5A ModIA

Rendus de TPs MatLab
Résolution de Systèmes Linéaires

Auteurs :
Rémi Colin
Mickael Song

Superviseur :
Ronan Guivarch

7 avril 2024

Table des matières

1 Introduction

Dans ce TP, nous cherchons à résoudre : $Ax = b$ où A est une matrice creuse.
Ce TP se concentre sur l'application de méthodes directes pour résoudre ce système, en utilisant la factorisation de Cholesky pour les matrices symétriques définies positives et la factorisation LU pour les matrices non symétriques.
De plus, des stratégies de réordonnancement sont également utilisées pour minimiser le nombre de non-zéros dans les facteurs de la matrice, afin de réduire le remplissage et le nombre d'opérations nécessaires à la résolution.

2 Factorisation de Cholesky

La factorisation de Cholesky est réservée aux matrices symétriques définies positives. Cette méthode décompose une matrice A en produit de $L * L^T$, où L est une matrice triangulaire inférieure, ce qui permet une optimisation du nombre d'opérations nécessaire à la résolution du système linéaire par rapport à d'autres factorisations.

Ainsi, dans la suite de ce TP, nous effectuerons une factorisation de Cholesky si la matrice est symétrique (mat0, mat1, mat2, mat3 et bcsstk27) et une factorisation LU sinon (piston, pde225_5e-1 et hydcar20).

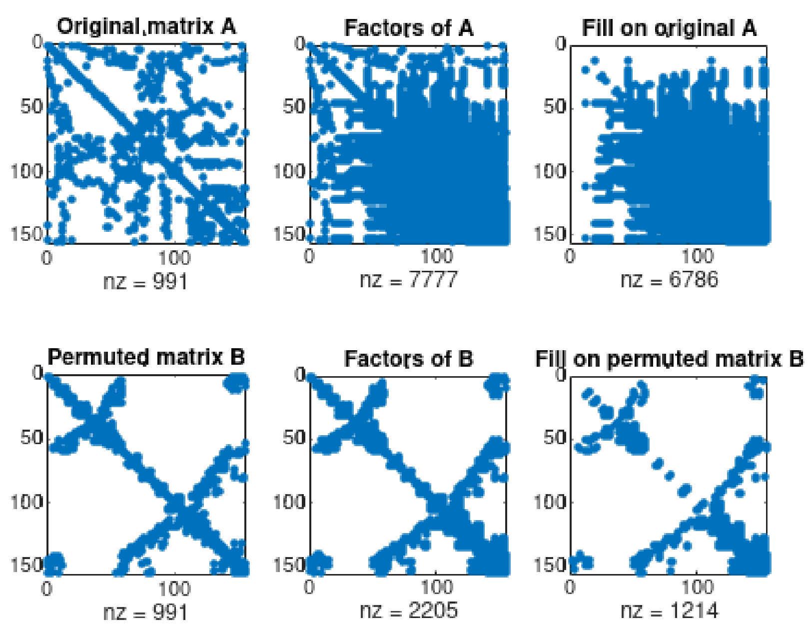

Figure 1 – Mat0 permutation AMD

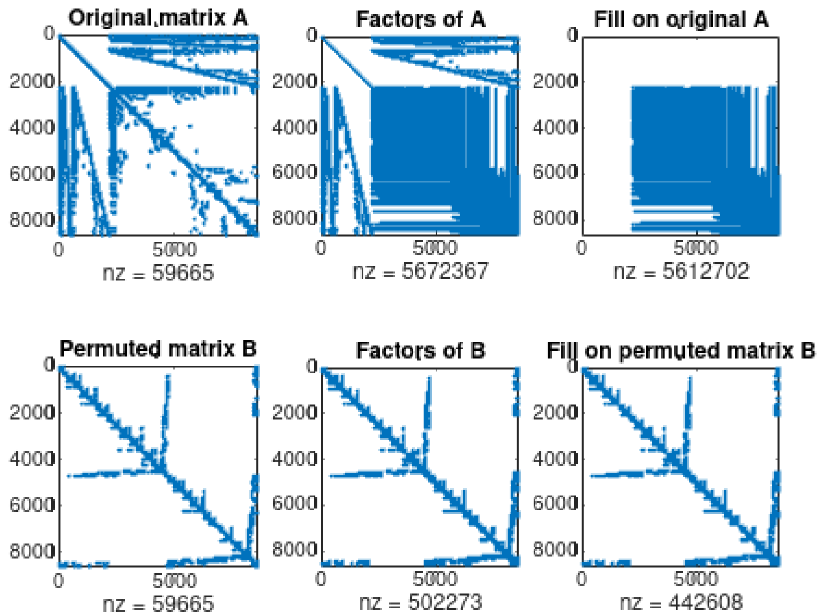

Figure 2 – Mat3 permutation AMD

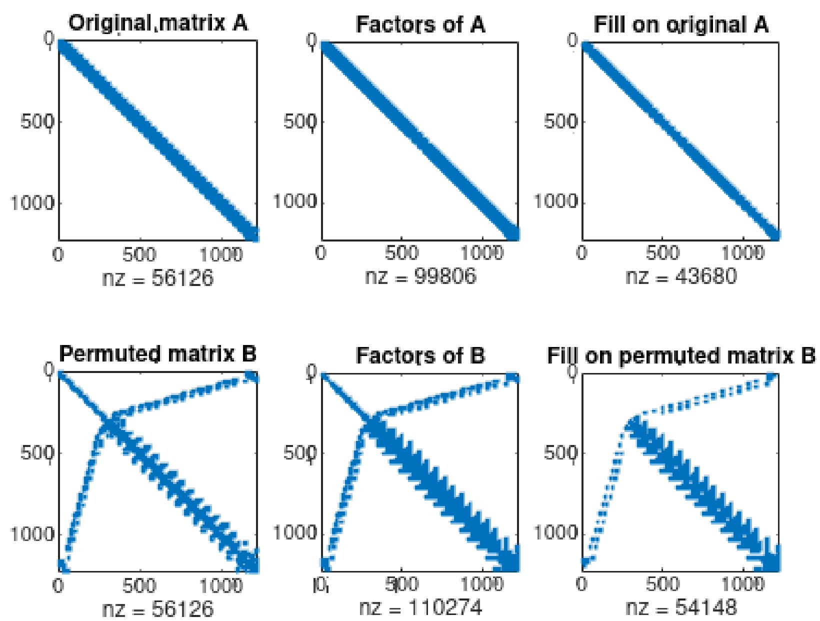

Figure 3 – Bcsstk27 permutation AMD

2.1 Nombre d'opérations

Comme dit précédemment, la factorisation de Cholesky est avantageuse pour les matrices symétriques, car elle réduit de moitié le nombre de calculs nécessaires par rapport à la factorisation LU. Le nombre total d'opérations flottantes requises est donné par $4\text{nnz}(L) - 2n$, où nnz représente le nombre de non-zéros et n la dimension de la matrice.

Permutation	mat0	mat3	bcsstk27
Aucune	15 554	11 239 790	199 612
symamd	4 434	907 646	232 972
symrcm	5 938	2 344 106	201 052
amd	4 410	1 004 546	220 548
colamd	5 158	1207442	203 208
colperm	12 502	10 492 058	1 311 532

Table 1 – Nombre d'opérations pour la résolution avec une factorisation de Cholesky en fonction de la permutation utilisée

2.2 Validation des résultats par erreurs inverses normwise

Nous pouvons évaluer la solution obtenue par factorisation de Cholesky par le calcul des erreurs inverses sur le résidu et la solution. Cela permet de confirmer que les permutations effectuées, tout en réduisant le nombre d'opérations, ne compromettent pas la précision de la solution.

Pour ce faire, nous utilisons l'erreur inverse normwise $\eta_{Ab}^N(x)$ définie comme suit :

$$\eta_{Ab}^N(x) = \frac{\|b - Ax\|}{\|A\|\|x\| + \|b\|} \tag{1}$$

De plus, nous utilisons l'erreur sur la solution qui est évaluée par la norme relative de l'écart entre la solution obtenue x et la solution de référence x_{sol} :

$$\frac{\|x_{sol} - x\|}{\|x_{sol}\|} \tag{2}$$

Ces mesures permettent de quantifier la précision du modèle par rapport au système linéaire donné et la proximité de la solution obtenue par rapport à la solution de référence.

Les erreurs calculées pour les différentes matrices et permutations sont présentées dans le tableau ci-dessous :

Permutation	mat0	mat3	bcsstk27
symamd	1.204231e-12	1.087265e-10	4.493963e-14
symrcm	1.439229e-12	1.721283e-10	3.3550905e-14
amd	1.529807e-12	1.168971e-10	3.602668e-14
colamd	1.716965e-12	1.280871e-10	3.860635e-14
colperm	9.337847e-13	1.265495e-10	4.071712e-14

Table 2 – Erreurs de la norme inverse sur le résidu avec une factorisation de Cholesky en fonction de la permutation

Permutation	mat0	mat3	bcsstk27
symamd	1.181961e-13	1.519619e-12	6.921888e-15
symrcm	9.575571e-14	3.307900e-12	4.839517e-15
amd	2.05288e-16	1.430445e-13	2.419759e-15
colamd	1.506383e-14	2.4439112e-12	8.208299e-15
colperm	1.650392e-13	3.706983e-13	9.743262e-15

Table 3 – Erreurs de la norme inverse sur la solution avec une factorisation de Cholesky en fonction de la permutation

3 Factorisation LU

La factorisation LU est applicable toute matrice carrée et décompose A en un produit de matrices triangulaires L et U. Ce qui permet d'appliquer cette factorisation à n'importe quel système linéaire et donc sur les matrices non symétriques (piston, pde225_5e-1 et hydcar20).

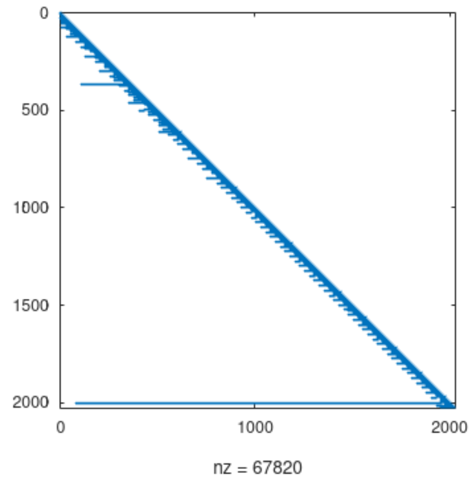

FIGURE 4 – Matrice piston

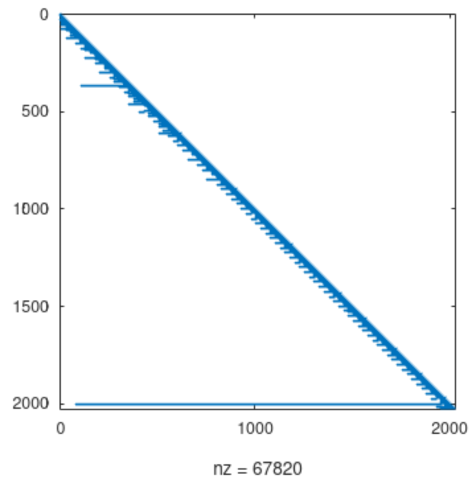

FIGURE 5 – Matrice pde225$_5e - 1$

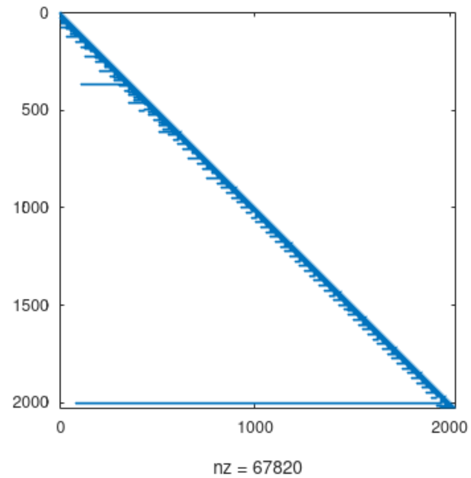

Figure 6 – Matrice hydcar20

3.1 Nombre d'opérations

Le calcul du nombre total d'opérations flottantes (flops) dépend des non-zéros dans L et U, avec la formule $2\text{nnz}(L) - 2n + 2\text{nnz}(U) - n$.

Permutation	piston	pde225_5-1	hydcar20
Aucune	345 831	12 881	6 119
symamd	407 633	6 537	6 519
symrcm	329 383	9 605	9 925
amd	342 355	6 517	6 027
colamd	450 887	8 657	2 639
colperm	993 661	28 229	7 357

Table 4 – Nombre d'opérations pour la résolution avec une factorisation LU en fonction de la permutation utilisée

3.2 Validation des résultats par erreurs inverses normwise

De même que pour la factorisation de Cholesky, nous évaluons la précision de la factorisation LU grâce aux erreurs inverses sur le résidu (donnée par la formule 1) et la solution (donnée par la formule 2) .

Les erreurs calculées pour les différentes matrices et permutations sont présentées dans le tableau ci-dessous :

Permutation	piston	pde225_5-1	hydcar20
symamd	2.456905e-10	2.645708e-15	5.590174e-14
symrcm	2.357861e-10	2.548184e-15	1.812251e-14
amd	2.424795e-10	2.453592e-15	3.6806659e-14
colamd	2.327759e-10	2.751667e-15	2.217839e-14
colperm	2.358420e-10	2.6541894e-15	3.958112e-14

Table 5 – Erreurs de la norme inverse sur le résidu avec une factorisation LU en fonction de la permutation

Permutation	piston	pde225_5-1	hydcar20
symamd	4.869213e-10	4.948523e-16	2.439294e-15
symrcm	4.857500e-10	5.114043e-16	2.072620e-15
amd	4.861603e-10	4.745771e-16	2.582570e-15
colamd	4.870453e-10	4.671167e-16	2.816265e-15
colperm	4.862668e-10	4.67497e-16	3.037541e-15

Table 6 – Erreurs de la norme inverse sur la solution avec une factorisation LU en fonction de la permutation

4 Conclusion

Ce TP a permis d'illustrer l'importance des méthodes de factorisation et de permutation dans la résolution efficace de systèmes linéaires creux. En particulier, il a mis en évidence les avantages et les limites des factorisations de Cholesky et LU, soulignant l'importance du choix de la permutation pour minimiser le fill-in et optimiser les calculs, tout en préservant la précision des solutions. Ainsi, utiliser une factorisation symbolique en amont de la résolution d'un système linéaire est très important afin de trouver la meilleure permutation et factorisation et donc optimiser le nombre d'opérations nécessaires àla résolution du système.