Théorie des graphes

Chapitre 1 : Définitions et concepts de base

Joseph Gergaud & Géraldine Morin

1er mars 2022

Introduction

- Cette UE est divisée en deux parties :
  - Théorie des Graphes,
  - UE Théorie des Automates et des Langages.
- La partie *Graphes* est composée de 6 CTDs, 5 TP-Projet (en Julia).
- Évaluation sur 1 Examen (70% de la note) et un BE (30% de la note)
- Il est rappelé qu'un taux supérieur ou égal 30% d'absence dans une UE n'autorise pas à passer le rattrapage.

Plan

Graphes non orientés

Définition 1.1.1 – Graphe

Un **graphe** fini $G = (V, E)$ est défini par un ensemble fini, non vide, appelés **sommets** (en anglais *vertex/vertices*)

$$V = \{v_0, v_1, \dots, v_{n-1}\}$$

et d'un ensemble fini d'arêtes (en anglais edges)

$$E = \{e_0, e_1, \dots, e_{m-1}\}.$$

Chaque arête est définie un couple de sommets $\{v_i, v_j\}$ [a] appelés **extrémités** de e.

a. Pour les arêtes la notation n'est pas la notation ensembliste, l'arête $\{v_i, v_i\}$ est une boucle et n'est pas l'ensemble $\{v_i\}$.

Vocabulaire

Définition 1.1.2 – Vocabulaire

- Si $n = \#V$ on dit que $G = (V, E)$ est un graphe d'**ordre** n.
- Si $e = \{v_i, v_j\}$, on dit que l'arête e est **incidente** au sommet v_i (et au sommet v_j aussi d'ailleurs.)
- Si $e = \{v_i, v_j\}$, on dit que v_i et v_j sont **adjacents**.
- Deux arêtes sont **adjacentes** si et seulement si elles ont un sommet commun.

Graphes non orientés

Exemple 1.1.1. Exemples $G = (V, E)$ est-il bien défini pour

1) $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ et $E = \emptyset$.
2) $V = \{1, 2\}$ et $E = \{\{1, 3\}, \{1, 4\}, \{1, 5\}, \{2, 3\}\}$.
3) $V = \{1, 2, 3\}$ et $E = \{\{1, 1\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}\}$.
4) $V = \{1, 2, 3\}$ et $E = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 3\}\}$.

Graphes non orientés

Définition 1.1.3

- $e = \{v_i, v_i\}$ est une **boucle** ;
- un graphe dans lequel il peut exister plusieurs arêtes entre deux noeuds est appelé **multigraphe** ;
- un graphe est dit **simple** si
  - il n'a pas de boucle,
  - il a au plus une arête entre deux sommets.

Dans le suite, nous considérons presque toujours des graphes simples (sinon, on le signale !).

Représentation graphique

Il existe une infinité de manières de représenter graphiquement un graphe, c'est à dire de dessiner un graphe dans le plan.
Exemple 1.2.1. $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ et
$E = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{1, 5\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}, \{4, 5\}\}$.
Dessinez ce graphe de plusieurs façons différentes.

Définition 1.2.1 – Degré

Le **degré** d'un sommet v_i est le nombre d'arêtes incidentes en v_i. On le note $\delta(v_i)$. Une boucle participe pour 2.

Définition 1.2.2 – Graphe simple complet

Un graphe simple est dit **complet** si tout sommet est adjacent à tout autre.

Exercice 1.2.2. Quel est le nombre d'arêtes du graphe simple complet d'ordre n ?

Remarque 1.2.1. Le graphe simple complet d'ordre n est noté K_n.

Exercice 1.2.3. Dessiner K_5.

Lemme 1.2.1 *(lemme des poignées de main). La somme des degrés de tous les sommets est égale à deux fois le nombre d'arêtes.*

Corollaire 1.2.3

Le nombre de sommets de degré impair est pair.

à justifier.

Exercice 1.2.4. Montrer que s'il y a n personnes dans une salle avec $n > 1$, au moins 2 d'entre elles ont le même nombre de connaissances dans la salle.

Définition 1.2.4 – Graphe régulier

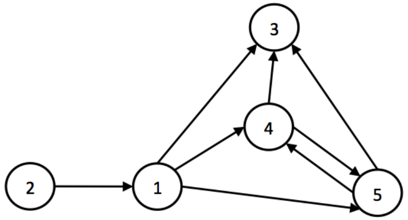
Un graphe est dit **régulier** si tous ses sommets sont de même degré. Si ce degré est k, on dit que G est k-**régulier**.

Graphe orienté

Définition 1.3.1 – Graphe orienté

Un graphe $G = (V, E)$ est dit **orienté** si chaque arête est une paire de sommets (donc ordonnée), $e \in E, e = (i, j)$. On appelle les éléments de E des arcs.

Exemple 1.3.1.



Graphe orienté

Définition 1.3.2 – Vocabulaire

- i est appelé l'**origine** de $e = (i, j)$;
- j est appelée l'**arrivée** de e.
- le **degré sortant** d'un sommet v $\delta^+(v)$ est le nombres d'arcs d'origine v ;
- le **degré entrant** d'un sommet v $\delta^-(v)$ est le nombre d'arcs qui arrivent en v ;
- le **degré total** $\delta(v) = \delta^+(v) + \delta^-(v)$.

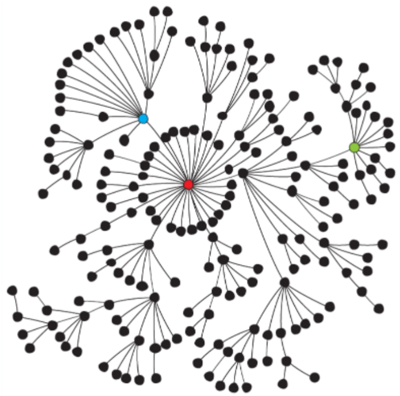
Remarque 1.3.1. on a toujours $\sum_{v \in V} \delta(v) = 2\#E$.

Exemples

Exercice 1.3.2. Donner des exemples de problèmes que l'on peut modéliser par un graphe.

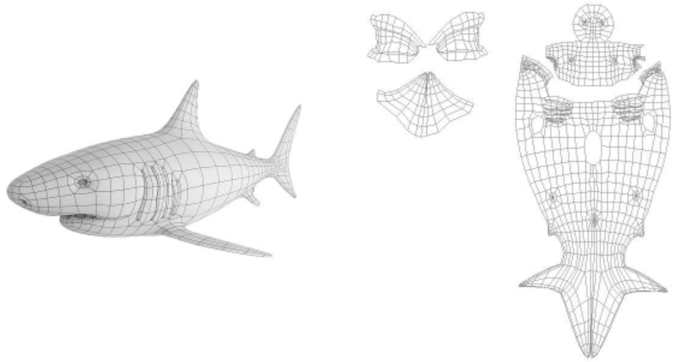
Exemples : réseaux des petits mondes

On peut aller de n'importe quel point du réseau à un autre par un chemin assez court. Cela correspond à cette idée populaire qui dit que l'on peut trouver un lien entre 2 personnes prises au hasard dans un pays en moins de 6 connexions. Certains nœuds ont un statut particulier : ce sont des "hub"



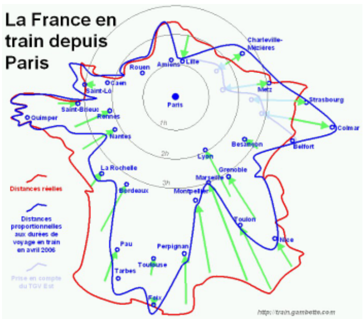
Exemple : maillages

Maillage en 3D : les maillages 3D sont des graphes dont les sommets sont positionnés en 3D (plongement géométrique). Le graphe représente les relations de voisinage entre les sommets (image de droite), appelée la topologie. (image du maillage *Shark* de CGStudio).



Applications, algorithmes

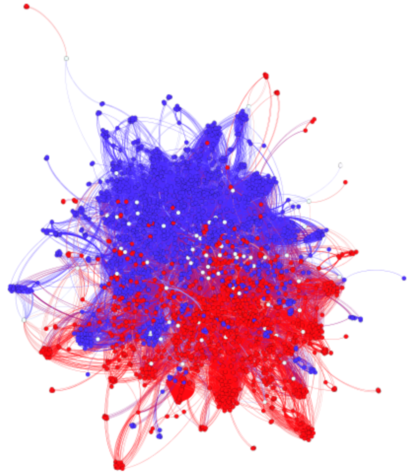
- Calculs de plus courts chemins (cartes de distance par rapport aux temps de transport, (image crée par Philippe Gambette http://philippe.gambette.free.fr/Train/)



- coloration : identification de données indépendantes, par exemple pour effectuer des calculs en parallèle.

Applications, algorithmes

identification de *clusters*, c'est à dire, des groupes fortements connectés. Une exemple avec une coloration des *Hashtag* de *Twitter* utilisés majoritairement par des démocrates ou des républicains (images de Thimoty Renner).



Sous graphes, graphes partiels, cliques

Définition 1.4.1 – Sous-graphe

Un **sous-graphe** de $G = (V, E)$ engendré par un sous-ensemble de sommets $V' \subset V$ est $G' = (V', E')$ où E' représente toutes les arêtes de E ayant leur deux extrémités dans V'.

Exemple 1.4.1. Si G est le graphe des routes de France, celui représentant les routes d'Occitanie est un sous-graphe.

Définition 1.4.2 – Graphe partiel

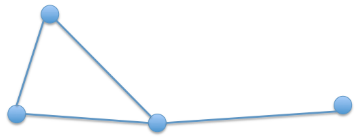
Un **graphe partiel** de $G = (V, E)$ engendré par $E' \subset E$ est le graphe $G' = (V, E')$.

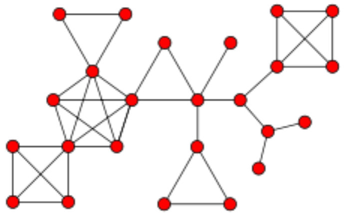
Exemple 1.4.2. Si G est le graphe des routes de France, donner un exemple de graphe partiel.

Définition 1.4.3 – Clique

Une **clique** est l'ensemble des sommets d'un sous-graphe complet.

Exemple 1.4.3. Ces graphes contiennent-ils des cliques ?





(image de droite : source Wikipedia)

Exercice 1.4.4. Montrez que dans un groupe formé de six personnes, il y en a nécessairement trois qui se connaissent mutuellement ou trois qui ne se connaissent pas (on suppose que si A connaît B, B connaît également A).
Montrez que cela n'est plus nécessairement vrai dans un groupe de cinq personnes.

- Il existe de nombreuses façons de stocker un graphe
- La complexité des algorithmes dépend de la représentation machine d'un graphe
- On prendra soin pour les représentations proposées de regarder la complexité à la fois en place et en temps (lors d'accès) des représentations proposées

Matrice d'incidence sommet-arc

Définition 1.5.1 – Matrice d'incidence

La matrice d'incidence sommets-arcs d'un graphe orienté $G = (V, E)$ d'ordre n ayant m arcs est une matrice $A = (a_{iu})$, $i = 1 \dots n$, $u = 1 \dots m$ à coefficients entiers 0, $+1$, -1, telle que chaque colonne correspond à un arc de E et chaque ligne correspond à un sommet de V. Si $e_k = (v_i, v_j)$ alors la colonne k a tous ses termes nuls sauf $a_{ik} = +1$ et $a_{jk} = -1$.

Exemple 1.5.1. Coder le graphe orienté donné à l' exemple 1.3.1.

Exercice 1.5.2. Trouver comment exprimer le degré entrant et sortant en un sommet.

Matrice d'incidence sommet-arête

C'est l'équivalent de la matrice sommet-arcs pour un graphe non orienté. Dans ce cas, on met $+1$ partout.
Exemple 1.5.3. Codage du graphe de l'exemple précédent en considérant le graphe non orienté.

Matrice d'adjacence

Cela correspond en fait à une matrice d'incidence 'sommet-sommet'.

Définition 1.5.2 – Matrice d'adjacence

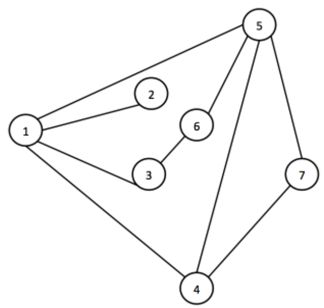
La matrice d'adjacence d'un graphe simple orienté $G = (V, E)$ est une matrice A à coefficients booléens telle que $A = (a_{ij})$ avec $a_{ij} = 1$ si $(i, j) \in E$.

Remarque 1.5.1. Si le graphe est non orienté, pour chaque arête $\{i, j\}$, $a_{ij} = a_{ji} = 1$; la matrice A est donc symétrique.

Exercice 1.5.4. Comparez la taille de stockage d'un graphe en utilisant ces différentes matrices. On considère les cas où la matrice est stockée entièrement

Codage vectoriel à partir de la matrice d'adjacence

On utilise deux tableaux T_V de dimension $n + 1$, et T_E de dimension m (cas orienté) ou $2m$ (cas non orienté). Les sommets voisins du sommet i sont stockés entre les indices $T_V(i)$ et $T_V(i + 1) - 1$ du tableau T_E.
Alternativement, le tableau T_V peut contenir des listes chainées d'indice des sommets voisins.
Exercice 1.5.5. Donner pour le graphe suivant les vecteurs T_V et T_E :



Exercice 1.5.6. Calculer le coût de stockage pour une représentation matricielle ou vectorielle. Calculer le temps nécessaire pour savoir si l'arête (i, j) est dans le graphe.

Remarque 1.5.2. Codage vectoriel à partir de la matrice d'incidence : on peut représenter, à partir de deux tableaux T_1 et T_2 de dimension m, $T_1(i)$ et $T_2(i)$ donnant les extrémités de la i-ème arête.

Théorie des graphes

Chapitre 2 : Connexité

1er mars 2022

INP ENSEEIHT

Définition 1.6.1 – Graphe pondéré

Un graphe est **pondéré** si à chaque arc, on associe un poids réel positif (ou coût).

Exercice 1.6.1. Adapter les représentations ci-dessus pour prendre en compte des graphes pondérés (chaque arête a un poids positif).

Définition 2.1.1 – Chaîne

Une **chaîne** de longueur $q \in \mathbb{N}$, $(e_1, \ldots, e_q)$, est une séquence de q arêtes successivement adjacentes. Il existe donc une suite de sommets $(v_1, \ldots, v_{q+1})$ telle que v_i soit extrémité de e_{i-1} et e_i.

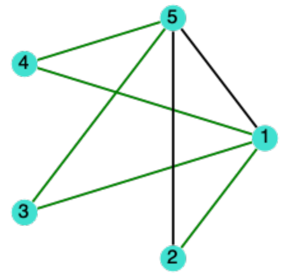
Définition 2.1.2 – Vocabulaire

- On dit que la chaîne joint les sommets v_1 et v_{q+1}.
- Une chaîne est dite **élémentaire** si les sommets $(v_1, \ldots, v_{q+1})$ sont distincts 2 à 2.
- Une chaîne est **fermée** si $v_1 = v_{q+1}$.
- Une chaîne est **simple** si les arêtes $(e_1, \ldots, e_q)$ sont distinctes 2 à 2,
- q est la **longueur** de la chaîne.

Définition 2.1.3 – Cycle

- Un **cycle** est une chaîne simple fermée.
- Un cycle est **élémentaire** si les sommets parcourus sont distincts 2 à 2 sauf le premier et le dernier.
- La **distance** entre deux sommets est la longueur de la plus petite chaîne entre eux.
- Le **diamètre** d'un graphe est la distance maximal entre deux sommets du graphe. Elle vaut $+\infty$ si il existe des sommets non connectés (la définition de la connexité arrive après).

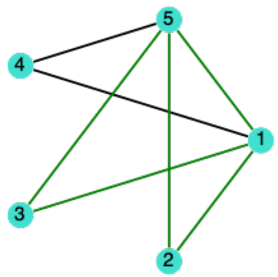
Exemple 2.1.1.



Trouver sur ce graphe :

- une chaîne fermée non élémentaire ;
- une chaîne simple, ni fermée, ni élémentaire ; $(2, 1, 3, 5, 4, 1)$
- un cycle élémentaire ;
- un cycle non élémentaire.

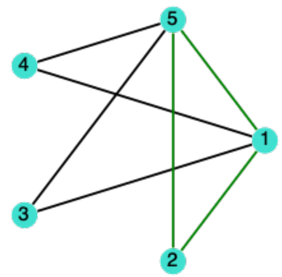
Exemple 2.1.1.



Trouver sur ce graphe :

- une chaîne fermée non élémentaire ; $(1, 5, 2, 1, 3, 5, 1)$
- une chaîne simple, ni fermée, ni élémentaire ;
- un cycle élémentaire ;
- un cycle non élémentaire.

Exemple 2.1.1.



Trouver sur ce graphe :

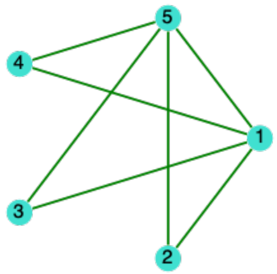
- une chaîne fermée non élémentaire ;
- une chaîne simple, ni fermée, ni élémentaire ;
- un cycle élémentaire ; $(1, 2, 5, 1)$
- un cycle non élémentaire.

Exemple

Exemple 2.1.1.

Trouver sur ce graphe :

- une chaîne fermée non élémentaire ;
- une chaîne simple, ni fermée, ni élémentaire ;
- un cycle élémentaire ;
- un cycle non élémentaire. $(1, 2, 5, 1, 3, 5, 4, 1)$

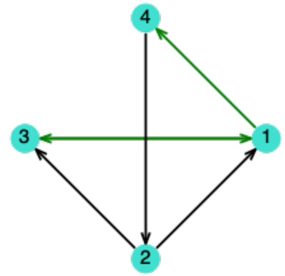


Graphes orientés : Chemins et circuits

On ne parle plus de chaîne/cycle mais de chemins et de circuits qui prennent bien sûr en compte l'orientation des arcs.
Exemple 2.1.2.

Trouver sur ce graphe :

- un chemin (non fermé) élémentaire ;
- un chemin (non fermé) non élémentaire ; $(1, 3, 1, 4)$
- un circuit élémentaire ;
- un circuit non élémentaire.

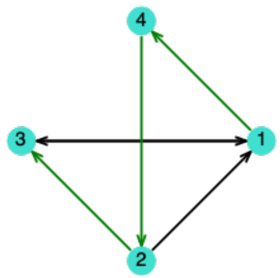


Graphes orientés : Chemins et circuits

On ne parle plus de chaîne/cycle mais de chemins et de circuits qui prennent bien sûr en compte l'orientation des arcs.
Exemple 2.1.2.

Trouver sur ce graphe :

- un chemin (non fermé) élémentaire ; $(1, 4, 2, 3)$
- un chemin (non fermé) non élémentaire ;
- un circuit élémentaire ;
- un circuit non élémentaire.

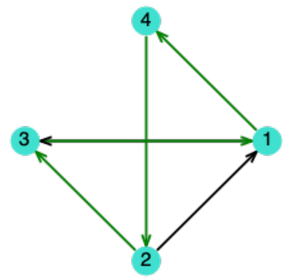


Graphes orientés : Chemins et circuits

On ne parle plus de chaîne/cycle mais de chemins et de circuits qui prennent bien sûr en compte l'orientation des arcs.
Exemple 2.1.2.

Trouver sur ce graphe :

- un chemin (non fermé) élémentaire ;
- un chemin (non fermé) non élémentaire ;
- un circuit élémentaire ; $(1, 4, 2, 3, 1)$
- un circuit non élémentaire.

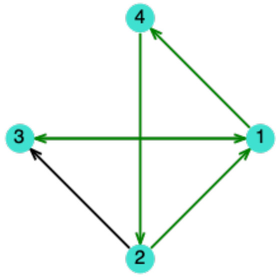


Graphes orientés : Chemins et circuits

On ne parle plus de chaîne/cycle mais de chemins et de circuits qui prennent bien sûr en compte l'orientation des arcs.
Exemple 2.1.2.

Trouver sur ce graphe :

- un chemin (non fermé) élémentaire ;
- un chemin (non fermé) non élémentaire ;
- un circuit élémentaire ;
- un circuit non élémentaire. $(1, 3, 1, 4, 2, 1)$



Graphe connexe, fortement connnexe

Définition 2.2.1 – Graphe connexe, fortement connnexe

- Un graphe non orienté est **connexe**, si entre tout couple de sommet, il existe une chaîne les joignant.
- Un graphe orienté est **fortement connexe** si toute paire de sommets distincts (i, j) est reliée par au moins un chemin.

Rappels : Relation d'équivalence

Définition 2.2.2 – Relation binaire

On appelle relation binaire sur un ensemble E, la donnée d'un sous-ensemble Γ de $E \times E$. On notera $x \; R \; y$, et on dira que l'élément x de E est en relation avec l'élément y de E, lorsque le couple (x, y) appartiendra à Γ.

Définition 2.2.3 – Relation d'équivalence

Soit R une relation binaire sur E. R est une relation d'équivalence sur E si et seulement si les 3 propriétés suivantes sont vérifiées.

1) Pour tout $x \in E$, $x \; R \; x$ (réfexivité) ;
2) pour tout $(x, y) \in E^2, x \; R \; y \Rightarrow y \; R \; x$ (symétrie) ;
3) Pour tout $(x, y, z) \in E^3, (x \; R \; y \text{ et } y \; R \; z) \Rightarrow x \; R \; z$ (transitivité).

Rappels : classe d'équivalence

Définition 2.2.4 – Classe d'équivalence

Soir R une relation d'équivalence sur un ensemble E et x un élément de E. On appelle classe d'équivalence de x l'ensemble noté $[x]$ de tous les éléments de E qui sont en relation avec x :

$$[x] = \{y \in E, xRy\}.$$

Proposition 2.2.5

Soit R une relation d'équivalence sur un ensemble E, deux classes d'équivalence sont disjointes ou égales.

► Démontrer la proposition ■

Composante connexe

Proposition 2.2.6

Soit R une relation d'équivalent sur un ensemble E, l'ensemble des classes d'équivalence est une partition de E.

Proposition 2.2.7

Soit G un graphe non orienté (respectivement orienté), la relation R définie sur l'ensemble des sommets par $v_i R v_j$ si et seulement si il existe une chaîne joignant v_i à v_j (respectivement un chemin allant de v_i à v_j et un chemin allant de v_j à v_i) est une relation d'équivalence.

► Démontrer la proposition. ■

Composantes connexes

Définition 2.2.8 – Composantes connexes, composantes fortement connexe

oit G un graphe non orienté (respectivement orienté). Les graphes partiels engendrés par les classes d'équivalences de la relation définie à la remarque ci-dessus s'appellent les composantes connexes (respectivement composantes fortement connexes) du graphe G.

Graphe connexe

Exercice 2.2.1.

- Dessiner un graphe à 3 composantes connexes.
- $G = (\{1,2,3,4,5,6\}, \{\{1,3\},\{1,4\},\{2,3\},\{3,4\},\{5,6\}\})$ est-il connexe ?

Calcul des composantes fortement connexes : algorithme de Demoucron

Soit $G = (V, E)$ un graphe orienté

Définition 2.2.9 – Successeurs, prédécesseurs

On appelle successeurs et prédécesseurs d'une partie $S \subset V$ les ensembles :

$$\begin{aligned} Succ(S \subseteq V) &= \{v' \mid v \in S, (v, v') \in E\} \\ Pred(S \subseteq V) &= \{v' \mid v \in S, (v', v) \in E\}. \end{aligned}$$

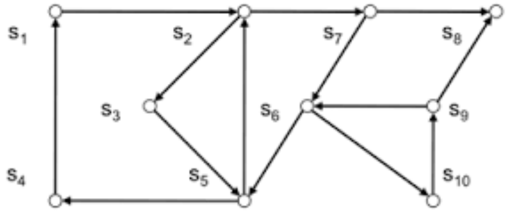
On définit aussi leur fermeture réflexive et transitive par :

$$\begin{aligned} Succ^*(S \subseteq V) &= S \cup Succ^*(Succ(S))) \\ Pred^*(S \subseteq V) &= S \cup Pred^*(Pred(S))). \end{aligned}$$

Algorithme

$CFC_G \leftarrow \emptyset$
tant que Il existe un sommet non dans la réunion des sous-ensembles de CFC_G **faire**
  Choisir $v \in V$ n'apparaissant pas la réunion des sous-ensembles de CFC_G
  $CFC_v \leftarrow Succ^*(\{v\}) \cap Pred^*(\{v\})$
  $CFC_G \leftarrow CFC_G \cup \{CFC_v\}$
fin tant que

Exercice 2.2.2. Appliquer l'algorithme de Demoucron au graphe suivant :



Exercice 2.2.3. Trois pays envoient chacun à une conférence deux espions ; chaque espion doit espionner tous les espions des autres pays (mais pas son propre collègue).

- Représentez cette situation par un graphe d'ordre 6 dans lequel chaque arête reliant i et j signifie que j espionne i et i espionne j.

- Ce graphe est-il complet ? est-il connexe ?
- Quel est le degré de chaque sommet ? Déduisez-en le nombre d'arêtes.

Exercice 2.2.4. Etant donné un groupe de 10 personnes, le tableau suivant indique les paires de personnes qui sont amis.

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Amis de i	3,6,7	6,8	1,6,7	5,10	4,10	1,2,3,7	1,3,6	2		4,5

- Représentez cette situation par un graphe d'ordre 10 dans lequel une arête entre les sommets i et j signifie qu'il y a une relation d'amitié entre i et j.

- Ce graphe est-il complet ? connexe ?
- Si l'adage "les amis de mes amis sont mes amis" était vérifié, que pourrait-on en conclure sur la structure du graphe ?

Proposition 2.2.10

Soit G un graphe connexe alors il possède au moins $n-1$ arêtes.

► La proposition est trivial pour $n=1$ et $n=2$.
Supposons la vraie pour n et montrons là pour $n+1$. Soit donc $G=(V,E)$ un graphe d'ordre $n+1$, $V=\{v_0,\dots,v_n\}$, et considérons le graphe $G'=(V',E')$ induit par $V'=\{v_1,\dots,v_n\}$. Posons $G'_1,\dots,G'_k$ les composantes connexes de G' d'ordre respectivement $n_1,\dots,n_k$. On a $n_1+\cdots n_k=n$ (on a enlevé v_0). Par hypothèse de récurrence G'_i possède au moins n_i-1 arêtes. De plus G est connexe, donc v_0 est connecté à toutes les composantes connexes G'_i. Par suite le graphe de départ G possède au moins $(n_1-1)+\cdots+(n_k-1)+k=n$ arêtes. ■

Proposition 2.2.11

Un graphe sans cycle contient au plus $(n-1)$ arêtes.

► Démontrer la proposition par récurrence ■

Définition 2.2.12

- Un **arbre** est un graphe connexe sans cycle ;
- une **forêt** est un graphe dont chaque composante connexe est un arbre.

Proposition 2.2.13

Soit G un graphe connexe, les propositions suivantes sont équivalentes :

1) $G=(V,E)$ est un arbre (ie G n'a pas de cycle) ;
2) G est sans cycle et a $n-1$ arêtes ;
3) G est sans cycle et a un cycle dès qu'on ajoute une arête ;
4) G est connexe et non connexe dès qu'on enlève une arête ;
5) tout couple de sommet est relié par une chaîne unique.

Exercice 2.2.5. Démontrer la proposition ci-dessus.

Définition 2.2.14 – Arbre couvrant

Un graphe partiel connexe qui est un arbre est appelé **graphe couvrant** ou **arbre couvrant** (*spanning tree* en anglais).

Algorithme

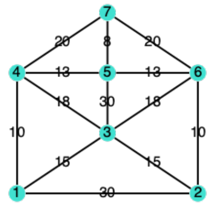
Trier les arêtes par ordre croissant de poids
On choisit les arêtes dans cet ordre, et on garde la suivante tant qu'elle ne crée pas de cycle.

Remarque 2.2.1. C'est un algorithme glouton optimal[a].

a. Un algorithme glouton est un algorithme dont le principe est de faire étape par étape un choix optimal.

Exercice 2.2.6.

Trouver un arbre couvrant minimum dans ce graphe pondéré.



Définition 2.3.1 – espace des arcs

Soit $G = (V, E)$ un graphe orienté, $E = \{e_1, \dots, e_m\}$. on représente chaque arc e_i par le vecteur de la base canonique dans $\mathbb{R}^m$. L'espace des arcs est alors $\mathbb{R}^m$.

Soit maintenant c un cycle du graphe non orienté induit par le graphe orienté $G = (V, E)$ et fixons un sens de parcours de ce cycle. Nous pouvons alors comparer les orientations des arêtes de ce cycle à celles des arcs du graphe orienté de départ. On a alors la

Définition 2.3.2 – vecteur associé à un cycle

Soit c un cycle dans un graphe induit d'un graphe orienté. On associe à ce cycle le vecteur de l'espace des arcs $\mu_c = (c_1, \dots, c_m)$

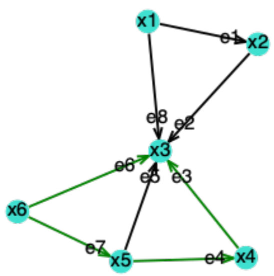
$$c_i = \begin{cases} 1 & \text{si } e_i \in c \text{ est orienté comme dans } G \\ -1 & \text{si } e_i \in c \text{ est orienté dans le sens opposé à celui de } G \\ 0 & \text{si } e_i \notin c. \end{cases}$$

Remarque 2.3.1. On considérera μ_c comme une application de E dans $\mathbb{R}$: $\mu_c(e_i) = c_i$.

Définition 2.3.3 – Espace des cycles

On appelle espace des cycles d'un graphe orienté le sous-espace vectoriel de l'espace des arcs engendré par les cycles. On notera $\mathcal{C}$ cet espace.

Exemple 2.3.1. Dans le graphe orienté suivant le cycle $c = (x_6, x_3, x_4, x_5, x_6)$ a pour vecteur associé $\mu_c = (0, 0, -1, -1, 0, 1, -1, 0)$



Définition 2.3.4 – Cocycle

Soit $G = (V, E)$ un graphe orienté et (V_1, V_2) une partition des sommets, l'ensemble des arcs entre V_1 et V_2 est appelé un cocycle. On associe à un cocycle c^0 un vecteur de $\mathbb{R}^m$ par $\mu_{c^0} = (c^0_1, \dots, c^0_m) = (\mu_{c^0}(e_1), \dots, \mu_{c^0}(e_m))$ défini par

$$c^0_i = \begin{cases} 1 & \text{si } e_i \in c^0 \text{ est orienté de } V_1 \text{ vers } V_2 \\ -1 & \text{si } e_i \in c^0 \text{ est orienté de } V_2 \text{ vers } V_1 \\ 0 & \text{si } e_i \notin c^0. \end{cases}$$

Définition 2.3.5 – Espace des cocycles

On appelle espace des cocycles d'un graphe orienté le sous-espace vectoriel de l'espace des arcs engendré par les cocycles. On notera $\mathcal{C}^0$ cet espace.

Définition 2.3.6 – Cycle fondamental

Soit $G = (V, E)$ un graphe orienté connexe et A un arbre couvrant du graphe non orienté induit. Cet arbre contient $n - 1$ arêtes. Notons $C = \{e_i \in E, e_i \notin A\}$. Si $C = \emptyset$ alors G est un arbre, sinon, pour chaque arête e dans C ajouté à l'arbre A on crée exactement un cycle élémentaire noté c_e, Ce cycle est un cycle fondamental.

Remarque 2.3.2. On associe à un arbre couvrant $m - (n - 1)$ cycles fondamentaux.

Remarque 2.3.3. On définit de même les cocycles fondamentaux. Si à un arbre couvrant on retire une arête, on crée une partition de l'ensemble des sommets et donc on associe un cocycle dit fondamental. Associé à un arbre on peut associé $(n - 1)$ cocycles fondamentaux.

Théorème 2.3.7

Soit $G = (V, E)$ un graphe orienté connexe sans boucle et A un arbre couvrant du graphe non orienté induit. On a alors :

1) L'ensemble des cycles fondamentaux associés à l'arbre A est une base de l'espace des cycles. On appelle nombre cyclomatique la dimension de cet espace : $\nu(G) = \dim \mathcal{C} = m - (n-1)$.
2) L'ensemble des cocycles fondamentaux associés à l'arbre A est une base de l'espace des cocycles, $\dim \mathcal{C}^0 = n - 1$.
3) Les espaces de cycles et de cocycles sont supplémentaires et orthogonaux pour le produit scalaire canonique.

▶ ▪ Montrons que les cycles fondamentaux associé à un arbre sont linéairement indépendants.
On fixe, quitte à réordonner les arcs, $R = \{e_n, \dots, e_m\}$ l'ensemble des arêtes du graphe qui ne sont pas présentes dans l'arbre A. Soient $(c_i)_{i=n,\dots,m}$ les cycles fondamentaux associés à A. Soit $\mu = \sum_{i=n}^{m} \lambda_i \mu_{c_i} = 0$. Alors, pour tout $j \in \{n, \dots, m\}, \mu(e_j) = \pm\lambda_j = 0$, car e_j n'apparait que dans le cycle fondamental c_j. On en déduit que les vecteurs μ_{c_i} sont linéairement indépendants. Par suite $\dim \mathcal{C} > m - (n-1)$

- De la même manière on montre que les $(n-1)$ vecteurs $\mu_{c_j^0}$ associés aux cocycles fondamentaux sont aussi linéairement indépendants et donc que $\dim \mathcal{C}^0 \geq (n-1)$.
- Montrons maintenant que les sous espaces $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}^0$ sont orthogonaux.
Soient c un cycle et c^0 un cocycle défini par la partition (V_1, V_2) et considérons les 2 vecteurs associés
$$\mu_c = (\mu_c(e_1) \dots, \mu_c(e_m)),$$
$$\mu_{c^0} = (\mu_{c^0}(e_1) \dots, \mu_{c^0}(e_m)),$$
alors $< \mu_c, \mu_{c^0} >= \sum_{i=1}^{m} \mu_c(e_i)\mu_{c^0}(e_i)$. Si $\mu_c(e_i)\mu_{c^0}(e_i) \neq 0$, alors l'arête e_i est dans c et dans c^0 et on peut prendre une orientation du cycle telle que ce nombre vaut 1 ou -1 suivant que l'arête dans le cycle va de V_1 vers V_2 ou de V_2 vers V_1. Mais le nombre d'arcs dans $c \cap c^0$ est pair car chaque fois que l'on va de V_1 vers V_2 il faut un arc qui passe de V_2 à V_1 car c est un cycle. Par suite $< \mu_c, \mu_{c^0} >$ est simplement le nombre d'arcs dans c passant de V_1 à V_2 moins le nombre d'arcs passant de V_2 à V_1, ce qui est égal à 0.
- Montrons enfin 1) et 2).
Les deux sous espaces $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}^0$ sont donc supplémentaires, par suite $m \geq \dim \mathcal{C} + \dim \mathcal{C}^0 \geq m - (n-1) + (n-1) = m$. On en déduit alors que $\dim \mathcal{C} = m - (n-1)$ et que $\dim \mathcal{C}^0 = n - 1$ et donc les assertions 1) et 2).

■

Corollaire 2.3.8

Soit $G = (V, E)$ un graphe orienté sans boucle ayant k composantes connexes, alors
$$\nu(G) = \dim \mathcal{C} = m - n + k \quad \text{et} \quad \dim \mathcal{C}^0 = n - k.$$

On peut développé une théorie analogue pour les graphes non orientés : in suffit de supprimer les signes. Mais comme les coefficients -1 et 1 ne se compensent plus, on remplace de corps $\mathbb{R}$ par le corps à 2 éléments : $\mathbb{F}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. On définit alors

- Sur l'ensemble $\{0, 1\}$ l'addition modulo 2

+	0	1
0	0	1
1	1	0

- L'espace vectoriel des arêtes $\prod_{i=1}^{m}\{0, 1\}$ muni des opérations
  somme modulo 2
  multiplication par un scalaire dans le corps $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
- le vecteur associé à un cycle c par
$$c_i = \begin{cases} 1 & \text{si } e_i \in c \\ 0 & \text{si } e_i \notin c. \end{cases}$$
- le vecteur associé à un cocycle c^0 par
$$c_i^0 = \begin{cases} 1 & \text{si } e_i \in c^0 \\ 0 & \text{si } e_i \notin c^0. \end{cases}$$

Théorème 2.3.9

Soit $G = (V, E)$ un graphe connexe sans boucle et A un arbre couvrant. On a alors :

1) L'ensemble des cycles fondamentaux associés à l'arbre A est une base du $\mathbb{F}_2$ espace vectoriel des cycles. On appelle nombre cyclomatique la dimension de cet espace : $\nu(G) = \dim_{\mathbb{F}_2} \mathcal{C} = m - (n-1)$.
2) L'ensemble des cocycles fondamentaux associés à l'arbre A est une base du $\mathbb{F}_2$ espace vectoriel des cocycles, $\dim_{\mathbb{F}_2} \mathcal{C}^0 = n - 1$.
3) Les espaces de cycles et de cocycles sont supplémentaires et orthogonaux pour le produit scalaire canonique.

Exercice 2.3.2. Application de l'algorithme de Kruskal (suite).
Trouver une base de cycles dans le graphe de l'exercice 2.2.6.

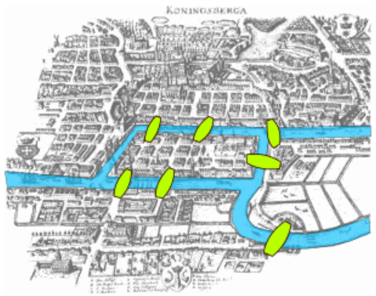
Théorie des graphes

Chapitre 3 : Graphes eulériens et hamiltoniens

1er mars 2022

INP ENSEEIHT

En 1766, Euler résout le problème dit des 7 ponts de la ville de Königsberg : à savoir "est-il possible de suivre un chemin qui emprunte chaque pont une fois et une seule et revienne au point de départ ?"



Plan de la ville de Königsberg à l'époque d'Euler, et ses 7 ponts au dessus de la rivière Pregolia (source : *Wikipedia*).

Exercice 3.1.1. Modéliser le problème ci dessus sous forme de graphe.

Graphes eulériens

Définition 3.1.1 – Graphe eulérien

- Une chaîne est **eulérienne** si elle est simple et passe par toutes les arêtes de E.
- Un cycle est **eulérien** si c'est une chaîne eulérienne fermée.
- Un graphe est **eulérien** (ou **semi-eulérien**) si il admet un cycle eulérien (ou une chaîne eulérienne).

Remarque 3.1.1. intuitivement eulérien signifie "sans lever le crayon ni passer deux fois par le même trait".

Théorème 3.1.2

Un graphe non orienté connexe admet une chaîne eulérienne (resp. cycle eulérien) si et seulement si le nombre de sommets de degré impair vaut 2 (resp. 0).

Démonstration : $\Rightarrow$

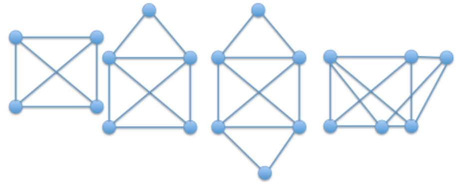
► À faire en exercice ■

Démonstration : $\Leftarrow$

► À faire en exercice. On fera un raisonnement par récurrence sur le nombre d'arêtes. Le cas de base est $m = n - 1$ (pourquoi ?) ■

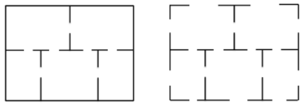
Exercices

Exercice 3.1.2. Est-il possible de tracer les figures suivantes sans lever la crayon et sans passer deux fois sur le même trait.



Exercice

Exercice 3.1.3. Est-il possible de se promener dans ces maisons en passant une et une seule fois par chacune des ouvertures ?



Algorithme

Pour trouver une chaîne (ou un cycle eulérien) on donne d'abord une chaîne simple entre les sommets de départ et d'arrivée, on retire ensuite les arêtes déjà parcourues, puis on continue à parcourir puis retirer itérativement des cycles issus de sommets déjà visités.

Graphes eulériens : cas orientés

On a la une condition similaire pour les circuits et chemins eulériens :

Théorème 3.1.3

Un graphe orienté connexe admet

- un circuit eulérienne si et seulement si $\forall v \in V, \delta^+(v) = \delta^-(v)$
- un chemin eulérien si et seulement si $\forall v \in V, \delta^+(v) = \delta^-(v)$, sauf pour 2 sommets, un de ces sommets de degré impair a un degré sortant de plus que de degré entrant et l'autre sommet de degré impair a un degré sortant de moint que de degré entrant.

Graphes hamiltoniens : graphes non orientés

Définition 3.2.1

- Une chaîne est **hamiltonienne** si elle passe par tous les sommets une fois et une seule.
- Un cycle est **hamiltonien** si c'est un cycle élémentaire comptant autant d'arêtes que de sommets dans G.
- Un graphe est **hamiltonien** (resp. **semi-hamiltonien**) s'il est possible de trouver un cycle hamiltonien (resp. une chaîne hamiltonienne).

Contrairement aux graphes eulériens, il n'y a pas de caractérisation simple des graphes hamiltoniens.

Exemple 3.2.1. Donner un exemple

Exercice 3.2.2. Jeu de Hamilton (1859) : trouver une chaîne hamiltonienne dans un dodécaèdre.

Proposition 3.2.2

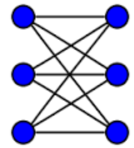
- Si $\exists v \in V$ tel que $\delta(v) = 1$ et $n > 1$ alors le graphe n'est pas hamiltonien.
- Si $\exists v \in V$ tel que $\delta(v) = 2$ alors les deux arêtes incidentes à v appartiennent à tout cycle hamiltonien.
- K_n est hamiltonien.

► Évident ■

Définition 3.3.1 – Graphe biparti

Un graphe est biparti si il existe une partition $\{V_1, V_2\}$ de V telle que, pout toute arête $e = \{v_1, v_2\}$, $\{v_1, v_2\} \cap V_1$ et $\{v_1, v_2\} \cap V_2$ sont des singletons.

Exemple 3.3.1. $K_{3,3}$: on note $K_{i,j}$ un graphe biparti complet, c'est à dire, tel que $\#V_1 = i$, $\#V_2 = j$ et tout sommet de V_1 est relié à tout sommet de V_2.



Proposition 3.4.1

Si $G = (V, E)$ est biparti et si $|\#V_1 - \#V_2| > 1$ alors G n'est ni hamiltonien, ni semi-hamiltonien.

► à faire en exercice. ■

Théorème 3.4.2 – Théorème de Ore

Soit G est un graphe simple d'ordre $n \geq 3$. Si G vérifie la propriété

$$\forall (v_1, v_2) \in V^2, \{v_1, v_2\} \notin E, \delta(v_1) + \delta(v_2) \geq n, \tag{1}$$

alors G est hamiltonien.

► Par contradiction. Soit $G = \langle V, E \rangle$ un graphe d'ordre $n \geq 3$ vérifiant (1) et non-hamiltonien. On considère $G_m = \langle V, E' \rangle$ un élément maximal [a] de l'ensemble suivant, obtenu en ajoutant des arêtes à G :

$$\{G' \mid G \text{ est un graphe partiel de } G', G' \text{ non-hamiltonien, } G' \text{ vérifie } (1)\}$$

Cet ensemble est non-vide et ses éléments sont bornés par K_n, donc G_m existe.
G_m est maximal
$\Rightarrow$ toute arête ajoutée à G_m produit un graphe hamiltonien
$\Rightarrow$ G_m est semi-hamiltonien
$\Rightarrow$ il existe un chemin : $v_1 - v_2 - \ldots - v_{n-1} - v_n$ tel que $\{v_1, v_n\} \notin E \subseteq E'$
$\Rightarrow$ $\delta(v_1) + \delta(v_n) \geq n$ par (1).

a. maximal et non maximum

Comme par ailleurs, on a :

$$\delta(v_1) = |\{i \in [1, n-1] \mid \{v_1, v_{i+1}\} \in E'\}| = |A|$$
$$\delta(v_n) = |\{i \in [1, n-1] \mid \{v_i, v_n\} \in E'\}| = |B|$$

$\Rightarrow$ $\delta(v_1) + \delta(v_n) = |A| + |B| = |A \cup B| + |A \cap B| \geq n$
$\Rightarrow$ $|A \cap B| \geq 1$ car $|A \cup B| \subseteq [1, n-1] \leq n-1$.
$\Rightarrow$ il existe $i \in [1, n-1] : \{v_1, v_{i+1}\} \in E', \{v_i, v_n\} \in E'$
$\Rightarrow$ il existe un cycle hamiltonien dans G' :

$$v_1 - v_2 - \ldots - v_i - v_n - v_{n-1} - \ldots - v_{i+1} - v_1$$

$\Rightarrow$ contradiction avec G' non-hamiltonien ■

Corollaire 3.4.3

Soit G un graphe d'ordre $n \geq 3$, si tout v est de degré $\geq n/2$ alors G est hamiltonien.

► Cette propriété implique celle du théorème de Ore. ■

Exercice 3.4.1. Soit une grille rectangulaire de taille $2p \times 2q$ composée de $4pq$ carrés identiques. Un pion ne peut se déplacer que d'une case sur une case adjacente (verticalement ou horizontalement, mais pas en diagonale). Ce pion peut-il parcourir toutes les cases une fois et une seule du coin en haut à gauche au coin en bas à droite ?

Dans un graphe G orienté, on peut chercher des chemins et circuits hamiltoniens. On dispose de la méthode (coûteuse) de la multiplication latine.
Soit M la matrice d'adjacence d'un graphe G. Les puissances successives de M, M^1, M^2, M^3 ... M^i indiquent par leur coefficient (k, l) le nombre de chaîne de longueur i entre les sommets k et l.
Si on veut de plus obtenir la suite de ces sommets, on peut utiliser la multiplication latine. Elle consiste à indiquer dans une matrice L les arêtes dans les nœuds de la matrice d'adjacence et à les combiner en chemins lors de la multiplication.

Exemple

Exemple 3.4.2. Dessiner le graphe correspondant à la matrice d'adjacence M suivante :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exemple

On écrit L puis on calcule L^2, L^3 en enlevant au fur et à mesure les chemins qui repasse plusieurs fois par le même sommet (non hamiltonien).

$$L = \begin{pmatrix} 0 & AB & 0 & AD & 0 & AF \\ 0 & 0 & BC & BD & BE & BF \\ 0 & 0 & 0 & CD & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & EB & 0 & ED & 0 & 0 \\ FA & FB & 0 & FD & FE & 0 \end{pmatrix} \quad L^2 = \begin{pmatrix} 0 & AFB & ABC & \begin{array}{c} ABD \\ AFD \end{array} & \begin{array}{c} ABE \\ AFE \end{array} & ABF \\ BFA & 0 & 0 & \begin{array}{c} BCD \\ BED \\ BFD \end{array} & BFE & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & EBC & EBD & 0 & EBF \\ 0 & \begin{array}{c} FAB \\ FEB \end{array} & FBC & \begin{array}{c} FDA \\ FBD \\ FED \end{array} & FBE & 0 \end{pmatrix}$$

Exemple

$$L^3 = \begin{pmatrix} 0 & AFEB & AFBC & \begin{array}{c} AFBD \\ ABCD \\ ABED \\ AFED \\ ABFD \end{array} & \begin{array}{c} AFBE \\ ABFE \end{array} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \begin{array}{c} BFAD \\ BFED \end{array} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ EBFA & 0 & 0 & \begin{array}{c} EBCD \\ EBFD \end{array} & 0 & \\ 0 & 0 & \begin{array}{c} FABC \\ FEBC \end{array} & \begin{array}{c} FABD \\ FEBD \\ FBCD \\ FBED \end{array} & FABE & 0 \end{pmatrix} \quad L^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & AFEBC & \begin{array}{c} AFEBD \\ AFBCD \\ AFBED \\ ABFED \end{array} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \begin{array}{c} FABCD \\ FEBCD \\ FABED \end{array} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exemple

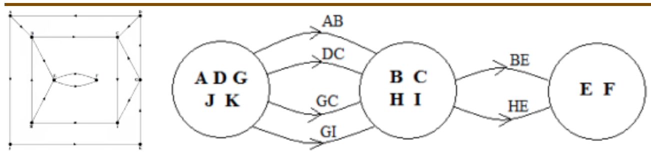
$$L^5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & AFEBCD & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Du coup, L^5 a seulement un coefficient non nul, c'est un chemin hamiltonien. Le dernier nœud de ce chemin est D duquel on arrive plus à repartir, donc un chemin hamiltonien mais pas de cycles.

Utilisation des composantes fortement connexes pour simplifier le problème

La méthode de la mutiplication latine requiert de calculer la $n$ème puissance d'une matrice L de taille $n \times n$. On peut simplifier le problème en partitionnant d'abord le graphe en composantes fortement connexes, et en étudiant les chemins hamiltoniens entre ces composantes fortement connexes.
Sur chaque composante, on calcule les chemins/circuits (par multiplication latine), et on calcule aussi les chemins/circuits sur le graphe réduit, graphe dont chaque noeud est une composante fortement connexe, et chaque arête est labellée par (i, j) sa valeur dans le graphe initial.

Exemple



On peut noter que trouver un chemin hamiltonien dans un graphe est un problème NP-complet. Un problème NP-complet, est un problème pour lequel il n'existe pas de solution polynomiale connue. Les algorithmes utilisés sont de complexité (en temps) exponentielle. Dans le cas de la multiplication latine, la multiplication de matrice classique est en $O(n^3)$ mais le nombre de coefficients dans la matrice n'est limité que par le nombre de sommets visités. Or le nombre de chemins de longueur n entre 2 sommets, un coefficient de M^n, est exponentiel (borné par $(n-1)!$).

Théorie des graphes

Chapitre 4 : Parcours de graphes, algorithme de Dijkstra

1er mars 2022

Introduction

On considère dans cette partie des graphes pondérés, i.e. à chaque arête/arc est associé un coût positif ou nul. On suppose toujours que le graphe est simple (pas de boucle, pas d'arêtes/arcs multiples).
L'**algorithme de Dijkstra** détermine pour un graphe connexe le plus court chemin d'un sommet choisi à n'importe quel autre sommet du graphe.

- Cet algorithme peut s'exécuter sur des graphes orientés ou non.
- Il construit un arbre couvrant du graphe, admettant le sommet d'origine comme racine.
- C'est un algorithme en temps polynomial.

Algorithme de Dijkstra

- On suppose que le sommet de départ est le sommet 0.
- On prend un vecteur C de taille n, $C(i)$ contient la distance courante entre le sommet 0 et le sommet i.
- Un ensemble S contient les sommets déjà visités, un autre R contient les sommets restants.

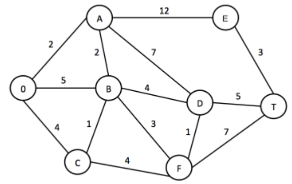
```
Initialisation
si l'arête {v_0, v_i} existe alors
    C(i) = c_0i
sinon
    C(i) = +∞
fin si
S = {v_0}
R = {v_1, ..., v_n}
i = 0
Corps
tant que R ≠ ∅ faire
    Choisir i tel que i = argmin_{i∈R} C(j)
    {Mise à jour de C}
    pour Tous les sommets v_j voisins de v_i faire
        C(j) = min(C(j), C(i) + c_ij)
    fin pour
    Ajouter v_i à S
    Retirer v_i à R
fin tant que
```

Convergence

- Argument de terminaison : on visite les sommets un à un, donc $\#R$ est strictement décroissant.
- C'est un algorithme de type glouton qui mène à une solution globale optimale.
- Pour la complexité, on parcourt les sommets (passage d'un sommet de R à S et les arêtes sont toutes parcourues –les arcs 1 fois ; les arêtes 2 fois–). A chaque passage sur un sommet, on chercher le minimum dans R. Au pire, la recherche du minimum est linéaire, donc $O(m+n+n^2) = O(m+n^2)$, on peut aussi faire mieux en gardant R trié, mais du coup, il faut pour chaque visite d'arête, insérer dans la liste triée $O((m+n)ln(n))$.

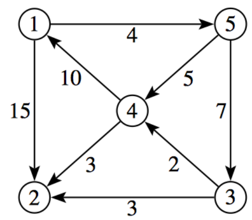
Exercices

Exercice 4.1.1. Trouver le plus court chemin de 0 à T



Exercices

Exercice 4.1.2. Trouver les plus courts chemins partant de 1 aux autres sommets du graphe



Remarque 4.1.1. si les poids peuvent être négatifs, il faut utiliser l'algorithme de Bellman-Ford, capable d'identifier un cycle absorbant (cycle tel que $d(v_i, v_i) < 0$).

Théorie des graphes

Chapitre 5 : Planarité et coloration de graphes

1er mars 2022

INP ENSEEIHT

Définition 5.1.1 – Graphe planaire

- On dit qu'un graphe est **planaire** si on peut le dessiner dans le plan de sorte que ses arêtes ne se croisent pas. On rappelle que les arêtes ne sont pas forcément rectilignes.
- Une représentation planaire particulière d'un graphe est appelée une **carte**. Une carte divise le plan en plusieurs régions appelées **faces**.

Remarque 5.1.1.

- Il s'agit en fait d'étudier les aspects topologiques d'un graphe. Plus généralement on peut se poser la question de savoir si un graphe peut être représenté sur une surface S
- Exemple d'application : carte électronique
- Les notions utilisés ici sont à la frontière de la topologie, de la topologie algébrique et de la géométrie ! Ce chapitre s'inspire très fortement de l'ouvrage *Eléments de théorie des graphes, Bretto, Faisant, Hennecard*.

Définition 5.1.2

- Soient x et y deux points de T, on appelle **arc géométrique** de x à y toute application continue $\gamma : [0,1] \to T$ injective telle que $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$. Une courbe simple entre x et y est l'image d'un arc géométrique de x à y : $\gamma([0,1])$. On note $\mathcal{C}_T$ l'ensemble des courbes simples sur T.
- On appelle **dessin** F d'un graphe $G = (V, E)$ sur T une application σ : $V \bigsqcup E \to T \bigsqcup \mathcal{C}_T$ injective telle que :
  1) $\sigma|_V : V \to T$ soit injective ;
  2) $\sigma|_E : E \to \mathcal{C}_T$ soit injective ;
  3) si $\sigma(v_i) = x, \sigma(v_j) = y$ et $e = \{v_i, v_j\}$, alors $\sigma(e)$ est une courbe simple de x à y.

[a]

a. $\bigsqcup$ est l'opérateur de réunion disjointe

Remarque 5.1.2. Par abus de langage, l'ensemble $F = \sigma(V) \cup (\bigcup_{e \in E} \sigma(e))$ est encore appelé dessin de G sur T.

Définition 5.1.3 – Plongement

Un dessin d'un graphe G dans $T \subset \mathbb{R}^k$ est un **plongement** si et seulement si les courbes simples ne se coupent qu'aux sommets.

Proposition 5.1.4

Tout graphe (d'ordre fini) admet un plongement dans R^3

▶ À démontrer ■

Exemple 5.1.1.

- Une chaîne élémentaire admet un plongement dans $\mathbb{R}$
- Un cycle élémentaire avec $n > 1$ admet un plongement dans $\mathbb{R}^2$ mais pas dans $\mathbb{R}$

Définition 5.1.5 – Graphe planaire

On dit qu'un graphe est **planaire** s'il admet un plongement dans $\mathbb{R}^2$.

Exercice 5.1.2. Le dodécaèdre est-il un graphe planaire ?

Exercice 5.1.3. Tous les graphes sont-ils planaires ?

Exercice 5.1.4. $K_{3,3}$ est-il planaire ?

Soit $G = (V, E)$ un graphe plongé dans $\mathbb{R}^2$ et F son dessin. F est un fermé, donc $\mathbb{R}^2 \setminus F$ est ouvert. On a alors :

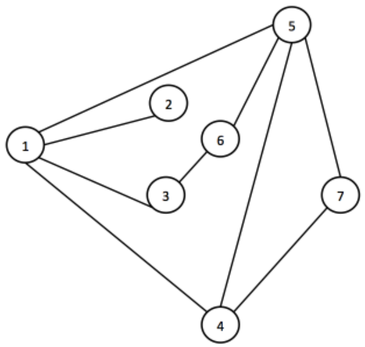
Définition 5.1.6 – Face

On appelle **face** tout composante connexe (et ouverte) de $\mathbb{R}^2 \setminus F$. On note Φ l'ensemble de ces composantes connexes,

$$\mathbb{R}^2 \setminus F = \cup_{\varphi \in \Phi} \varphi.$$

Remarque 5.1.3. Il existe R tel que $F \subset B_f(0, R)$. Par suite il n'existe qu'une seule face non bornée. On appelle cette face la face infinie.

Exemple 5.1.5. Donner les faces de ce graphe.
Attention, ne pas oublier la face infinie.



Soit φ une face finie, alors sa frontière $\partial\varphi$ est la réunion de cycles élémentaires disjoints et d'arêtes pendantes ou reliant 2 cycles.

Définition 5.1.7 – Contours

On appelle **contour** de la face φ bornée le cycle élémentaire c qui contient son intérieur $\partial\varphi \setminus c$.

Théorème 5.1.8

L'ensemble des contours de toutes les faces d'un graphe planaire forme une base de cycles de ce graphe.

Théorème 5.2.1 – Théorème d'Euler

Dans un graphe planaire d'ordre n, à m arêtes, possédant f faces à p composantes connexes, on a :

$$f = m - n + 1 + p.$$

Exercice 5.2.1. Validez la caractéristique d'Euler-Poincaré sur le graphe de l'exercice précédent.

Exercice 5.2.2. Remarquez que $K_{3,3}$ n'est pas planaire en utilisant sa caractéristique d'Euler-Poincaré.

Caractérisation

Définition 5.3.1

- On appelle **substitution** d'un sommet v par un sommet u dans une arête $e = \{e_1, e_2\}$, notée $Subst_v^u(e)$, l'arête $\{e'_1, e'_2\}$ telle que $e'_i = u$ si $e_i = v$, $e'_i = e_i$ sinon
- On appelle **contraction** d'une arête $e = \{u, v\}$ d'un graphe $G = (V, E)$ la disparition de cette arête et l'identification des deux sommets u et v. On obtient alors un nouveau graphe $G' = (V \setminus \{v\}, Subst_v^u(E) \setminus \{u, u\})$.
- On appelle **contracté** d'un graphe G tout graphe obtenu par une suite finie (voire vide) de contractions à partir de G

On remarque que le graphe reste simple (car on considère l'ensemble des arêtes comme un ensemble qui ne contient pas de doublons).

Théorème 5.3.2 – Théorème de Kuratowsky (1930)

(caractérisation des graphes planaires) Un graphe G est planaire ssi il ne contient aucun sous-graphe homéomorphe à $K_{3,3}$ ou K_5 dans aucun contracté de G.

Graphe dual

Définition 5.3.3 – graphe dual

Soit G un graphe planaire. On appelle **graphe dual** de G le graphe G^* défini par

1) les sommets de G^* sont les faces de G : $V^* = \Phi$;
2) pour chaque arête de G on définit une arête e^* de G^* de la façon suivante : le dessin γ_e de e est adjacent à une ou deux faces φ, ψ ; on pose alors $e^* = \{\varphi, \psi\}$ (c'est une boucle si $\varphi = \psi$).

Exercice 5.3.1. Vérifiez que le bi-dual d'un cube est un cube.

De façon générale, le bi-dual d'un graphe est le graphe lui-même.

Définitions

Définition 5.4.1 – Stable

Un **stable** d'un graphe est un ensemble de sommets qui ne contient que des sommets 2 à 2 non adjacents.
Le cardinal du plus grand stable est le **nombre de stabilité** de G noté $\alpha(G)$.

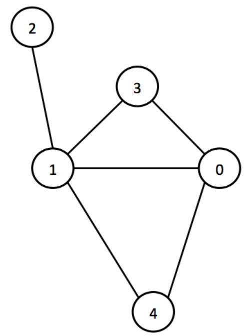
Définition 5.4.2 – Coloration

Une **coloration** d'un graphe consiste à affecter tous les sommets tels que 2 sommets adjacents n'aient pas la même couleur.

Une coloration à k couleurs est donc une partition de V en k stables.
Le **nombre chromatique** noté $\gamma(G)$ est le plus petit entier k pour lequel il existe une k-coloration.

Exercice

Exercice 5.4.1. Donner les stables de ce graphe et son nombre de stabilité.



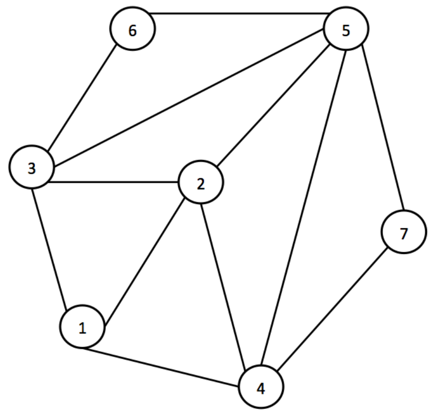
Exercice 5.4.2. Quel est le nombre chromatique du graphe de l'exercice précédent. La $\gamma(G)$-coloration trouvée est-elle unique ?

Proposition 5.4.3

1) $\gamma(G) \leq r+1$ où $r = \max_{v \in V} \delta(v)$;
2) $\gamma(G) \leq n+1-\alpha(G)$;
3) $\gamma(G) \geq \#$*sommets* dans la plus grande clique.

(à faire) en exercice.

Exercice 5.4.3. Minorez et majorez le nombre chromatique de ce graphe.



Exercice 5.4.4. Sept élèves A, ... G se sont rendus dans une salle de cours dans la journée, à différents horaires. Le tableau suivant indique qui a rencontré qui :

l'élève	A	B	C	D	E	F	G
a rencontré	D,E	D,E,F,G	E,G	A,B,E	A,B,C,D,F,G	B,E,G	B,C,E,F

De combien de places assises doit disposer au minimum la salle pour que chacun ait eu une place assise lorsqu'il était dans la salle ?

Exercice 5.4.5. Montrer qu'un graphe est biparti si et seulement si il ne contient aucun cycle de longueur impaire.
on utilise le fait qu'un graphe biparti peut être colorié avec seulement 2 couleurs.

C'est un algorithme de coloration glouton.
On range les sommets dans l'ordre décroissant de leur degré. On colorie le premier sommet non encore colorié avec une nouvelle couleur, et en suivant l'ordre de la liste, tous les sommets que l'on peut colorier avec cette même couleur. On recommence, jusqu'à que chaque sommet ait été colorié.
Exercice 5.4.6. Montrez en utilisant un cube, que l'algorithme de Welsh-Powell ne mène pas à une solution optimale.

Exercice 5.4.7. Dans un tournoi de basket, chaque équipe rencontre toutes les autres, et chaque rencontre dure une heure. Déterminer la durée minimale du tournoi avec 3, 4, 5 ou 6 équipes.

Théorème 5.4.4 – Théorème des 4 couleurs

On peut colorier les sommets d'un graphe planaire en utilisant au plus quatre couleurs, de telle sorte que toutes les arêtes aient des extrémités de couleurs différentes.

Ce théorème a été démontré en 1976... en utilisant un ordinateur. La conjecture datait de 1852 ! !
On peut par contre démontrer le théorème des 5 couleurs de façon plus simple.
Exercice 5.4.8. **Théorème des 5 couleurs** Tout graphe planaire peut être colorié avec 5 couleurs.
Pour démontrer ce théorème, on démontre les deux lemmes suivants :
Lemme 5.4.1. *$3f \leq 2m$ à partir d'un certain rang pour m (lequel ?)*

► En exercice ■

Lemme 2

***Lemme 5.4.2**. Dans tout graphe planaire, il existe au moins un sommet de degré inférieur ou égal à 5.*

- En exercice ■

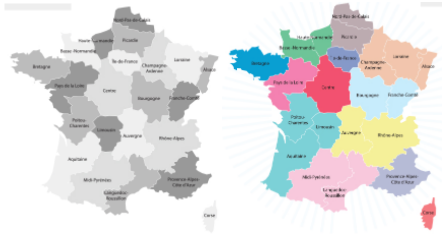
Démonstration du théorème

- On se sert du lemme 2 pour faire une récurrence sur n pour démontrer le théorème :
  - pour $n = 0$ OK
  - Supposons le théorème vrai pour n, et considérons un graphe à $n + 1$ sommets. Il existe un sommet de degré au plus 5 (lemme 2) : on applique l'hypothèse de récurrence sur le sous-graphe généré par les sommets restants.
    Appelons v_i, $i = 1 \dots 5$, les 5 voisins de v ordonnés en tournant autour de v.
    - Si 2 des v_i partagent une couleur, il y a une couleur restante pour v, dans ce cas, on l'utilise pour v, et la propriété est vérifiée ;
    - Sinon, tous les v_i sont tous de couleur différente :
      - si il n'existe aucun chemin bicolore entre v_1 et v_3, alors, on peut recolorier le sous-graphe partiel restreint aux couleurs $\{c_1, c_3\}$ connexe à v_3 (qui ne contient du coup pas v_1) en intervertissant les couleurs c_1 et c_3. v_3 devient de la même couleur que v_1, et on colorie v avec c_3.
      - si il existe un chemin bicolore de v_1 à v_3, alors, par planarité, tout chemin entre v_2 et v_4 recoupe ce chemin en un sommet de couleur c_1 ou c_3 : il n'existe donc aucun chemin bicolore de v_2 à v_4, et on peut donc colorier v_4 de la même couleur que v_2 en utilisant le même argument qu'au point précedent.

    On peut donc colorier le graphe d'ordre $n + 1$ avec 5 couleurs ce qui termine la récurrence.

Carte des régions

Exercice 5.4.9. Voici les deux dernières versions des cartes des régions de France. A-t-on gagné une ou plusieurs couleurs en passant de 22 à 13 régions ?



Théorie des graphes

Chapitre 6 : Flots sur les réseaux

1er mars 2022

Définition

Définition 6.1.1

Soit $G = (V, E)$ un graphe simple orienté. On appelle source (respectivement puits) tout sommet s (respectivement p) de degré entrant $\delta^-(s) = 0$ (respectivement de degré sortant $\delta^+(p) = 0$).

Définition 6.1.2 – Réseau

On appelle réseau un graphe simple orienté pondéré ayant une source s et un puits p et tel qu'il existe au moins un chemin de s à p. La pondération est appelée capacité et sera supposé à valeur dans $\mathbb{N}$:

$$c \ : E \to \mathbb{N}.$$

Exemples

Exemple 6.1.1.

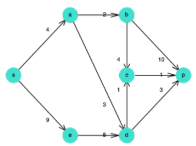


Figure 1 – *Exemple de réseau.*

Exercice 6.1.2. Donner quelques exemples de réseaux

Flots

Définition 6.1.3

Soit a un arc d'un graphe orienté, on note $i(a)$ le sommet d'origine (ou initial) de a et $t(a)$ le sommet d'arrivée (ou terminal) de a.

Définition 6.1.4 – Flots à travers un réseau

Un flot dans un réseau est une fonction $f : E \to \mathbb{R}_+$ qui vérifie les deux propriétés suivantes :

(i) Contraintes de capacité
Pour tout arc a de E $0 \leq f(a) \leq c(a)$.

(ii) Conservation du flot (lois de Kirchhoff ou loi des nœuds)
Pour tout sommet v différent de la source et du puits on a

$$\sum_{a \in E, i(a)=v} f(a) = \sum_{a \in E, t(a)=v} f(a).$$

Remarque 6.1.1. La conservation du flot signifie que la somme de ce qui arrive en un sommet est égal à la somme de ce qui repart de ce sommet.

Problème de flot maximum

Définition 6.1.5 – Valeur d'un flot

Soit f un flot dans un réseau. On appelle valeur du flot la quantité

$$\omega(f) = \sum_{t(a)=p} f(a).$$

Remarque 6.1.2. On verra ci-après que cette quantité qui est la somme de ce qui arrivent au puits est aussi la somme de ce qui part de la source : $\omega(f) = \sum_{i(a)=s} f(a)$.

Définition 6.1.6 – Problème de flot maximum

On appelle problème de flot maximum dans un réseau la recherche d'un flot de valeur maximale.

Définition 6.2.1 – Coupe

Une coupe dans un réseau est la donnée d'une partition des sommets $V = X \cup \bar{X}$ telle que $s \in X$ et $p \in \bar{X}$. On notera $(X, \bar{X})$ une coupe.

Définition 6.2.2 – Capacité d'une coupe

On appelle capacité de la coupe $(X, \bar{X})$ la somme des capacités des arcs $a \in E$ allant de X à $\bar{X}$:

$$c(X, \bar{X}) = \sum_{i(a) \in X, t(a) \in \bar{X}} c(a).$$

Une coupe est une coupe minimum si pour tout autre coupe $(Y, \bar{Y})$ on a $c(Y, \bar{Y}) \leq c(X, \bar{X})$.

Exemple 6.2.1.

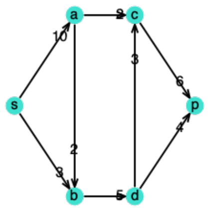


Figure 2 – *La capacité de la coupe* $(X, \bar{X}) = (\{s, a, b\}, \{c, d, p\})$ *est* $c(X, \bar{X}) = 2 + 5 = 7$, *celle de la coupe* $(Y, \bar{Y}) = (\{s, b, d\}, \{a, c, p\})$ *est* $c(Y, \bar{Y}) = 10 + 3 + 4 = 17$ *(l'arc* (a, b) *est dans le sens* $\bar{Y}, Y$*.*

- Soit X, Y 2 sous-ensembles de V, on note

$$E(X, Y) = \{a \in E, i(a) \in X, t(a) \in Y\}.$$

- Si $X = \{x\}$ et $Y = \{y\}$, on écrira $E(X, Y) = E(x, y)$.
- Si $a = (x, y)$, on écrira $f(a) = f(x, y)$, la valeur du flot sur l'arc a.
- On peut alors prolonger le flot f à toute paire (X, Y) de sous-ensembles de V en posant

$$f(X, Y) = \sum_{a \in E(X,Y)} f(a) - \sum_{a \in E(Y,X)} f(a).$$

On a immédiatement :

- $f(X, Y) \in \mathbb{R}$;
- $f(X, Y) = -f(Y, X)$ et $f(X, X) = 0$;
- $f(x, V) = f(\{x\}, V) = \sum_{a \in E, i(a)=x} f(a) - \sum_{a \in E, t(a)=x} f(a)$;
- Si $x \neq s$ ou $x \neq p$ alors $f(x, V) = 0$;
- $f(s, V) = \sum_{a \in E, i(a)=s} f(a)$ et $f(V, p) = \sum_{a \in E, t(a)=p} f(a)$.

Proposition 6.2.3

Pour toute coupe $(X, \bar{X})$ dans un réseau et tout flot f on a

$$f(X, \bar{X}) = f(s, V) = f(V, p).$$

► Démontrer la proposition ■

Théorème de Ford et Fulkerson

Corollaire 6.2.4 –

Soit f un flot dans un réseau et $(X, \bar{X})$ une coupe alors la valeur du flot est

$$\omega(f) = f(s, V) = f(V, p) = f(X, \bar{X}).$$

Théorème 6.2.5 – Théorème de Ford et Fulkerson

Soit f un flot dans un réseau et $(X, \bar{X})$ une coupe alors

$$\omega(f) = f(X, \bar{X}) \leq c(X, \bar{X}).$$

- $f(a) > 0$ pour tout a, donc

$$f(X, \bar{X}) = \sum_{a \in E(X, \bar{X})} f(a) - \sum_{a \in E(\bar{X}, X)} f(a) \leq \sum_{a \in E(X, \bar{X})} f(a) \leq c(X, \bar{X}).$$

■

Chaîne améliorable

Définition 6.3.1 – Chaîne améliorable

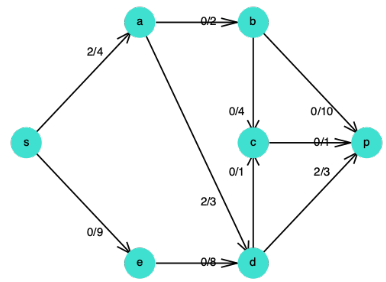
Si f un flot dans un réseau et C est une chaîne élémentaire reliant s à p, une arête de C orientée de s vers p sera dite positive et une arête de C orientée de p vers s sera dite négative. La chaîne C sera dite améliorable si et seulement si on peut augmenter le flot de chaque arc positif tout en respectant la contrainte de capacité et si on peut diminuer le flot de tout arc négatif.

Remarque 6.3.1. Un chaîne C est améliorable si et seulement si

- Pour tout arc positif on a $f(a) < c(a)$;
- Pour tout arc négatif on a $f(a) > 0$.

Exercice

Exercice 6.3.1. Donnez pour le réseau et le flot de la figure suivante donner des chaînes améliorables



l'étiquetage des arcs est flot/capacité

Soit C une chaîne améliorable dans un réseau. On définit la quantité Δ_a de la façon suivante

$$\Delta_a = \begin{cases} c(a) - f(a), & \text{si } a \text{ est un arc positif de } C \\ f(a), & \text{si } a \text{ est un arc négatif de } C \end{cases}$$

On notera alors $\Delta_C = \min_{a \in C} \Delta_a$.

Proposition 6.3.2

Soit f un flot dans un réseau, les assertions suivantes sont équivalentes

(i) f est un flot maximum ;

(ii) Il n'existe pas de chaîne améliorable dans le réseau ;

(iii) Il existe une coupe $(X, \bar{X})$ telle que $\omega(f) = c(X; \bar{X})$.

- *(i) ⇒ (ii)*. Soit donc f un flot maximum, montrons par l'absurde qu'il n'existe pas de chaîne améliorante. Supposons donc qu'il existe une chaîne améliorante C de s à p et définissons l'application $f' : E \to \mathbb{R}$ par

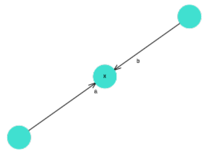
$$f'(a) = \begin{cases} f(a) + \Delta_C, & \text{si } a \text{ est un arc positif de } C \\ f(a) - \Delta_C, & \text{si } a \text{ est un arc négatif de } C \\ f(a), & \text{si } a \text{ n'est pas un arc de } C. \end{cases}$$

Démonstration

14

Alors f' est un flot :

- $f'(a) \geq 0$ et $f'(a) \leq c(a)$ par définition de Δ_C ;
- Loi de Kirchhoff. Soit $x \in V \backslash \{s, p\}$. Si x n'est pas sur C, il n'y a rien à démontrer car les flots des arcs incidents à x ne sont pas modifiés. Soient donc $x \in C, x \neq s$ et $x \neq p$ et a et b les arcs, dans cet ordre, incidents à x sur C. Il s'agit de montrer que $f'(x, V) = 0$. Nous avons 4 cas
  - $t(a) = x = t(b)$, par suite a est un arc positif $f'(a) = f(a) + \Delta_C$, b est un arc négatif $f'(b) = f(b) - \Delta_C$ et donc $f'(x, V) = f(x, V) + \Delta_C - \Delta_C = 0$.

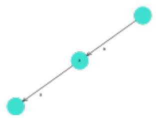


  - $i(a) = x = i(b)$, même chose avec a arc négatif et b arc positif.

Démonstration

15

-
  - $i(a) = x = t(b)$, a et b sont des arcs négatifs.



Par suite $f'(a) = f(a) - \Delta_C$, $f'(b) = f(b) - \Delta_C$ et

$$\sum_{a' \in E, t(a') = x} f'(a') = \sum_{a' \in E \backslash \{a\}, t(a') = x} f(a') + f(a) - \Delta_C.$$

De même on a

$$\sum_{a' \in E, i(a') = x} f'(a') = \sum_{a' \in E \backslash \{b\}, i(a') = x} f(a') + f(b) - \Delta_C.$$

D'où

$$f'(x, V) = \sum_{a' \in E, t(a') = x} f'(a') - \sum_{a' \in E, i(a') = x} f'(a') = f(x, V) = 0.$$

  - $t(a) = x = i(b)$, même chose, a et b sont des arcs positifs

Démonstration

16

- La valeur du flot f' est $\omega(f') = f'(s, V) = f(s, V) + \Delta_C$ car de s part un arc positif de la chaîne C, et donc le flot f n'est pas maximum.

(ii) $\rightarrow$ *(iii)*. Supposons donc qu'il n'existe pas de chaîne améliorable de s à p. Posons

$$X = \{s\} \cup \{x \in V, \text{il existe une chaîne améliorable de } s \text{ à } x\}.$$

Alors $(X, \bar{X})$ est une coupe car par hypothèse $p \notin X$. Mais alors

- Pour tout arc a, $i(a) \in X$ et $t(a) \in \bar{X}$, $f(a) = c(a)$ car sinon, il y aurait une chaîne améliorable de s à $t(a)$ (prendre une chaine améliorable de s à $i(a)$ et ajouter a), ce qui n'est pas possible par définition de $\bar{X}$.
- De même, pour tout arc a de $\bar{X}$ vers X, $f(a) = 0$. Par suite, d'après le corollaire 10 on a
$$\omega(f) = f(X, \bar{X}) = \sum_{i(a) \in X, t(a) \in \bar{X}} f(a) = c(X, \bar{X}).$$

(iii) $\Rightarrow$ *(i)*. D'après le théorème de Ford Fulkerson, on a toujours $\omega(f) \leq c(X, \bar{X})$. Par suite *(iii)* implique que f est maximum et que $(X, \bar{X})$ est une coupe minimum. ■

Corollaire

17

Corollaire 6.3.3

Dans tout réseau, il existe un flot maximum tel que pour tout arc a on ait $f(a) \in \mathbb{N}$.

▶ Soit f_0 le flot initial défini par $f(a) = 0$ pour tout arc $a \in E$. Soit, ce flot est maximum et c'est fini, soit il existe une chaine améliorante C de s à p. La valeur Δ_C est alors entière car la capacité est une fonction à valeur dans $\mathbb{N}$; par suite le flot construit f' est à valeur entière. Soit il est maximum et c'est terminé, soit on réitère le procédé. ■

Théorème 6.3.4 – Ford et Fulkerson 1956

La valeur totale maximum d'un flot dans un réseau est égale à la capacité d'une coupe minimum.

Algorithme de Ford et Fulkerson

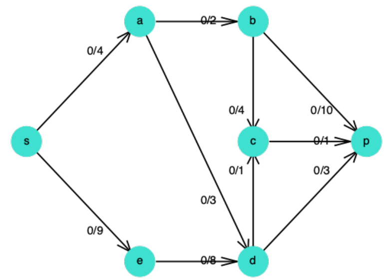
Initialisation
pour $a \in E$ **faire**
$f(a) = 0$
fin pour
$l(s) = (+, \infty)$ {labélisation de s, le signe donne la direction de l'arc de sommet initial s, le nombre donne la valeur d'augmentation du flot}
pour $x \in V$ **faire**
$u(x) =$ **false** {initialisation du marquage}
$\Delta(x) = \infty$
fin pour
Calcul itératif de chaîne améliorables et mise à jour du flot
répéter
{Calcul d'une chaîne améliorable}
Choisir parmi les sommets x tel que $u(x) =$**false** celui qui a été le premier labélisé
{Calcul de $\Delta(y)$ pour un arc positif}
pour $a \in E$ tel que $i(a) = x$ **faire**
$y = t(a)$
si y n'est pas labélisé **and** $f(a) < c(a)$ **alors**
$\Delta(y) = \min\{c(a) - f(a), \Delta(x)\}$ **and** $l(y) = (x, +, \Delta(y))$
fin si
fin pour
{Calcul de $\Delta(y)$ pour un arc négatif}
pour $a \in E$ tel que $t(a) = x$ **faire**
$y = i(a)$
si y n'est pas labélisé **and** $f(a) > 0$ **alors**
$\Delta(y) = \min\{f(a), \Delta(x)\}$ **and** $l(y) = (x, -, \Delta(y))$
fin si
fin pour
$u(x) =$**true**
si On a une chaîne améliorante **alors**
Mettre à jour le flot
Re-initialiser le marquage des sommets et l'étiquetage
fin si
jusqu'à $u(x) =$**true** pour tout sommet qui a été labelisé
$X =$ l'ensemble des sommets labelisés
$\bar{X} = V \setminus X$

Algorithme de Ford et Fulkerson

{Test si on a une chaîne améliorable}
si p est labélisé **alors**
{Calcul de l'écart minimal $\Delta = \min_y \Delta(y)$ sur C et mise à jour du flot}
$\Delta = \Delta(p)$
$y = p$
tant que $y \neq s$ **faire**
$x =$ la première composante du label $l(y)$
si le signe de $l(y)$ est $+$ **alors**
$f(a) = f(a) + \Delta$
sinon
$f(a) = f(a) - \Delta$
fin si
$y = x$
fin tant que
{Re-initialiser le marquage des sommets et l'étiquetage}
pour $x \in V$ **faire**
$l(x) =$ *vide*{Re-initialisation de l'étiquetage}
fin pour
$l(s) = (+, \infty)$ {étiquetage de s}
pour $x \in V$ **faire**
$u(x) =$ **false**
$\Delta(x) = \infty$
fin pour
fin si

Exemple

Exercice 6.3.2. Appliquer l'algorithme sur l'exemple suivant



l'étiquetage des arcs est flot/capacité

Itération 1

On note f_{ij} le flot de l'arc $(i,j) \in E$, le problème du flot maximum peut alors s'écrire

$$(PL)\begin{cases} Max\ v \\ \sum_{k\in S(s)} f_{sk} = v \\ \sum_{k\in S(j)} f_{jk} - \sum_{i\in P(j)} f_{ij} = 0,\ \forall j \neq s,p \\ \sum_{i\in P(p)} f_{ip} = v \\ 0 \leq f_{ij} \leq c_{ij},\ \forall (i,j) \in E \end{cases}$$

Les inconnues sont la valeur du flot v et les f_{ij}.

Exercice 6.4.1. Soit A la matrice d'incidence du graphe. On note

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} (f_{sk})_{k\in S(s)} \\ \vdots \\ f_{ij} \\ \vdots \\ (f_{ip})_{i\in P(p)} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} (c_{sk})_{k\in S(s)} \\ \vdots \\ c_{ij} \\ \vdots \\ (c_{ip})_{i\in P(p)} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m, \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} -v \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ +v \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

Écrire (PL) à l'aide de ces matrices.