Chapitre 1

La méthode variationnelle en élasticité

1.1 Formule de Green en élasticité

Notations

Dans $\mathbb{R}^3$:

$$u = (u_i)_i \in \mathbb{R}^3, \quad \forall u, v \in \mathbb{R}^3,\ u \cdot v = \sum_{i=1}^{3} = u_i v_i, \quad |u| = (u \cdot u)^{1/2}.$$

On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des tenseurs symétriques à coefficients réels d'ordre 2 :

$$\mathcal{S} = S_3(\mathbb{R}) = \left\{ \tau = (\tau_{ij})_{ij} \mid \forall (ij) \in \{1,2,3\}^2,\ \tau_{ij} = \tau_{ji} \in \mathbb{R} \right\}.$$

On munit $\mathcal{S}$ d'un produit scalaire, noté :, de telle sorte que :

$$\forall \sigma, \varepsilon \in \mathcal{S}, \quad \sigma : \varepsilon = \sum_{i,j=1}^{3} \sigma_{ij}\varepsilon_{ij} = \sigma_{ij}\varepsilon_{ij} = \mathrm{Tr}(\sigma^T \varepsilon) = \mathrm{Tr}(\sigma\varepsilon),$$

et de même, $|\sigma| = (\sigma : \sigma)^{1/2}$.

Sur $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un domaine, c'est à dire *un ouvert connexe borné a frontière lipschitzienne*, et pour $u : \Omega \to \mathbb{R}^3$ un champ de vecteurs déplacements suffisamment régulier (s.r.), on note $\varepsilon(u)$ le tenseur des déformations linéarisées :

$$\varepsilon(u) = \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla u^T),$$

où $\nabla u = (\frac{\partial u_i}{\partial x_j})_{i,j=1,2,3}$, la matrice gradient (ou matrice jacobienne) de u, c'est à dire :

$$\varepsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2}(\partial_j u_i + \partial_i u_j), \quad \text{où} \quad \partial_k = \frac{\partial}{\partial x_k}.$$

Soit $\sigma : \Omega \to \mathcal{S}$ un champ de tenseur de contraintes s.r., on note alors :

$$\mathrm{div}(\sigma) = \left(\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \right)_i = \partial_j \sigma_{ij} \quad \text{avec la convention de sommation d'Einstein.}$$

Notons que la divergence d'une matrice correspond alors à la divergence de ses lignes.

Proposition 1.1.1 *(Formule de Green) : Formellement, soit* $u : \Omega \to \mathbb{R}^3$, $\sigma : \Omega \to \mathcal{S}$ *s.r., alors :*

$$\int_\Omega \varepsilon(u) : \sigma \, d\underline{x} + \int_\Omega \mathrm{div}(\sigma) \cdot u \, d\underline{x} = \int_{\partial\Omega} \sigma n \cdot u \, d\Gamma, \tag{1.1}$$

où $\partial\Omega = \Gamma$ *désigne la frontière de* Ω*,* n *la normale unitaire sortante sur* Γ*,* $d\underline{x}$ *la mesure de Lebesgue de* $\mathbb{R}^3$ *(ici restrainte à* Ω*) et* $d\Gamma$ *la mesure de Lebesgue sur* Γ*.*

<u>Preuve</u> 1.1.1 *On utilise la formule d'intégration de Gauss, qui s'enonce, formellement pour* $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ *s.r. :*

$$\int_\Omega \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \, d\underline{x} = \int_{\partial\Omega} \varphi n_i \, d\Gamma \tag{1.2}$$

□

1.2 Formulation variationnelle

1.2.1 Le problème aux limites

Le problèmes aux limites en élasticité s'énonce de la manière suivante : Trouver un champ de déplacements $u : \Omega \to \mathbb{R}^3$, $\sigma : \Omega \to \mathcal{S}$ tels que :

$$\begin{cases} \sigma & = D\varepsilon(u) \text{ sur } \Omega, \\ -\mathrm{div}(\sigma) & = f_V \text{ sur } \Omega, \\ u & = u_d \text{ sur } \Gamma_d, \\ \sigma n & = f_s \text{ sur } \Gamma_F, \end{cases} \tag{1.3}$$

où D est l'opérateur des rigidités élastiques (ou des coefficients d'élasticité) qui s'exprime dans le cas homogène isotrope :

$$D\varepsilon = \lambda \mathrm{Tr}(\varepsilon) I + 2\mu\varepsilon,$$

avec λ, μ les coefficients de Lamé. Notons que f_V représente les forces de volume (gravité), et σn le vecteur des contraines, avec f_s les forces surfaciques *connues*. La figure 1.1 nous aide à comprendre σ :

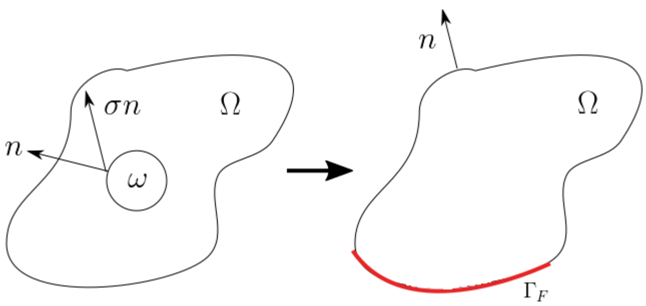

FIGURE 1.1 – σ décrit les efforts subis par $x \in \partial\omega$, où n est la normale unitaire sortante. On impose $\sigma n = f_s$ (on peut interpréter σ comme l'ensemble d'efforts de cohésion de la matière).

u_d correspond à un déplacement donné ($u_d \equiv 0$ dans le cas de l'encastrement). (Γ_d, Γ_F) constituent une partition de la frontière du domaine Ω.

Pour récapituler, les ***données*** du problème sont f_V, f_s, u_d, et les ***inconnues*** sont u, σ.

1.2.2 Le problème aux déplacements

Cas de l'encastrement

Dans ce cas, nous avons $u_d(x \in \Gamma_d) = 0$. Formellement, soit V l'ensemble des champs de déplacements $v : \Omega \to \mathbb{R}^3$ s.r. définis sur Ω. Il est clair que V est un espace vectoriel. On définit alors :

$$a(u,v) = \int_\Omega \sigma(u) : \varepsilon(u)\, d\underline{x}, \quad \sigma(u) = D\varepsilon(u),$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned} a(u,v) &= \int_\Omega D\varepsilon(u) : \varepsilon(u)\, d\underline{x}, && \text{forme bilinéaire sur } V \times V,\\ L(v) &= \int_\Omega f_V \cdot v\, d\underline{x} + \int_{\Gamma_F} f_s \cdot v\, d\Gamma, && \text{forme linéaire sur } V. \end{aligned}$$

Proposition 1.2.1 *(Cas de l'encastrement) : Si (u, σ) est une solution s.r. du problème aux limites (1.3), alors u vérifie :*

$$u \in V_0, \quad a(u,v) = L(v), \quad \forall v \in V_0, \tag{1.4}$$

avec $V_0 = \{v \in V \mid v = 0 \text{ sur } \Gamma_d\}$.

<u>Preuve</u> 1.2.1 *La preuve de cette proposition est laissée en exercice.* □

Exemple du barrage :

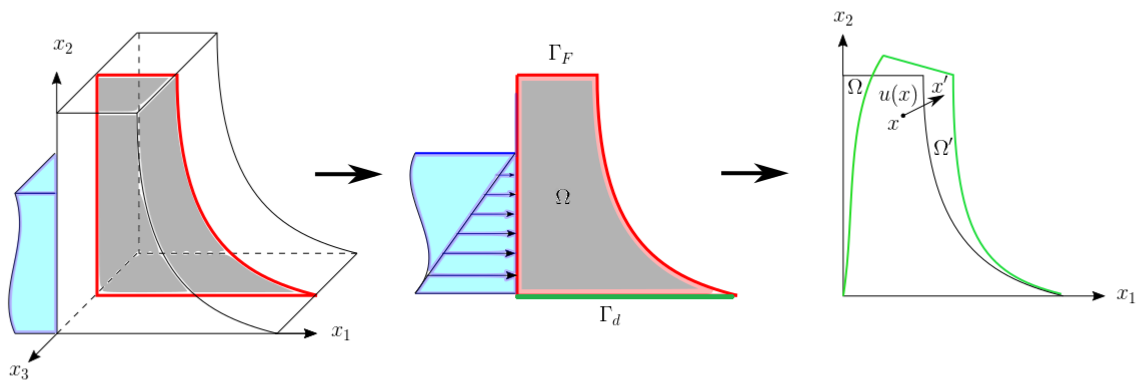

FIGURE 1.2 – Les image de gauche et du centre expliquent comment on réduit un problème 3D en un problème plan (2D) en prenant une section transversale du barrage. L'image de droite nous permet de "visualiser les déformations" : $u(x) = x' - x$, x' étant la position du point matériel x de la configuration initiale Ω dans la configuration déformée Ω'.

1.2.3 Déplacement arbitraire imposé

Proposition 1.2.2 *Soit (u, σ) solution s.r. de (1.3), alors u vérifie :*

$$u \in \mathcal{U}_{ad}, \quad a(u,v) = L(v), \quad \forall v \in V_0, \tag{1.5}$$

ou bien :

$$u \in \mathcal{U}_{ad}, \quad a(u,v-u) = L(v-u), \quad \forall v \in \mathcal{U}_{ad}, \tag{1.6}$$

avec $\mathcal{U}_{ad} = \{v \in V \mid v = u_d \text{ sur } \Gamma_d\}$.

Preuve 1.2.2 *La preuve de cette proposition est laissée en exercice.* □

Remarque 1.2.1 *Le tenseur σ traduit le principe des travaux virtuels : Les fonctions test (notées v) sont identifiées à des déplacements virtuels.*

- *$L(v)$: travail des forces appliquées (f_V, f_s) dans le déplacement virtuel v.*
- *$a(u,v) = \int_\Omega (\sigma(u) : \varepsilon(v))\, d\underline{x}$: travail des efforts internes décrits pas $\sigma(u)$ dans la déformation décrite par $\varepsilon(v)$. A l'équilibre, le travail des forces extérieures dans le déplacement virtuel v est égal au travail des efforts internes dans la déformation $\varepsilon(v)$.*

1.3 Problème de minimisation

1.3.1 Cadre abstrait

Soit V un espace vectoriel et $a(.,.)$ une forme bilinéaire définie sur $V \times V$:

- Positive : $\forall v \in V,\ a(v,v) \geq 0$,
- Symétrique : $\forall u, v \in V,\ a(u,v) = a(v,u)$.

Enfin, soit L une forme linéaire définie sur V.

Proposition 1.3.1 *Sous les hypothèse du cadre abstrait (1.3.1) il y a équivalence entre les deux assertions suivantes :*

1. *$u \in V,\ a(u,v) = L(v),\ \forall v \in V$.*
2. *$u \in V,\ J(u) \leq J(v),\ \forall v \in V$, où $J(v) = \frac{1}{2}a(v,v) - L(v)$.*

Preuve 1.3.1 *La preuve de cette proposition est à nouveau laissée en exercice.* □

1.3.2 Application à l'élasticité

Dans le cas d'un matériau isotrope, nous pouvons écrire la Loi de Hooke :

$$\sigma(u) = \lambda \mathrm{Tr}(\varepsilon(u)) I + 2\mu\varepsilon(u) = D\varepsilon(u).$$

On suppose que les coefficient de Lamé (λ, μ) vérifient les propriétés mécaniques suivantes :

$$\underbrace{3\lambda + 2\mu > 0}_{\text{Réaction à la dilatation/contraction}} \quad , \quad \underbrace{\mu > 0}_{\text{Réaction naturelle au cisaillement}} \quad . \tag{1.7}$$

Proposition 1.3.2 *Sous les hypothèses définies par l'équation (1.7), le problème aux déplacements (1.5) équivaut à :*

$$u \in \mathcal{U}_{ad},\ J(u) \leq J(v),\ \forall v \in \mathcal{U}_{ad}, \tag{1.8}$$

où :

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega \sigma(u) : \varepsilon(u)\, d\underline{x} - \left(\int_\Omega f_V \cdot u\, d\underline{x} + \int_{\partial\Omega} f_s \cdot u\, d\Gamma\right).$$

Remarque 1.3.1

- *La proposition (1.3.2) traduit le principe du minimum de l'énergie potentielle totale du système, $E_{pot,T}$.*
- *A l'équilibre, le déplacement solution u minimise la quantité $E_{pot,T}$, parmi tous les déplacements virtuels cinématiquement admissibles (C.A.), i.e., parmi les déplacements v vérifiant $v = u_d$ sur Γ_d.*

1.4 Compléments

1.4.1 Formule de Green de l'élasticité

Pour prouver la formule de Green de l'élasticité, nous allons appliquer la formule d'intégration de Gauss avec un choix judicieux de la fonction à intégrer. On a :

$$\int_{\partial\Omega} \sigma n \cdot u \, d\Gamma = \sum_{i,j} \int_{\partial\Omega} \sigma_{ij} n_j u_i \, d\Gamma = \sum_{i,j} \int_{\partial\Omega} \sigma_{ij} u_i n_j \, d\Gamma.$$

On pose donc : $\varphi_{ij} = \sigma_{ij} u_i$. On introduit donc cette expression dans les intégrales supra pour obtenir :

$$\begin{aligned}
\int_{\partial\Omega} \varphi_{ij} n_j \, d\Gamma &= \int_\Omega \frac{\partial \varphi_{ij}}{\partial x_j} \, d\underline{x} \\
&= \int_\Omega \frac{\partial \sigma_{ij} u_i}{\partial x_j} \, d\underline{x} \\
&= \int_\Omega (\partial_j \sigma_{ij}) u_i \, d\underline{x} + \int_\Omega (\partial_j u_i) \sigma_{ij} \, d\underline{x} \\
&= \int_\Omega (\partial_j \sigma_{ij}) u_i \, d\underline{x} + \frac{1}{2} \int_\Omega (\partial_j u_i) \sigma_{ij} \, d\underline{x} + \frac{1}{2} \int_\Omega (\partial_j u_i) \sigma_{ji} \, d\underline{x},
\end{aligned}$$

en utilisant la symétrie de σ pour la dernière égalité. Nous constatons que la somme sur i, j du premier terme de la dernière ligne donne $\mathrm{div}(\sigma) \cdot u$. Nous sommons donc cette intégrale sur les indices i, j pour obtenir :

$$\begin{aligned}
\sum_{ij} \int_{\partial\Omega} \varphi_{ij} n_j \, d\Gamma &= \int_\Omega \mathrm{div}(\sigma) \cdot u \, d\underline{x} + + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \int_\Omega (\partial_j u_i) \sigma_{ij} \, d\underline{x} + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \int_\Omega (\partial_j u_i) \sigma_{ji} \, d\underline{x} \\
&= \int_\Omega \mathrm{div}(\sigma) \cdot u \, d\underline{x} + \frac{1}{2} \int_\Omega (\nabla u) : \sigma \, d\underline{x} + \frac{1}{2} \int_\Omega (\nabla u)^T : \sigma \, d\underline{x} \\
&= \int_\Omega \mathrm{div}(\sigma) \cdot u \, d\underline{x} + \int_\Omega \underbrace{\frac{1}{2}(\nabla u + \nabla u^T)}_{\varepsilon(u)} : \sigma \, d\underline{x}.
\end{aligned}$$

1.4.2 Formulation variationnelle : cas de l'encastrement

Soit (u, σ) une solution s.r. du problème aux limites (1.3), et soit v une fonction test. On a donc :

$$\begin{aligned}
a(u, v) &\stackrel{def}{=} \int_\Omega D\varepsilon(u) : \varepsilon(v) \, d\underline{x} \\
&= \int_\Omega \sigma : \varepsilon(v) \, d\underline{x} \qquad \text{(Loi de comportement)} \\
&= -\int_\Omega \mathrm{div}(\sigma) \cdot v \, d\underline{x} + \int_{\partial\Omega} \sigma n \cdot v \, d\Gamma \text{ (Green)} \\
&= \underbrace{\int_\Omega f_V \cdot v \, d\underline{x} + \int_{\Gamma_F} f_s \cdot v \, d\Gamma}_{L(v)} + \underbrace{\int_{\Gamma_d} \sigma n \cdot v \, d\Gamma}_{=0, \text{ car } v=0 \text{ sur } \Gamma_d} \quad \text{(Equilibre)}
\end{aligned}$$

1.4.3 Propriétés d'ellipticité des coefficients élastiques

Partons de la loi de comportement d'un matériau isotrope (loi de Hooke) : $\sigma = D\varepsilon(u)$, avec $D : \varepsilon \in \mathcal{S} \mapsto \lambda \mathrm{Tr}(\varepsilon) I + 2\mu\varepsilon \in \mathcal{S}$, où les coefficients de Lamé (λ, μ) vérifient : $3\lambda + 2\mu > 0,\ \mu > 0$. Montrons donc que $\forall \varepsilon, \varepsilon' \in \mathcal{S}$, on a $D\varepsilon : \varepsilon' = \varepsilon : D\varepsilon'$ (symétrie) et $D\varepsilon : \varepsilon \geq \alpha_0 |\varepsilon|^2$, avec $\alpha_0 > 0$ (coercivité).

1. On constate que $I : \varepsilon = \mathrm{Tr}(\varepsilon)$, d'où :

$$D\varepsilon : \varepsilon' = (\lambda \mathrm{Tr}(\varepsilon) I + 2\mu\varepsilon) : \varepsilon' = \lambda \mathrm{Tr}(\varepsilon) : \mathrm{Tr}(\varepsilon') + 2\mu\varepsilon : \varepsilon' = \varepsilon : D\varepsilon'.$$

2. $D\varepsilon : \varepsilon = (\lambda \mathrm{Tr}(\varepsilon) I + 2\mu\varepsilon) : \varepsilon = \lambda \mathrm{Tr}(\varepsilon)^2 + 2\mu|\varepsilon|^2$, et puisque $\mu > 0$, si $\lambda > 0$ la conclusion est évidente. Si $\lambda < 0$, $2\mu > -3\lambda > 0$, l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne $\mathrm{Tr}(\varepsilon)^2 \leq 3|\varepsilon|^2$. On peut donc conclure :

$$D\varepsilon : \varepsilon \geq 3\lambda|\varepsilon|^2 + 2\mu|\varepsilon|^2 = \underbrace{(3\lambda + 2\mu)}_{>0}|\varepsilon|^2.$$

Chapitre 2

Analyse mathématique de l'élasticité

2.1 Inégalité de Korn

Définissons la norme d'un champ de déplacements $v : \Omega \to \mathbb{R}^3$. Soit V l'espace vectoriel suivant :

$$V = \left\{v : \Omega \to \mathbb{R}^3 \mid v = (v_i)_{i=1,2,3},\ v_i \in H^1(\Omega)\right\} = H^1(\Omega)^3.$$

On pose $||v||_{1,\Omega} = (\sum_{i=1}^{3} ||v_i||^2_{H^1(\Omega)})^{1/2}$, $\forall v \in V$, et $V_0 = \{v \in V \mid v = 0 \text{ sur } \Gamma_d\}$, un sous-espace vectoriel fermé de V, muni de la norme induite $||.||_{1,\Omega}$: il s'agit donc d'un espace de Hilbert. Pour continuer l'analyse mathématique, il nous faut supposer qu'une **hypothèse fondamentale** est satisfaite par Ω, et plus particulièrement par son bord $\partial\Omega = \Gamma_d \cup \Gamma_F$:

$$\mathrm{mes}(\Gamma_d) > 0, \tag{2.1}$$

autrement dit, il existe une portion du bord où le déplacement est connu.

Théorème 2.1.1 *(Inégalité de Korn) : On suppose que l'hypothèse (2.1) est vérifiée. Alors,* $\exists \gamma > 0$ *tel que :*

$$\int_\Omega |\varepsilon(v)|^2 \, d\underline{x} \geq \gamma ||v||^2_{1,\Omega}, \quad \forall v \in V_0.$$

<u>Preuve</u> 2.1.1 *La preuve de la proposition peut être trouvée dans "Mécanique des milieux continus", [Duvaut, 1990].* □

Remarque 2.1.1 *Ce théorème généralise l'inégalité de Poincaré pour le Laplacien.*

Corollaire 2.1.1 *Si l'hypothèse (2.1) est satisfaite, la norme canonique* $||.||_{1,\Omega}$ *est équivalente à la norme* $||.|| : v \in V_0 \mapsto (\int_\Omega |\varepsilon(v)|^2 \, d\underline{x})^{1/2}$ *sur* V_0.

2.2 Coercivité en élasticité

On rappelle que :

$$\exists \alpha_0 > 0,\ \forall \varepsilon \in \mathcal{S}, \quad D\varepsilon : \varepsilon \geq \alpha_0 |\varepsilon|^2, \tag{2.2}$$

(cf. Propriétés d'ellipticité des coefficients élastiques, Chapitre 1), qui reste valable dans le cas isotrope comme dans le cas anisotrope.

On rappelle également la forme bilinéaire de l'élasticité : $a(u, v) = \int_\Omega D\varepsilon(u) : \varepsilon(v) \, d\underline{x}$.

Proposition 2.2.1 *On suppose que les hypothèses (2.1), (2.2) sont vérifiées. Alors :* $\exists \alpha > 0$ *tel que* $a(v,v) \geq \alpha ||v||^2$, $\forall v \in V_0$.

Preuve 2.2.1 *La preuve de cette proposition est laissée en exercice.* □

2.3 Cadre fonctionnel de l'élasticité

Formulation faible (Chapitre 1) :

$$u \in \mathcal{U}_{ad}, \quad a(u, v-u) = L(v-u), \; \forall v \in \mathcal{U}_{ad}. \tag{2.3}$$

Hypothèses sur les données :

$$\begin{cases} (f_V)_i \in L^2(\Omega), \; (f_s)_i \in L^2(\Gamma_F), \\ (u_d)_i \in H^{1/2}(\Gamma_d) \; \Rightarrow \; \exists \bar{u} \in V \text{ tel que } \bar{u}|_{\Gamma_d} = u_d. \end{cases} \tag{2.4}$$

Théorème 2.3.1 *On suppose les hypothèses (2.1), (2.2), (2.4). Alors il existe un et un seul* $u \in V$ *tel que (2.3), où* $\mathcal{U}_{ad} = \{v \in V \mid v = u_d, \text{ sur } \Gamma_d\}$.

Preuve 2.3.1 *La preuve est laissée en exercice.* □

2.4 Déplacements rigides infinitésimaux

Plaçons-nous dans le cas sans déplacements imposés, i.e., $\Gamma_d \neq \varnothing$. On montre un résultat d'existence (dans un espace quotient) au problème faible (formulation variationnelle) d'élasticité (cf. [Duvaut, 1990]). Que dire de l'unicité ?

Définition 2.4.1 *Le champ de déplacements* $v : \Omega \to \mathbb{R}^3$ *est dit rigide infinitésimal si* $\varepsilon(v) = 0$ *sur* Ω.

Lemme 2.4.1 *Soit* $v : \Omega \to \mathbb{R}^3$ *s.r. Alors* v *est un déplacement rigide infinitésimal si et seulement si* $\exists (a,b) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ *tel que* $v(x) = a \wedge x + b$, $x \in \Omega$.

Preuve 2.4.1 *La preuve de ce lemme sera traitée lors du TD3.* □

Proposition 2.4.1 *La solution du problème sans déplacements imposés* $u \in V$, $a(u,v) = L(v)$, $\forall v \in V$ *est unique à un déplacement rigide infinitésimal près.*

Preuve 2.4.2 *La preuve de cette proposition est laissée en exercice.* □

Exemple de la traction d'un arbre cylindrique :

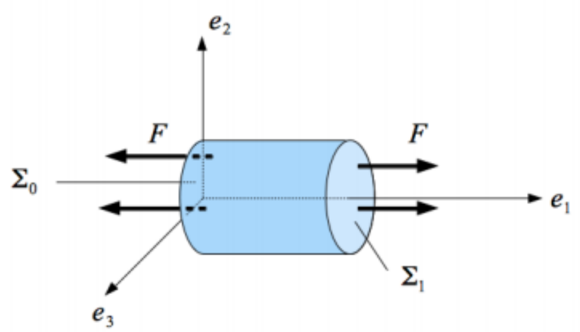

FIGURE 2.1 – Traction bilatérale d'un arbre cylindrique.

2.5 Compléments

2.5.1 Coercivité de la forme bilinéaire a

Montrons la coercivité de $a : (u,v) \in H^1(\Omega)^3 \times H^1(\Omega)^3 \mapsto a(u,v) = \int_\Omega D\varepsilon(u) : \varepsilon(v)\; d\underline{x}$. On sait que $\exists \alpha_0 > 0,\ \forall \varepsilon \in \mathcal{S},\ D\varepsilon : \varepsilon \geq \alpha_0 |\varepsilon|^2$, et l'inégalité de Korn nous donne également l'existence d'un $\gamma > 0$ tel que : $\int_\Omega |\varepsilon(v)|^2\; d\underline{x} \geq \gamma ||v||^2_{1,\Omega},\ \forall v \in V_0$, où V_0 est l'espace des fonctions de $H^1(\Omega)^3$ s'annulant sur le bord Γ_d. On a alors, $\forall v \in V_0$:

$$a(v,v) = \int_\Omega D\varepsilon(v) : \varepsilon(v)\; d\underline{x} \geq \alpha_0 \int_\Omega |\varepsilon(v)|^2\; d\underline{x} \geq \underbrace{\alpha_0 \gamma}_{\alpha > 0} ||v||^2_{1,\Omega}.$$

2.5.2 Théorème d'existence et unicité

On rappelle la formulation faible (2.3) sous une forme équivalente :

$$u \in \mathcal{U}_{ad}, \quad a(u,v) = L(v),\ \forall v \in V_0,$$

où $\mathcal{U}_{ad} = V_0 + \bar{u}$, avec $\bar{u}$ donné tel que $\bar{u} = u_d$ sur Γ_d. On procède par changement d'inconnue : $u = w + \bar{u}$, où $w \in V_0$. V_0 est un sous-espace vectoriel fermé de $V = H^1(\Omega)^3$, donc il s'agit d'un espace de Hilbert. De quoi est solution w ? $\forall v \in V_0$:

$$a(w + \bar{u}, v) = L(v) \ \Leftrightarrow\ a(w,v) = \underbrace{L(v) - a(\bar{u}, v)}_{\tilde{L}(v)},$$

où $\tilde{L} : V_0 \to \mathbb{R}$ est une forme linéaire connue. On a ainsi, $\forall v \in V_0$, un $w \in V_0$ tel que $a(w,v) = \tilde{L}(v)$. Grâce à la coercivité de a dans V_0^2 il est facile de vérifier les hypothèses du théorème de Lax-Milgram, d'où l'existence et l'unicité de w dans V_0, donc de u.

2.5.3 Cas sans déplacements imposés

On se place dans le cas $\Gamma = \varnothing \ \Rightarrow\ \Gamma_F = \partial\Omega$. On résout $(\mathcal{P})$:

$$u \in V,\ a(u,v) = L(v),\ \forall v \in V. \tag{$\mathcal{P}$}$$

D'après le lemme (2.4.1), on sait que $\varepsilon(v) = 0$ implique que $v(x) = a \wedge x + b$, avec a, b des vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Soit (u, u^*) un couple de solutions de $(\mathcal{P})$, donc on a, $\forall v \in V$:

$$\begin{cases} a(u,v) = L(v), \\ a(u^*,v) = L(v). \end{cases}$$

Donc en soustrayant les deux égalités, nous obtenons : $a(u - u^*, v) = 0,\ \forall v \in V$. Il suffit donc de choisir $v = u - u^*$ pour avoir :

$$a(u - u^*, u - u^*) = \int_\Omega D\varepsilon(u - u^*) : \varepsilon(u - u^*)\; d\underline{x} = 0,$$

or on rappelle que $\exists \alpha_0$ tel que $\alpha_0 |\varepsilon|^2 \leq D\varepsilon : \varepsilon$, donc :

$$0 \leq \alpha_0 \int_\Omega |\varepsilon(u - u^*)|^2\; d\underline{x} \leq 0 \ \Rightarrow\ \int_\Omega |\varepsilon(u - u^*)|\; d\underline{x} = 0.$$

Donc $\varepsilon(u - u^*) = 0$ p.p. sur Ω, d'où d'après le lemme (2.4.1) : $u - u^* = a \wedge x + b$ sur Ω.