Analyse Hilbertienne

Partie I : Espaces de Hilbert

1) Définition / Exemples
2) Bases Hilbertiennes / Polynômes orthogonaux
3) Projection sur un convexe / Convergence faible
4) [Optimisation : Lax Milgram - Stampacchia]

Partie II Analyse de Fourier

1) Series de Fourier
2) Transformée de Fourier
3) Le cas discret

Partie I Espaces de Hilbert

I Définitions - Exemples

1°) Espaces préhilbertiens

Définition : (i) Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). On appelle produit scalaire sur E, toute application $(\cdot\,;\cdot) : E \times E \to \mathbb{K}$

(a) $\forall y \in E \quad x \mapsto (x;y)$ est linéaire

(b) $\forall x; y \in E \quad (y;x) = (x;y) \quad (\mathbb{K} = \mathbb{R})$

$= \overline{(x;y)} \quad (\mathbb{K} = \mathbb{C})$

(c) $\forall x \in E \quad (x;x) \in \mathbb{R}^+$

(d) $\forall x \in E, \quad (x;x) = 0 \iff x = 0$

(ii) E muni d'un produit scalaire $(\cdot\,;\cdot)$ est un espace préhilbertien

Exemples $*$ $E = \mathbb{R}^d$ muni de $\langle x;y \rangle = \sum_{i=1}^{d} x_i y_i$ (canonique)

$*$ $E = \mathbb{C}^d$ muni de $\langle x;y \rangle = \sum_{i=1}^{d} x_i \overline{y_i}$

$*$ $E = \mathcal{C}([0,1];\mathbb{C}) \quad \langle f;g \rangle = \int_0^1 f(t)\,\overline{g}(t)\,dt$.

* $E = \ell^2(\mathbb{N}) = \left\{ u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|^2 < +\infty \right\}$

muni du produit scalaire $\langle u; v \rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n$.

Prop Si F sev d'un espace E préhilbertien, alors $(F; (\cdot;\cdot))$ est un espace préhilbertien.

Exemples * $F = \mathbb{K}[X]$ ou $\mathbb{K}_N[X]$ sev de $\mathcal{C}^0([0;1]; \mathbb{K})$

Propriété (Inégalité de Cauchy-Schwarz) Soit $(E, \langle \cdot ; \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien : $|\langle x;y \rangle| \leqslant \sqrt{\langle x;x \rangle} \sqrt{\langle y;y \rangle}$.

Preuve On pose $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ ; t \longmapsto \langle x+ty ; x+ty \rangle$

On a : $f(t) = t^2 \langle y;y \rangle + 2t \langle x;y \rangle + \langle x;x \rangle \geqslant 0$

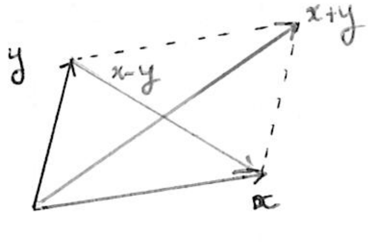
C'est un trinôme de signe constant $\Delta = 4 \left\{ \langle x;y \rangle^2 - \langle x;x \rangle \langle y;y \rangle \right\} \leqslant 0$ ☐

Corollaire $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}^+ ; x \longmapsto \sqrt{\langle x;x \rangle}$ est une norme

Relation entre norme euclidienne et produit scalaire

① Identité de polarisation : $2\langle x;y \rangle = \|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2$

② Identité du parallélogramme $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left\{ \|x\|^2 + \|y\|^2 \right\}$



Rq : pour le produit hermitien,
$$\begin{cases} 2\,\mathrm{Re}\,\langle x;y \rangle = \|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2 \\ 2\,\mathrm{Im}\,\langle x;y \rangle = \|x+iy\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2 \end{cases}$$

Rq L'égalité du parallélogramme suffit pour avoir un espace préhilbertien grâce à l'identité de polarisation

2°) Orthogonalité

Définition ① Soient x et $y \in E$. On dit que x et y sont orthogonaux si et seulement si $\langle x; y\rangle = 0$

② Soit $A \subset E$, $A^{\perp} = \{x \in E / \langle x; a\rangle = 0 \ \forall a \in A\}$

* $A^{\perp}$ est un sev de E (fermé)
* $A^{\perp} = \mathrm{Vect}(A)^{\perp}$

③ Une famille $(x_i)_{i=1...n}$ orthogonale ssi $\langle x_i; x_j\rangle = 0 \ \forall i \neq j$

Prop : ① Une famille orthogonale sans vecteur nul est libre

② Théorème de Pythagore : $(x_1 — x_n)$ orthogonale $\Rightarrow \|\sum_{i=1}^{n} x_i\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2$

Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille libre d'un espace préhilbertien $(E, \langle \cdot;\cdot\rangle)$

Il existe une famille orthogonale $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Vect}(f_0 — f_n) = \mathrm{Vect}(e_0 - e_n)$

Construction

$$e_0 = f_0$$

$$e_1 = f_1 - \alpha_1^0 e_0 \quad \text{et} \quad \langle e_1; e_0\rangle = 0$$

$$e_2 = f_2 - \alpha_2^0 e_0 - \alpha_2^1 e_1 \quad \text{avec} \quad \langle e_2; e_j\rangle = 0 \quad j = 0, 1.$$

$$\vdots$$

$$e_k = f_k - \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_k^j e_j \quad \text{avec} \quad \langle e_k; e_j\rangle = 0 \quad j = 0, \dots, k-1.$$

3°) Espaces de Hilbert

Définition Un espace de Hilbert (réel ou hermitien dans le cas complexe) est un espace préhilbertien complet pour la norme $\|\cdot\| : x \mapsto \langle x; x\rangle^{1/2}$.

Cela signifie : $\forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite de H. Si pour tout $\varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$ / $\forall n \geq N \ \forall p \in \mathbb{N} \ \|x_n - x_{n+p}\| \leqslant \varepsilon$ ($(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de Cauchy) alors il existe $x \in H$ (unique) tq $\lim_{n\to+\infty} x_n = x$

Exemples fondamentaux

$$\ell^2(\mathbb{N}) = \left\{ u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \mid \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|^2 < +\infty \right\}$$

$\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ouvert $\quad L^2(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{C} \mid \int_\Omega |f(x)|^2 dx < +\infty \right\}$ (admis)

Preuve Soit $(u^n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite de Cauchy de $\ell^2(\mathbb{N})$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $|u^n_k - u^{n+p}_k| \leq \| u^n - u^{n+p} \|_{\ell^2(\mathbb{N})}$

Ainsi $(u^n_k)_{n\in\mathbb{N}}$ suite de Cauchy de $\mathbb{C}$ donc converge vers $\bar{u}_k \in \mathbb{C}$.

Montrons que $\| u^n - \bar{u} \| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Soit $\varepsilon > 0$, il existe

$N \in \mathbb{N}$ / $\forall n \geq N, \forall p \in \mathbb{N} \quad \| u^{n+p} - u^n \| \leq \varepsilon$.

Soit $N_0 \in \mathbb{N}$: on a $\displaystyle\sum_{k=0}^{N_0} |u^{n+p}_k - u^n_k|^2 \leq \varepsilon^2 \quad \forall p \in \mathbb{N} \ \forall n \geq N$

A la limite $p \to +\infty$ $\quad \displaystyle\sum_{k=0}^{N_0} |u^n_k - \bar{u}_k|^2 \leq \varepsilon^2 \quad \forall n \geq N$.

Ainsi $\| u^n - \bar{u} \| \leq \varepsilon$ pour tout $n \geq N$ ☒

Proposition (Sommabilité) Soit H un espace de Hilbert et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de H. Si la suite est composée d'éléments deux à deux orthogonaux et si $\sum \|u_n\|^2, n \in \mathbb{N}$ converge alors la série $\sum u_n, n \in \mathbb{N}$ converge dans H. Si $\sum \|u_n\|, n \in \mathbb{N}$ converge alors $\sum u_n, n \in \mathbb{N}$ converge dans H

Preuve Notons $v_k = \displaystyle\sum_{j=0}^{k} u_j$

Cas 1 $\quad \| v_n - v_{n+p} \|^2 = \displaystyle\sum_{j=n+1}^{n+p} \| v_j \|^2$ (Théorème de Pythagore)

Cas 2 $\quad \| v_n - v_{n+p} \| \leq \displaystyle\sum_{j=n+1}^{n+p} \| v_j \|$

Ainsi $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans H donc converge

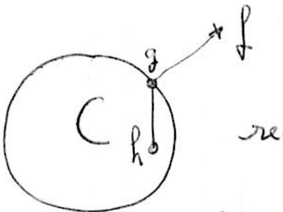
II Théorème de Projection sur un convexe et applications

1°) Théorème de projection, projection orthogonale

Théorème Soit H un espace de Hilbert, C un convexe fermé et non vide de H. Pour tout $f \in H$, il existe un unique point de C, appelé projection de f sur C dont la distance à f est minimum. Ce point est caractérisé par

$$\forall h \in C \ , \ \mathrm{Re} \langle f - g ; h - g \rangle \leqslant 0$$

Preuve



Soient g_1 et g_2 deux points réalisant la projection de f sur C

On aurait $\quad \| f - g_1 \|^2 + \| f - g_2 \|^2 = \frac{1}{2} \left\{ \| 2f - (g_1 + g_2) \|^2 + \| g_1 - g_2 \|^2 \right\}$

Ainsi $\quad \left\| f - \frac{g_1 + g_2}{2} \right\|^2 = \frac{1}{2} \left\{ \| f - g_1 \|^2 + \| f - g_2 \|^2 - \frac{1}{2} \| g_1 - g_2 \|^2 \right\}$

$< d(f;C)^2$ si $g_1 \neq g_2$. D'où l'unicité.

Pour montrer l'existence, on considère $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite minimisante :

On a $\quad \frac{1}{2} \| g_n - g_m \|^2 = \| f - g_n \|^2 + \| f - g_m \|^2 - 2 \left\| f - \frac{g_n + g_m}{2} \right\|^2$

$\leqslant \| f - g_n \|^2 + \| f - g_m \|^2 - 2 \, d(f;C)^2$ car $\frac{g_n + g_m}{2} \in C$

Comme $\| f_n - g_n \| \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} d(f,C)^2$ et $\| f - g_m \|^2 \underset{m \to +\infty}{\longrightarrow} d(f;C)^2$, on en déduit

que $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de H donc converge

dans H. Comme $g_n \in C$ pour tout n, C fermé, on a $\lim_{n \to +\infty} g_n \in C$

De plus, $\| f - g \|^2 = d(f;C)^2$. Pour la caractérisation.
Soit $h \in C$. Alors pour tout $t \in [0;1]$, $g + t(h - g) \in C$.
D'où pour tout $t \in [0;1]$ $\quad \| f - g \|^2 \leqslant \| (f - g) + t(g - h) \|^2$

Donc pour tout $t \in [0;1]$, $t^2 \|f-g\|^2 - 2t \operatorname{Re} \langle f-g ; h-g \rangle \geq 0$

On divise par $t \to 0^+$ et on passe à la limite $t \to 0^+$

$$\operatorname{Re} \langle f-g ; h-g \rangle \leq 0 \qquad \square$$

<u>Corollaire</u> Si F est un sous espace vectoriel fermé de H, la projection de f vérifie $f - p(f) \in F^\perp$. Tout élément $f \in H$ se décompose de manière unique $f = g + h$, $g \in F$, $h \in F^\perp$

On a donc $H = F \oplus F^\perp$; $(F^\perp)^\perp = F$; $H^\perp = \{0\}$

Si $A \subset H$ alors $(A^\perp)^\perp = \overline{\operatorname{Vect}(A)}$ (adhérence)

<u>Preuve</u>: F étant un sev, on obtient $\operatorname{Re} \langle f-g ; h \rangle = 0$ $\forall h \in F$

En remplaçant h par $e^{i\theta} h$, on a $\langle f-g ; h \rangle = 0$ $\forall h \in F$

Ainsi $h = f - g \in F^\perp$. Comme $f - h = g \in F \subset (F^\perp)^\perp$, h est la projection de f sur $F^\perp$ d'où $H = F \oplus F^\perp$. On a $H = F \oplus F^\perp = F^\perp \oplus (F^\perp)^\perp$

$F^\perp$ est aussi fermé, la décomposition est unique donc $(F^\perp)^\perp = F$.

(en effet $f \in F^{\perp\perp}$ s'écrit $f = \underset{\in F}{f} + \underset{\in F^\perp}{0}$). $\boxtimes$

<u>Corollaire</u> $A \subset H$ est total $\iff \overline{\operatorname{Vect}(A)} = H \iff A^\perp = \{0\}$.

2°) <u>Théorème de Représentation de Riesz</u>

<u>Théorème</u>: Pour tout $f \in H$, l'application $v \longmapsto \langle v ; f \rangle$ est une forme linéaire continue sur H. Réciproquement, si $\tilde{f}$ est une forme linéaire continue, il existe un unique élément $f \in H$ tel que $\forall v \in H$ $\tilde{f}(v) = \langle f ; v \rangle$.

<u>Preuve</u>: (i) $|\langle v ; f \rangle| \leq \|f\| \, \|v\|$ donc $|||T_f||| \leq \|f\|$.

(ii) Soit $\tilde{f}$ linéaire, continue et non nulle. On a $L = \operatorname{Ker} \tilde{f} \subsetneq H$ sev fermé, $L^\perp \neq \{0\}$. Soit $g \in L^\perp$

On a $\tilde{f}(g) \neq 0$. Pour tout $v \in H$, on a

$$v = \frac{\tilde{f}(v)}{\tilde{f}(g)} g + \left(v - \frac{\tilde{f}(v)}{\tilde{f}(g)} g\right) \in L^\perp \oplus L$$

On a $\langle v ; g\rangle = \dfrac{\tilde{f}(v)}{\tilde{f}(g)} \|g\|^2 \Rightarrow \tilde{f}(v) = \langle v ; \dfrac{\tilde{f}(g)\, g}{\|g\|^2}\rangle$

<u>Corollaire</u> (convolution) Soit $T : L^2(\mathbb{R}^N) \longrightarrow C_0^0(\mathbb{R}^N)$ un operateur linéaire, continu, invariant par translation. Il existe $g \in L^2(\mathbb{R}^N) \,/\, T(f) = f * g$

□ <u>Rappel</u> : $\mathcal{C}_0^0(\mathbb{R}^N) = \{$fonctions continues, limite nulle à l'infini$\}$
L'application $f \longmapsto Tf(0)$ est une forme linéaire continue sur L^2 donc il existe $g_0 \in L^2(\mathbb{R}^N)$ telle que $Tf(0) = \int_{\mathbb{R}^N} f(y)\, \overline{g_0(y)}\, dy$

De plus $\tau_x(Tf) = T(\tau_x f)$ $\quad (\tau_x f \longmapsto f(\cdot + x))$

$$Tf(x) = \tau_x(Tf)(0) = T(\tau_x f)(0) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x+y)\, \overline{g_0(y)}\, dy$$
$$= \int_{\mathbb{R}^N} f(y)\, \overline{g_0(y-x)}\, dy = \int_{\mathbb{R}^N} f(y)\, g(x-y)\, dy \quad g = \overline{g_0(-\cdot)}$$ ☒

<u>Propriété</u> : Soit $T\ H \longrightarrow H$ linéaire continue, il existe une unique $T^* : H \longrightarrow H$ linéaire continue telle que
$$\langle Tx ; y\rangle = \langle x ; T^* y\rangle \quad \forall x \in H \quad \forall y \in H.$$
<u>T^* est l'adjoint de T</u>. On a $\|T\| = \|T^*\|$

<u>Exemple</u> $H = \mathbb{C}^d$, $\mathcal{L}(H) = M_d(\mathbb{C})$ $\quad T^* = \overline{T^t}$

Définition : $T \in \mathcal{L}(H)$ est autoadjoint si $T^* = T$

<u>Propriété</u>
(i) Si T autoadjoint alors les vap de T sont réelles
(ii) $V \subset H$ sev stable par T, alors $V^\perp$ stable par T^*.
(iii) Les espaces propres associés à des vap distinctes de $T = T^*$ sont orthogonaux.
(iv) $\|T\| = \sup\limits_{\|x\|=1} |\langle Tx ; x\rangle|$.

<u>Exemple</u> $\forall t \in [c, d]$, $\quad Kx(t) = \int_a^b k(t,s)\, x(s)\, ds$ $\quad$ défini sur $[c;d] \times [a,b]$

alors $\quad K^* y(s) = \int_c^d \overline{k(s,t)}\, y(t)\, dt$

III Bases Hilbertiennes

1°) Définition, Exemples

<u>Définition</u> (i) On dit qu'un espace de Hilbert est séparable s'il admet une suite dénombrable et dense

(ii) Soit H un espace de Hilbert séparable. On appelle base Hilbertienne de H un système orthonormé $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui est total : $(e_n ; e_m) = \delta_{nm}$ et $\overline{\mathrm{Vect}((e_n)_{n\in\mathbb{N}})} = H$

<u>Théorème</u> Tout espace de Hilbert séparable admet une base Hilbertienne

<u>Preuve</u> : Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dense de H. On en extrait une sous famille libre. Le système obtenu (qu'on note encore (f_n)) n'est plus nécessairement dense mais reste totale. On applique alors le procédé de Gram-Schmidt : $g_{n+1} = f_{n+1} - \sum_{k=1}^{n} (f_{n+1} ; g_k) g_k$ par récurrence et on pose $e_n = \frac{g_n}{\|g_n\|}$.

On a $\mathrm{Vect}((f_0 - f_n)) = \mathrm{Vect}(e_0 - e_n)$ $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow (e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ total $\boxtimes$

<u>Théorème</u> Soit H un espace de Hilbert séparable et $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base Hilbertienne de H. Pour tout élément de H peut s'écrire

$$f = \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle f ; e_n \rangle e_n$$ et les coordonnées sur la base vérifient

$$\|f\|^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} |c_n(f)|^2 \quad \text{avec} \quad c_n(f) = \langle f ; e_n \rangle$$

Réciproquement si (c_n) vérifie $\sum_n |c_n|^2$ alors $\sum c_n e_n$ converge dans H et $f = \sum_{n\in\mathbb{N}} c_n e_n$, vérifie $c_n = c_n(f)$

Propriété (Bessel-Parseval) Soit $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille orthonormale de E. Alors on a equivalence

① $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base Hilbertienne de E

② $\forall x \in E \quad \|x\|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} |\langle x; e_n\rangle|^2$

③ $\forall x,y \in E \quad \langle x;y\rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} \langle x;e_n\rangle \langle y;e_n\rangle$

[~~Corollaire (e_n) base H.~~]

Preuve On pose $f_m = \sum_{k=0}^{m} c_k(f)\, e_k$. On verifie que

$\langle f - f_m ; e_n \rangle = 0$ pour tout $n \leq m$. Cela signifie

que $f_m = P_{\mathrm{Vect}(e_0 - e_m)}(f)$. D'après le théorème de

Pythagore $\|f_m\|^2 = \sum_{k=0}^{m} |c_k(f)|^2 \leq \|f\|^2 \Rightarrow \sum c_k(f) e_k$ converge

dans H. Notons $g = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k(f) e_k$. On a $(f_m - g; e_n)$ $n \leq m$

A la limite $m \to \infty$ $(f-g; e_n) = 0 \Rightarrow f - g = 0$ ☒

2°) Polynômes Orthogonaux

Théorème Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\rho: I \to]0,+\infty[$ une fonction mesurable (poids). Si il existe $a > 0$ tq $\int_I e^{a|x|} \rho(x)\,dx < +\infty$ alors la famille de polynômes orthogonaux associés à ρ induit une base hilbertienne de $L^2(I;\rho) = \{ f: I \to \mathbb{R} \mid \int_I f^2(x)\rho(x)\,dx < +\infty \}$

Preuve : On note (P_n) la famille de polynômes orthogonaux associée à ρ (procédé de Gram-Schmidt à partir de $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$). $L^2(I,\rho)$ est un espace de Hilbert donc (P_n) base hilbertienne ssi

$$\overline{\mathrm{Vect}(P_n; n\in\mathbb{N})} = L^2(I,\rho) = \overline{\mathrm{Vect}(x^n, n\in\mathbb{N})}$$

Soit $\mathrm{Vect}(x^n; n\in\mathbb{N})^\perp = \{0\}$.

Soit $f \in \mathrm{Vect}\left((x^n), n \in \mathbb{N} \right)^{\perp}$

$\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad x \longmapsto 1_I(x)\, \rho(x)\, f(x) \qquad \varphi|_{\mathbb{R}\setminus I} = 0$

$\varphi(x) = \underbrace{\sqrt{\rho}}_{L^2} \underbrace{f\sqrt{\rho}}_{L^2} \in L^1$

$\hat{\varphi} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$, $y \longmapsto \int_{\mathbb{R}} e^{-iyx} \varphi(x)\, dx$ qu'on peut prolonger en une fonction holomorphe sur $U_a = \left\{ z \in \mathbb{C} / \ |\mathrm{Im} z| < \frac{a}{2} \right\}$

$\forall z \in U_a \quad \hat{\varphi}^{(n)}(z) = \int_{\mathbb{R}} (-ix)^n \varphi(x)\, e^{-izx}\, dx \Rightarrow \hat{\varphi}^{(n)}(0) = 0$

$\Rightarrow \hat{\varphi}$ est identiquement nulle sur $U_a \Rightarrow f = 0$ ☒

Exemples

① Polynômes de Hermite $\quad I = \mathbb{R}$ et $\rho(x) = e^{-x^2}$

$P_0(x) = 1 \ ; \ P_1(x) = x \ ; \ P_2(x) = x^2 - \frac{1}{2} \qquad P_n(x) = \frac{(-1)^n}{2^n} e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x^2}\right)$

② Polynômes de Legendre $\quad I = [-1\,;1]$ et $\rho(x) = 1$

$P_0(x) = 1 \ ; \ P_1(x) = x \quad P_2 = x^2 - \frac{1}{3} \qquad P_n(x) = \frac{n!}{(2n)!} \frac{d^n}{dx^n}\left((x^2-1)^n \right)$

Rq La propriété n'est intéressante que pour I non borné. Sur I borné les polynômes sont denses dans $L^2(I)$ (Weierstrass)

③ $w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ et $I =]-1\,;1[$

$T_0 = 1 \quad T_1 = X \qquad T_{n+2} = 2X\, T_{n+1} - T_n$

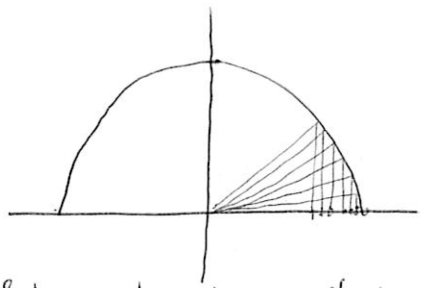
Autre définition $T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$ Polynôme Tchebychev

④ $I = \mathbb{R}^+ \quad w(x) = e^{-x} \Rightarrow$ Polynôme de Laguerre

Propriété ⓘ P_n possède n racines réelles

ⓘⓘ Les n racines de P_n sont entre les racines de P_{n+1}.

Application ① $T_n = 2^{n-1} \prod_{k=0}^{n-1} \left(X - \cos\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right)$



* $\sup_{x\in[-1;1]} |T_n(x)| = 1$.

⟵ Les zéros tendent à s'accumuler sur les bords

Intervient dans l'interpolation de Lagrange :

Si $f \in C^{n+1}[a;b]$ $x_0 < \dots < x_n$ $n+1$ points d'interpolation

L'erreur d'interpolation est donnée par

$$f(x) - L_f(x) = N(x) \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \qquad N(x) = \prod_{k=0}^{n} (x - x_k)$$

Sur $[a;b] = [-1;1]$, $N = \frac{1}{2^n} T_{n+1}$ réalise le minimum.

$$|f(x) - L_f(x)| \leq \frac{1}{2^n (n+1)!} \|f^{(n+1)}\|_\infty .$$

② Intégration numérique (exercices)

On veut calculer $\int_I f\omega\, dx$ avec $\mathcal{I}(f) = \sum_{i=0}^{k} \lambda_i f(x_i)$

3°) Bases de Riesz

On passe d'une b.on à une autre via une transformation unitaire (qui préserve la norme Hilbertienne). En s'affranchissant de la contraintes de normes, on fabriques des bases plus faibles ("oblique")

Déf Une base de Riesz pour H est de la forme $\{Ue_k\}$, (e_k) base hilbertienne, $U\ H \to H$ bijectif borné.

Prop $(f_k) = (Ue_k)$ base de Riesz : $\exists! (g_k)$ base de Riesz

$$f = \sum_{k=0}^{+\infty} \langle f, g_k \rangle f_k \quad \forall f \in H \qquad g_k = (U^{-1})^* e_k ,$$

(g_k) "base de Riesz duale"

Definition Deux suites $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sont biorthogonales ssi $\langle f_k ; g_j \rangle = \delta_{k,j}$.

Corollaire (f_n) (g_n) paire de bases de Riesz duales

① (f_n) ; (g_n) biorthogonales.

② $f = \sum_{k\in\mathbb{N}} \langle f ; g_k \rangle f_k = \sum_{k\in\mathbb{N}} \langle f ; f_k \rangle g_k$

Prop Si $(f_n ; \forall n)$ base de Riesz alors il existe A, B /

$$A\|f\|^2 \leq \sum |\langle f ; f_n \rangle|^2 \leq B\|f\|^2$$

Th (f_n) base de Riesz ssi $\overline{\mathrm{Vect}(f_n)} = H$ et il existe A, B / $\forall (c_n)$ suite on ait $A\sum|c_n|^2 \leq \|\sum c_n f_n\|^2 \leq B\sum|c_n|^2$

IV. Convergence faible / Optimisation

1°) Convergence faible

Définition : Soit H un espace de Hilbert. On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de H converge faiblement vers $u \in H$ (on note $u_n \rightharpoonup u$) si et seulement si $\langle u_n ; v \rangle \longrightarrow \langle u ; v \rangle$ $\forall v \in H$.

Rq : Si on note $T_u \; v \longmapsto \langle v ; u \rangle \in \mathcal{L}_c(H)$, $u_n \rightharpoonup u$ signifie que T_{u_n} converge simplement vers T_u dans $\mathcal{L}_c(H)$

Propriété ① si $u_n \longrightarrow u$ ($\|u_n - u\| \to 0$) (convergence forte) alors $u_n \rightharpoonup u$

② u est unique : c'est la limite faible de (u_n)

Un exemple fondamental : Soit $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base Hilbertienne de H alors $e_n \rightharpoonup 0$ (mais $e_n \not\longrightarrow 0$)

Preuve : Soit $u \in H$, alors $\|u\|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} |\langle u ; e_n \rangle|^2$ (Parseval)

D'où $\lim_{n\to+\infty} \langle u ; e_n \rangle = 0$ ☒

<u>Théorème (admis)</u> Toute suite faiblement convergente dans un espace de Hilbert est bornée.

$\boxed{\text{D}}$ C'est une conséquence de Banach-Steinhaus : E Banach F EVN $f_n \in \mathcal{L}_c(E,F)$ CVS vers $f : E \to F$ alors $f \in \mathcal{L}_c(E,F)$. $\boxtimes$

<u>Théorème</u> (Banach-Alaoglu) Toute suite bornée dans un espace de Hilbert possède une sous suite faiblement convergente.

<u>Preuve</u> On fait la preuve dans le cas $H = \ell^2(\mathbb{N})$

On suppose que $(u^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite bornée de H $\|u^n\| \leq 1$

Alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $|u_k^n| \leq \|u^n\| \leq 1$.

Pour $k=0$: il existe une sous suite $(u_0^{\varphi_0(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers $\bar{u}_0$

La suite $(u^{\varphi_0(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée : il existe $\varphi_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tq $u_1^{\varphi_0(\varphi_1(n))} \longrightarrow \bar{u}_1$

et on a toujours $u_0^{\varphi_0\circ\varphi_1(n)} \longrightarrow \bar{u}_0$. Par récurrence, on construit $\varphi_2 \ldots \varphi_m$ tel que $\forall k \in \{0, \ldots m\}$ $u_k^{\varphi_0 \circ \cdots \circ \varphi_m(n)} \longrightarrow \bar{u}_k$

Posons $\psi(n) = \varphi_0 \circ \cdots \circ \varphi_n(n)$. Alors pour tout $k \in \mathbb{N}$ $u_k^{\psi(n)} \longrightarrow \bar{u}_k$.

Soit $N \in \mathbb{N}$: On a $\sum_{k=0}^{N} (u_k^n)^2 \leq 1$

<u>D'où</u> $\sum_{k=0}^{N} (u_k^{\psi(n)})^2 \leq 1$. A la limite $n \to +\infty$, on a

$$\sum_{k=0}^{N} (\bar{u}_k)^2 \leq 1 \Rightarrow (\bar{u}) \in \ell^2(\mathbb{N})$$

Enfin si $v \in \ell^2(\mathbb{N})$ $\sum_{k=0}^{+\infty} v_k \overline{u_k^{\psi(n)}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sum_{k=0}^{+\infty} v_k \overline{\bar{u}_k}$ d'après le théorème de CVD $\boxtimes$

<u>Rq</u> (i) Cas Hilbert séparable $\Rightarrow$ isométrie à $\ell^2(\mathbb{N})$ (Parseval)

(ii) quelconque $\Rightarrow$ $H \leftarrow \overline{\mathrm{Vect}\,(u_n)_{n\in\mathbb{N}}}$

2°) Convexité et optimisation

<u>Théorème</u> (Banach Saks) Soit H un espace de Hilbert et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans H convergeant faiblement vers $u \in H$. $\exists\, (u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge fortement vers u au sens de Césaro

$$\frac{u_{\varphi(0)} + \dots + u_{\varphi(n)}}{n+1} \longrightarrow u$$

□ On suppose $u = 0$. On choisit $\varphi(0) = 0$. Supposons avoir construit $\varphi(j)$ avec $0 \leq j \leq k-1$. Comme $u_n \rightharpoonup 0$, $\forall j \in \{0;k-1\}$ $|\langle u_{\varphi(j)} ; u_n \rangle| \leq \frac{1}{k}$ $\forall n \geq m_j$

$$\varphi(k) = \max\{\varphi(0) \dots \varphi(k-1) ; m_0 - m_{k-1}\} + 1$$

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \forall\, 0 \leq j < k \quad |\langle u_{\varphi(j)} ; u_{\varphi(k)} \rangle| \leq \frac{1}{k}$$

$$\left\| \sum_{j=0}^{k} \frac{u_{\varphi(j)}}{k+1} \right\|^2 = \left\langle \sum_{j=0}^{k} \frac{u_{\varphi(j)}}{k+1} ; \sum_{l=0}^{k} \frac{u_{\varphi(l)}}{k+1} \right\rangle$$

$$= \sum_{j=0}^{k} \frac{\|u_{\varphi(j)}\|^2}{(k+1)^2} + 2 \sum_{j=1}^{k} \sum_{l=0}^{j-1} \frac{\langle u_{\varphi(l)} ; u_{\varphi(j)} \rangle}{(k+1)^2}$$

Banach-Steinhaus

$$\leq \frac{\sup_n \|u_n\|^2}{k+1} + \frac{2}{(k+1)^2} \sum_{j=1}^{k} \sum_{l=0}^{j-1} \frac{1}{j}$$

$$= O\left(\frac{1}{k}\right) \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0 \quad ■$$

<u>Prop</u> Soit H un Hilbert, C un sous ensemble convexe fermé

Si $u_n \rightharpoonup u$ et $u_n \in C$ $\forall n \Rightarrow u \in C$

□ D'après Banach Saks, $\exists\, \varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \nearrow$ tq $\frac{u_{\varphi(0)} + \dots + u_{\varphi(n)}}{n+1} \to u$

et $\frac{u_{\varphi(0)} + \dots + u_{\varphi(n)}}{n+1} \in C$ $\forall n \in \mathbb{N}$ ■

<u>Optimisation</u> Soit H un Hilbert et $C \subset H$ convexe fermé et $f : C \to \mathbb{R}$ une fonction convexe et ~~fermé~~ continue. Alors f faiblement s.c.i

$$u_n \rightharpoonup u,\ u_n \in C \Rightarrow f(u) \leq \liminf_{n\to+\infty} f(u_n)$$

Si C borné ou f coercitive ($f(\|x\| = +\infty) = +\infty$) alors f minimal sur C

f strictement convexe $\Rightarrow$ unicité.

Preuve $\exists\ (v_n)$ sous suite de (u_n) tq $\lim\limits_{n\to+\infty} f(v_n) = \liminf\limits_{n\to+\infty} f(u_n)$

$v_n \rightharpoonup u$ donc il existe $\dfrac{v_{\varphi(0)} + \cdots + v_{\varphi(n)}}{n+1} \longrightarrow u \in C$

Par continuité de f $f\left(\dfrac{v_{\varphi(0)} + \cdots + v_{\varphi(n)}}{n+1}\right) \longrightarrow f(u)$.

On a aussi $f\left(\dfrac{v_{\varphi(0)} + \cdots + v_{\varphi(n)}}{n+1}\right) \leq \dfrac{1}{n+1} \sum\limits_{k=0}^{n} f(v_{\varphi(0)})$

A la limite $f(u) \leq \liminf\limits_{n\to+\infty} f(u_n)$ $\boxtimes$

Si f définie sur C bornée ou f coercitive. On choisit une suite minimisante (ω_n) / $f(\omega_n) \longrightarrow \inf\limits_{\omega\in C} f(\omega)$. On a $(\omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bornée. A une sous suite près, $\omega_n \rightharpoonup u \in C$

et $f(u) \leq \liminf\limits_{n\to+\infty} f(\omega_n) = \inf\limits_{v\in C} f(\omega)$ $\boxtimes$

Théorème (Lax Milgram) Soit H un espace de Hilbert réel et a $H\times H \to \mathbb{R}$ bilinéaire, continue et symétrique et coercive

ie $\exists\ C, c>0$; $|a(u;v)| \leq C\|u\|\|v\|$, $|a(u;u)| \geq c\|u\|^2$

Pour tout $f\in H'$ $\exists!\, u\in H$ / $a(u;v) = \langle f;v\rangle_{H';H}$ $\forall v\in H$.

et u est l'unique minimum de $J(v) = \dfrac{1}{2} a(v;v) - \langle f;v\rangle$

$\square$ D'après la propriété précédente, J est continue, coercive, convexe

$\exists!\, u \in H$ qui minimise J (strictement convexe)

$$J(u+tv) \geq J(u) \quad \forall t\ \forall v$$

$$\frac{1}{2} a(u+tv, u+tv) = \frac{1}{2} a(u;u) + t\, a(u;v) + \frac{t^2}{2} a(v;v)$$

$$\Rightarrow \quad J(u+tv) - J(u) = t\left[a(u;v) - \langle f;v\rangle_{H',H}\right] + \frac{t^2}{2} a(v;v) \geq 0$$

On divise par $t \lesseqgtr 0$ et $t \to 0^{\pm}$ $\Rightarrow a(u;v) = \langle f;v\rangle_{H',H}$.

$\boxtimes$

Exemple d'application $\quad J(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega \|\nabla u\|^2 - \langle f; u\rangle$

$$\Rightarrow \quad \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v = \int_\Omega f\, v \qquad \forall v \in H = ?$$

$$- \int_\Omega \mathrm{div}(\nabla u)\, v = \int_\Omega f v \quad \Rightarrow \quad -\Delta u = f.$$

Théorème (Stampacchia) H Hilbert, C convexe fermé non vide

a bilinéaire, continue, coercive

$$|a(u;v)| \leq C\|u\|\,\|v\| \qquad a(u;u) \geq c\|u\|^2$$

$$\forall f \in H' \quad \exists!\, u \in C \;/\; \forall v \in C \quad a(u; v-u) \geq \langle f; v-u\rangle$$

$\square$ D'après Riesz $\exists\, Au \in H \,/\, a(u,v) = \langle Au; v\rangle$

$$\langle Au; u\rangle \geq \alpha\|u\|^2 \text{ et } \|Au\| \leq \sqrt{C}\,\|u\|$$

$$\begin{aligned}
a(u;v-u) \geq \langle f; v-u\rangle &\Leftrightarrow \langle Au; v-u\rangle \geq \langle f; v-u\rangle \\
&\Leftrightarrow \langle \rho(f-Au); v-u\rangle \leq 0 \\
&\Leftrightarrow \langle \rho(f-Au)+u-u; v-u\rangle \leq 0 \quad \forall v \\
&\Leftrightarrow u = P_K(\rho(f-Au)+u)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|P_K(\rho(f-Au)+u) - P_K(\rho(f-Av)+v)\|^2 &\leq \|\rho A(v-u) - (v-u)\|^2 \\
&= \|v-u\|^2 - 2\rho\langle A(v-u); v-u\rangle + \rho^2\|A(v-u)\|^2 \\
&\leq \underbrace{(1 - 2\rho c + \rho^2 C)}_{<1 \text{ si } 0<\rho\ll 1}\|v-u\|^2
\end{aligned}$$

$\boxtimes$