schéma d'Euler explicite

En posant :

$$z = \bar{\lambda}\Delta t = \Delta t [\Re(\bar{\lambda}) + j\Im(\bar{\lambda})] = x + jy$$

On peut écrire successivement :

$$\begin{aligned} |1 + z| &< 1 \\ |1 + x + jy|^2 &< 1 \\ (1 + x)^2 + y^2 &< 1 \\ 1 + 2x + x^2 + y^2 &< 1 \end{aligned}$$

Soit la condition de stabilité dans le plan complexe,  $\forall x \in \{-2, 0\}$  :

$$\begin{aligned} y &< +\sqrt{-(2x + x^2)} \\ y &> -\sqrt{-(2x + x^2)} \end{aligned}$$

La **limite de stabilité du schéma d'Euler explicite** est donc un **cercle** dans le plan complexe, centré en  $(-1, 0)$ .

# Confrontation des valeurs propres du schéma d'Euler explicite avec celles de la discrétisation spatiale (UPO2VF)

## Méthodologie

- Les limites de stabilité du schéma d'intégration temporelle
- Les valeurs de  $\Delta t \overline{\lambda}_\alpha$ .

## Application au schéma UPO2VF

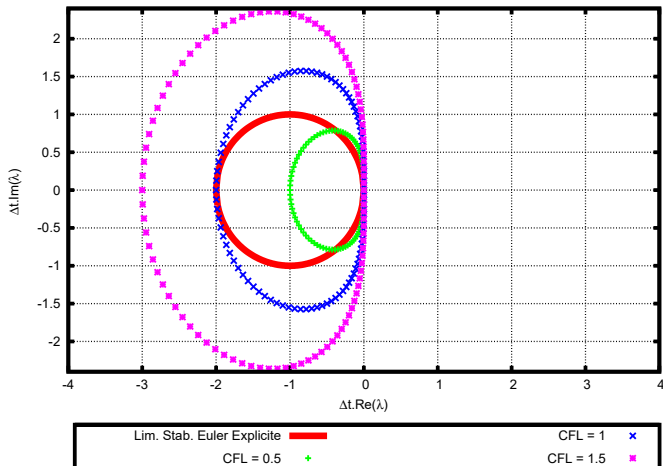
On rappelle que les valeurs propres du schéma UPO2VF s'écrivent :

$$\overline{\lambda}_\alpha = -\frac{a}{2\Delta x} \left[ (1 - \cos \varphi_\alpha)^2 + j \sin \varphi_\alpha (3 - \cos \varphi_\alpha) \right]$$

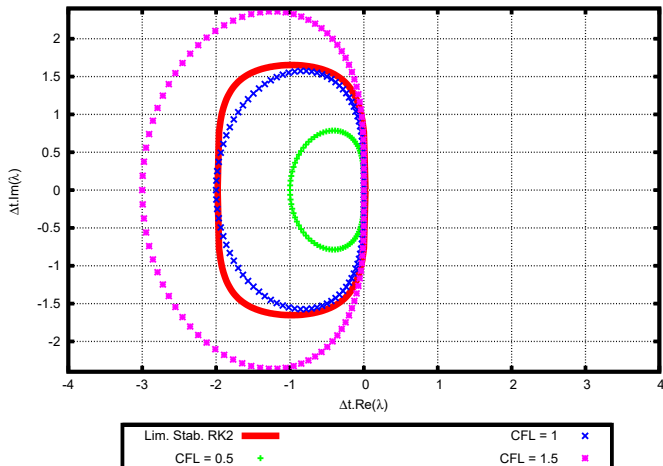
Soit, en multipliant par  $\Delta t$  :

$$\Delta t \overline{\lambda}_\alpha = -\frac{CFL}{2} \left[ (1 - \cos \varphi_\alpha)^2 + j \sin \varphi_\alpha (3 - \cos \varphi_\alpha) \right]$$

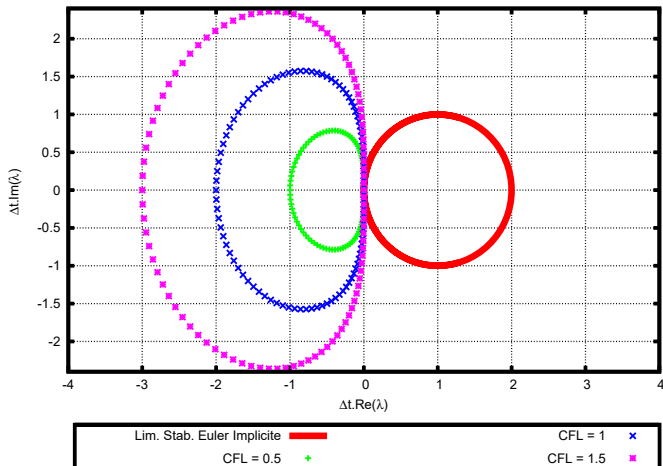
# Confrontation des valeurs propres du schéma d'Euler explicite avec celles de la discrétisation spatiale (UPO2VF)



## Confrontation des valeurs propres du schéma RK2 avec celles de la discrétisation spatiale (UP O2)



# Confrontation des valeurs propres du schéma d'Euler implicite avec celles de la discrétisation spatiale (UPO2VF)





## Observations sur la stabilité des schémas étudiés

- Le degré de contact de la limite de stabilité du schéma RK2 avec l'axe des imaginaires est plus élevé qu'avec le schéma d'Euler explicite, ce qui permet d'être plus stable (jusqu'à  $CFL = 1$ ) et plus précis (le degré du contact étant directement relié à l'ordre du schéma).
- La limite du domaine de stabilité du schéma d'Euler implicite est le symétrique par rapport à l'axe des imaginaires du schéma d'Euler explicite. Cependant, le domaine de stabilité proprement dit n'est pas situé à l'intérieur du cercle, comme dans le cas des schémas explicites, mais à **l'extérieur**.
- Concernant la schéma d'Euler implicite, le domaine d'instabilité étant réduit à un disque situé dans le demi-plan des imaginaires ayant une partie réelle positive, on parle de schéma **A-stable**.

# Analyse du schéma discret en espace et en temps

## Principe

Objectif : étudier le **comportement global du schéma discret**, issu de l'application d'un schéma d'intégration temporelle à une discrétisation spatiale.

## Méthode

Pour ce faire, on va s'intéresser au système

$$\dot{U} = \tilde{J}U,$$

dans lequel la matrice jacobienne  $\tilde{J}$  regroupe les effets de la discrétisation spatiale et de l'intégration temporelle.

## Analyse du schéma discret en espace et en temps

### Evaluation de $\tilde{J}$

Intégration exacte du système précédent entre les instants  $n$  et  $n + 1$  :

$$U^{n+1} = \exp \left( \tilde{J} \Delta t \right) U^n$$

Or, l'application d'un schéma d'intégration temporel à un schéma semi-discret en espace mène à la suite numérique :

$$U^{n+1} = \mathcal{P} (J \Delta t) U^n$$

Par identification entre ces deux expressions, on peut écrire :

$$\mathcal{P} = \exp \left( \tilde{J} \Delta t \right)$$

et finalement :

$$\tilde{J} = \frac{1}{\Delta t} \ln [\mathcal{P} (J, \Delta t)]$$

## Calcul des valeurs propres $\tilde{\lambda}$ de $\tilde{J}$

### Calcul des valeurs propres $\tilde{\lambda}$ de $\tilde{J}$

L'expression de  $\tilde{J}$  nous permet d'écrire  $\tilde{\lambda}$  en fonction de  $\lambda_{\mathcal{P}}$  :

$$\tilde{\lambda} = \frac{1}{\Delta t} \ln(\lambda_{\mathcal{P}}) = \frac{1}{\Delta t} (\ln |\lambda_{\mathcal{P}}| + j\phi_{\lambda_{\mathcal{P}}})$$

On rappelle en effet que  $\lambda_{\mathcal{P}} \in \mathbb{C}$  et peut donc s'écrire :

$$\lambda_{\mathcal{P}} = |\lambda_{\mathcal{P}}| e^{j\phi_{\lambda_{\mathcal{P}}}}, \phi_{\lambda_{\mathcal{P}}} = \arctan \left( \frac{\Im(\lambda_{\mathcal{P}})}{\Re(\lambda_{\mathcal{P}})} \right)$$

L'expression des valeurs propres  $\tilde{\lambda}$  dépend par conséquent :

- du **schéma d'intégration temporelle** étudié, qui détermine l'expression de la matrice de passage  $\mathcal{P}$  et de ses valeurs propres  $\lambda_{\mathcal{P}}$ .
- du schéma de discrétisation spatiale, par l'intermédiaire des valeurs propres  $\bar{\lambda}$ .

# Solution du système équivalent en espace et en temps

## Solution du système équivalent

Comme  $\tilde{J}$  se diagonalise dans la même base que  $J$ , alors :

$$\tilde{U}^n = S_m \exp(\tilde{\Lambda} n \Delta t) S_m^{-1} U_0$$

## Expression au point courant

$$\tilde{u}_i^n = \sum_{\alpha=1}^m B_{\alpha} e^{j k_{\alpha} i \Delta x + \tilde{\lambda}_{\alpha} n \Delta t} \quad \text{avec} \quad B_{\alpha} = \frac{1}{m} \sum_{\beta=1}^m u_{\beta}^0 e^{-j k_{\alpha} \beta \Delta x}$$

On remarque que les coefficients de Fourier  $B_{\alpha}$  de la solution initiale **restent inchangés** par rapport à la solution de l'équation semi-discrète.

# Etude du système discret

## Stabilité

Le schéma discret en espace et en temps est **stable au sens de Liapounov** ssi  $\Re(\tilde{\lambda}) \leq 0$ .

## Vitesse complexe et équation de dispersion

$$\text{Vitesse complexe : } \tilde{v}_\alpha = j \frac{\tilde{\lambda}_\alpha}{k_\alpha} = -\frac{\Im(\tilde{\lambda}_\alpha)}{k_\alpha} + j \frac{\Re(\tilde{\lambda}_\alpha)}{k_\alpha}$$

$$\text{Equation de dispersion : } \frac{\tilde{v}_\alpha}{a} = -\frac{\Im(\tilde{\lambda}_\alpha)}{ak_\alpha} + j \frac{\Re(\tilde{\lambda}_\alpha)}{ak_\alpha}$$

## Dissipation et dispersion

$$\text{Dissipation : } \tilde{\nu}_\alpha = -\frac{\Re(\tilde{\lambda}_\alpha)}{ak_\alpha}, \text{ dispersion : } \tilde{\xi}_\alpha = -\frac{\Im(\tilde{\lambda}_\alpha)}{ak_\alpha}$$

## Equation équivalente du système discret

### Développement limité de l'équation de dispersion

$$\frac{\widetilde{v}_\alpha}{a} = 1 + \widetilde{E}_0 - j\widetilde{E}_1\varphi_\alpha + \widetilde{E}_2\varphi_\alpha^2 + j\widetilde{E}_3\varphi_\alpha^3 - \widetilde{E}_4\varphi_\alpha^4 + \dots$$

### Equation équivalente

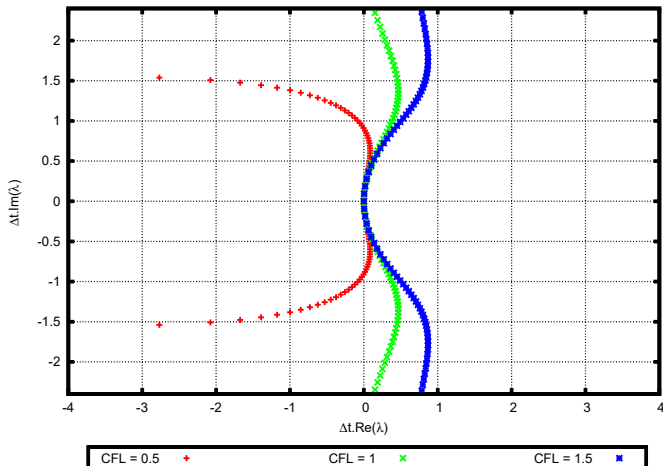
$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = a\Delta x \widetilde{E}_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a\Delta x^2 \widetilde{E}_2 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + a\Delta x^3 \widetilde{E}_3 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \mathcal{O}(\Delta x^4)$$

## Synthèse de la signification des différentes valeurs propres

- $\lambda$  : valeurs propres apparaissant dans la solution exacte de l'EDP, il y en a une infinité.
- $\bar{\lambda}$  : valeurs propres de la matrice jacobienne  $J$  du système semi-discret en espace, il y en a  $m$ . Elles se calculent à partir des valeurs propres de la matrice de permutation circulaire  $P_m$ , notées  $\lambda_m$ , qui sont les racines  $m$ -ièmes de l'unité.
- $\tilde{\lambda}$  : valeurs propres de la matrice jacobienne  $\tilde{J}$  du système équivalent, il y en a  $m$ . Elles s'obtiennent en injectant les valeurs propres du système discret en espace  $\bar{\lambda}$  dans celles de la matrice de passage  $\mathcal{P}$ , notées  $\lambda_{\mathcal{P}}$ . L'expression de  $\lambda_{\mathcal{P}}$  en fonction de  $\bar{\lambda}$  dépend uniquement du schéma d'intégration temporelle utilisé.



# Lieu des valeurs propres du système équivalent, schéma UPO2VF-EE



## Précision de la combinaison du schéma de discrétisation spatiale et d'intégration temporelle

- On écrit l'équation de dispersion du schéma discret en espace et en temps
- Par identification avec l'équation équivalente, on obtient les termes d'erreur suivants :

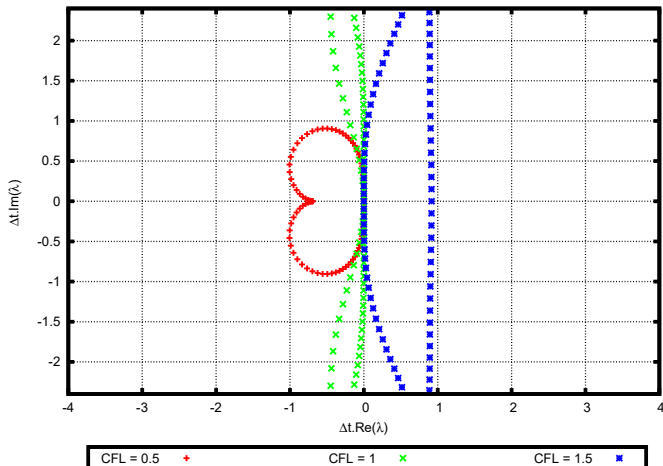
$$\widetilde{E}_1 = \frac{1}{2} CFL$$

$$\widetilde{E}_2 = \frac{1}{12} (1 - 4 CFL^2)$$

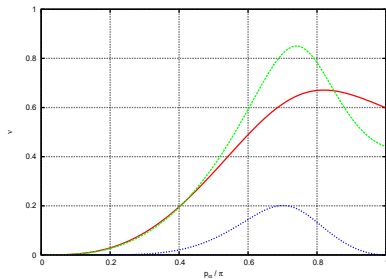
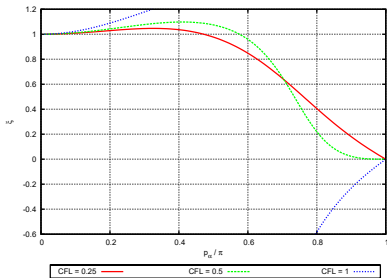
$$\widetilde{E}_3 = -\frac{1}{8} \left( 1 + \frac{2}{3} CFL - 2 CFL^3 \right)$$

Remarque : le terme d'erreur d'ordre 1 est linéaire par rapport au CFL ce qui induit une dissipation très forte sur les grandes longueurs d'onde.

# Lieu des valeurs propres du système équivalent pour le schéma UPO2VF-RK2



# Dissipation et dispersion en fonction du nombre d'onde réduit



## Ordre de la méthode numérique complète

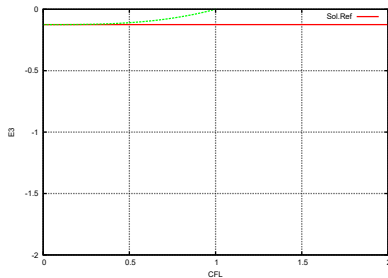
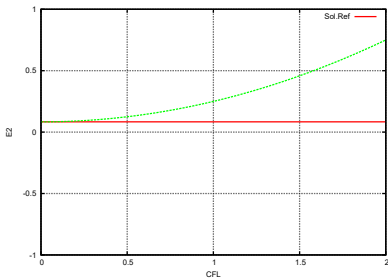
- On écrit l'équation de dispersion du schéma discret en espace et en temps :

$$\frac{\widetilde{v}_\alpha}{a} = 1 + \underbrace{\frac{1}{12} (1 + 2 \text{ CFL}^2)}_{\widetilde{E}_2} \varphi_\alpha^2 + j \underbrace{\frac{1}{8} (-1 + \text{ CFL}^3)}_{\widetilde{E}_3} \varphi_\alpha^3 + \mathcal{O}(\varphi_\alpha^4)$$

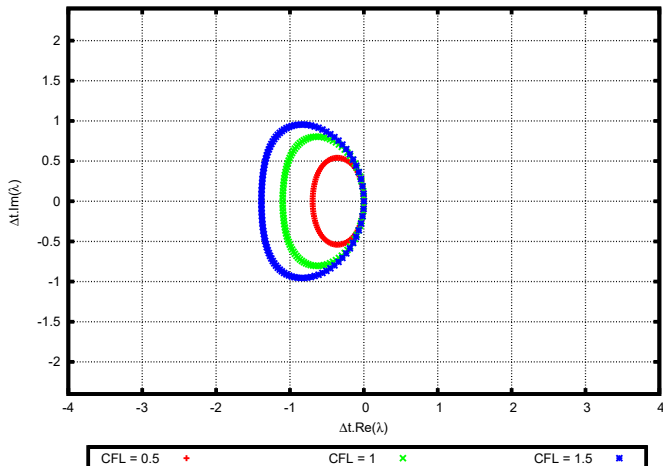
- Par identification avec l'équation équivalente, on obtient les termes d'erreur suivants :

$$\begin{aligned} \widetilde{E}_1 &= 0 \\ \widetilde{E}_2 &= \frac{1}{12} (1 + 2 \text{ CFL}^2) \\ \widetilde{E}_3 &= \frac{1}{8} (-1 + \text{ CFL}^3) \end{aligned}$$

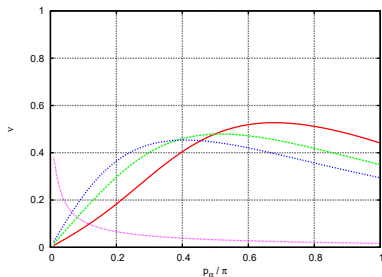
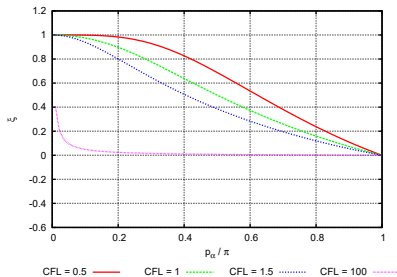
# Coefficients d'erreur dispersif d'ordre deux et dissipatif d'ordre trois



# Lieu des valeurs propres du système équivalent pour le schéma UPO2VF-IE



# Dissipation et dispersion en fonction du nombre d'onde réduit





## Précision de la combinaison du schéma de discrétisation spatiale et d'intégration temporelle

- On écrit tout d'abord l'équation de dispersion du schéma discret en espace et en temps.
- Par identification avec l'équation équivalente, on obtient les termes d'erreur suivants :

$$\widetilde{E}_1 = \frac{1}{2} CFL$$

$$\widetilde{E}_2 = \frac{1}{12} (1 - 4 CFL^2)$$

$$\widetilde{E}_3 = -\frac{1}{8} \left( 1 + \frac{2}{3} CFL - 2 CFL^3 \right)$$

# Coefficients d'erreur dispersif d'ordre deux et dissipatif d'ordre trois

