Le point sur l'intégration temporelle

UF « Modélisation et calcul scientifique »
Formation ModIA « Modélisation et Intelligence Artificielle »

Nicolas Bertier (nicolas.bertier@onera.fr)

INSA, 4A

Version du document : 1.0 (dernière modification le 19/01/2022)

Plan du cours

- Exemples de simulations numérique récentes en CFD
- Introduction aux méthodes de différences finies
- **Le point sur l'intégration temporelle**
- Analyse spectrale et notion d'équation équivalente
- Monotonie et limiteurs
- Introduction aux méthodes de volumes finis
- Vers la résolution des équations de Navier-Stokes

Formulation compacte du système semi-discret en espace

Vecteur U des degrés de liberté du problème semi-discret

On note $U(t)$ le vecteur contenant, à un instant t l'ensemble des états discrets u_i, $i \in [1, m]$, soit :

$$U = (u_1, u_2, ..., u_m)$$

Système semi-discret

Le système d'équations différentielles ordinaires issu de la discrétisation spatiale de l'équation modèle considérée peut alors s'écrire :

$$\dot{U} = F(U)$$

où l'expression exacte de $F(U)$ dépend du schéma en espace utilisé.

Rôle du schéma d'intégration temporelle

Principes généraux

- L'intégration temporelle a pour fonction de résoudre le système d'EDO :
$$\dot{U} = F(U, t)$$
$\Rightarrow$ remplacement de la solution exacte $U(t)$ par une suite de valeurs discrètes en temps.
- Entre les deux instants t^n et t^{n+1}, l'intégration temporelle consiste alors à évaluer l'expression :
$$\delta U = \frac{1}{\Delta t}\int_{t^n}^{t^{n+1}} F(U)dt,$$
avec :
$$\delta U = \frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta t} \quad \text{et} \quad \Delta t = \left(t^{n+1} - t^n\right)$$

Deux grandes familles de schémas d'intégration temporelle

Schémas **explicites**

- simples à mettre en œuvre et peu coûteux
- stabilité souvent fortement contrainte
- l'état à l'instant $n+1$ est calculé à l'aide des instants antérieurs
- Exemples : schémas d'Euler explicite, de Runge-Kutta,...

Schémas **implicites**

- plus complexes à implémenter et plus coûteux, nécessite la résolution d'un système à chaque pas de temps.
- beaucoup plus stables que les schémas explicites
- l'état à l'instant $n+1$ est calculé à l'aide des instants antérieurs mais également de $n+1$.
- Exemples : schémas d'Euler, de Gear, de Crank-Nicolson, Runge-Kutta implicites,...

Approches multi-évaluations/multipas

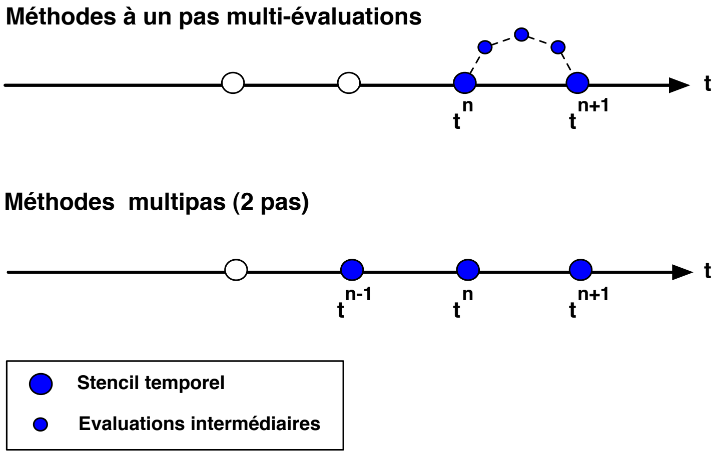

Schéma explicite d'Euler

Ecriture du schéma d'Euler explicite

$$\delta U = F\left(U^n\right) \quad \text{avec} \quad U^{n+1} = U^n + \Delta t \delta U$$

Propriétés

- Schéma explicite à un pas et une étape
- Plus simple des méthodes d'intégration explicites
- S'interprète comme une méthode des rectangles à gauche en temps
- Très peu coûteux, mais domaine de stabilité extrêmement réduit
- Peu précis car d'ordre un en temps

Schéma explicite de Runge-Kutta

Ecriture du schéma de Runge-Kutta à deux étapes

$$\left\{\begin{array}{lcl} \delta U^\star & = & F\left(U^n\right) \\ \delta U & = & \frac{1}{2}F\left(U^\star\right)+\frac{1}{2}F\left(U^n\right) \end{array}\right. \quad \text{avec} \quad \left\{\begin{array}{lcl} U^\star & = & U^n+\Delta t\delta U^\star \\ U^{n+1} & = & U^n+\Delta t\delta U \end{array}\right.$$

Propriétés

- Schéma explicite à un pas et deux étapes
- Améliore la stabilité et la précision de la méthode d'Euler en faisant une évaluation supplémentaire des états entre t^n et t^{n+1}
- Coût par itération presque deux fois supérieur à celui du schéma d'Euler explicite
- Possibilité de faire des étapes supplémentaires afin de monter en ordre et d'élargir (modestement) le domaine de stabilité
- Précis à l'ordre deux en temps

Schéma UPO2VF avec intégration Euler explicite (CFL=0.1)

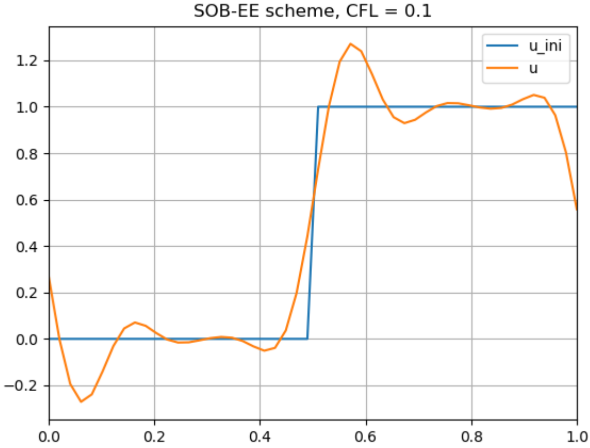

Schéma UPO2VF avec intégration explicite RK2

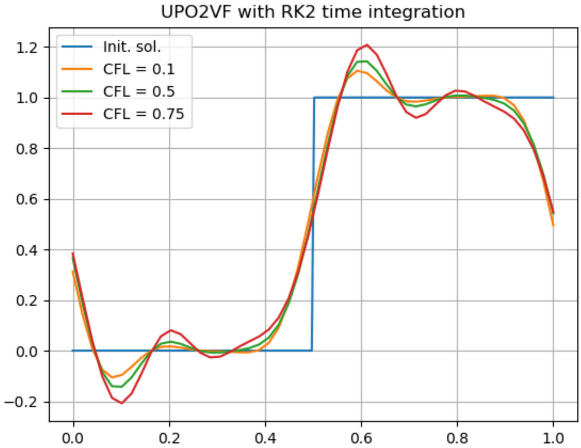

Schéma implicite d'Euler

Ecriture du schéma d'Euler implicite

$$\delta U = F\left(U^{n+1}\right) \quad \text{avec} \quad U^{n+1} = U^n + \Delta t \delta U$$

Propriétés

- Schéma implicite à un pas et une étape
- Plus simple des méthodes d'intégration implicite
- S'interprète comme une méthode des rectangles à droite en temps
- Nécessite la résolution d'un système
- A-stable
- Peu précis car d'ordre un en temps

INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES TOULOUSE

Schéma First Order Upwind-Explicit Euler (FOU-EE)

Rappel du schéma **explicite** FOU-EE au point courant :

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \mathcal{C}\left(u_i^n - u_{i-1}^n\right)$$

Ce qui peut se réécrire :

$$u_i^{n+1} = (1-\mathcal{C})u_i^n + \mathcal{C}u_{i-1}^n$$

Soit, sous forme d'un système pour l'ensemble des points du maillage :

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix}^{n+1} = \begin{pmatrix} 1-\mathcal{C} & 0 & \cdots & 0 & \mathcal{C} \\ \mathcal{C} & 1-\mathcal{C} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathcal{C} & 1-\mathcal{C} & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \mathcal{C} & 1-\mathcal{C} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix}^{n}$$

Schéma First Order Upwind-**Implicit** Euler (FOU-IE)

Schéma **implicite** FOU-IE au point courant :

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \mathcal{C}\left(u_i^{n+1} - u_{i-1}^{n+1}\right)$$

Ce qui peut se réécrire :

$$(1+\mathcal{C})u_i^{n+1} - \mathcal{C}u_{i-1}^{n+1} = u_i^n$$

Soit, sous forme d'un système pour l'ensemble des points du maillage :

$$\begin{pmatrix} 1+\mathcal{C} & 0 & \cdots & 0 & -\mathcal{C} \\ -\mathcal{C} & 1+\mathcal{C} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\mathcal{C} & 1+\mathcal{C} & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -\mathcal{C} & 1+\mathcal{C} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix}^{n+1} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix}^{n}$$

Etude de la stabilité du schéma FOU-IE

Ecriture au point courant

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \mathcal{C}\left(u_i^{n+1} - u_{i-1}^{n+1}\right)$$

Expression du facteur d'amplification (1/2)

Soit, en réinjectant $u_i^n = A^n\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}i\varphi}$:

$$A^{n+1}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}i\varphi} = A^n\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}i\varphi} - \mathcal{C}A^{n+1}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}i\varphi} - \mathrm{e}^{\mathrm{j}(i-1)\varphi}\right)$$

On divise par $\mathrm{e}^{\mathrm{j}i\varphi}$:

$$A^{n+1} = A^n - \mathcal{C}A^{n+1}\left(\mathrm{e}^{0} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\varphi}\right)$$

Soit :

$$A^{n+1}\left(1 + \mathcal{C} - \mathcal{C}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\varphi}\right) = A^n$$

Etude de la stabilité du schéma FOU-IE

Expression du facteur d'amplification (2/2)

$$\mathcal{G} = \frac{1}{1 + \mathcal{C} - \mathcal{C}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\varphi}} = \frac{1}{1 + \mathcal{C} - \mathcal{C}\cos\varphi + \mathrm{j}\mathcal{C}\sin\varphi}$$

En notant que $||\mathcal{G}||^2 = \mathcal{G} \times \mathcal{G}^\star$, on peut écrire :

$$\begin{aligned} ||\mathcal{G}||^2 &= \frac{1}{1 + \mathcal{C} - \mathcal{C}\cos\varphi + \mathrm{j}\mathcal{C}\sin\varphi} \times \frac{1}{1 + \mathcal{C} - \mathcal{C}\cos\varphi - \mathrm{j}\mathcal{C}\sin\varphi} \\ &= \frac{1}{(1 + \mathcal{C} - \mathcal{C}\cos\varphi)^2 - \mathrm{j}\mathcal{C}\sin\varphi\,(1 + \mathcal{C} - \mathcal{C}\cos\varphi) + \mathrm{j}\mathcal{C}\sin\varphi\,(1 + \mathcal{C} - \mathcal{C}\cos\varphi) + \mathcal{C}^2\sin^2\varphi} \end{aligned}$$

Soit finalement :

$$||\mathcal{G}||^2 = \frac{1}{(1 + \mathcal{C} - \mathcal{C}\cos\varphi)^2 + \mathcal{C}^2\sin^2\varphi} \leq 1$$

Le schéma décentré amont associé à une intégration d'Euler implicite est par conséquent **inconditionellement stable**.

Schéma FOU avec intégration Euler explicite (rappel)

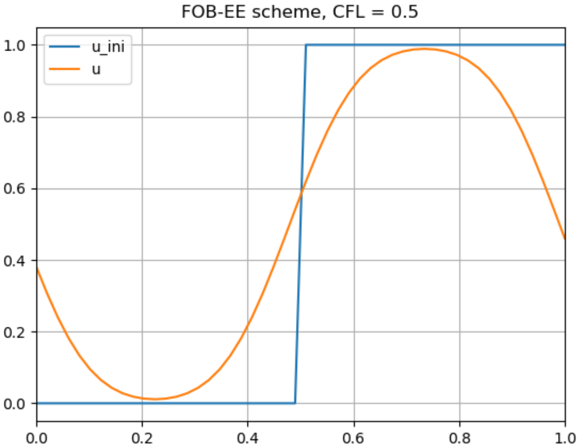

Schéma FOU avec intégration Euler implicite

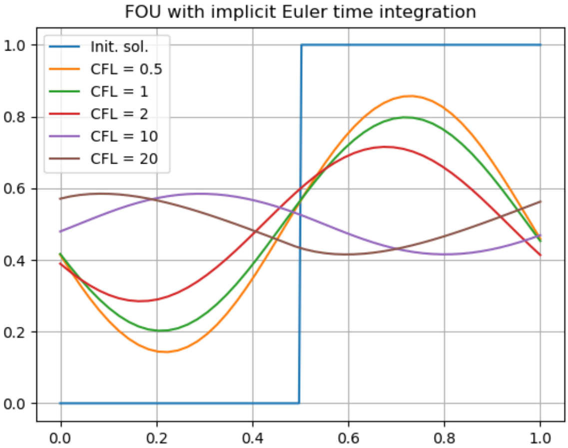

Schéma implicite de Crank-Nicolson

Ecriture du schéma d'Euler implicite

$$\delta U = \frac{1}{2} F\left(U^{n+1}\right) + \frac{1}{2} F\left(U^{n}\right) \quad \text{avec} \quad U^{n+1} = U^{n} + \Delta t \delta U$$

Propriétés

- Schéma implicite à un pas et une étape
- S'interprète comme une méthode des trapèzes en temps
- Nécessite la résolution d'un système
- D'ordre deux en temps

Schéma implicite de Gear

Ecriture du schéma de Gear

$$\delta U = \frac{2}{3} F\left(U^{n+1}\right) + \frac{1}{3}\delta U^n \quad \text{avec} \quad \left\{ \begin{array}{lcl} U^n & = & U^{n-1} + \Delta t \delta U^n \\ U^{n+1} & = & U^n + \Delta t \delta U \end{array} \right.$$

Propriétés

- Schéma implicite à deux pas et une étape
- Nécessite la donnée de deux conditions initiales
- Nécessite la résolution d'un système
- D'ordre deux en temps

Comparaison explicite/implicite