Introduction aux méthodes de volumes finis

UF « Modélisation et calcul scientifique »
Formation ModIA « Modélisation et Intelligence Artificielle »

Nicolas Bertier (nicolas.bertier@onera.fr)

INSA, 4A

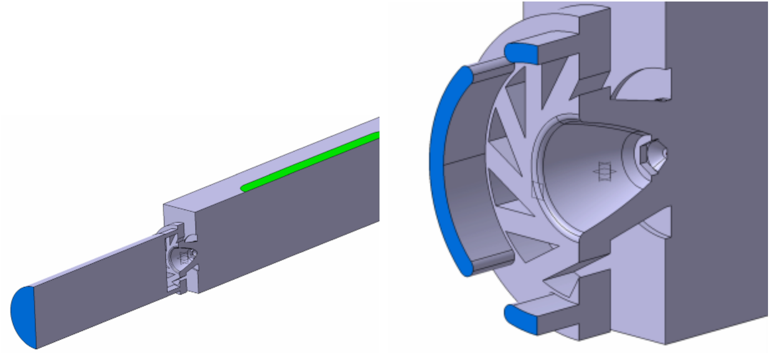
Version du document : 1.0 (dernière modification le 24/01/2021)

Plan du cours

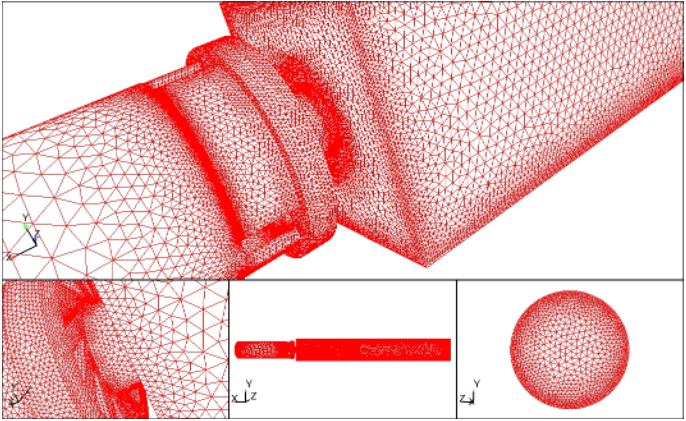
- Exemples de simulations numérique récentes en CFD
- Introduction aux méthodes de différences finies
- Le point sur l'intégration temporelle
- Analyse spectrale et équation équivalente
- Monotonie et limiteurs
- **Introduction aux méthodes de volumes finis**
- Vers la résolution des équations de Navier-Stokes

Chambre de combustion avec injecteur à swirl

Vue générale de la CAO et détail de l'injecteur :



Eléments de maillage



Formulation "volumes finis" pour l'équation d'advection

Rappel de la forme locale de l'équation d'advection sous forme conservative

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot (\boldsymbol{a} u) = 0$$

On introduit alors la notation f pour le flux :

$$\boldsymbol{f} = \boldsymbol{a} u = a u \boldsymbol{e}_x = f \boldsymbol{e}_x$$

Soit :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot \boldsymbol{f} = 0$$

Ecriture sous forme intégrale (forme dite "faible")

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot \boldsymbol{f} \right) dV = 0$$

Réécriture de la forme faible de l'équation d'advection

On rappelle la formule de Green, dans laquelle $\boldsymbol{n}$ est le vecteur normal au bord du domaine Ω, noté $\partial\Omega$:

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \boldsymbol{f} \, dV = \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{n} dS$$

Il est alors possible d'écrire le système comme :

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial t} dV + \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{n} dS = 0$$

INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES TOULOUSE

Equation bilan sur chaque cellule i

Les équations bilan peuvent s'écrire sur chaque cellule i :

$$V_i \frac{du_i}{dt} = - \sum_{j \in \mathcal{V}_i} \boldsymbol{f}_{i \to j} \cdot \boldsymbol{n}_{i \to j} S_{ij}$$

où $\mathcal{V}_i$ désigne l'ensemble des faces du **volume de contrôle** i et S_{ij} la surface de la face séparant les cellules i et j.

Système global à résoudre

$$M\dot{U} = F(U)$$

avec la matrice M diagonale par blocs contenant les volumes des cellules, U l'ensemble des variables u_i, et F l'ensemble des flux.

Volumes Finis vs Différences Finies

Les approches **volumes finis** (VF) s'appliquent sur **formulation intégrale** (faible) des équations et possèdent de grands avantages par rapport aux méthodes de différences finies :

- elles sont **conservatives** par construction
- leur formulation les rends bien adapté à leur application sur des **maillages quelconques**

En pratique, la **majorité des codes de mécanique des fluide et d'énergétique** capables de traiter des applications industrielles repose aujourd'hui sur des **approches de type VF**.

$\Rightarrow$ la majorité des outils d'analyse et les grands principes étudiés en DF restent cependant valables ou peuvent être transposés simplement en VF !

Le maillage

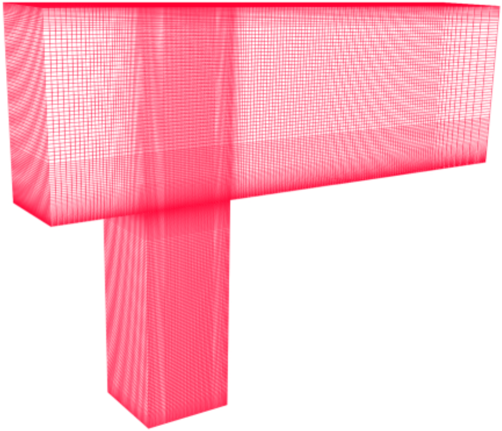
Il existe deux grandes catégories de maillages :

- Les maillages structurés : ils sont le résultat d'une transformation topologique continue d'un empilement de cubes en trois dimension ou de carrés en deux dimensions
- Les maillages non-structurés : ils ne possèdent aucune direction privilégiée dans l'espace.

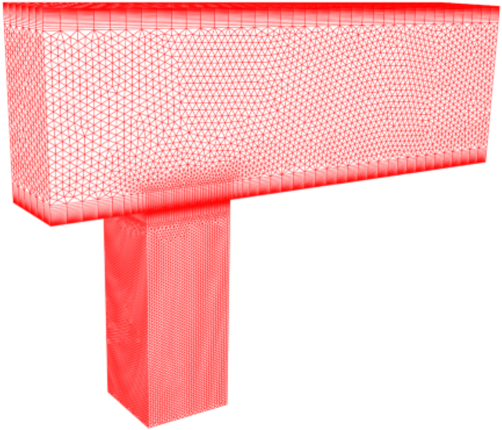
Remarques :

- Les maillages dits "non-structurés" sont souvent exclusivement constitué de tétraèdres, avec éventuellement des couches de prisme à la paroi.
- Il existe cependant des approches capables de traiter des maillages composés de polyèdres quelconques.

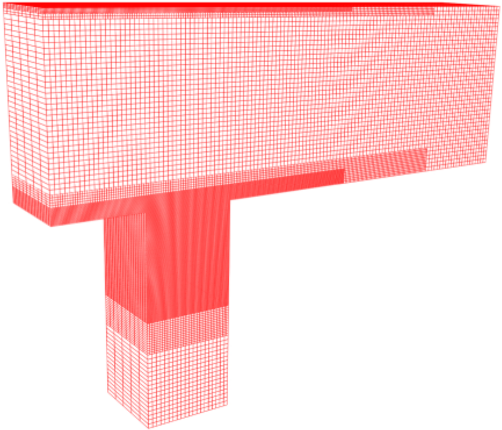
Exemple de maillage structuré



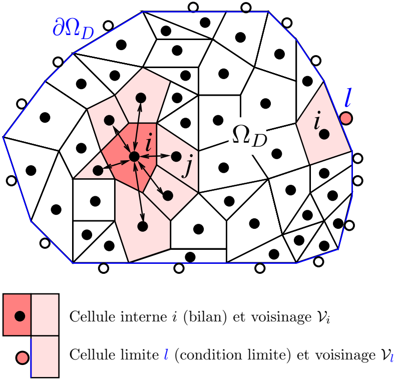
Exemple de maillage non-structuré hybride (tétraèdres+prismes)



Exemple de maillage non-structuré type héxaèdres redécoupés



Approche volumes finis en non-structuré



Soit une cellule interne i, l'ensemble des cellules ayant une face en commun avec elle constitue son premier voisinage $\mathcal{V}_i$.