INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES TOULOUSE

5A ModIA

Rendus de TPs MatLab
Résolution de Systèmes Linéaires

Auteurs :
Rémi Colin
Mickael Song

Superviseur :
Ronan Guivarch

29 mars 2024

Table des matières

Table des figures

1 Introduction

L'objectif de ce TP est d'implémenter deux solveurs itératifs GMRES et FOM pour résoudre le système linéaire $Ax = b$.

Nous allons tester ces algorithmes sur 3 matrices : mat1, pde225 5e-1 et hydcar20. Ces 3 matrices sont creuses.
Nous allons également faire varier la tolérance ϵ pour l'erreur inverse normwise défini par :

$$\eta_b^N(\mathbf{x}_m) = \frac{\|b - A\mathbf{x}_m\|}{\|b\|}$$

2 Méthodes GMRES et FOM

Nous avons implémenté les algorithmes GMRES et FOM qui ont été définis dans le cours. Pour chacune des trois matrices, nous avons testé chaque fonction des valeurs d'epsilon (critère d'arrêt) allant de 1e-2 à 1e-12.

2.1 Mat1

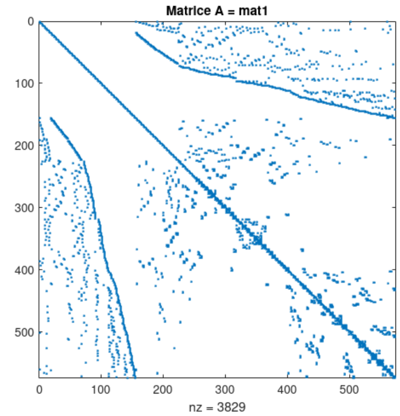


FIGURE 1 – Matrice "Mat1".

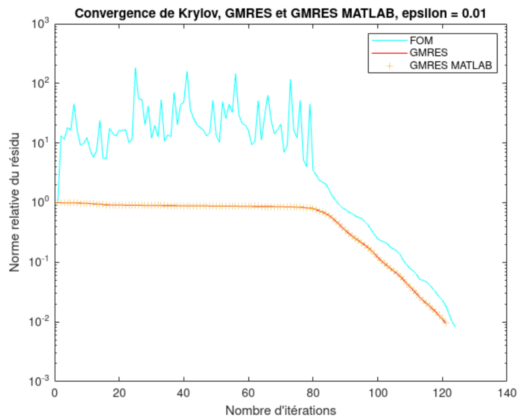
Les résultats montrent, pour la matrice "Mat1", que pour des valeurs d'ϵ assez grandes (1e-2 et 1e-6), la méthode GMRES implémentée, celle de Matlab ainsi que la méthode FOM convergent vers une solution. Néanmoins, le nombre de d'itérations nécessaire pour y parvenir augmente lorsque ϵ diminue.

De plus, lorsque le critère d'arrêt est à 1e-12, aucune des méthodes ne converge. La matrice "Mat1" a donc certainement une structure qui rend difficile la convergence pour une précision élevée.

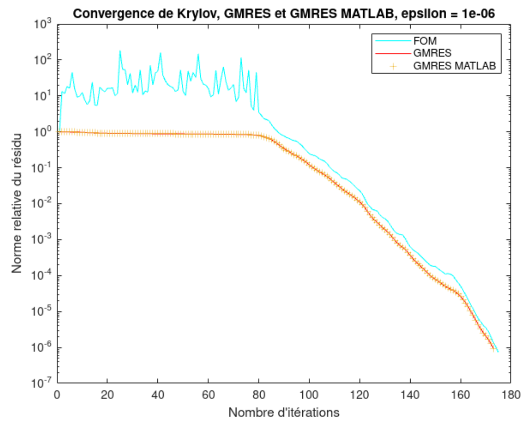
Nous pouvons cependant constater que la méthode GMRES de Matlab s'arrête avant la méthode GMRES implémentée lorsqu'il est impossible de converger.

	FOM	GMRES	GMRES (Matlab)
nb itérations avec ($\epsilon = 1e-2$)	123	120	120
nb itérations avec ($\epsilon = 1e-6$)	174	172	172
nb itérations avec ($\epsilon = 1e-12$)	573 (pas de convergence)	573 (pas de convergence)	216 (pas de convergence)

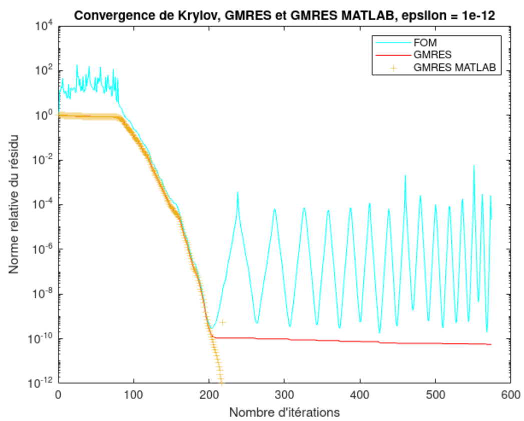
TABLE 1 – Nombre d'itérations pour la matrice "Mat1".



(a) $\epsilon = 10^{-2}$



(b) $\epsilon = 10^{-6}$



(c) $\epsilon = 10^{-12}$

FIGURE 2 – Convergence des méthodes appliquées sur "mat1" pour différentes valeurs d'ϵ.

2.2 Pde225_5e-1

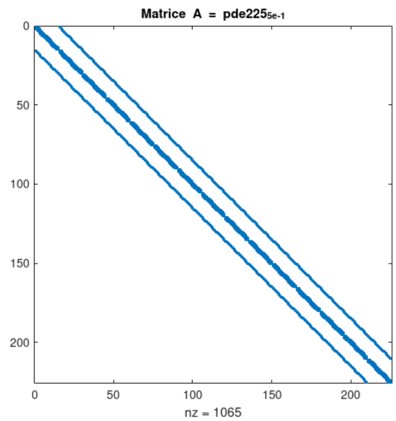


FIGURE 3 – Matrice "Pde225".

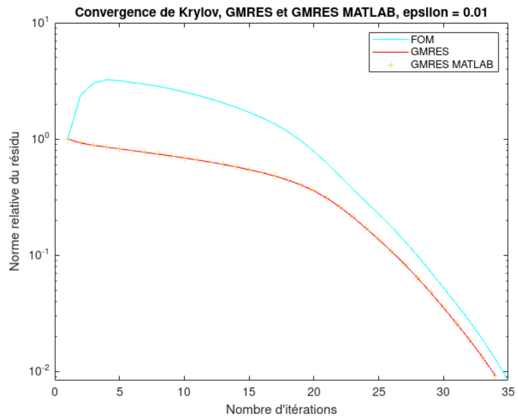
Les résultats montrent, pour la matrice "Pde225", que pour des valeurs d'ϵ de 1e-2 à 1e-12, la méthode GMRES implémentée, celle de Matlab ainsi que la méthode FOM convergent vers une solution en peu d'itérations, ce qui peut être justifié par la structure en diagonale par blocks de "Pde225" facilitant la convergence. Néanmoins, comme pour la matrice "Mat1", le nombre de d'itérations nécessaire pour y parvenir augmente lorsque ϵ diminue.

De plus, lorsque le critère d'arrêt est à 1e-15, aucune des méthodes ne converge. La matrice "Mat1" a donc certainement une structure qui rend difficile la convergence pour une précision élevée.

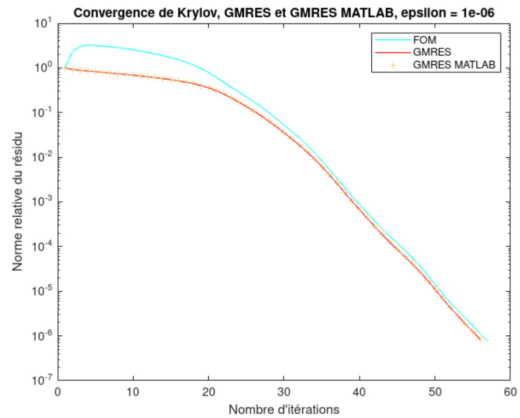
Nous pouvons cependant constater que, encore une fois, la méthode GMRES de Matlab s'arrête avant la méthode GMRES implémentée lorsqu'il est impossible de converger.

	FOM	GMRES	GMRES (Matlab)
nb itérations avec ($\epsilon = 1e-2$)	34	33	33
nb itérations avec ($\epsilon = 1e-6$)	56	55	55
nb itérations avec ($\epsilon = 1e-12$)	81	81	81
nb itérations avec ($\epsilon = 1e-15$)	225 (pas de convergence)	225 (pas de convergence)	92 (pas de convergence)

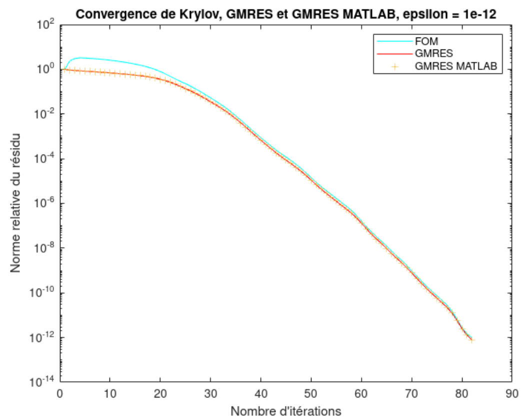
TABLE 2 – Nombre d'itérations pour la matrice "Pde225".



(a) $\epsilon = 10^{-2}$



(b) $\epsilon = 10^{-6}$



(c) $\epsilon = 10^{-12}$

FIGURE 4 – Convergence des méthodes appliquées sur "Pde225_5e-1" pour différentes valeurs d'ϵ.

2.3 hydcar20.mat

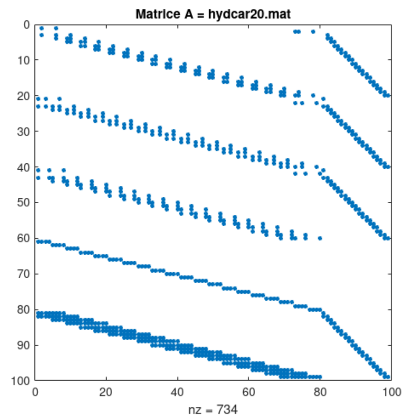
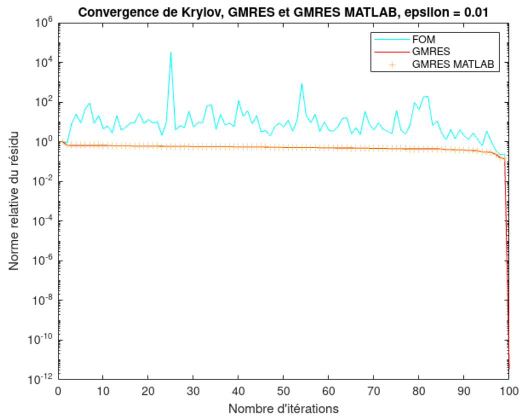


FIGURE 5 – Matrice "Hydcar20".

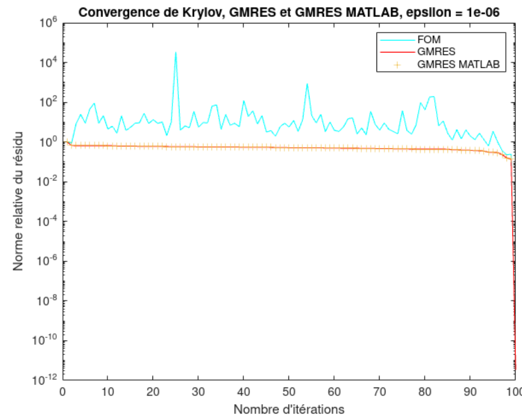
Pour la matrice "hydcar20", les méthodes ne parviennent pas à converger lorsque le critère d'arrêt est à 1e-12, quel que soit l'algorithme utilisé. Cependant, pour des critères d'arrêt plus grands (1e-2 et 1e-6), les autres méthodes convergent mais après 99 itérations (soit le nombre maximal d'itérations pour cette matrice). Une fois encore, ces résultats peuvent être dûs à la forme de la matrice "hydcar20" (matrice creuse mais qui semble difficile à inverser).

	FOM	GMRES	GMRES (Matlab)
nb itérations avec ($\epsilon = 1e-2$)	99	99	99
nb itérations avec ($\epsilon = 1e-6$)	99	99	99
nb itérations avec ($\epsilon = 1e-12$)	99 (pas de convergence)	99 (pas de convergence)	99 (pas de convergence)

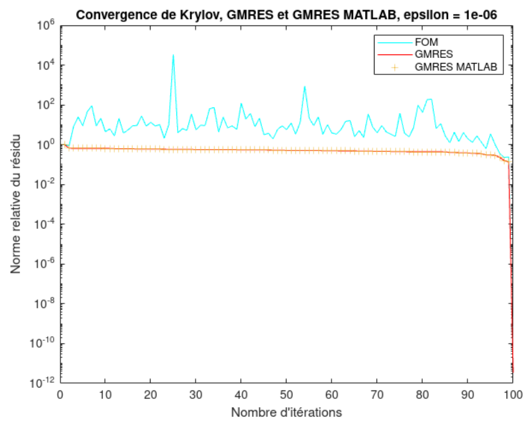
TABLE 3 – Nombre d'itérations pour la matrice "Hydcar20".



(a) $\epsilon = 10^{-2}$



(b) $\epsilon = 10^{-6}$



(c) $\epsilon = 10^{-12}$

FIGURE 6 – Convergence des méthodes appliquées sur "hydcar20" pour différentes valeurs d'ϵ.

3 Précision des algorithmes

L'erreur inverse de la dernière itération donne la précision de chacune des méthodes. Ainsi, nous obtenons les valeurs suivantes pour un critère d'arrêt fixé à 1e-6 :

	FOM	GMRES	GMRES (Matlab)
Mat1	7.388320e-07	9.333559e-07	9.333559e-07
Pde225_5e-1	7.574090e-07	8.320925e-07	8.320925e-07
Hydcar20.mat	3.483177e-12	3.483177e-12	0

TABLE 4 – Précision des différents algorithmes avec $\epsilon = 1e^{-6}$.

Ces résultats montrent que pour Mat1 et Pde225 5e-1, toutes les méthodes atteignent une précision proche du critère d'arrêt fixé à 10^{-6}.
Pour Hydcar20.mat, FOM et GMRES implémentée affichent une précision très élevée, tandis que GMRES de Matlab indiquent une précision supérieure à la précision machine. Dans tous les cas, la précision des algorithmes pour ces matrices précisément sont bonnes.

4 Conclusion

En conclusion, l'efficacité et la capacité de convergence des méthodes FOM et GMRES sont fortement influencées par la valeur du critère d'arrêt (ϵ) choisi. La forme de la matrice utilisée semble également jouer un rôle majeur dans la capacité de convergence de l'algorithme tandis que sa taille et sa forme jouent un rôle dans le nombre d'itérations qu'il faudra à l'algorithme pour converger.

De plus, les courbes de convergence montrent que les algorihmes GMRES implémenté et provenant de Matlab sont exactement les mêmes même si le nombre d'itérations lors d'une non convergence des algorithmes, dû à un critère d'arrêt trop restrictif, est plus faible pour la méthode GMRES de Matlab que celle que nous avons implémenté.

Ainsi, ces résultats soulignent l'importance de choisir judicieusement le critère d'arrêt. Le préconditionnement de la matrice avant de lancer les algorithmes pourrait également aider à la convergence (ce que nous allons démontrer dans le TP2).