Projet segmentation d'images

Hamza Belkarkor, Alexandre Personnic, Joanne Couallier,
Huimin Zhang, Yasmine Hecker

22 Juin 2022

1 Introduction du sujet

L'objectif de ce projet est d'implémenter des algorithmes permettant de partitionner des images en noir et blanc, afin de séparer l'image en 2 parties : les objets visibles et le fond. L'intérêt de ne pas travailler dans un premier temps sur des images couleurs est de se ramener à un problème binaire. Pour réussir notre segmentation d'image, on se ramène donc à un problème d'optimisation où on cherche le triplet (u,c_1, c_2) :

$$(u^*, c_1^*, c_2^*) = \underset{\substack{u\in\{0;1\}^{|\Omega|} \\ c_1\in[0;255] \\ c_2\in[0;255]}}{\operatorname{argmin}} \int_\Omega |Du| + \lambda \int_\Omega |I(x) - c_1|^2 u(x)dx + \lambda \int_\Omega |I(x) - c_2|^2 (1 - u(x))dx \tag{1}$$

La première intégrale correspond à la pénalisation sur la régularité du contour, la deuxième à l'homogénéité de la zone 1 et la troisième à l'homogénéité de la zone 2.
Nous allons tester nos différentes implémentations sur une image contenant 4 pièces.

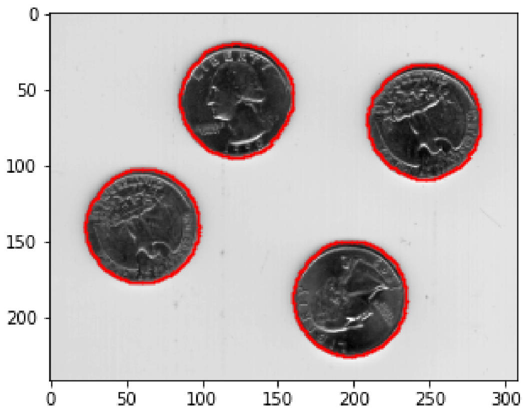

Figure 1: Exemple de l'image des 4 pièces segmentée

2 Méthode Chan-Vese

La première méthode que nous avons étudié est la méthode de Chan-Vese. La fonctionnelle telle que définie dans l'introduction n'est pas différentiable. On introduit donc une surface, notée ϕ qui vaut 0 au niveau du contour que l'on cherche à tracer. Par conséquent, nous considérons que ϕ est négatif à l'extérieur du contour et positif à l'intérieur.
Grâce à cette nouvelle formulation, on définit un masque binaire à partir d'une surface ϕ pour la fonction u tel que $u = H(\phi(x))$ où H est appelé fonction Heavyside qui vaut 1 si son argument est positif, 0 sinon. On cherche donc désormais le triplet (ϕ, c_1, c_2) solution du problème d'optimisation que l'on réécrit :

$$(\phi^*, c_1^*, c_2^*) = \underset{\substack{\phi \in \mathbb{R}^{|\Omega|} \\ c_1 \in [0;255] \\ c_2 \in [0;255]}}{\text{argmin}} \int_\Omega ||\nabla H(\phi(x))||dx + \lambda \int_\Omega |I(x) - c_1|^2 H(\phi(x))dx + \lambda \int_\Omega |I(x) - c_2|^2 (1 - H(\phi(x)))dx$$

avec $\phi \in \mathbb{R}^{|\Omega|}$, où $\mathbb{R}^{|\Omega|}$ est un espace continu et convexe.

En réécrivant le terme de pénalisation du contour $\int_\Omega ||\nabla H(\phi(x))||$ et en utilisant une approximation de la variation totale $||\nabla \phi||_\epsilon = \sqrt{\phi_x^2 + \phi_y^2 + \epsilon^2}$, on arrive à se ramener à un problème différentiable où l'on peut mettre à jour les coefficients c_1, c_2 et trouver ϕ via une descente de gradient classique.

3 Méthode de Chan, Esedoglu et Nikolova

La méthode de Chan, Esedoglu et Nikolova consiste à considérer le masque binaire comme continu en prenant des valeurs réelles dans l'intervalle $[0, 1]$, et en fixant $c_1 = 110$ et $c_2 = 227$. Le problème devient alors convexe en u sur l'ensemble $\mathcal{A} := \{u : x \in \Omega \mapsto [0; 1]\}$. La solution du problème peut se calculer par un algorithme de gradient projeté donné ci-dessous :

$$u^{k+1} = \mathcal{P}_\mathcal{A}\left(u^k + \tau\left(div\left(\frac{\nabla u^k}{||\nabla u^k||_\epsilon}\right) - \lambda\,(I - c_1)^2 + \lambda\,(I - c_2)^2\right)\right)$$

avec $\mathcal{P}_\mathcal{A} = \min(\max(u, 0), 1)$. Il suffit ensuite d'appliquer un seuil $\mu = 0.5$ sur le masque obtenu par l'algorithme, afin d'obtenir la segmentation de l'image.

4 Formulation Duale

Cette méthode permet de ne pas faire l'approximation de la Variation Totale : $||\nabla u|| \approx ||\nabla u||_\epsilon$. On utilise alors la formulation Primal-Dual. Le problème d'optimisation initial, dit primal, difficile à résoudre, est associé à d'autres problèmes plus facile à résoudre.
On peut écrire notre problème sous la forme d'un problème primal non linéaire : $\min_{x \in \mathbb{R}} G(Kx) + f(x)$, où K est une application linéaire (dans notre cas : $K = \nabla$). Ce problème est équivalent au problème de point-selle :

$$\min_x G(Kx) + f(x) = \min_x \sup_z < Kx, z > -G^\star(z) + f(x)$$

Ce problème peut alors se résoudre avec une méthode proximale, car il n'y a plus de composition de G avec K.

Dans notre cas, la partie du problème d'optimisation (1) qui pose problème est la Variation Totale, dont on peut considérer la formulation duale : $\int_\Omega |Du| = \sup_{z \in \mathcal{B}} \int_\Omega u \text{ div}(z)dx$.
On obtient finalement le problème d'optimisation suivant :

$$(u^\star, z^\star) = \arg\min_{u \in \mathcal{A}} \arg\max_{z \in \mathcal{B}} J(u, z)$$

où l'énergie J est continuement différentiable en (u, z) :

$$J(u, z) = \int_\Omega udiv(z)dx + \lambda \int_\Omega |I(x) - c_1|^2 u(x)dx + \lambda \int_\Omega |I(x) - c_2|^2 (1 - u(x))dx$$