

# Problèmes elliptiques et méthode des éléments finis

## Théorie et mise en oeuvre

Pierre CANTIN & Loïc LACOUTURE

## **Avant-Propos**

Ces notes de cours ont été rédigées à destination des étudiants de 4GMM de l'INSA Toulouse. Elles n'ont pas pour vocation à être diffusées à l'extérieur de ce cadre.

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction aux problèmes elliptiques</b>	<b>5</b>
1.1	Problèmes elliptiques en dimension 1 . . . . .	6
1.2	Problèmes elliptiques en dimension supérieure . . . . .	15
<b>2</b>	<b>Les problèmes variationnels coercifs</b>	<b>23</b>
2.1	Formalisme et analyse des problèmes variationnels . . . . .	23
2.2	Analyse du problème de Poisson . . . . .	26
2.3	Analyse du problème de transmission . . . . .	28
2.4	Méthode de Galerkin . . . . .	29
<b>3</b>	<b>Introduction à la méthode des éléments finis</b>	<b>33</b>
3.1	Éléments finis en dimension 1 . . . . .	33
3.2	Éléments finis en dimension 2 . . . . .	44
3.3	Extensions et analyse des éléments finis en dimension 2 . . . . .	54
3.4	Exercices . . . . .	56



# Chapitre 1

## Introduction aux problèmes elliptiques

### Sommaire

---

<b>1.1 Problèmes elliptiques en dimension 1 . . . . .</b>	<b>6</b>
1.1.1 Position du problème . . . . .	6
1.1.2 Introduction à la formulation variationnelle . . . . .	7
1.1.3 Analyse de la formulation variationnelle . . . . .	9
<b>1.2 Problèmes elliptiques en dimension supérieure . . . . .</b>	<b>15</b>
1.2.1 Position du problème . . . . .	15
1.2.2 Formulation variationnelle et analyse . . . . .	17

---

Nous introduisons dans ce chapitre la notion de problème aux limites elliptique. Même en se limitant aux problèmes scalaires dont l'inconnue est une fonction à valeurs scalaires, cette classe de problèmes intervient dans un grand nombre de situations physiques en sciences de l'ingénieur. La résolution exacte de ces problèmes est le plus souvent impossible, et il faut alors se contenter d'une approximation numérique de la solution. La méthode des éléments finis est aujourd'hui l'une des principales méthodes pour approcher la solution des équations aux dérivées partielles qu'un ingénieur est amené à considérer. Cette méthode est basée sur une formulation variationnelle de ces problèmes et sur une méthode de Galerkin particulière. Nous nous concentrerons sur cet aspect dans ce chapitre.

## 1.1 Problèmes elliptiques en dimension 1

### 1.1.1 Position du problème

Dans la forme générale des problèmes aux limites elliptiques, il s'agit de déterminer une fonction inconnue  $u$  sur l'intervalle ouvert  $]0, L[$ , qui est le domaine sur lequel est posé le problème aux limites elliptique, et qui satisfait les conditions suivantes :

1. *une équation aux dérivées partielles*

$$-\partial_x(\alpha(x)\partial_x u)(x) + \alpha_0(x)u(x) = f(x), \quad x \in ]0, L[ \quad (1.1)$$

2. *des conditions aux limites* qui peuvent être

- (a) de Dirichlet en  $\{x = 0\}$ ,

$$u(0) = u_0, \quad (1.2)$$

- (b) de Neumann ( $\lambda = 0$ ) ou de Robin ( $\lambda \neq 0$ ) en  $\{x = L\}$ ,

$$(\alpha\partial_x u)(L) + \lambda u(L) = g_L. \quad (1.3)$$

Dans ce problème il faut être clair sur ce que représentent les données du problèmes

- *le second membre.* Également appelé terme source, il s'agit de la fonction  $f$  à valeurs réelles qui peut être définie partout ou presque partout sur l'intervalle  $]0, L[$ .
- *les coefficients.* Ce sont les deux fonctions  $\alpha$  et  $\alpha_0$ . Les propriétés physiques du système étudié assurent que le coefficient  $\alpha$  vérifie la propriété

$$\exists(\alpha_m, \alpha_M) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \forall x \in ]0, L[, \quad 0 < \alpha_m \leq \alpha(x) \leq \alpha_M. \quad (1.4)$$

Cette propriété définit le caractère elliptique du problème. Cette propriété sera fondamentale aussi bien d'un point de vue théorique que pour les propriétés des schémas d'approximation numérique. Le deuxième coefficient est  $\alpha_0$ . Il est appelé coefficient de réaction et est très souvent pris à 0.

- *la condition de Dirichlet.* Elle correspond physiquement à une condition imposée sur la valeur au bord de la solution. On connaît la solution au point  $\{x = 0\}$ . Sa valeur est donnée et égale ici à  $u_0$ .
- *la condition de Neumann ou Robin.* Elle correspond au cas où on laisse le système physique évoluer librement, mais où l'on connaît sa dérivée au bord. Le paramètre  $\lambda \geq 0$  traduit une réaction de l'extérieur et, plus précisément une absorption de l'énergie par l'extérieur.

De nombreuses situations physiques peuvent être modélisées par ce problème aux limites elliptique. Cette liste montre, que même dans un cadre simple, on peut décrire de cette façon plusieurs situations significatives en ingénierie. Dans les exemples que nous étudierons, la fonction  $\alpha_0$  et la constante  $\lambda$  seront nulles. La variable primaire est l'inconnue  $u$  et la variable secondaire est une quantité qui fixe la donnée de la condition de Neumann ou qu'il est important de calculer par un post-traitement une fois l'inconnue primaire déterminée.

Problème	Variable primaire $u$	Loi de com- portement $\alpha$	Terme source	Variable secondaire $\alpha \partial_x u$
<b>Transfert thermique</b>	Température	Conductivité thermique	Apport calorifique	Flux thermique
<b>Écoulement dans une conduite</b>	Vitesse	Viscosité	Gradient de pression	Contrainte axiale
<b>Electros- tatique</b>	Potentiel électrique	Permittivité électrique	Densité de charges	Flux du champ électrique

Dans la suite, on considérera un coefficient de réaction nul, *i.e.*  $\alpha_0 = 0$ , et des conditions de type Dirichlet homogène au bord :

$$u(0) = u(L) = 0.$$

### 1.1.2 Introduction à la formulation variationnelle

Les formulations variationnelles permettent d'étudier l'existence et l'unicité de la solution du problème elliptique

$$\begin{cases} -\partial_x(\alpha(x)\partial_x u)(x) = f(x), & x \in ]0, L[ \\ u(0) = 0, & u(L) = 0. \end{cases} \quad (1.5)$$

Sous la forme (1.5), on dit que le problème est sous forme classique ou forte. Cette formulation n'est pas la plus avantageuse, notamment parce que l'on cherche des solutions qui sont de classe  $\mathcal{C}^2$  sur l'intervalle  $]0, L[$ . En raison de cette contrainte sur la régularité de la solution, il peut tout simplement ne pas exister de solution à ce problème (dans le cas d'un coefficient  $\alpha$  quelconque ou d'un terme source discontinu).

On va donc chercher, non pas une solution forte (de la formulation forte du problème), mais une solution faible de la formulation faible du problème. La formulation faible d'un problème elliptique s'obtient par l'approche variationnelle.

Considérons une *fonction test*  $v$  que l'on suppose pour le moment suffisamment régulière et telle que  $v(0) = v(L) = 0$ . Multiplions l'équation (1.5) par  $v$  et intégrons sur  $]0, L[$  :

$$-\int_0^L \partial_x(\alpha \partial_x u)(x) v(x) \, dx = \int_0^L f(x) v(x) \, dx.$$

En utilisant la formule d'intégration par parties, on obtient

$$-\int_0^L \partial_x(\alpha \partial_x u)(x) v(x) \, dx = \int_0^L (\alpha \partial_x u)(x) (\partial_x v)(x) \, dx + (\alpha \partial_x u)(L) v(L) - (\alpha \partial_x u)(0) v(0) \quad (1.6)$$

$$= \int_0^L (\alpha \partial_x u)(x) (\partial_x v)(x) \, dx. \quad (1.7)$$

Finalement, l'équation (1.5) devient

$$a(u, v) := \int_0^L (\alpha \partial_x u)(x) (\partial_x v)(x) \, dx = \int_0^L f(x) v(x) \, dx := \langle f, v \rangle_{\mathbb{L}^2(]0, L[)}.$$

Définissons de manière formelle pour commencer l'espace

$$V := \left\{ v \in \mathbb{L}^2(]0, L[) \mid a(v, v) < +\infty \text{ et } v(0) = v(L) = 0 \right\}.$$

Comme nous venons de le voir, si  $u$  est une solution de (1.5), alors  $u$  est aussi solution du problème

$$u \in V \quad \text{telle que} \quad \forall v \in V, \quad a(u, v) = \langle f, v \rangle_{\mathbb{L}^2(]0, L[)}. \quad (1.8)$$

Ce problème est ce que l'on appelle la formulation faible ou variationnelle du problème (1.5). L'adjectif variationnel fait référence au fait que la fonction test  $v$  peut varier arbitrairement dès lors qu'elle appartient à  $V$ . Dans l'espace  $V$ , la forme bilinéaire  $a$  est naturellement bien définie, ainsi que le terme  $\langle f, v \rangle$  si  $f \in \mathbb{L}^2(]0, L[)$  d'après Cauchy-Schwarz :

$$\left| \langle f, v \rangle_{\mathbb{L}^2(]0, L[)} \right| \leq \left( \int_0^L |f(x)|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_0^L |v(x)|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} = \|f\|_{\mathbb{L}^2(]0, L[)} \|v\|_{\mathbb{L}^2(]0, L[)} < +\infty.$$

Avant d'aller plus loin, nous devons aussi nous poser la question de la réciproque, à savoir si  $u$  est solution de (1.8), est-elle aussi solution de (1.5) ?

**Proposition 1.1.1.** *Soit  $u$  la solution satisfaisant (1.8). Supposons  $f \in \mathcal{C}^0([0, L])$  et que  $u \in \mathcal{C}^2([0, L])$ . Alors  $u$  est solution de (1.5)*

*PREUVE.* Soit  $v \in V \cap \mathcal{C}^1([0, L])$ . Par intégration par parties, il vient

$$\langle f, v \rangle_{\mathbb{L}^2(]0, L[)} = a(u, v) = - \int_0^L \partial_x(\alpha \partial_x u)(x) v(x) \, dx.$$



Ainsi,  $(f - (-\partial_x(\alpha\partial_x u)), v) = 0$  pour tout  $v \in V \cap \mathcal{C}^1([0, L])$ . Introduisons la quantité  $w = f + \partial_x(\alpha\partial_x u)$ . Par hypothèse, cette fonction est continue. On veut montrer qu'elle est identiquement nulle sur  $]0, L[$ . Supposons que  $w \not\equiv 0$  sur  $[0, L]$ ; par continuité, il existe alors un intervalle non vide  $[x_0, x_1] \subset [0, L]$  sur lequel  $w$  est de signe constant. Définissons alors la fonction  $v \in V \cap \mathcal{C}^1([0, L])$  par

$$\begin{cases} v(x) = (x - x_0)^2(x - x_1)^2 & \text{si } x \in [x_0, x_1], \\ v(x) = 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Dès lors, on a que  $(w, v) \neq 0$ , ce qui est contradictoire. Ainsi,  $-\partial_x(\alpha\partial_x u) = f$ . cqfd

A ce stade, il est important de noter le déséquilibre entre les formulations forte et faible, notamment en ce qui concerne la régularité du terme source  $f$ . Il est seulement nécessaire de supposer que  $f \in \mathbb{L}^2(]0, L[)$  pour passer de la formulation (1.5) à (1.8), tandis que cette fonction doit être continue pour que l'on puisse passer de la formulation faible à la formulation forte.

L'intérêt des formulations variationnelles dans la suite sera d'élargir les espaces dans lesquels nous travaillons afin d'une part d'obtenir des résultats d'existence et d'unicité de la solution, et d'autre part de permettre des données qui soient issues de la physique, comme par exemple des termes sources discontinus.

### 1.1.3 Analyse de la formulation variationnelle

Le problème variationnel (1.8) est défini par l'intermédiaire de la forme bilinéaire  $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  et du produit scalaire de  $\mathbb{L}^2(]0, L[)$  noté  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Rappelons le résultat suivant, fondamental dans la suite :

**Proposition 1.1.2.** *L'espace  $\mathbb{L}^2(]0, L[)$  muni du produit scalaire défini par*

$$\forall (u, v) \in \mathbb{L}^2(]0, L[)^2, \quad \langle u, v \rangle := \int_0^L u(x)v(x) \, dx,$$

*est un espace de Hilbert, c'est-à-dire qu'il est complet pour la norme induite par ce produit scalaire  $\|v\| = (v, v)^{1/2}$ .*

Ici nous ne travaillons pas exactement dans l'espace  $\mathbb{L}^2(]0, L[)$ , mais dans le sous espace  $V$ . Comme nous allons le voir, il est possible de considérer cet espace comme un espace de Hilbert, muni du produit scalaire défini par la forme  $a$ . Avant cela, il nous faut clarifier un point concernant la dérivation utilisée dans cette forme bilinéaire. En l'occurrence, s'agit-il de la dérivée classique au sens

$$\partial_x u(x) = u'(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{u(x+t) - u(x)}{t},$$

ou bien d'une dérivée plus faible ? En fait, il ne peut s'agir de la dérivée classique car nous souhaitons dériver des fonctions de l'espace  $\mathbb{L}^2$  qui peuvent même ne pas être continues... Nous allons donc introduire la notion de dérivée faible pour une fonction  $\mathbb{L}^2$ . Avant cela, on définit le support d'une fonction correspondant au sous-ensemble de son ensemble de définition portant l'information utile. Pour une fonction  $f$  définie sur  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  un ouvert avec  $n \geq 1$ , le support de  $f$  est définie par

$$\text{supp}(f) = \overline{\{x \in \Omega \mid f(x) \neq 0\}}^\Omega.$$

Rappelons que  $\overline{A}^\Omega$  signifie "fermeture (ou adhérence) de l'ensemble  $A$  dans  $\Omega$ ", c'est à dire l'ensemble des points de  $\Omega$  qui sont limites de points de  $A$ . En l'occurrence, un support peut ne pas être fermé dans  $\mathbb{R}^n$ .

**Exercice 1.1.1.** Soit  $\Omega = ]0, 3[$  et  $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  définies par

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in ]0, 1], \\ 2 - x & \text{si } x \in ]1, 2], \\ 0 & \text{si } x \in ]2, 3[, \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in ]0, 1/2], \\ x - 1/2 & \text{si } x \in ]1/2, 1], \\ 2 - x & \text{si } x \in ]1, 2[, \\ 0 & \text{si } x \in ]2, 3[. \end{cases}$$

Calculer les supports. Sont-ils compacts ?

On introduit maintenant l'ensemble des fonctions tests, noté  $\mathcal{D}$ .

**Définition 1.1.1** (Fonctions tests). On note  $\mathcal{D}(]0, L[)$  l'ensemble des fonctions de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $]0, L[$  et à support compact dans  $]0, L[$ . De manière générale, pour un ouvert  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ , on note  $\mathcal{D}(\Omega)$  l'ensemble des fonctions de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\Omega$  à support compact dans  $\Omega$ .

L'intérêt principal des fonctions tests est donné par le lemme suivant.

**Lemme 1.1.3.** Pour  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  un ouvert, l'ensemble  $\mathcal{D}(\Omega)$  est dense dans  $\mathbb{L}^2(\Omega)$ , c'est-à-dire que  $\overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{\mathbb{L}^2(\Omega)} = \mathbb{L}^2(\Omega)$ , ou bien que pour tout  $f \in \mathbb{L}^2(\Omega)$ , il existe une suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{D}(\Omega)$  telle que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f - f_n\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} = 0.$$

**Exercice 1.1.2.** Montrer que la fonction  $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , définie par

$$\Phi(x) = \begin{cases} e^{-1/(1-x^2)} & \text{si } |x| < 1 \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

appartient à  $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ . On pourra montrer que les dérivées successives, pour  $k \geq 1$ , de la fonction  $f_\pm(x) = e^{-1/(1 \pm x)}$  s'écrivent sous la forme  $f_\pm^{(k)}(x) = P_{2k}\left(\frac{1}{1 \pm x}\right) f_\pm(x)$  avec  $P_{2k} \in \mathbb{R}_{2k}[X]$ .

On définit maintenant la notion de dérivée faible d'une fonction de  $\mathbb{L}^2$ , qui généralise la notion de dérivée usuelle que l'on appelle alors dérivée forte.

**Définition 1.1.2.** Soit  $I = ]0, L[$  un intervalle ouvert et  $v$  une fonction  $\mathbb{L}^2(I)$ . On dit que  $v$  est dérivable au sens faible dans  $\mathbb{L}^2(I)$  s'il existe une fonction  $w \in \mathbb{L}^2(I)$  telle que, pour toute fonction  $\phi \in \mathcal{D}(I)$ , on ait

$$\int_I v \phi' = - \int_I w \phi.$$

La fonction  $w$  est alors appelée dérivée faible de  $v$  et on la note  $\partial_x v$ .

Dans le cas d'une fonction  $v$  dérivable au sens usuel et telle que ses dérivées appartiennent à  $\mathbb{L}^2(I)$ , alors les dérivées usuelles et faibles coïncident. En pratique, on pourra utiliser le lemme suivant qui nous donne un critère simple pour déterminer si une fonction admet une dérivée faible dans  $\mathbb{L}^2$ .

**Lemme 1.1.4.** Soit  $v \in \mathbb{L}^2(I)$ . S'il existe une constante  $C > 0$  telle que, pour tout  $\phi \in \mathcal{D}(I)$ , on a

$$\left| \int_I v \phi' \right| \leq C \|\phi\|_{\mathbb{L}^2(I)},$$

alors  $v$  est dérivable au sens faible.

On introduit maintenant l'espace de Sobolev  $H^1(I)$  avec  $I = ]0, L[$  défini par

$$H^1(I) = \left\{ u \in \mathbb{L}^2(I) \mid u \text{ admet une dérivée faible dans } \mathbb{L}^2(I) \right\}.$$

On munit cet espace de la topologie associée au produit scalaire suivant :

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle_{H^1(I)} : H^1(I) \times H^1(I) &\rightarrow \mathbb{R} \\ (u, v) &\mapsto \int_I uv + \int_I \partial_x u \partial_x v. \end{aligned}$$

La norme induite par ce produit scalaire est notée  $\|\cdot\|_{H^1(I)}$  et vérifie

$$\forall u \in H^1(I), \quad \|u\|_{H^1(I)}^2 = \|u\|_{\mathbb{L}^2(I)}^2 + \|\partial_x u\|_{\mathbb{L}^2(I)}^2.$$

On a alors le résultat suivant.

**Proposition 1.1.5.** L'espace  $H^1(I)$  est un espace de Hilbert.

*PREUVE.* On vérifie facilement que la forme bilinéaire  $(\cdot, \cdot)_{H^1(I)}$  définit un produit scalaire sur  $H^1(I)$ . Il reste donc à montrer que cet espace est complet. Soit  $(u_n)_n$  une suite de Cauchy dans  $H^1(I)$ ,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \geq 0, \forall (n, p) \in \mathbb{N}^2, n \geq N_\varepsilon \Rightarrow \|u_{n+p} - u_n\|_{H^1(I)} \leq \varepsilon.$$

En particulier, les suite  $(u_n)_n$  et  $(\partial_x u_n)_n$  sont de Cauchy dans  $\mathbb{L}^2(I)$  qui est complet, donc il existe  $(u, w) \in \mathbb{L}^2(I)^2$  telles que  $u_n \rightarrow u$  et  $\partial_x u_n \rightarrow w$  dans  $\mathbb{L}^2(I)$ . Par définition de la dérivée faible, on a également

$$\forall \phi \in \mathcal{D}(I), \quad \int_I u_n \partial_x \phi = - \int_I (\partial_x u_n) \phi.$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient

$$\left| \int_I (u_n - u) \partial_x \phi \right| \leq \|u_n - u\|_{\mathbb{L}^2(I)} \|\partial_x \phi\|_{\mathbb{L}^2(I)} \rightarrow 0,$$

c'est-à-dire

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_I u_n \partial_x \phi = \int_I u \partial_x \phi.$$

De la même manière, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_I (\partial_x u_n) \phi = \int_I w \phi.$$

Par identification, on obtient ainsi

$$\forall \phi \in \mathcal{D}(I), \quad \int_I u \partial_x \phi = - \int_I w \phi,$$

ce qui nous permet d'en déduire que  $u$  est dérivable au sens faible et que sa dérivée  $\partial_x u$  est  $w$ . Ainsi,  $u \in H^1(I)$  et la suite de Cauchy  $(u_n)_n$  converge vers  $u$  dans  $H^1(I)$ . cqfd

**Exercice 1.1.3.** Soit  $v$  une fonction définie sur  $I = ]-1, 1[$ .

1. On considère  $v(x) = 0$  si  $x < 0$  et  $v(x) = x$  sinon. Montrer que  $v$  admet une dérivée faible. Est-elle unique ?
2. On considère  $v(x) = -1$  si  $x < 0$  et  $v(x) = x$  sinon. Supposons qu'il existe  $w \in \mathbb{L}^2(I)$  tel que  $\partial_x v = w$ .
  - (a) Montrer que pour tout  $\phi \in \mathcal{D}(I)$ ,  $\int_I w \phi = \phi(0) + \int_0^1 \phi$ .
  - (b) Obtenir une contradiction en considérant la suite  $(\phi_n)_n$  de  $\mathcal{D}(I)$  telle que  $\phi(0) = 1$ ,  $0 \leq \phi_n \leq 1$  et  $\phi_n \rightarrow 0$  p.p. sur  $I$ .

**Exercice 1.1.4.** Soit  $v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $v(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ . Montrer que  $v \in H^1(\mathbb{R})$  et que  $v \notin \mathbb{L}^1(\mathbb{R})$ .

**Exercice 1.1.5.** Soit  $I = ]0, 1[$ . Déterminer  $\alpha$  tel que  $v : x \mapsto x^\alpha$  est dérivable au sens faible dans  $\mathbb{L}^2(I)$ .

Grâce au fait que l'on soit en dimension 1 (et uniquement !), on montre les propriétés suivantes concernant l'espace  $H^1(]0, L[)$ .

**Proposition 1.1.6.** *En dimension 1 (et uniquement en dimension 1), on a*

1. *Toute fonction de  $H^1(]0, L[)$  est continue :  $H^1(]0, L[) \subset \mathcal{C}^0(]0, L[)$*
2. *Pour tout  $(u, v) \in H^1(]0, L[)^2$ ,*

$$\int_0^L (u \partial_x v + v \partial_x u) = u(L)v(L) - u(0)v(0).$$

*En particulier, on en déduit que pour une fonction  $v \in H^1(]0, L[)$*

$$\forall x \in ]0, L[, \quad v(x) = v(0) + \int_0^x \partial_x v(t) dt. \quad (1.9)$$

**Exercice 1.1.6.** L'objectif de cet exercice est de montrer directement la relation (1.9) sans passer par la formule d'intégration par parties. Pour simplifier, on choisira  $L = 1$ . Soit  $v \in H^1(]0, 1[)$ , on introduit la fonction  $w$  définie sur  $[0, 1]$  par

$$w(x) = \int_0^x \partial_x v(t) dt.$$

1. Montrer que  $w$  est continue sur  $[0, 1]$  ; on pourra établir l'inégalité

$$\forall (x, y) \in [0, 1]^2, |w(x) - w(y)| \leq \sqrt{|x - y|} \|\partial_x v\|_{\mathbb{L}^2(]0, 1[)}.$$

2. Soit  $\phi \in \mathcal{D}(0, 1)$  et le triangle  $T = \{(x, s) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq s \leq x \leq 1\}$ . Montrer que

$$\int_0^1 w(x) \phi'(x) dx = \int_T \partial_x v(s) \phi'(x) ds dx.$$

En déduire que

$$\int_0^1 w(x) \phi'(x) dx = - \int_0^1 \partial_x v(x) \phi(x) dx.$$

3. En déduire que  $w$  est dérivable au sens faible dans  $\mathbb{L}^2(]0, 1[)$ .
4. Montrer que  $w' = v'$ , et donc que  $w - v$  est égale à une constante presque partout dans  $]0, 1[$ . Conclure.

L'espace de Sobolev  $H^1$  que nous venons d'introduire va nous permettre de reformuler l'espace  $V$  sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} V &:= \left\{ v \in \mathbb{L}^2(]0, L[) \mid a(v, v) < +\infty \text{ et } v(0) = v(L) = 0 \right\} \\ &= \left\{ v \in H^1(]0, L[) \mid v(0) = v(L) = 0 \right\}. \end{aligned}$$

Ceci est une conséquence de l'inégalité de Cauchy-Schwarz. En effet, soit  $(u, v) \in H^1(]0, L[)^2$ , alors

$$\begin{aligned} |a(u, v)| &\leq \left| \int_I \alpha \partial_x u \partial_x v \right| \\ &\leq \alpha_M \|\partial_x u\|_{\mathbb{L}^2(I)} \|\partial_x v\|_{\mathbb{L}^2(I)} \\ &\leq \alpha_M \|u\|_{H^1(I)} \|v\|_{H^1(I)}. \end{aligned}$$

Dès lors, si  $v \in H^1(]0, L[)$ , alors  $a(v, v) < +\infty$ . Cette dernière estimation correspond à la continuité de la forme bilinéaire  $a : H^1(I) \times H^1(I) \rightarrow \mathbb{R}$ . Comme nous le verrons dans la suite, cette propriété est essentielle pour assurer la bonne position du problème (1.8). La deuxième propriété dont nous aurons besoin est la coercivité et elle est souvent plus difficile à obtenir que la continuité. On dit que  $a$  est coercive sur  $V$  si et seulement si

$$\exists c > 0 : \forall v \in V, \quad a(v, v) \geq c \|v\|_{H^1(I)}^2.$$

Cette identité n'est pas triviale :

$$a(v, v) = \int_I \alpha |\partial_x u|^2 \geq \alpha_m \|\partial_x u\|_{\mathbb{L}^2(I)}^2.$$

Comme on le voit, il nous manque à droite le terme correspondant à  $\|u\|_{\mathbb{L}^2(I)}$  pour obtenir la norme  $\|v\|_{H^1(I)}$ . Le point fondamental pour obtenir la coercivité de cette forme bilinéaire est l'inégalité de Poincaré ou Poincaré-Steklov.

**Lemme 1.1.7** (Inégalité de Poincaré-Steklov). *Il existe une constante  $c_P > 0$  telle que pour tout  $u \in V$ ,*

$$\|\partial_x u\|_{\mathbb{L}^2(I)} \geq c_P \|u\|_{\mathbb{L}^2(I)}.$$

*PREUVE.* Soit  $u \in V$ , on a directement  $u(x) = \int_0^x \partial_x u(t) dt$ . Par application de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on en déduit ainsi

$$|u(x)|^2 \leq L \|\partial_x u\|_{\mathbb{L}^2(]0, L[)}^2.$$

Intégrons maintenant entre 0 et  $L$  pour obtenir

$$\|u\|_{\mathbb{L}^2(]0, L[)}^2 \leq L^2 \|\partial_x u\|_{\mathbb{L}^2(]0, L[)}^2,$$

d'où le résultat avec  $c_P = 1/L$ .

cqfd

La coercivité de la forme bilinéaire  $a$  s'obtient alors plus facilement :  $\forall v \in V$ ,

$$\begin{aligned} a(v, v) &\geq \frac{\alpha_m}{2} \|\partial_x u\|_{\mathbb{L}^2(I)}^2 + \frac{\alpha_m}{2} \|\partial_x u\|_{\mathbb{L}^2(I)}^2 \geq \frac{\alpha_m}{2} \|\partial_x u\|_{\mathbb{L}^2(I)}^2 + \frac{c_P^2 \alpha_m}{2} \|u\|_{\mathbb{L}^2(I)}^2 \\ &\geq \min \left( \frac{\alpha_m}{2}, \frac{c_P^2 \alpha_m}{2} \right) \|u\|_{H^1(I)}^2. \end{aligned}$$

Résumons maintenant les propriétés que nous avons obtenues :

1. la forme bilinéaire  $a$  est continue sur  $H^1(I)$ ,
2. la forme bilinéaire  $a$  est coercive sur  $V$  qui est un espace de Hilbert comme sous-espace fermé de  $H^1(I)$ ,
3. la forme linéaire  $v \mapsto L(v) := \langle f, v \rangle_{\mathbb{L}^2(I)}$  est continue sur  $H^1(I)$  si  $f \in \mathbb{L}^2(I)$ .

Grâce à ces trois propriétés, il est possible d'appliquer le théorème de *Lax-Milgram* que nous verrons dans la suite pour obtenir le résultat suivant.

**Proposition 1.1.8.** *Soit  $f \in \mathbb{L}^2(]0, L[)$ , le problème*

$$u \in H^1(]0, L[) \quad \text{telle que} \quad \forall v \in V, \quad a(u, v) = \langle f, v \rangle_{\mathbb{L}^2(]0, L[)},$$

*admet une unique solution. Cette solution vérifie l'estimation a priori*

$$\min \left( \frac{\alpha_m}{2}, \frac{c_P^2 \alpha_m}{2} \right) \|u\|_{H^1(I)} \leq \|f\|_{\mathbb{L}^2(I)}.$$

**Exercice 1.1.7.** Ecrire la formulation faible du problème

$$\begin{aligned} -u''(x) + u(x) &= f(x) & x \in ]0, 1[ \\ u(0) &= 0 \\ u'(1) + u(1) &= 0. \end{aligned}$$

Montrer que la forme bilinéaire obtenue est continue et coercive sur  $V$  que l'on précisera.

## 1.2 Problèmes elliptiques en dimension supérieure

### 1.2.1 Position du problème

En dimension supérieure, le problème aux conditions limites est maintenant posé sur un ouvert borné  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^n$ ,  $n = 2$  ou  $n = 3$ . La géométrie peut maintenant être extrêmement variée; le domaine  $\Omega$  peut être non-convexe, à frontière courbe, etc.

FIGURE 1.1 – Trois différents domaines  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^2$ .

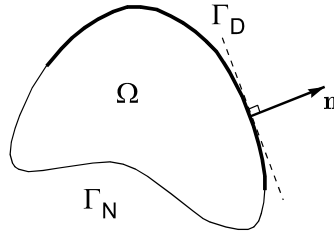
La position générale du problème elliptique étudié précédemment en dimension 1 devient sur le domaine  $\Omega$  :

$$-\sum_{i,j=1\dots n} \partial_{x_i}(\alpha_{ij} \partial_{x_j} u) = f \quad \text{dans } \Omega, \quad (1.10)$$

En ce qui concerne les conditions aux limites, elles sont posées sur la frontière du domaine  $\Omega$ , que l'on note  $\partial\Omega$  ou  $\Gamma$ . Afin de séparer les conditions limites de types Dirichlet et Neumann/Robin, on effectue une partition sans recouvrement de  $\Gamma$  sous la forme  $\Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_N$ , avec  $\Gamma_D$  l'ensemble sur lequel on impose la condition de Dirichlet et  $\Gamma_N$  l'ensemble sur lequel on impose la condition de Neumann/Robin :

$$\begin{aligned} u &= g \quad \text{sur } \Gamma_D \\ \sum_{i,j=1\dots n} \alpha_{ij} \partial_{x_j} u n_i + \lambda u &= h \quad \text{sur } \Gamma_N. \end{aligned}$$

On note  $\mathbf{n} = (n_i)_{i=1\dots n}$  la normale sortante sur la frontière  $\Gamma$  et  $\lambda$  un coefficient défini sur  $\Gamma_N$  tel que  $\lambda \geq 0$ .

FIGURE 1.2 – Partition de  $\Gamma$  et normale sortante sur le domaine  $\Omega$ .



En ce qui concerne maintenant les coefficients de cette EDP, il y en a  $n^2$  :  $\alpha_{i,j}$ , pour  $i, j = 1 \dots n$ . Ces coefficients sont des fonctions qui dépendent de la variable d'espace. Nous les supposons continus, bornés sur  $\Omega$  et vérifiant les conditions suivantes :

$$\exists(\alpha_m, \alpha_M) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega, \quad \forall \mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n,$$

$$\alpha_m \|\mathbf{y}\|^2 \leq \sum_{i,j=1 \dots n} \alpha_{ij}(\mathbf{x}) y_i y_j \leq \alpha_M \|\mathbf{y}\|^2.$$

Cette dernière hypothèse sur les coefficients  $\alpha_{i,j}$  correspond à l'hypothèse d'ellipticité. Enfin, le second membre  $f$  est supposé être dans  $\mathbb{L}^2(\Omega)$ , comme en dimension 1.

Très souvent, on donne une écriture de l'équation (1.10) sous forme matricielle plus condensée. Pour cela on note

- $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = (\alpha_{ij}(\mathbf{x}))_{i,j=1 \dots n}$  la matrice de  $\mathbb{R}^{n \times n}$ ,
- $\nabla u$  le gradient de  $u$  défini par  $\nabla u = (\partial_{x_1} u, \dots, \partial_{x_n} u) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,
- $\nabla \cdot \boldsymbol{\phi} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  la divergence d'un vecteur  $\boldsymbol{\phi} = (\phi_1, \dots, \phi_n) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  défini par

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\phi} = \sum_{i=1 \dots n} \partial_{x_i} \phi_i.$$

Notre problème elliptique se reformule alors

$$\begin{aligned} -\nabla \cdot (\mathbf{A} \nabla u) &= f && \text{dans } \Omega, \\ u &= g && \text{sur } \Gamma_D, \\ \mathbf{A} \nabla u \cdot \mathbf{n} + \lambda u &= h && \text{sur } \Gamma_N. \end{aligned}$$

### 1.2.2 Formulation variationnelle et analyse

La formulation variationnelle de ce problème repose comme dans le cas de la dimension 1 sur l'utilisation d'une formule d'intégration par parties. Avant d'aller plus loin, nous allons étendre les notions introduites précédemment dans le cas de la dimension  $n$ .

#### Intégration et dérivation faible

Soit  $\Omega$  un domaine de  $\mathbb{R}^n$ , c'est-à-dire un ensemble de  $\mathbb{R}^n$  ouvert et borné, on note  $\mathbb{L}^2(\Omega)$  l'ensemble des fonctions mesurables de carré sommable sur  $\Omega$ . Muni du produit scalaire

$$\forall (f, g) \in \mathbb{L}^2(\Omega), \quad \langle f, g \rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)} = \int_{\Omega} f g,$$

cet espace est un espace de Hilbert. On note  $\mathscr{D}(\Omega)$  l'ensemble des fonctions de classe  $\mathcal{C}^\infty$  à support compact dans  $\Omega$ .

**Proposition 1.2.1.** *L'espace  $\mathcal{D}(\Omega)$  est dense dans  $\mathbb{L}^2(\Omega)$ . En conséquence, pour toute fonction  $f \in \mathbb{L}^2(\Omega)$ , si pour toute fonction  $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$  on a*

$$\int_{\Omega} f\phi = 0,$$

*alors  $f = 0$  presque partout dans  $\Omega$ .*

**Définition 1.2.1** (Gradient faible). Soit  $v \in \mathbb{L}^2(\Omega)$ , on dit que  $v$  est différentiable au sens faible dans  $\mathbb{L}^2(\Omega)$  s'il existe des fonctions  $(w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{L}^2(\Omega)^n$  telles que

$$\forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega), \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \int_{\Omega} v \partial_{x_i} \phi = - \int_{\Omega} w_i \phi.$$

Chaque  $w_i$  est appelée la  $i$ -ième dérivée partielle faible de  $v$  et est notée  $\partial_{x_i} v$ . On note  $\nabla v$  le gradient faible de  $v$ , tel que  $\nabla v = (\partial_{x_1} v, \dots, \partial_{x_n} v)$ .

**Lemme 1.2.2.** *Soit  $v \in \mathbb{L}^2(\Omega)$ , s'il existe une constante  $C > 0$  telle que, pour tout  $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$  et  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on ait*

$$\left| \int_{\Omega} v \partial_{x_i} \phi \right| \leq C \|\phi\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)},$$

*alors  $v$  est différentiable au sens faible dans  $\mathbb{L}^2(\Omega)$ .*

Nous sommes maintenant en mesure de définir l'espace de Sobolev

$$H^1(\Omega) = \left\{ v \in \mathbb{L}^2(\Omega) \mid \nabla v \in \mathbb{L}^2(\Omega)^n \right\}.$$

**Proposition 1.2.3.** *Muni du produit scalaire*

$$\forall (u, v) \in H^1(\Omega)^2, \quad \langle u, v \rangle_{H^1(\Omega)} := \int_{\Omega} uv + \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v,$$

*l'espace  $H^1(\Omega)$  est un espace de Hilbert.*

La démonstration de cette Proposition s'effectue comme dans le cas unidimensionnel. La comparaison avec le cas de la dimension 1 s'arrête néanmoins ici. En effet, pour  $n \geq 2$ , les fonctions de  $H^1(\Omega)$  ne sont en général ni continues, ni bornées.

**Exercice 1.2.1.** Soit  $B$  la boule unité de  $\mathbb{R}^2$  et soit  $u(\mathbf{x}) = |\ln(|\mathbf{x}|)|^a$  avec  $|\mathbf{x}| = \sqrt{x^2 + y^2}$  et  $0 < a < 1/2$ .

1. Montrer que  $u \in \mathbb{L}^2(B)$ .
2. Montrer que  $u$  est différentiable au sens classique sur  $B \setminus \{0\}$ .
3. Calculer  $\psi = \nabla u$  et montrer que  $\psi \in \mathbb{L}^2(\Omega)^2$ .

4. Montrer que le gradient classique de  $u$  correspond au gradient faible de  $u$  sur  $B$ .  
On pourra commencer en utilisant la décomposition

$$\int_B u(\mathbf{x}) \nabla \phi(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_{1 > |\mathbf{x}| > \varepsilon} u(\mathbf{x}) \nabla \phi(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + \int_{|\mathbf{x}| < \varepsilon} u(\mathbf{x}) \nabla \phi(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x},$$

avec  $\phi \in \mathcal{D}(B)$  et  $0 < \varepsilon < 1$ , et la relation  $\int_{\omega} \partial_{x_i} \psi = \int_{\partial\omega} n_i \psi$  pour  $\psi \in \mathcal{C}^1(\omega)$  et  $n_i$  la  $i$ -ième composante du vecteur normal  $\mathbf{n}$  à la frontière  $\partial\omega$  de  $\omega$ .

5. Conclure.

**Exercice 1.2.2.** Soit  $B \subset \mathbb{R}^2$  la boule ouverte centrée en 0 et de rayon 1. Soit  $u$  définie  $\forall \mathbf{x} \in B$  par  $u(\mathbf{x}) = \ln(-\ln(\|\mathbf{x}\|_2))$ .

1. Montrer que  $u$  admet des dérivées faibles (on utilisera le théorème de Lebesgue).
2. En déduire que  $u \in H^1(B)$ .

**Définition 1.2.2** (Divergence faible). Soit  $\boldsymbol{\sigma}$  une fonction définie de  $\Omega$  dans  $\mathbb{R}^n$ , telle que toutes ses composantes sont dans  $\mathbb{L}^2(\Omega)$  (on note alors  $\boldsymbol{\sigma} \in \mathbb{L}^2(\Omega)^n$ ). On dit que  $\boldsymbol{\sigma}$  admet une divergence faible dans  $\mathbb{L}^2(\Omega)$  s'il existe une fonction  $w \in \mathbb{L}^2(\Omega)$  telle que pour tout  $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ , on a

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \phi = - \int_{\Omega} w \phi.$$

La fonction  $w$  est appelée divergence faible de  $\boldsymbol{\sigma}$  et on note  $\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = w$ .

**Lemme 1.2.4.** Soit  $\boldsymbol{\sigma} \in \mathbb{L}^2(\Omega)^n$ . S'il existe une constante  $C > 0$  telle que, pour tout  $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ , on ait

$$\left| \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \phi \right| \leq C \|\phi\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)},$$

alors  $\boldsymbol{\sigma}$  admet une divergence faible dans  $\mathbb{L}^2(\Omega)$ .

On peut maintenant obtenir la formule d'intégration par parties qui nous permettra d'obtenir la formulation faible de notre problème.

**Théorème 1.2.5** (Formule de Green). Soit  $\Omega$  un ouvert borné régulier. Si  $u$  et  $v$  sont des fonctions de  $H^1(\Omega)$ , alors on a

$$\int_{\Omega} u \partial_{x_i} v = - \int_{\Omega} v \partial_{x_i} u + \int_{\partial\Omega} u v n_i,$$

avec  $\mathbf{n} = (n_i)_{i=1\dots n}$  la normale unité extérieure à  $\partial\Omega$ .

En pratique, de la formule de Green nous obtenons la formule d'intégration par parties en prenant  $v = v_i$  la  $i$ -ième composante d'une fonction  $\mathbf{v} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  et en sommant

$$\sum_{i=1\dots n} \int_{\Omega} u \partial_{x_i} v_i = - \sum_{i=1\dots n} \int_{\Omega} v_i \partial_{x_i} u + \sum_{i=1\dots n} \int_{\partial\Omega} u v_i n_i.$$

On reconnaît alors les opérateurs  $\nabla \cdot \mathbf{v}$  et  $\nabla u$  :

$$\int_{\Omega} u(\nabla \cdot \mathbf{v}) = - \int_{\Omega} \nabla u \cdot \mathbf{v} + \int_{\partial\Omega} u \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}. \quad (1.11)$$

Dans la formule (1.11), nous faisons intervenir la trace de la fonction  $u$ , c'est-à-dire la restriction de  $u$  à la frontière  $\partial\Omega$ . Très souvent, cet opérateur de restriction est noté  $\gamma_0$  tel que  $\gamma_0(u) := u|_{\partial\Omega}$ . Dans le cas de la dimension  $n \geq 2$ , nous avons vu précédemment que nous n'avons plus l'inclusion  $H^1(\Omega) \subset \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$ . Dès lors, l'existence de la trace d'une fonction de  $H^1(\Omega)$  doit être précisée.

**Théorème 1.2.6.** *L'application linéaire*

$$\begin{aligned} \gamma_0 : H^1(\Omega) &\rightarrow \mathbb{L}^2(\partial\Omega) \\ u &\mapsto \gamma_0(u) := u|_{\partial\Omega}, \end{aligned}$$

*est continue. C'est-à-dire, il existe une constante  $C > 0$ , telle que pour tout  $u \in H^1(\Omega)$ , on a*

$$\|u\|_{\mathbb{L}^2(\partial\Omega)} \leq C \|u\|_{H^1(\Omega)}.$$

Grâce à ce théorème, il est donc possible de parler de la valeur sur le bord de  $\Omega$  d'une fonction de  $H^1(\Omega)$ . Ce résultat est remarquable, car cela n'est pas possible pour une fonction appartenant à  $\mathbb{L}^2(\Omega)$ .

### Formulation variationnelle du problème de Poisson

Revenons au problème de Poisson posé sur le domaine  $\Omega$  avec  $\alpha_0 = 0$  et  $g = 0$  :

$$-\nabla \cdot (\mathbf{A} \nabla u) = f \quad \text{dans } \Omega, \quad (1.12a)$$

$$u = 0 \quad \text{sur } \Gamma_D, \quad (1.12b)$$

$$\mathbf{A} \nabla u \cdot \mathbf{n} + \lambda u = h \quad \text{sur } \Gamma_N. \quad (1.12c)$$

Comme en dimension 1, considérons l'ensemble de fonctions  $V := \{v \in H^1(\Omega) \mid v|_{\Gamma_D} = 0\}$ , et  $\forall v \in V$ , intégrons (1.12a) :

$$- \int_{\Omega} \nabla \cdot (\mathbf{A} \nabla u) v = \int_{\Omega} f v.$$

On utilise maintenant la formule d'intégration par parties (1.11) pour obtenir

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} \nabla \cdot (\mathbf{A} \nabla u) v &= \int_{\Omega} \mathbf{A} \nabla u \cdot \nabla v - \int_{\partial\Omega} (\mathbf{A} \nabla u) \cdot \mathbf{n} v \\ &= \int_{\Omega} \mathbf{A} \nabla u \cdot \nabla v - \int_{\Gamma_N} (h - \lambda u) v. \end{aligned}$$

On introduit alors la forme linéaire  $L : V \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$\forall v \in V, \quad L(v) = \int_{\Omega} f v + \int_{\Gamma_N} h v$$

ainsi que la forme bilinéaire  $a : H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$\forall (u, v) \in V^2, \quad a(u, v) = \int_{\Omega} \mathbf{A} \nabla u \cdot \nabla v + \int_{\Gamma_N} \lambda u v. \quad (1.13)$$

Notre problème (1.12) peut alors se réécrire sous la forme variationnelle

$$u \in V \quad \text{telle que} \quad \forall v \in V, \quad a(u, v) = L(v). \quad (1.14)$$

Nous verrons dans la suite que ce problème admet une unique solution et que cette unique solution correspond presque partout à la solution forte du problème (1.12).

**Théorème 1.2.7.** *Soit  $u \in V$  l'unique solution de (1.13). Alors  $u$  est solution de (1.12) presque partout.*

*PREUVE.* L'idée est de remonter du problème (1.13) au problème (1.12) en utilisant avec précaution les formules d'intégrations par parties. Dans le problème (1.13), la fonction test  $v$  est dans  $V$ . Or, on a  $\mathcal{D}(\Omega) \subset V$ . Prenons donc  $v = \phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ ,

$$a(u, \phi) = \int_{\Omega} \mathbf{A} \nabla u \cdot \nabla \phi = \int_{\Omega} f \phi.$$

Par Cauchy-Schwarz sur le second membre, nous obtenons alors

$$\left| \int_{\Omega} \mathbf{A} \nabla u \cdot \nabla \phi \right| \leq \|f\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \|\phi\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}.$$

Grâce au Lemme 1.2.4, on reconnaît alors la propriété de l'existence d'une divergence faible appliquée à  $\mathbf{A} \nabla u$ . Dès lors,  $\nabla \cdot (\mathbf{A} \nabla u) \in \mathbb{L}^2(\Omega)$  et on a

$$\forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad \int_{\Omega} \mathbf{A} \nabla u \cdot \nabla \phi = - \int_{\Omega} \nabla \cdot (\mathbf{A} \nabla u) \phi.$$

Ainsi, en recollectant les égalités, il vient

$$\forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad \int_{\Omega} (\nabla \cdot (\mathbf{A} \nabla u) + f) \phi = 0.$$

D'après la Proposition 1.2.1, on en déduit que  $-\nabla \cdot (\mathbf{A} \nabla u) = f$  presque partout sur  $\Omega$ . Il convient maintenant de vérifier les conditions aux limites. Comme  $u \in V$ , alors  $u = 0$  sur  $\Gamma_D$ . Pour retrouver la condition limite sur  $\Gamma_N$ , on réintègre  $-\nabla \cdot (\mathbf{A} \nabla u) = f$  par rapport à une fonction test  $v \in V$  :

$$- \int_{\Omega} \nabla \cdot (\mathbf{A} \nabla u) v = \int_{\Omega} \mathbf{A} \nabla u \cdot \nabla v - \int_{\Gamma_N} (\mathbf{A} \nabla u) \cdot \mathbf{n} v.$$

Puis en utilisant le fait que  $a(u, v) = L(v)$ , on obtient

$$\int_{\Omega} f v = \int_{\Omega} f v + \int_{\Gamma_N} h v - \int_{\Gamma_N} \lambda u v - \int_{\Gamma_N} (\mathbf{A} \nabla u) \cdot \mathbf{n} v.$$

Ainsi

$$\forall v \in V, \quad \int_{\Gamma_N} (h - \lambda u - (\mathbf{A} \nabla u) \cdot \mathbf{n}) v = 0.$$

et donc  $(\mathbf{A} \nabla u) \cdot \mathbf{n} + \lambda u = h$  presque partout sur  $\Gamma_N$ .

cqfd

# Chapitre 2

## Les problèmes variationnels coercifs

### Sommaire

2.1	Formalisme et analyse des problèmes variationnels . . . . .	23
2.2	Analyse du problème de Poisson . . . . .	26
2.3	Analyse du problème de transmission . . . . .	28
2.4	Méthode de Galerkin . . . . .	29

Dans ce chapitre nous abordons le cadre général permettant de montrer qu'un problème elliptique sous forme variationnelle  $a(u, v) = L(v)$  pour tout  $v$  admet une unique solution. Ce résultat nous est fourni par le théorème de Lax-Milgram. En plus de pouvoir utiliser ce théorème, les formulations variationnelles nous permettent également d'approcher la solution grâce à la méthode des éléments finis qui sera étudiée dans le chapitre 3. Elle est basée sur la méthode de Galerkin que nous présentons ici.

### 2.1 Formalisme et analyse des problèmes variationnels

Considérons un problème général pouvant se mettre sous la forme variationnelle

$$u \in V \quad \text{telle que} \quad \forall v \in V, \quad a(u, v) = L(v). \quad (2.1)$$

Le théorème de Lax-Milgram apporte une réponse à l'existence, l'unicité et la stabilité de la solution de ce problème dans un cadre bien précis.

**Théorème 2.1.1** (Lax-Milgram). *On suppose que  $V$  est un espace de Hilbert, et que les formes  $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  et  $L : V \rightarrow \mathbb{R}$  vérifient les hypothèses suivantes :*

1. *continuité de  $L$ ,  $\exists C_L \in \mathbb{R}_+ : \forall v \in V, |L(v)| \leq C_L \|v\|_V$ ,*
2. *continuité de  $a$ ,  $\exists M \in \mathbb{R}_+ : \forall (u, v) \in V^2, |a(u, v)| \leq M \|u\|_V \|v\|_V$ ,*

3. *coercivité de  $a$ ,  $\exists \gamma \in \mathbb{R}_+ : \forall v \in V, a(v, v) \geq \gamma \|v\|_V^2$ .*

*Alors il existe une unique solution au problème (2.1). Cette solution vérifie l'estimation a priori*

$$\|u\|_V \leq \frac{C_L}{\gamma}. \quad (2.2)$$

*De plus, si  $a$  est symétrique, alors  $u$  est l'unique élément de  $V$  qui minimise la fonctionnelle  $J(v) = \frac{1}{2}a(u, v) - L(v)$  sur  $V$ , c'est-à-dire  $J(u) = \min_{v \in V} J(v)$ .*

Sous réserve d'existence et d'unicité de  $u$ , l'estimation (2.2) est la conséquence immédiate de la coercivité de  $a$  et de la continuité de  $L$  :

$$\gamma \|u\|_V^2 \leq a(u, u) = L(u) \leq C_L \|u\|_V.$$

De plus, si  $a$  est symétrique, alors  $\forall w \in V$ , par bilinéarité de  $a$  et linéarité de  $L$ ,

$$\begin{aligned} J(u+w) &= \frac{1}{2}a(u+w, u+w) - L(u+w) \\ &= J(u) + a(u, w) - L(w) + \frac{1}{2}a(w, w) \\ &\geq J(u) + \frac{\gamma}{2}\|w\|_V^2 \geq J(u). \end{aligned}$$

Donc  $u$  minimise bien la fonctionnelle  $J$  sur  $V$ .

Enfin, il est possible de démontrer l'existence et l'unicité de la solution  $u$  de plusieurs manières, et nous présentons deux démonstrations dans la suite. Avant cela, il convient de rappeler le théorème de représentation de Riesz.

**Théorème 2.1.2** (de représentation de Riesz). *Soit  $V$  un espace de Hilbert réel. Pour toute forme linéaire continue  $L \in \mathcal{L}(V, \mathbb{R})$ , il existe un unique représentant  $f \in V$  tel que*

$$\forall v \in V, \quad L(v) = \langle f, v \rangle_V.$$

*Par ailleurs on a  $\|f\|_V = \|L\|_{\mathcal{L}(V, \mathbb{R})}$ . L'espace  $\mathcal{L}(V, \mathbb{R})$  est aussi appelé le dual de  $V$ .*

Dans le cadre de notre problème (2.1), on introduit ainsi  $f \in V$  ainsi que  $A(u) \in V$  tels que

$$\forall v \in V, \quad L(v) = \langle f, v \rangle_V \text{ et } a(u, v) = \langle A(u), v \rangle_V.$$

L'opérateur  $A : V \rightarrow V$  qui représente la forme bilinéaire  $a$  vérifie les mêmes propriétés, à savoir la linéarité, la continuité et la coercivité :

- linéarité de  $A$ ,  $\forall (u_1, u_2, \lambda) \in V^2 \times \mathbb{R}, A(u_1 + \lambda u_2) = A(u_1) + \lambda A(u_2)$ ,
- continuité de  $A$ ,  $\forall u \in V, \|A(u)\|_V \leq M \|u\|_V$ ,
- coercivité de  $A$ ,  $\forall u \in V, \langle A(u), u \rangle_V \geq \gamma \|u\|_V^2$ .



Le problème (2.1), se réécrit alors de manière équivalente sous la forme forte

$$u \in V \quad \text{telle que} \quad A(u) = f \quad \text{dans } V. \quad (2.3)$$

*PREUVE 1 DU THÉORÈME 2.1.1.* Afin de montrer que le problème (2.3) admet une unique solution  $u \in V$ , il suffit de montrer que  $A$  est bijectif sur  $V$ . Par coercivité, on a

$$\forall u \in V, \quad \gamma \|u\|_V^2 \leq \langle A(u), u \rangle_V \leq \|A(u)\|_V \|u\|_V.$$

En d'autres termes,  $\forall u \in V$ ,  $\|A(u)\|_V \geq \gamma \|u\|_V$ , et donc  $A$  est injectif. Pour montrer que  $A$  est surjectif, il faut montrer que  $\text{Im}(A) = V$ . Pour cela, on va montrer que  $\text{Im}(A)$  est fermé dans  $V$  et que son orthogonal est réduit à l'élément nul, *i.e.*  $\text{Im}(A)^\perp = \{0\}$ . Soit  $(w_n)_n$  une suite d'éléments de  $\text{Im}(A)$  qui converge vers  $w$ . Il existe  $(u_n)_n$  une suite d'éléments de  $V$  telle que  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $w_n = A(u_n)$ . Par linéarité et coercivité de  $A$ , on a

$$\forall (n, p) \in \mathbb{N}^2, \quad \gamma \|u_{n+p} - u_n\|_V \leq \|A(u_{n+p}) - A(u_n)\|_V = \|w_{n+p} - w_n\|_V.$$

La suite  $(w_n)_n$  converge dans  $V$ , donc elle y est de Cauchy. Ainsi, la suite  $(u_n)_n$  est aussi de Cauchy dans  $V$ , espace de Hilbert, donc  $(u_n)_n$  converge dans  $V$ . On note  $u$  sa limite, par continuité de l'opérateur  $A$ , on a  $A(u) = w$ . D'où  $\text{Im}(A)$  est fermé dans  $V$ . Par ailleurs, si  $v \in \text{Im}(A)^\perp$ , on a

$$0 \leq \gamma \|v\|_V^2 \leq \langle A(v), v \rangle_V = 0,$$

et donc  $v = 0$ . Ainsi, on vient de montrer que  $\text{Im}(A)^\perp = \{0\}$  et  $\text{Im}(A)$  fermé dans  $V$ , c'est-à-dire

$$V = \{0\}^\perp = (\text{Im}(A)^\perp)^\perp = \overline{\text{Im}(A)} = \text{Im}(A).$$

cqfd

*PREUVE 2 DU THÉORÈME 2.1.1.* La preuve utilise le théorème du point fixe de Picard. Soit  $\kappa > 0$ , on considère l'opérateur  $T_\kappa : V \rightarrow V$ , défini par

$$\forall v \in V, \quad T_\kappa(v) = v - \kappa (A(v) - f).$$

L'espace  $V$  étant de Hilbert, il suffit de vérifier que cet opérateur est contractant sur  $V$ . Soit  $(u, v) \in V^2$ ,

$$T_\kappa(u) - T_\kappa(v) = u - v - \kappa (A(u) - A(v))$$

En développant le produit scalaire, il vient alors

$$\|T_\kappa(u) - T_\kappa(v)\|_V^2 = \|u - v\|_V^2 + \kappa^2 \|A(u) - A(v)\|_V^2 - 2\kappa \langle A(u) - A(v), u - v \rangle_V.$$

Par linéarité et coercivité de  $A$ , on a  $\langle A(u) - A(v), u - v \rangle_V \geq \gamma \|u - v\|_V^2$ , d'où

$$\|T_\kappa(u) - T_\kappa(v)\|_V^2 \leq (1 + \kappa^2 M^2 - 2\kappa\gamma) \|u - v\|_V^2.$$

Ainsi, en choisissant  $0 < \kappa < 2\gamma/M^2$ , l'opérateur  $T_\kappa$  est contractant sur  $V$ , et donc admet un unique point fixe  $u \in V$  :

$$T_\kappa(u) = u = u - \kappa (A(u) - f),$$

ce qui termine la preuve.

cqfd

## 2.2 Analyse du problème de Poisson

**Problème de Poisson avec condition de Dirichlet.** Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  et  $f \in L^2(\Omega)$ , on cherche  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  telle que

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f && \text{dans } \Omega, \\ u &= 0 && \text{sur } \Gamma. \end{aligned}$$

Considérons une fonction test  $v \in H^1(\Omega)$ , d'après la formule de Green, Théorème 1.2.5, on obtient

$$-\int_{\Omega} (\Delta u)v = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v - \int_{\Gamma} (\nabla u \cdot \mathbf{n})v = \int_{\Omega} f v.$$

Afin de préciser que la solution  $u$  est nulle sur le bord  $\Gamma$ , on introduit l'espace

$$H_0^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) \mid v|_{\Gamma} = 0\}.$$

Rappelons que d'après le Théorème 1.2.6, il est possible de considérer la trace d'une fonction  $H^1(\Omega)$  et que l'opérateur trace  $\gamma_0$  est continu sur  $H^1(\Omega)$ . L'espace  $H_0^1(\Omega) = \gamma_0^{-1}(\{0\})$  est donc un sous-espace fermé de  $H^1(\Omega)$ . Dès lors, l'espace  $H_0^1(\Omega)$  est un espace de Hilbert muni du produit scalaire induit  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H^1(\Omega)}$ . L'inégalité de Poincaré Steklov (Lemme 1.1.7) est toujours vraie en dimension supérieure.

**Lemme 2.2.1** (Inégalité de Poincaré Steklov). *Il existe une constante  $c_P > 0$  telle que, pour tout  $v \in H_0^1(\Omega)$ ,*

$$\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} \geq c_P \|v\|_{L^2(\Omega)}.$$

Il existe de nombreuses preuves de cette inégalité. La preuve la plus constructive est celle qui repose sur un le résultat suivant, appelé théorème de compacité de Rellich-Kondrachov : de toute suite bornée de  $H^1(\Omega)$ , on peut en extraire une sous suite convergente dans  $L^2(\Omega)$ .

*PREUVE.* Par l'absurde, supposons que pour tout  $c > 0$ , il existe  $v \in H_0^1(\Omega)$  telle que  $\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} < c\|v\|_{L^2(\Omega)}$ . Choisissons en particulier  $c = 1/n$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$  et notons  $v_n$  la fonction de  $H_0^1(\Omega)$  vérifiant

$$\|\nabla v_n\|_{L^2(\Omega)} < \frac{1}{n} \|v_n\|_{L^2(\Omega)}.$$

Posons  $w_n = v_n / \|v_n\|_{L^2(\Omega)}$  vérifiant donc  $\|\nabla w_n\|_{L^2(\Omega)} < 1/n$ . La suite  $w_n$  est bornée dans  $H^1(\Omega)$  et vérifie  $\|\nabla w_n\|_{L^2(\Omega)} \rightarrow 0$ . D'après le théorème de Rellich-Kondrachov, il existe une sous-suite, toujours notée  $w_n$  qui converge dans  $L^2(\Omega)$ , c'est à dire il existe  $w \in L^2(\Omega)$  telle que  $\|w_n - w\|_{L^2(\Omega)} \rightarrow 0$ . Ainsi, la sous-suite  $w_n$  converge dans  $H^1(\Omega)$ , donc est de Cauchy dans  $H^1(\Omega)$  qui lui même est complet. Il existe donc  $w \in H^1(\Omega)$  telle que

$$\|w_n - w\|_{L^2(\Omega)} \rightarrow 0, \quad \|\nabla w_n - \nabla w\|_{L^2(\Omega)} \rightarrow 0.$$

Or nous avons

$$\|\nabla w\|_{L^2(\Omega)} \leq \|\nabla w_n - \nabla w\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla w_n\|_{L^2(\Omega)} \rightarrow 0,$$

et donc  $\nabla w = 0$  p.p sur  $\Omega$ . Comme  $\Omega$  est connexe, alors  $w$  est constant p.p sur  $\Omega$ . Finalement, comme  $w \in H_0^1(\Omega)$  (cet espace est fermé), cette constante est nulle et  $w = 0$  p.p. sur  $\Omega$  ce qui contredit le fait que  $\|w\|_{L^2(\Omega)} = 1$ . cqfd

D'après l'inégalité de Poincaré, il est donc possible de considérer sur l'espace  $H_0^1(\Omega)$  la norme  $\|v\|_{H_0^1(\Omega)} := \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}$ . En effet, sur  $H_0^1(\Omega)$ , les normes  $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$  et  $\|\cdot\|_{H_0^1(\Omega)}$  sont équivalentes :

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \quad \|v\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \|v\|_{H^1(\Omega)} \leq \sqrt{1 + c_P^{-2}} \|v\|_{H_0^1(\Omega)}.$$

L'espace  $(H_0^1(\Omega), \|\cdot\|_{H_0^1(\Omega)})$  est donc complet. La formulation variationnelle du problème de Poisson est alors

$$u \in H_0^1(\Omega) \quad \text{telle que} \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \quad \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v = \int_{\Omega} f v, \quad (2.4)$$

que l'on note  $a(u, v) = L(v)$ , où  $a(u, v) = \langle u, v \rangle_{H_0^1(\Omega)}$  et  $L(v) = \langle f, v \rangle_{L^2(\Omega)}$ .

**Proposition 2.2.2.** *Le problème (2.4) admet une unique solution  $u \in H_0^1(\Omega)$ . Cette solution vérifie*

$$c_P \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

*PREUVE.* Exercice. cqfd

Regardons maintenant le cas où la fonction  $u$  n'est pas nulle sur le bord  $\Gamma$ , c'est-à-dire avec une condition de Dirichlet non-homogène :

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f && \text{dans } \Omega, \\ u &= g && \text{sur } \Gamma. \end{aligned}$$

Il est possible de se ramener au cas précédent si l'on suppose qu'il existe  $u_g \in H^1(\Omega)$  telle que  $\gamma_0(u_g) = g$ . La fonction  $u_g$  est ce que l'on appelle un relèvement de  $g$ . Dans ce cas, si l'on considère la fonction  $w = u - u_g$ , on obtient alors

$$\begin{aligned} -\Delta w &= f + \Delta u_g && \text{dans } \Omega, \\ w &= 0 && \text{sur } \Gamma. \end{aligned}$$

Ce problème est bien posé dans  $H_0^1(\Omega)$ .

**Problème de Poisson avec condition de Neumann.** Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  et  $f \in L^2(\Omega)$ , on cherche  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  telle que

$$\begin{aligned} -\Delta u + u &= f && \text{dans } \Omega, \\ \nabla u \cdot \mathbf{n} &= 0 && \text{sur } \Gamma. \end{aligned}$$

Pour obtenir la formulation faible du problème, on teste ce problème avec  $v \in H^1(\Omega)$  et on intègre par parties :

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v - \int_{\Gamma} (\nabla u \cdot \mathbf{n})v + \int_{\Omega} u v = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v + \int_{\Omega} u v = \int_{\Omega} f v.$$

Ce problème s'écrit donc

$$u \in H^1(\Omega) \quad \text{telle que} \quad \forall v \in H^1(\Omega), \quad \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v + \int_{\Omega} u v = \int_{\Omega} f v, \quad (2.5)$$

et on note  $a(u, v) = \langle u, v \rangle_{H^1(\Omega)}$  et  $L(v) = \langle f, v \rangle_{L^2(\Omega)}$ .

**Proposition 2.2.3.** *Le problème (2.5) admet une unique solution  $u \in H^1(\Omega)$  telle que  $\nabla u \cdot \mathbf{n} = 0$  sur  $\Gamma$ . Cette solution vérifie*

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

*PREUVE.* Exercice.

cqfd

## 2.3 Analyse du problème de transmission

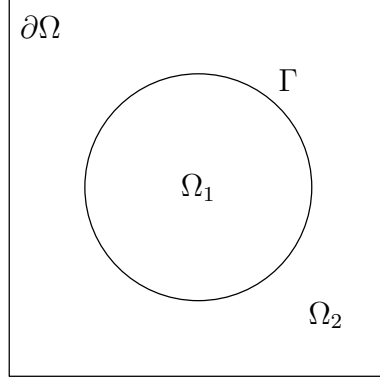
Considérons le problème suivant : trouver  $u \in \mathbb{L}^2(\Omega)$  tel que  $\nabla u \in \mathbb{L}^2(\Omega)$  et

$$\begin{aligned} -\nabla \cdot (D \nabla u) &= f && \text{dans } \Omega, \\ u &= 0 && \text{sur } \partial\Omega. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Le domaine  $\Omega$  représente ici un ouvert borné et connexe de  $\mathbb{R}^2$ , dont la frontière  $\partial\Omega$  est suffisamment régulière. La quantité  $D$  représente le coefficient de diffusion, il peut dépendre de la position et est supposé borné. Enfin le terme source vérifie  $f \in \mathbb{L}^2(\Omega)$ .

1. Analyse de la formulation variationnelle.

- (a) Préciser l'espace dans lequel la solution doit être cherchée.
- (b) Ecrire la formulation variationnelle notée  $(FV)$  dans la suite.
- (c) Montrer que la solution de  $(FV)$  est aussi la solution de (2.6).

FIGURE 2.1 – Domaine  $\Omega$  constitué de  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$ .

2. Considérons la situation où le domaine  $\Omega$  est constitué de deux domaines  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  comme représenté sur la Figure 2.1. On note  $\Gamma = \overline{\Omega_1} \cap \overline{\Omega_2}$  et  $\partial\Omega = \partial\Omega_2 \setminus \Gamma$ . Considérons un coefficient de diffusion  $D$  qui soit constant et strictement positif par morceaux dans chacun de ces sous-domaines :  $D|_{\Omega_1} = D_1$  et  $D|_{\Omega_2} = D_2$ . On note  $u_1$  la solution sur  $\Omega_1$  et  $u_2$  la solution sur  $\Omega_2$ .
  - (a) Montrer que  $(FV)$  est bien posée.
  - (b) Préciser la relation qui doit être vérifiée à l'interface  $\Gamma$ . Cette condition est appelée condition de transmission.

## 2.4 Méthode de Galerkin

L'ensemble des problèmes elliptiques que nous avons considérés précédemment s'inscrivent dans le cadre hilbertien abstrait suivant :

$$\text{trouver } u \in V \text{ telle que } \forall v \in V, \quad a(u, v) = L(v), \quad (2.7)$$

avec  $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  bilinéaire et  $L : V \rightarrow \mathbb{R}$  linéaire vérifiant les hypothèses suivantes

1.  $\exists C_L \in \mathbb{R}_+^* : \forall v \in V, |L(v)| \leq C_L \|v\|_V$  ( $L$  continue),
2.  $\exists M \in \mathbb{R}_+^* : \forall (u, v) \in V^2, |a(u, v)| \leq M \|u\|_V \|v\|_V$  ( $a$  continue),
3.  $\exists \gamma \in \mathbb{R}_+^* : \forall v \in V, a(v, v) \geq \gamma \|v\|_V^2$  ( $a$  coercive).

D'après le théorème de Lax-Milgram, ce problème est bien posé et l'on cherche par la méthode des éléments finis à obtenir une approximation de cette solution  $u \in V$ . Pour cela, nous considérons un espace vectoriel de dimension finie  $V_h$  qui approche l'espace  $V$ . Le problème discret s'écrit alors

$$\text{trouver } u_h \in V_h \text{ telle que } \forall v_h \in V_h, \quad a(u_h, v_h) = L(v_h). \quad (2.8)$$

Avant toute chose, il convient de s'assurer que ce problème est bien posé. Pour cela nous allons appliquer le théorème de Lax-Milgram.

**Proposition 2.4.1.** *Supposons que  $V_h \subset V$ . Alors le problème (2.8) est bien posé.*

*PREUVE.* Exercice

cqfd

Considérons  $(\varphi_1, \dots, \varphi_N)$  une base de  $V_h$  et décomposons la solution discrète  $u_h$  de ce problème sur cette base :

$$u_h = \sum_{j=1}^N U_j \varphi_j.$$

En remplaçant cette expression dans (2.8) et en choisissant successivement  $v_h = \varphi_i$  pour tout  $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$ , nous obtenons

$$\sum_{j=1}^N U_j a(\varphi_j, \varphi_i) = L(\varphi_i).$$

En introduisant maintenant la matrice  $\mathcal{A} \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$  et le vecteur  $\mathcal{F} \in \mathbb{R}^N$  définis par

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, N \rrbracket^2, \quad \mathcal{A}_{i,j} = a(\varphi_j, \varphi_i) \quad \text{et} \quad \mathcal{F}_j = L(\varphi_j).$$

Le problème (2.8) se ramène au système linéaire

$$\mathcal{A}U = \mathcal{F}, \quad \text{avec} \quad U = (U_j)_{1 \leq j \leq N}. \quad (2.9)$$

**Proposition 2.4.2.** *Propriétés de la matrice  $\mathcal{A} \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ ,*

1. *si la forme bilinéaire  $a$  est symétrique, alors  $\mathcal{A}$  est symétrique,*
2. *si la forme bilinéaire  $a$  est coercive, alors  $\mathcal{A}$  est inversible,*
3. *si la forme bilinéaire  $a$  est symétrique et coercive, alors  $\mathcal{A}$  est symétrique définie positive.*

*PREUVE.* Par définition de  $\mathcal{A}$ ,  $\forall (i, j) \in \llbracket 1, N \rrbracket^2$ ,  $\mathcal{A}_{i,j} = a(\varphi_j, \varphi_i)$ .

1.  $\forall (i, j) \in \llbracket 1, N \rrbracket^2$ ,  $\mathcal{A}_{i,j} = a(\varphi_j, \varphi_i) = a(\varphi_i, \varphi_j) = \mathcal{A}_{j,i}$ . Donc  $\mathcal{A}$  est symétrique.
2. Soit  $U = (U_1, \dots, U_N) \in \mathbb{R}^N$  tel que  $\mathcal{A}U = 0$ . Alors

$$0 = \langle \mathcal{A}U, U \rangle_{\mathbb{R}^N} = a(u, u) \geq \gamma \|u\|_V^2,$$

où  $u = \sum_{j=1}^n U_j \varphi_j$  dans  $V$ . Donc  $u = 0$  dans  $V$ , et donc  $U = 0_{\mathbb{R}^N}$ . Ainsi,  $\mathcal{A}$  est inversible.

3. Soit  $U = (U_1, \dots, U_N) \in \mathbb{R}^N$  et  $u = \sum_{j=1}^n U_j \varphi_j$  dans  $V$ , en reprenant le calcul précédent et par équivalence des normes sur  $V_h$  (dimension finie),  $\exists C \in \mathbb{R}_+^*$  :

$$\langle \mathcal{A}U, U \rangle_{\mathbb{R}^N} = a(u, u) \geq \gamma \|u\|_V^2 \geq C \|U\|_{\mathbb{R}^N}^2,$$

donc la matrice  $\mathcal{A}$  est définie positive.

cqfd

Posons nous la question maintenant de savoir si la fonction discrète  $u_h$  est une “bonne approximation” de la fonction  $u$ , c’est-à-dire si  $\|u - u_h\|_V \rightarrow 0$  dès lors que  $h \rightarrow 0$ . Pour cela, nous allons utiliser le Lemme de Céa.

**Lemme 2.4.3** (Céa). *Soit  $u \in V$  la solution de (2.7) et  $u_h \in V_h$  la solution de (2.8). Alors on a*

$$\|u - u_h\|_V \leq \frac{M}{\gamma} \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_V. \quad (2.10)$$

*PREUVE.* Tout d’abord, pour tout  $w_h \in V_h \subset V$ ,

$$a(u - u_h, w_h) = a(u, w_h) - a(u_h, w_h) = L(w_h) - L(w_h) = 0.$$

Donc pour tout  $v_h \in V_h$ , en posant  $w_h = u_h - v_h$ ,

$$a(u - u_h, u - u_h) = a(u - u_h, u - v_h).$$

Ainsi, pour tout  $v_h \in V_h$ , en utilisant la coercivité et la continuité de  $a$ , nous obtenons

$$\gamma \|u - u_h\|_V^2 \leq a(u - u_h, u - u_h) = a(u - u_h, u - v_h) \leq M \|u - v_h\|_V \|u - u_h\|_V,$$

et donc

$$\forall v_h \in V_h, \quad \|u - u_h\|_V \leq \frac{M}{\gamma} \|u - v_h\|_V.$$

On obtient le résultat en prenant la borne inférieure du membre de droite.

cqfd

*Remarque.* Le terme  $\inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_V$  représente la meilleure approximation de  $u$  par un élément de  $V_h$ , c’est-à-dire la distance entre  $u$  et l’espace discret  $V_h$ , c’est-à-dire encore que  $u_h$  est le projeté orthogonal de  $u \in V$  sur le convexe fermé  $V_h \subset V$ .

**Définition 2.4.1.** Soit  $(V_h)_{h>0}$  une famille de sous espaces-vectoriels de  $V$ , on dit que cette famille est une approximation conforme de  $V$  si

1.  $\forall h > 0$ ,  $V_h$  est un sous-espace vectoriel de dimension finie de  $V$ ,
2.  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\forall v \in V$ ,  $\exists \eta > 0$  :  $\forall h \in ]0, \eta]$ ,  $\exists v_h \in V_h$  :  $\|v - v_h\|_V \leq \varepsilon$ .

Autrement dit, si l’approximation de  $V$  par la famille  $(V_h)_{h>0}$  est conforme, le lemme de Céa dit que la méthode de Galerkin est convergente.





# Chapitre 3

## Introduction à la méthode des éléments finis

### Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>Éléments finis en dimension 1</b>	<b>33</b>
3.1.1	Maillage	34
3.1.2	Élément fini de Lagrange $\mathbb{P}_1$	34
3.1.3	Élément fini de Lagrange $\mathbb{P}_2$	41
<b>3.2</b>	<b>Éléments finis en dimension 2</b>	<b>44</b>
3.2.1	Triangulation	44
3.2.2	Espace polynômial $\mathbb{P}_1$ et coordonnées barycentriques	47
3.2.3	Espace d'approximation	48
3.2.4	Application au problème de Dirichlet	49
<b>3.3</b>	<b>Extensions et analyse des éléments finis en dimension 2</b>	<b>54</b>
3.3.1	Éléments finis d'ordre 2	54
<b>3.4</b>	<b>Exercices</b>	<b>56</b>

---

Dans cette troisième partie nous présentons la méthode des éléments finis. Cette méthode nous permet de construire l'espace d'approximation  $V_h$  ainsi que sa base  $(\varphi_1, \dots, \varphi_N)$  en utilisant des fonctions polynômiales en une ou plusieurs dimensions.

### 3.1 Éléments finis en dimension 1

Dans cette section, considérons  $\Omega$  de la forme  $\Omega = ]a, b[$ . En une dimension d'espace, notons  $\mathbb{P}_k$  l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à  $k$  :

$$\mathbb{P}_k = \left\{ p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid p(x) = \sum_{i=0}^k a_i x^i, \ a_0 \dots a_k \in \mathbb{R} \right\}.$$

L'espace  $\mathbb{P}_k$  est de dimension  $k + 1$ .

### 3.1.1 Maillage

Un maillage de  $\Omega$  est de la forme

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_N < x_{N+1} = b. \quad (3.1)$$

On note  $h_i = x_{i+1} - x_i$  le pas local pour tout  $i = 0 \dots N$ . Nous posons  $h = \max_i h_i$  correspondant au pas du maillage. Les points  $\{x_i\}_{0 \leq i \leq N+1}$  correspondent aux sommets du maillages, et les points  $\{x_i\}_{1 \leq i \leq N}$  au sommets intérieurs. Dans la suite, on note pour  $0 \leq i \leq N$ ,

$$T_i = [x_i, x_{i+1}],$$

correspondant aux segments ou aux mailles du maillage. Très souvent, et pour plus de simplicité, nous supposons que les sommets du maillage sont régulièrement espacés, si bien que  $x_i = ih$ ,  $0 \leq i \leq N + 1$  avec

$$h = \frac{b - a}{N + 1},$$

le pas du maillage. Dans ce cas, le maillage est dit uniforme.

### 3.1.2 Élément fini de Lagrange $\mathbb{P}_1$

Considérons l'espace des fonctions continues, affines par morceaux sur le maillage (3.1).

$$W_h^{(1)} := \left\{ v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid v \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega}) \text{ et } v|_{T_i} \in \mathbb{P}_1 \text{ pour tout } 0 \leq i \leq N \right\}. \quad (3.2)$$

Les fonctions de  $W_h^{(1)}$  sont de classe  $\mathcal{C}^1$  par morceaux et globalement  $\mathcal{C}^0$  sur  $\Omega$ .

**Proposition 3.1.1.** *L'espace  $W_h^{(1)}$  est un espace vectoriel de dimension  $N + 2$ , dont la base canonique sont les fonctions chapeau  $(\varphi_j)_{0 \leq j \leq N+1}$  telles que*

$$\varphi_j(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq x_{j-1} \text{ ou } x \geq x_{j+1} \\ \frac{x - x_{j-1}}{x_j - x_{j-1}} & \text{si } x_{j-1} \leq x \leq x_j \\ \frac{x_{j+1} - x}{x_{j+1} - x_j} & \text{si } x_j \leq x \leq x_{j+1} \end{cases}$$

Remarquons que l'on a  $\varphi_j(x_i) = \delta_{ij}$ . Dés lors, si l'on considère une fonction de  $f \in W_h^{(1)}$ , alors

$$f = \sum_{i=0}^{N+1} f(x_i) \varphi_i.$$

La figure 3.1 illustre les fonctions chapeau  $\varphi_i$ .

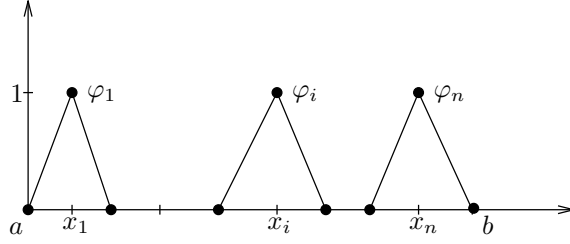


FIGURE 3.1 – Fonctions chapeau

**Proposition 3.1.2.** *L'espace d'approximation  $W_h^{(1)}$  défini par (3.2) est  $H^1(\Omega)$ -conforme, avec*

$$H^1(\Omega) = \left\{ v : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid v \in \mathbb{L}^2(\Omega), v' \in \mathbb{L}^2(\Omega) \right\}.$$

*PREUVE.* Soit  $v \in W_h^{(1)}$ . Nous avons déjà montré que pour tout  $x \in \Omega$ ,

$$v(x) = \sum_{i=0}^{N+1} v(x_i) \varphi_i(x).$$

C'est une fonction continue et bornée sur  $\Omega$ , donc  $v \in \mathbb{L}^2(\Omega)$ . Sa dérivée est la fonction continue par morceaux

$$v'(x) = \frac{v(x_{i+1}) - v(x_i)}{x_{i+1} - x_i}, \quad x_i < x < x_{i+1}.$$

Il s'agit également d'une fonction de  $\mathbb{L}^2(\Omega)$ , donc  $v \in H^1(\Omega)$ . cqfd

Introduisons maintenant l'opérateur  $\mathcal{I}_h^{(1)} : \mathcal{C}^0(\overline{\Omega}) \rightarrow W_h^{(1)}$ , tel que pour toute fonction  $v$  continue,

$$\mathcal{I}_h^{(1)}(v) = \sum_{i=0}^{N+1} v(x_i) \varphi_i.$$

Cet opérateur est appelé opérateur d'interpolation. Il permet d'évaluer la qualité de l'approximation offerte par l'espace  $W_h^{(1)}$ , à savoir la distance entre une fonction  $v \in V$  et l'espace  $W_h^{(1)}$ . La fonction  $\mathcal{I}_h^{(1)}(v)$  est l'unique fonction de  $W_h^{(1)}$  qui coïncide avec la fonction  $v$  aux sommets du maillage : pour tout  $i = 0 \dots N + 1$ ,

$$\mathcal{I}_h^{(1)}(v)(x_i) = v(x_i).$$

**Proposition 3.1.3.** *Soit  $v \in H^2(\Omega) = \{ v \in H^1(\Omega) \mid v'' \in \mathbb{L}^2(\Omega) \}$ . Alors, il existe  $c > 0$ , tel que*

$$\|\mathcal{I}_h^{(1)}(v) - v\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + h \left| \mathcal{I}_h^{(1)}(v) - v \right|_{H^1(\Omega)} \leq ch^2 \|v''\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}. \quad (3.3)$$

Remarquons que l'estimation (3.3) s'écrit également

$$\|\mathcal{I}_h^{(1)}(v) - v\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \leq ch^2 \|v''\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \quad \text{et} \quad \left| \mathcal{I}_h^{(1)}(v) - v \right|_{H^1(\Omega)} \leq ch \|v''\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}.$$

Dans la suite, nous notons  $|v|_{H^1(\Omega)}$  la semi-norme  $H^1(\Omega)$  d'une fonction  $v \in H^1(\Omega)$  définie par

$$|v|_{H^1(\Omega)} = \|v'\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}.$$

De la même manière, nous noterons  $|v|_{H^2(\Omega)} := \|v''\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}$  pour tout  $v \in H^2(\Omega)$ .

*PREUVE.* Soit  $v \in H^2(\Omega)$  En dimension 1, on sait que si  $v \in H^1(\Omega)$ , alors elle est continue et l'on a pour tout  $x \in [x_i, x_{i+1}]$ ,

$$v(x) = v(x_i) + \int_{x_i}^x v'(t) dt.$$

Par ailleurs, sur la maille  $T_i = [x_i, x_{i+1}]$ , nous avons

$$\mathcal{I}_h^{(1)}(v)(x) = v(x_i) + \frac{v(x_{i+1}) - v(x_i)}{x_{i+1} - x_i} (x - x_i),$$

si bien que

$$\mathcal{I}_h^{(1)}(v)(x) - v(x) = \int_{x_i}^x w(t) dt,$$

avec, pour tout  $t \in [x_i, x_{i+1}]$ ,

$$w(t) = \frac{v(x_{i+1}) - v(x_i)}{x_{i+1} - x_i} - v'(t).$$

En appliquant Cauchy-Schwarz, nous obtenons

$$\|\mathcal{I}_h^{(1)}(v) - v\|_{\mathbb{L}^2(T_i)} \leq |x_{i+1} - x_i| \|w\|_{\mathbb{L}^2(T_i)}.$$

La fonction  $w$  satisfait  $\int_{x_i}^{x_{i+1}} w(x) dx = 0$  si bien que, comme elle est continue, il existe  $x_0 \in [x_i, x_{i+1}]$  tel que  $w(x_0) = 0$ , et donc

$$w(x) = \int_{x_0}^x w'(t) dt.$$

On obtient ainsi

$$\|w\|_{\mathbb{L}^2(T_i)} \leq |x_i - x_{i+1}| \|w'\|_{\mathbb{L}^2(T_i)}.$$

En combinant ces estimations, on obtient ainsi

$$\|\mathcal{I}_h^{(1)}(v) - v\|_{\mathbb{L}^2(T_i)} \leq |x_{i+1} - x_i|^2 \|w'\|_{\mathbb{L}^2(T_i)} = |x_{i+1} - x_i|^2 \|v''\|_{\mathbb{L}^2(T_i)}.$$

Le résultat final s'obtient en sommant le carré de ces inégalités pour  $i = 0 \dots N$ .

cqfd

### Application au problème de Poisson

Reprenons le problème variationnel défini par (2.7) avec  $a(u, v) = \int_{\Omega} u'v'$  et  $L(v) = \int_{\Omega} fv$  :

$$u \in V \quad \text{tel que} \quad \int_0^1 u'v' = \int_0^1 fv, \quad \forall v \in V, \quad (3.4)$$

avec  $V = \{v \in H^1(\Omega) \mid v(a) = v(b) = 0\}$ ,  $\Omega = ]a, b[$  et  $f \in \mathbb{L}^2(\Omega)$ . Ce problème est équivalent en formulation forte au problème

$$-u'' = f \quad \text{p.p. sur } \Omega, \quad (3.5a)$$

$$u(a) = u(b) = 0. \quad (3.5b)$$

Introduisons l'espace d'approximation contenant les conditions de Dirichlet homogènes :

$$V_h^{(1)} = \{v \in W_h^{(1)} \mid v(a) = v(b) = 0\}.$$

D'après la Proposition 3.1.2, cet espace est  $V$ -conforme. Dés lors, l'approximation du problème (3.4) s'écrit automatiquement sous la forme

$$u_h \in V_h^{(1)} \quad \text{tel que} \quad \int_0^1 u_h'v_h' = \int_0^1 fv_h \quad \forall v_h \in V_h^{(1)}. \quad (3.6)$$

Nous avons vu que ce problème est équivalent au système linéaire  $\mathcal{A}U = \mathcal{F}$ , avec  $U_0 = U_{N+1} = 0$  (on impose directement les conditions à la limite), et avec, pour tout  $1 \leq i, j \leq N$

$$\mathcal{A}_{i,j} = \int_a^b \varphi_j' \varphi_i' dx, \quad (\mathcal{F})_j = \int_a^b f \varphi_j dx.$$

Rappelons que la matrice  $\mathcal{A}$  est symétrique positive, et donc que ce système admet une unique solution.

**Théorème 3.1.4.** *Notons  $U \in \mathbb{R}^N$  la solution sur système linéaire  $\mathcal{A}U = \mathcal{F}$  et notons  $u_h = \sum_{i=1}^N U_i \varphi_i$ . Supposons que  $f \in \mathbb{L}^2(\Omega)$ . Alors il existe une constante  $c > 0$  indépendante de  $h$ , telle que*

$$|u - u_h|_{H^1(\Omega)} \leq ch \|f\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}.$$

*PREUVE.* Commençons par le Lemme de Céa qui nous donne l'estimation

$$|u - u_h|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{M}{\gamma} \inf_{v_h \in V_h^{(1)}} |u - v_h|_{H^1(\Omega)}.$$

En choisissant  $v_h = \mathcal{I}_h^{(1)}u$  et en utilisant la Proposition 3.1.3, nous obtenons

$$|u - u_h|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{M}{\gamma} |u - \mathcal{I}_h(u)|_{H^1(\Omega)}.$$

Comme par hypothèse,  $f \in \mathbb{L}^2(\Omega)$  et par définition,  $-u'' = f$ , nous obtenons

$$|u - \mathcal{I}_h(u)|_{H^1(\Omega)} \leq ch \|u''\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)},$$

d'où le résultat. cqfd

Cette estimation signifie que l'erreur de convergence dans la norme  $H_0^1$  par la méthode des éléments finis de Lagrange  $\mathbb{P}_1$  est d'ordre 1. Si l'on divise le pas du maillage par deux, il en sera de même pour l'erreur  $|u - u_h|_{H^1(\Omega)}$ .

Au regard de ce théorème et de la Proposition 3.1.3, on peut se demander s'il n'est pas possible d'améliorer l'estimation d'erreur dans  $H^1$  en étudiant l'erreur dans  $\mathbb{L}^2(\Omega)$ , à savoir  $\|u - u_h\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}$ . Dans les cas des problèmes étudiés dans ce cours, cette analyse est possible et ce résultat s'obtient par la méthode de Aubin-Nitsche.

**Proposition 3.1.5.** *Soit  $u \in V$  l'unique solution de (3.4) et  $u_h \in V_h^{(1)}$  l'unique solution de (3.6). Alors, il existe  $c > 0$  indépendant de  $h$ , telle que*

$$\|u - u_h\|_{\mathbb{L}^2(I)} \leq ch^2 \|f\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}.$$

*PREUVE.* Considérons le problème compagnon

$$-\varphi'' = g \quad \text{sur } \Omega, \tag{3.7}$$

$$\varphi(a) = \varphi(b) = 0, \tag{3.8}$$

avec  $g \in \mathbb{L}^2(\Omega)$ . La formulation faible de ce problème est, comme nous l'avons déjà vu,

$$\int_{\Omega} \varphi' v' = \int_{\Omega} g v, \quad \forall v \in V.$$

En particulier, en choisissant  $v = u - u_h$ , nous obtenons,

$$\int_{\Omega} \varphi' (u - u_h)' = \int_{\Omega} g (u - u_h).$$

Par ailleurs, le résultat d'orthogonalité de Galerkin démontré dans le Lemme de Céa, nous permet d'écrire, pour tout  $v_h \in V_h^{(1)}$ ,

$$\int_{\Omega} v_h' (u - u_h)' = 0.$$

Ainsi,

$$\int_{\Omega} (\varphi - v_h)' (u - u_h)' = \int_{\Omega} g (u - u_h).$$

L'estimation de la première intégrale nous donne

$$\left| \int_{\Omega} g (u - u_h) \right| = \left| \int_{\Omega} (\varphi - v_h)' (u - u_h)' \right| \leq |\varphi - v_h|_{H^1(\Omega)} |u - u_h|_{H^1(\Omega)}.$$

Ceci étant valable pour tout  $v_h$ , nous obtenons en, choisissant  $v_h = \mathcal{I}_h(\varphi)$  et en utilisant la Proposition 3.1.3,

$$\left| \int_I g(u - u_h) \right| \leq h \|\varphi''\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} |u - u_h|_{H^1(\Omega)}.$$

Par ailleurs, nous avons  $\|\varphi''\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} = \|g\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}$ , ce qui nous donne

$$\frac{\left| \int_I g(u - u_h) \right|}{\|g\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}} \leq h |u - u_h|_{H^1(\Omega)}.$$

Ceci restant valable quelque soit  $g \in \mathbb{L}^2(\Omega)$ , nous obtenons le résultat

$$\|u - u_h\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} = \sup_{g \in \mathbb{L}^2(\Omega)} \frac{\left| \int_{\Omega} g(u - u_h) \right|}{\|g\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}} \leq h |u - u_h|_{H^1(\Omega)}.$$

cqfd

La matrice  $\mathcal{A}$  qui définit notre problème est communément appelée *matrice de rigidité* en raison de son lien avec la mécanique. Cette matrice possède une structure creuse (c'est là un des intérêts majeurs de la méthode des éléments finis) qu'il convient de bien comprendre. Pour deux indices  $i, j \geq 1$  tels que  $|i - j| > 1$ , nous remarquons que le support des deux fonctions  $\varphi_i$  et  $\varphi_j$  sont disjoints. Dés lors, on obtient dans ce cas

$$\int_a^b \varphi_j' \varphi_i' = 0,$$

et donc la matrice  $\mathcal{A}$  est tri-diagonale :

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \bullet & \bullet & 0 & \dots & 0 \\ \bullet & \bullet & \bullet & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & \dots & 0 & \bullet & \bullet \end{pmatrix}.$$

En pratique, on retiendra que plus le support des fonctions de base est "petit" et plus la matrice résultante sera creuse. Effectuons maintenant le calcul de cette matrice en déterminant les symboles  $\bullet$  dans le cas d'un maillage de pas uniforme  $h$  : soient  $1 \leq i \leq N$  et  $j = i + 1$ . Le support commun des deux fonctions  $\varphi_i$  et  $\varphi_j$  est l'intervalle  $T_i = [x_i, x_{i+1}]$ . Nous avons donc

$$\int_a^b \varphi_j' \varphi_i' = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi_j' \varphi_i' = -\frac{1}{h}.$$

De la même manière, nous avons pour tout  $1 \leq i \leq N$ ,

$$\int_a^b \varphi'_i \varphi'_i = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \varphi'_i \varphi'_i = \frac{2}{h}.$$

La matrice de rigidité que l'on obtient s'écrit alors

$$\mathcal{A} = \frac{1}{h} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{h} \text{tridiag}(-1, 2, -1).$$

**Exercice 3.1.1.** Montrer que la matrice  $\mathcal{A} = \frac{1}{h} \text{tridiag}(-1, 2, -1)$  obtenue par les élément finis  $\mathbb{P}_1$  de Lagrange en dimension 1 est définie positive.

La dernière étape pour expliciter complètement notre système linéaire est le calcul du second membre

$$\int_a^b f \varphi_i = \int_{T_{i-1}} f \varphi_i + \int_{T_i} f \varphi_i, \quad 1 \leq i \leq N.$$

Le terme source  $f \in \mathbb{L}^2(\Omega)$  pouvant être quelconque, cette intégrale ne peut pas être calculée exactement. Nous allons alors utiliser des formules de quadrature sur le segment. L'idée des quadratures est simple : on remplace le calcul de cette intégrale par le calcul d'une somme finie. Pour une fonction  $\chi$  donnée, nous avons

$$\int_{T_i} \chi(x) dx \simeq \sum_{l=1}^{l_g} \omega_l \chi(\xi_l),$$

avec  $(\xi_1, \dots, \xi_{l_g})$  les points de la quadratures et  $(\omega_1, \dots, \omega_{l_g})$  les poids associés. Le degré de la quadrature est défini par le plus grand entier  $k_g$  tel que

$$\forall p \in \mathbb{P}_{k_g}, \quad \int_{T_i} p(x) dx = \sum_{l=1}^{l_g} \omega_l p(\xi_l).$$

Les règles de quadratures les plus classiques sont représentées dans le Tableau 3.1 :

Nom	$k_g$	$l_g$	Poids	Nœuds
Point milieu	1	1	(1)	$\frac{1}{2}$
Cavalieri Simpson	2	3	$\left(\frac{1}{6}, \frac{2}{3}, \frac{1}{6}\right)$	$\left(0, \frac{1}{2}, 1\right)$
Gauss 2 points	3	2	$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$	$\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}\right)$
Gauss 3 points	4	3	$\left(\frac{5}{18}, \frac{8}{18}, \frac{5}{18}\right)$	$\left(\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{3}{20}}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{3}{20}}\right)$



TABLE 3.1 – Table de quadrature sur un segment

Les noeuds dans ce tableau correspondent aux coordonnées barycentriques relativement au début du segment. Par exemple, sur un segment  $[a, b]$ , le noeud  $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}$  de la règle de Gauss à 2 points correspond au point

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}\right)a + \left(1 - \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}\right)\right)b.$$

**Proposition 3.1.6** (Erreur de quadrature). *Considérons une quadrature de degré  $k_g$ , de poids  $(\omega_1, \dots, \omega_{l_g})$  et de points  $(\xi_1, \dots, \xi_{l_g})$  sur la maille  $T_i$ . Alors il existe une constante  $c_i$ , indépendante de la géométrie de la maille  $T_i$ , telle que*

$$\forall \chi \in \mathcal{C}^{k_g+1}(T_i), \quad \left| \int_{T_i} \chi(x) dx - \sum_{l=1}^{l_g} \omega_l \chi(\xi_l) \right| \leq c_i h_i^{k_g+1} \|\chi\|_{\mathcal{C}^{k_g+1}(T_i)}.$$

En pratique, nous utilisons des méthodes de quadrature qui soient au moins du même ordre que notre schéma numérique. Choisir des quadratures plus précises n'apporteront pas d'amélioration de la précision du calcul car les erreurs numériques seront dominées par les erreurs du schéma. Pour les éléments finis de Lagrange  $\mathbb{P}_1$ , la quadrature de Cavalieri Simpson est donc largement suffisante.

### 3.1.3 Éléments finis de Lagrange $\mathbb{P}_2$

Considérons maintenant l'espace discret des fonctions continues sur  $\Omega = ]a, b[$  et paraboliques par morceaux sur chaque maille. Pour cela, on définit l'espace

$$V_h^{(2)} := \left\{ v \in \mathcal{C}^0([a, b]) \mid v|_{T_i} \in \mathbb{P}_2 \text{ pour tout } 1 \leq i \leq N, v(a) = v(b) = 0 \right\}. \quad (3.9)$$

Il est clair que cet espace est une approximation conforme de  $H_0^1(\Omega)$ . Afin de définir une base de cet espace, nous allons nous ramener à l'élément de référence  $\hat{T} = [0, 1]$ . Cette approche est très utilisée dans la méthode des éléments finis, surtout lorsque l'on considère la méthode à des ordres élevés et en grande dimension. L'élément de référence nous permet d'expliciter les fonctions de bases indépendamment de l'élément considéré.

L'application faisant le lien entre l'élément de référence  $\hat{T}$  et  $T_i$  est la fonction affine

$$F_i : \hat{T} \ni t \mapsto (x_{i+1} - x_i)t + x_i = th_i + x_i \in T_i. \quad (3.10)$$

Cette application est inversible dès lors que  $T_i$  est non vide et l'on a alors  $F_i^{-1}(x) = \frac{x - x_i}{h_i}$ .

Introduisons maintenant les trois fonctions de forme locales définies sur  $\hat{T}$  :

$$\theta_0^{(2)}(t) = (2t - 1)(t - 1), \quad \theta_1^{(2)}(t) = 4t(1 - t), \quad \theta_2^{(2)}(t) = t(2t - 1). \quad (3.11)$$

La base de  $V_h^{(2)}$  s'exprime alors à partir des fonctions  $\{\varphi_1, \dots, \varphi_N\}$  et  $\{\psi_{1/2}, \dots, \psi_{N+1/2}\}$  définies par

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \theta_0^{(2)}(F_i^{-1}(x)) & \text{si } x \in T_i, \\ \theta_2^{(2)}(F_{i-1}^{-1}(x)) & \text{si } x \in T_{i-1}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (3.12)$$

et

$$\psi_{i+1/2}(x) = \begin{cases} \theta_1^{(2)}(F_i^{-1}(x)) & \text{si } x \in T_i, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (3.13)$$

**Exercice 3.1.2.** Représenter les fonctions  $\{\varphi_1, \dots, \varphi_N\}$  et  $\{\psi_{1/2}, \dots, \psi_{N+1/2}\}$ . Calculer  $\varphi_i$  et  $\psi_{i+1/2}$  aux points  $x_j$  et  $x_{j+1/2} = \frac{x_j + x_{j+1}}{2}$ .

**Proposition 3.1.7.** La famille  $\{\varphi_1, \dots, \varphi_N, \psi_{1/2}, \dots, \psi_{N+1/2}\}$  est une base de l'espace  $V_h^{(2)}$ .

*PREUVE.* Considérons  $v_h \in V_h^{(2)}$  et introduisons la fonction  $w_h$  définie par

$$w_h(x) = \sum_{i=1}^N v_h(x_i) \varphi_i(x) + \sum_{i=0}^N v_h(x_{i+1/2}) \psi_{i+1/2}(x).$$

Pour tout  $x \in T_i$ , on a

$$w_h(x) = v_h(x_i) \varphi_i(x) + v_h(x_{i+1}) \varphi_{i+1}(x) + v_h(x_{i+1/2}) \psi_{i+1/2}(x).$$

Les deux fonctions  $v_h$  et  $w_h$  sont toutes les deux paraboliques sur  $T_i$  et coïncident en trois points sur  $T_i$ . Elles sont donc égales sur  $T_i$ . Par ailleurs, ces deux fonctions sont continues sur  $\Omega$ , donc elles sont égales partout. cqfd

On introduit l'opérateur d'interpolation dans  $V_h^{(2)}$  :

$$\mathcal{I}_h^{(2)} : \mathcal{C}^0(\overline{\Omega}) \ni v \mapsto \sum_{i=1}^N v(x_i) \varphi_i(x) + \sum_{i=0}^N v(x_{i+1/2}) \psi_{i+1/2}(x). \quad (3.14)$$

On admettra alors le résultat suivant concernant l'erreur d'interpolation pour une fonction régulière.

**Proposition 3.1.8.** Il existe une constante  $c > 0$  indépendante de  $h$  telle que pour toute fonction  $v \in H_0^1(\Omega) \cap H^3(\Omega)$ ,

$$\|v - \mathcal{I}_h^{(2)} v\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + h \|v - \mathcal{I}_h^{(2)} v\|_{H^1(\Omega)} \leq ch^3 |v|_{H^3(\Omega)}. \quad (3.15)$$

On rappelle que  $H^3(\Omega) = \{v \in \mathbb{L}^2(\Omega) \mid v', v'', v''' \in \mathbb{L}^2(\Omega)\}$  et l'on note  $|v|_{H^3(\Omega)} = \|v'''\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}$ .

Comparons cette proposition avec la proposition 3.1.3. Travailler avec des fonctions continues et paraboliques par morceaux plutôt qu'avec des fonctions affines par morceaux fournit des résultats d'interpolation plus précis (l'exposant du  $h$  est plus grand), pourvu que la fonction que l'on interpole est suffisamment régulière, à savoir  $v \in H^3(\Omega)$  plutôt que  $v \in H^2(\Omega)$ .

### Application au problème de Poisson

Revenons à notre problème de Poisson discrétisé dans l'espace  $V_h^{(2)}$  :

$$u_h \in V_h^{(2)} \quad \text{tel que} \quad \int_{\Omega} u_h' v_h' = \int_{\Omega} f v_h \quad \forall v_h \in V_h^{(2)}, \quad (3.16)$$

avec  $\{\varphi_1, \dots, \varphi_N, \psi_{1/2}, \dots, \psi_{N+1/2}\}$  la base de  $V_h^{(2)}$ . Comme pour les éléments finis  $\mathbb{P}_1$ , ce problème se ramène sous la forme d'un système linéaire  $\mathcal{A}U = \mathcal{F}$  avec  $\mathcal{A}$  une matrice carré symétrique de taille  $2N + 1$ . De manière générique, cette matrice peut s'écrire sous la forme

$$\mathcal{A}_{i,j} = \int_{\Omega} \Phi_i' \Phi_j', \quad 1 \leq i, j \leq 2N + 1,$$

avec  $\Phi_i = \varphi_i$  pour tout  $1 \leq i \leq N$  et  $\Phi_{i+N+1} = \psi_{i+1/2}$  pour tout  $0 \leq i \leq N$ . Cette matrice peut être construite par bloc sous la forme

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \mathcal{A}^{\varphi\varphi} & \mathcal{A}^{\varphi\psi} \\ \mathcal{A}^{\psi\varphi} & \mathcal{A}^{\psi\psi} \end{pmatrix}, \quad (3.17)$$

avec les matrices carrées  $\mathcal{A}^{\varphi\varphi} \in \mathbb{R}^{N,N}$ ,  $\mathcal{A}^{\psi\psi} \in \mathbb{R}^{N+1,N+1}$  définies par

$$\mathcal{A}^{\varphi\varphi} = \left( \int_{\Omega} \varphi_i' \varphi_j' \right)_{1 \leq i,j \leq N}, \quad \mathcal{A}^{\psi\psi} = \left( \int_{\Omega} \psi_{i+1/2}' \psi_{j+1/2}' \right)_{0 \leq i,j \leq N}, \quad (3.18)$$

et  $\mathcal{A}^{\varphi\psi} \in \mathbb{R}^{N,N+1}$  la matrice rectangulaire vérifiant  $\mathcal{A}^{\varphi\psi} = (\mathcal{A}^{\psi\varphi})^T$  telle que

$$\mathcal{A}^{\varphi\psi} = \left( \int_{\Omega} \varphi_i' \psi_j' \right)_{1 \leq i \leq N, 0 \leq j \leq N}. \quad (3.19)$$

**Exercice 3.1.3.** Pour un maillage uniforme de pas constant  $h$ , calculer la matrice  $\mathcal{A}$ . Montrer qu'il est possible, en réarrangeant l'ordre des termes, d'obtenir une matrice  $\mathcal{A}$  qui soit pentadiagonale.

Terminons par le résultat d'estimation de l'erreur entre la solution discrète  $u_h$  obtenue par le problème (3.16) et la solution exacte.

**Théorème 3.1.9.** Soit  $U$  l'unique solution du système linéaire  $\mathcal{A}U = \mathcal{F}$  et notons  $u_h = \sum_{i=1}^N U_i \varphi_i + \sum_{i=0}^N U_{i+N+1} \psi_{i+1/2}$ . On suppose que  $f \in H^1(\Omega)$ . Alors il existe une constante  $c > 0$ , indépendante de  $h$ , telle que

$$|u - u_h|_{H^1(\Omega)} \leq ch^2 |f|_{H^1(\Omega)}.$$

*PREUVE.* Utilisons à nouveau de Lemme de C'éà pour obtenir

$$|u - u_h|_{H^1(\Omega)} \leq \inf_{v_h \in V_h^{(2)}} |u - v_h|_{H^1(\Omega)}.$$

Choisissons  $v_h = \mathcal{I}_h^{(2)}u$ . Par définition, nous savons que  $-u'' = f$ . Ainsi, si  $f \in H^1(\Omega)$ , alors  $u''$  aussi et donc  $u''' \in \mathbb{L}^2(\Omega)$ , c'est à dire  $u \in H^3(\Omega)$ . Ainsi, nous pouvons utiliser la Proposition 3.1.6 pour obtenir

$$|u - u_h|_{H^1(\Omega)} \leq ch^2 |u|_{H^3(\Omega)}.$$

cqfd

Ce théorème nous montre que la méthode des éléments finis de Lagrange  $\mathbb{P}_2$  est d'ordre 2. En pratique, cela signifie que si l'on divise la taille des mailles par 2, alors l'erreur en norme  $H^1$  sera divisée par 4. Il est important de noter que ce taux de convergence n'est possible que grâce à la régularité du second membre  $f$  qui doit être dans  $H^1(\Omega)$ . Si l'on a seulement  $f \in \mathbb{L}^2(\Omega)$ , alors on obtient pas mieux qu'une convergence d'ordre 1. Dans ce cas de figure, l'utilisation des éléments finis  $\mathbb{P}_2$  est inutile et même déconseillée car le système à résoudre est de plus grande taille.

## 3.2 Éléments finis en dimension 2

L'objectif de cette section est d'étendre ce que nous avons vu en dimension 1 dans le cas de la dimension 2. Pour cela, nous allons avoir besoin d'un maillage du domaine  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ . Pour simplifier, nous supposons que le domaine  $\Omega$  est polyédrique. Les maillages que nous considérons dans ce cours sont constitués de triangles. On parlera alors de triangulation de  $\Omega$ . En pratique, il est aussi possible de considérer d'autres formes géométriques comme des quadrangles, des hexagones, etc.

### 3.2.1 Triangulation

**Définition 3.2.1** (Triangulation). Un maillage, ou triangulation, de  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  est un recouvrement de  $\Omega$ , formé de triangles  $(T_\ell)_{\ell=1..N_T}$  :

$$\overline{\Omega} = \bigcup_{\ell=1..N_T} T_\ell.$$

Par convention, ces triangles sont supposés fermés. On dit que ce maillage est admissible si pour tout  $\ell, \ell' \in \{1..N_T\}$ , l'intersection  $T_\ell \cap T_{\ell'}$  de deux triangles distincts est soit vide, soit réduite à un sommet commun à ces deux triangles, soit réduite à un segment qui est alors une arête commune à ces deux triangles.

La figure 3.2 représente un maillage admissible et la figure 3.3 deux situations interdites.

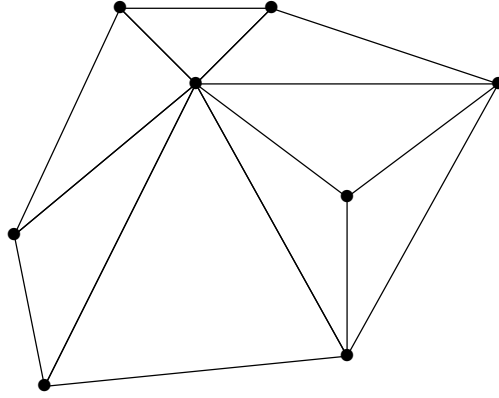


FIGURE 3.2 – Exemple de maillage triangulaire

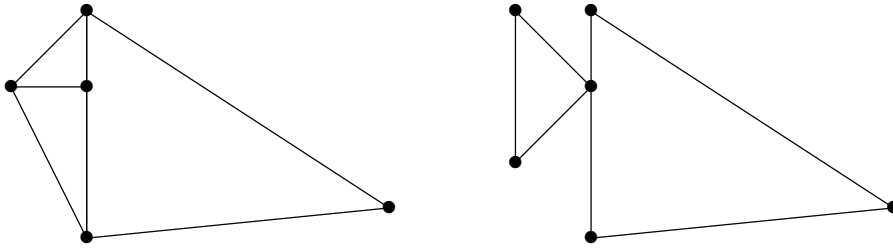


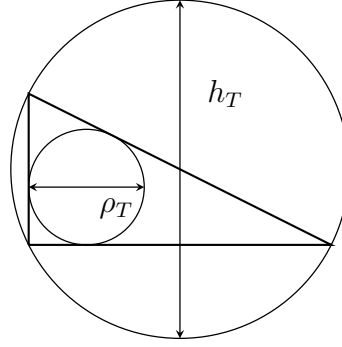
FIGURE 3.3 – Exemple de situations interdites

Pour chaque triangle  $T_\ell$ , nous notons

$$h_T = \max_{\mathbf{x}, \mathbf{y} \in T} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_{\ell^2} \quad \text{et} \quad \rho_T = \max_{B_r \subset T} (2r),$$

avec  $B_r$  un disque de rayon  $r$ . La première quantité  $h_T$  correspond au diamètre du triangle  $T$ . La deuxième quantité est ce que l'on appelle la rondeur de l'élément  $T$ . Il est clair que l'on a toujours  $h_T > \rho_T$  (cf figure 3.4). Le pas du maillage est alors défini par

$$h := \max_{T \in \mathcal{T}_h} h_T. \quad (3.20)$$

FIGURE 3.4 – Diamètre  $h_T$  et rondeur  $\rho_T$  du triangle  $T$ .

En pratique, nous utilisons plusieurs maillages raffinés les uns par rapport aux autres. On définit une suite de maillages réguliers.

**Définition 3.2.2** (Suite de maillages réguliers). Soit  $(\mathcal{T}_h)_{h>0}$  une suite de maillage  $\mathcal{T}_h = \{T_1, T_2, T_3, \dots\}$  avec  $h > 0$  le pas défini par (3.20). On dit que cette suite de maillage est régulière si

- La suite des pas  $h$  tend vers 0 ; les triangles des maillages sont de plus en plus petits ou raffinés
- Il existe une constante  $C > 0$  telle que, pour tout  $T \in \mathcal{T}_h$ ,

$$\frac{h_T}{\rho_T} \leq C.$$

La figure 3.5 représente un exemple de suite régulière de maillage.

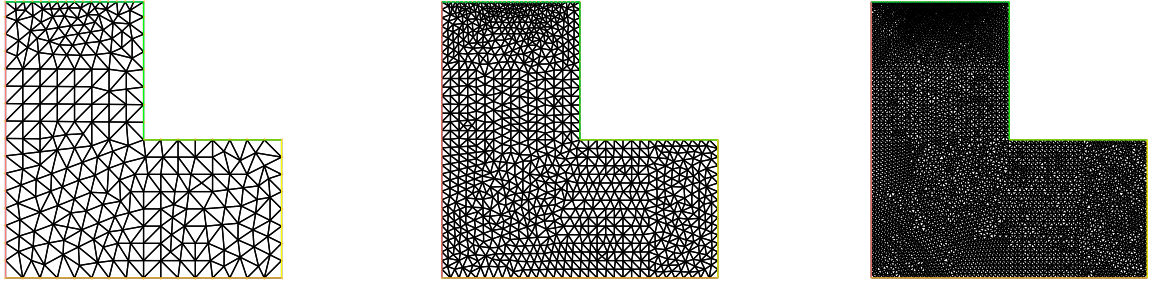


FIGURE 3.5 – Suite de maillages réguliers

L'ensemble des sommets intérieurs du maillage, ou encore appelés noeuds intérieurs du maillage, est noté  $\mathcal{N}_h = \{M_i\}_{i=1..N^\circ}$ . Les noeuds portés par la frontière sont notés  $\mathcal{N}_h^\partial = \{M_i^\partial\}_{i=1..N^\partial}$ . Le maillage est ainsi constitué de  $N = N^\circ + N^\partial$  noeuds.

### 3.2.2 Espace polynômial $\mathbb{P}_1$ et coordonnées barycentriques

En deux dimension d'espace, on introduit l'espace

$$\mathbb{P}_1 := \left\{ p : \mathbf{x} = (x, y) \in \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \mid p(\mathbf{x}) = ax + by + c, \ a, b, c \in \mathbb{R} \right\}.$$

Cet espace est de dimension 3 et on a le résultat suivant qui sera utile dans la suite pour la définition des éléments finis de Lagrange  $\mathbb{P}_1$  en deux dimension.

**Proposition 3.2.1.** *Un polynôme  $p \in \mathbb{P}_1$  est déterminé de manière unique par la valeur qu'il prend en trois points non alignés. Sa restriction à un segment non réduit à un point est déterminée de manière unique par la valeur qu'il prend aux extrémités du segment.*

Considérons  $T$  une maille de sommets  $M_1, M_2, M_3$  non aplati. Par application de la Proposition 3.2.1, il existe une unique application  $\lambda_{M_1} \in \mathbb{P}_1$  qui vérifie

$$\lambda_{M_1}(M_1) = 1, \quad \lambda_{M_1}(M_2) = 0, \quad \lambda_{M_1}(M_3) = 0.$$

De la même manière, il existe une unique application  $\lambda_{M_2} \in \mathbb{P}_1$  et  $\lambda_{M_3} \in \mathbb{P}_1$  telles que

$$\lambda_{M_2}(M_1) = 0, \quad \lambda_{M_2}(M_2) = 1, \quad \lambda_{M_2}(M_3) = 0,$$

et

$$\lambda_{M_3}(M_1) = 0, \quad \lambda_{M_3}(M_2) = 0, \quad \lambda_{M_3}(M_3) = 1.$$

Les fonctions  $\lambda_{M_1}$ ,  $\lambda_{M_2}$  et  $\lambda_{M_3}$  sont appelées coordonnées barycentriques dans le triangle  $T$  relativement aux sommets  $M_1$ ,  $M_2$  et  $M_3$ , respectivement. On a alors la proposition suivante.

**Proposition 3.2.2.** *Les coordonnées barycentriques vérifient les propriétés suivantes, pour  $i = 1, 2, 3$  :*

- (i)  $\lambda_{M_1} + \lambda_{M_2} + \lambda_{M_3} \equiv 1$
- (ii) *La fonction  $\lambda_{M_i}$  est nulle sur l'arête opposée au sommet  $M_i$*
- (iii) *Pour tout  $\mathbf{x} \in T$ ,  $\lambda_{M_i}(\mathbf{x}) \in [0, 1]$*

On appelle ces coordonnées barycentriques car elle permettent de repérer n'importe quel point  $\mathbf{x} \in T$  à partir des coordonnées des points  $M_1, M_2, M_3$ . Le triangle  $T$  étant convexe, le point  $\mathbf{x}$  appartient à  $T$  si et seulement si il existe  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in [0, 1]$  tels que  $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$  et

$$\mathbf{x} = \alpha_1 M_1 + \alpha_2 M_2 + \alpha_3 M_3.$$

En évaluant cette expression avec les fonctions  $\lambda_{M_1}$ ,  $\lambda_{M_2}$  et  $\lambda_{M_3}$ , il vient  $\alpha_i = \lambda_{M_i}(\mathbf{x})$ , d'où

$$\mathbf{x} = \lambda_{M_1}(\mathbf{x}) M_1 + \lambda_{M_2}(\mathbf{x}) M_2 + \lambda_{M_3}(\mathbf{x}) M_3.$$

**Exercice 3.2.1.** Soit  $T$  un triangle et  $M$  un sommet de ce triangle. Notons  $E_M$  l'arête de ce triangle opposée au point  $M$  et  $\mathbf{n}_{T,E_M}$  le vecteur normal à l'arête  $E_M$  et sortant de  $T$ . On note  $\lambda_{T,M}$  la coordonnée barycentrique relative au point  $M$  dans le triangle  $T$ .

1. Montrer que  $\nabla \lambda_{T,M}$  et  $\mathbf{n}_{T,E_M}$  sont colinéaires.
2. Montrer que  $|T| = \frac{1}{2} |E_M| \mathbf{n}_{T,E_M} \cdot (\mathbf{x}_N - \mathbf{x}_M)$  avec  $N$  un sommet de  $T$  distinct de  $M$ .
3. En déduire la formule des coordonnées barycentriques pour tout  $\mathbf{x} \in T$  :

$$\lambda_{T,M}(\mathbf{x}) = 1 - \frac{1}{2} \frac{|E_M|}{|T|} \mathbf{n}_{T,E_M} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_M). \quad (3.21)$$

### 3.2.3 Espace d'approximation

Posons

$$V_h^{(1)} = \left\{ v_h \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega}) \mid \forall \ell = 1..N_T, \ v_h|_{T_\ell} \in \mathbb{P}_1, \ v|_{\partial\Omega} = 0 \right\}.$$

Les fonctions de  $V_h^{(1)}$  sont de classe  $\mathcal{C}^1$  par morceaux et globalement  $\mathcal{C}^0$ . On peut vérifier que cet espace est  $H_0^1(\Omega)$  conforme, c'est à dire  $V_h^{(1)} \subset H_0^1(\Omega)$ . Nous allons maintenant identifier une base naturelle de cet espace en procédant comme en dimension 1. Soit  $M$  un sommet intérieur du maillage et notons  $\mathcal{T}(M)$  l'ensemble des mailles dont  $M$  est un sommet. Pour tout  $T \in \mathcal{T}(M)$ , on note  $\lambda_{T,M}$  la coordonnée barycentrique de  $T$  associée au sommet  $M$ . On pose alors  $\varphi_M : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie par

$$\varphi_M(\mathbf{x}) = \begin{cases} \lambda_{T,M}(\mathbf{x}) & \text{si } \mathbf{x} \in T, \text{ avec } T \in \mathcal{T}(M), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (3.22)$$

Il est clair que  $\varphi_M(M)$  et que cette fonction  $\varphi_M$  vaut 0 aux autres sommets du maillage :  $\varphi_M(M') = 0$  pour tout  $M' \neq M$ .

**Exercice 3.2.2.** Montrer que  $\varphi_M \in V_h^{(1)}$ . Représenter le support et le graphe de cette fonction.

**Proposition 3.2.3.** L'espace  $V_h^{(1)}$  est de dimension  $N^\circ$ . L'ensemble constitué des fonctions  $\{\varphi_{M_i}\}_{i=1..N^\circ}$  forme une base de  $V_h^{(1)}$ .

*PREUVE.* Il est clair que cette famille est libre. Montrons qu'elle est aussi génératrice. Soit  $v_h \in V_h^{(1)}$  et  $T_\ell$  un triangle du maillage. Considérons  $v_h|_{T_\ell} \in \mathbb{P}_1$  et ainsi que la fonction  $\sum_{M \in \mathcal{N}_h, M \in T} v_h(M) \varphi_M$ . Ces deux fonctions sont affines et coïncident aux sommets de  $T_\ell$ . Elles sont donc égales. Ceci est valable quelque soit le triangle et donc en utilisant la continuité, on en déduit que cette famille est bien génératrice. cqfd



Nous introduisons maintenant l'opérateur d'interpolation

$$\mathcal{I}_h^{(1)} : \mathcal{C}^0(\overline{\Omega}) \ni v \mapsto \sum_{i=1}^{N^\circ} v(M_i) \varphi_{M_i} \in V_h^{(1)}. \quad (3.23)$$

La fonction  $\mathcal{I}_h^{(1)}(v)$  est l'unique fonction de  $V_h^{(1)}$  prenant la même valeur que  $v$  en tous les sommets intérieurs du maillage. Comme pour la dimension 1, nous souhaitons estimer la précision de cet opérateur, c'est à dire pour une fonction  $v \in H^2(\Omega)$ , nous voulons estimer les erreurs  $\|\mathcal{I}_h^{(1)}(v) - v\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}$  et  $|\mathcal{I}_h^{(1)}(v) - v|_{H^1(\Omega)}$ . On admettra à ce stade le résultat suivant qui justifie le fait que l'on puisse choisir  $v \in H^2(\Omega)$ .

**Proposition 3.2.4.** *Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ . Si  $v \in H^2(\Omega)$ , alors  $v$  est continue sur  $\Omega$ .*

**Théorème 3.2.5** (Erreur d'interpolation). *Soit  $\mathcal{T}_h$  un maillage régulier de  $\Omega$  et  $v \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ . Alors, il existe  $c > 0$  indépendant du maillage et de  $v$  telle que*

$$\|\mathcal{I}_h^{(1)}(v) - v\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + h |\mathcal{I}_h^{(1)}(v) - v|_{H^1(\Omega)} \leq ch^2 |v|_{H^2(\Omega)}. \quad (3.24)$$

L'hypothèse du maillage régulier est fondamentale dans ce théorème comme le montre l'exercice suivant

**Exercice 3.2.3.** Considérons une seule maille  $T$  dont les extrémités sont  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$  et  $(-1, \epsilon)$  avec  $\epsilon > 0$ .

1. Calculer  $h_T$  et  $\rho_T$ .
2. Considérons  $v(x, y) = x^2$ . Calculer  $\mathcal{I}_h^{(1)}(v)$ .
3. Calculer  $|\mathcal{I}_h^{(1)}(v) - v|_{H^1(\Omega)} / |v|_{H^2(\Omega)}$ . Que se passe-t-il lorsque le triangle s'aplatit de plus en plus ?

### 3.2.4 Application au problème de Dirichlet

Soit  $f \in \mathbb{L}^2(\Omega)$ . Nous souhaitons approcher l'unique solution  $u \in V := H_0^1(\Omega)$  telle que

$$a(u, v) := \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v = \int_{\Omega} f v, \quad \forall v \in V,$$

en utilisant la méthode de Galerkin et l'espace  $V_h^{(1)}$  constitué des éléments finis de Lagrange  $\mathbb{P}_1$ . Le problème discret consiste à chercher

$$u_h \in V_h^{(1)} \text{ tel que } \int_{\Omega} \nabla u_h \cdot \nabla v_h = \int_{\Omega} f v_h, \quad \forall v_h \in V_h^{(1)}. \quad (3.25)$$

Nous savons que ce problème discret revient à la résolution d'un système linéaire de la forme  $\mathcal{A}U = \mathcal{F}$ . La matrice de rigidité  $\mathcal{A}$  est carrée, de taille  $N^\circ$  le nombre de sommet intérieur du maillage et son terme générique est donné par

$$\mathcal{A}_{i,j} = \int_{\Omega} \nabla \varphi_{M_i} \cdot \nabla \varphi_{M_j}, \quad \forall 1 \leq i, j \leq N^\circ.$$

Le second membre  $\mathcal{F}$  a pour composante

$$\mathcal{F}_i = \int_{\Omega} f \varphi_{M_i}, \quad \forall 1 \leq i \leq N^\circ.$$

La forme bilinéaire  $a$  étant symétrique et coercive sur  $V$ , la matrice de rigidité est symétrique et définie positive. Dés lors, le système linéaire admet une unique solution.

**Théorème 3.2.6.** *Considérons  $\mathcal{T}_h$  un maillage régulier sur  $\Omega$  que l'on suppose convexe. Soit  $U$  l'unique solution du système linéaire  $\mathcal{A}U = \mathcal{F}$ . Notons  $u_h = \sum_{i=1}^{N^\circ} U_i \varphi_{M_i}$ . Alors il existe une constante  $c > 0$ , pouvant dépendre de  $\Omega$ ,  $C$  (la constante de régularité du maillage), mais pas de  $h$ , telle que*

$$|u - u_h|_{H^1(\Omega)} \leq ch \|f\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}.$$

*PREUVE.* Démarrons avec le lemme de C  a qui nous garantit l'existence d'une constante  $c > 0$  telle que

$$|u - u_h|_{H^1(\Omega)} \leq c \inf_{v_h \in V_h^{(1)}} |u - v_h|_{H^1(\Omega)}.$$

Afin de choisir  $v_h = \mathcal{I}_h^{(1)}u$ , il nous faut nous assurer que  $u \in H^2(\Omega)$ . Comme  $f \in \mathbb{L}^2(\Omega)$ , nous savons alors que  $\Delta u \in \mathbb{L}^2(\Omega)$ . On montre alors que si  $\Omega$  est convexe et si  $f \in \mathbb{L}^2(\Omega)$ , alors la solution vérifie  $u \in H^2(\Omega)$  et l'on a  $|u|_{H^2(\Omega)} \leq \chi_\Omega \|f\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}$ . Dès lors, nous pouvons utiliser le résultat d'interpolation du Théorème 3.2.5 et nous avons

$$|u - u_h|_{H^1(\Omega)} \leq ch |u|_{H^2(\Omega)} \leq c\chi_\Omega h \|f\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}.$$

cqfd

Dans le cas où  $\Omega$  n'est pas convexe, la fonction  $u$  n'est alors plus nécessairement dans  $H^2(\Omega)$ . En pratique, on observe alors un ordre de convergence plus faible.

Regardons maintenant le processus de construction de la matrice de rigidité  $\mathcal{A}$ . En raisonnant sur les supports des fonctions de base  $\{\varphi_{M_i}\}$ , on voit que

$$\mathcal{A}_{i,j} \neq 0 \Rightarrow \exists T \in \mathcal{T}_h, M_i \in T \text{ et } M_j \in T.$$

Ainsi, lorsque  $i \neq j$ , une condition nécessaire pour que  $\mathcal{A}_{i,j} \neq 0$  est que les deux sommets  $M_i$  et  $M_j$  soient situés dans une maille commune. Afin de comprendre la construction de la matrice  $\mathcal{A}$ , nous allons la calculer dans le cas d'un maillage structuré. Le calcul de cette

matrice sur des maillages non-structurés (par exemple ceux de la figure 3.5) ne se fait que sur ordinateur. Considérons le maillage de la figure suivante :

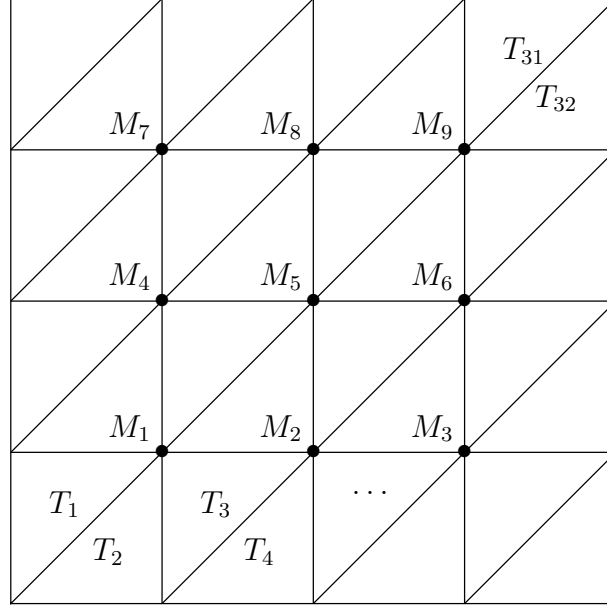


FIGURE 3.6 – Maillage uniforme de  $]0,1[ \times ]0,1[$  constitué de 32 mailles et de  $N^\circ = 9$  sommet intérieurs.

Ce maillage uniforme est constitué de 32 mailles triangulaires de côté  $(l, l\sqrt{2})$  avec  $l = 1/5$ . Le pas de ce maillage et la rondeur valent respectivement  $h = l\sqrt{2}$  et  $\rho = \frac{l}{2+\sqrt{2}}$ . Possédant 9 sommets intérieurs, la matrice  $\mathcal{A}$  est de taille  $9 \times 9$  et l'on sait en raisonnant sur les supports qu'elle est de la forme

$$\mathcal{A} = \left[ \begin{array}{ccc|ccc|ccc} \bullet & \bullet & 0 & \bullet & \bullet & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \bullet & \bullet & \bullet & 0 & \bullet & \bullet & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bullet & \bullet & 0 & 0 & \bullet & 0 & 0 & 0 \\ \hline \bullet & 0 & 0 & \bullet & \bullet & 0 & \bullet & \bullet & 0 \\ \bullet & \bullet & 0 & \bullet & \bullet & \bullet & 0 & \bullet & \bullet \\ 0 & \bullet & \bullet & 0 & \bullet & \bullet & 0 & 0 & \bullet \\ \hline 0 & 0 & 0 & \bullet & 0 & 0 & \bullet & \bullet & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bullet & \bullet & 0 & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bullet & \bullet & 0 & \bullet & \bullet \end{array} \right]$$

En examinant plus précisément la symétrie du maillage et les invariances par transla-

tion, cette matrice s'écrit sous la forme

$$\mathcal{A} = \left[ \begin{array}{ccc|ccc|ccc} a & b & 0 & c & d & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b & a & b & 0 & c & d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & a & 0 & 0 & c & 0 & 0 & 0 \\ \hline c & 0 & 0 & a & b & 0 & c & d & 0 \\ d & c & 0 & b & a & b & 0 & c & d \\ 0 & d & c & 0 & b & a & 0 & 0 & c \\ \hline 0 & 0 & 0 & c & 0 & 0 & a & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d & c & 0 & b & a & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d & c & 0 & b & a \end{array} \right]$$

avec les coefficients  $a, b, c, d$  définis par

$$a = \int_{\Omega} |\nabla \varphi_{M_1}|^2, \quad b = \int_{\Omega} \nabla \varphi_{M_1} \cdot \nabla \varphi_{M_2},$$

$$c = \int_{\Omega} \nabla \varphi_{M_1} \cdot \nabla \varphi_{M_4}, \quad d = \int_{\Omega} \nabla \varphi_{M_1} \cdot \nabla \varphi_{M_5}.$$

Chacun de ces coefficients doit être évalué sur les triangles correspondant aux supports. On a donc

$$a = \int_{T_1} |\nabla \varphi_{M_1}|^2 + \int_{T_2} \dots + \int_{T_3} \dots + \int_{T_{10}} \dots + \int_{T_{11}} \dots + \int_{T_{12}} \dots,$$

$$b = \int_{T_3} \nabla \varphi_{M_1} \cdot \nabla \varphi_{M_2} + \int_{T_{12}} \dots,$$

$$c = \int_{T_{10}} \nabla \varphi_{M_1} \cdot \nabla \varphi_{M_4} + \int_{T_{11}} \dots,$$

$$d = \int_{T_{11}} \nabla \varphi_{M_1} \cdot \nabla \varphi_{M_5} + \int_{T_{12}} \dots$$

Pour calculer ces coefficients, utilisons l'expression (3.21) des coordonnées barycentriques du triangle. En particulier, nous avons,

$$\nabla \varphi_{M_1}|_{T_1} = -\frac{1}{l} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \nabla \varphi_{M_1}|_{T_3} = -\frac{\sqrt{2}}{l} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, on obtient

$$\int_{T_1} |\nabla \varphi_{M_1}|^2 = \frac{l^2}{2} \frac{1}{l^2} = \frac{1}{2}, \quad \int_{T_3} |\nabla \varphi_{M_1}|^2 = \frac{l^2}{2} \frac{2}{l^2} = 1.$$

Par symétrie évidente, nous avons aussi,

$$\int_{T_1} |\nabla \varphi_{M_1}|^2 = \int_{T_2} |\nabla \varphi_{M_1}|^2 = \int_{T_{11}} |\nabla \varphi_{M_1}|^2 = \int_{T_{12}} |\nabla \varphi_{M_1}|^2,$$

et

$$\int_{T_3} |\nabla \varphi_{M_1}|^2 = \int_{T_{10}} |\nabla \varphi_{M_1}|^2.$$

Ainsi, en rassemblant les contributions, nous obtenons

$$a = 4.$$

En procédant de la même manière, nous avons

$$b = c = -1, \quad d = 0.$$

Remarquons que la nullité du coefficient  $d$  provient du fait que les gradient  $\nabla \varphi_{M_1}$  et  $\nabla \varphi_{M_5}$  sont orthogonaux. Cet exemple peut se généraliser dans le cadre d'un maillage plus raffiné contenant  $N^\circ = n^2$  sommets intérieurs avec le même principe de numérotation. On obtient alors

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} B & C & 0 & \dots & 0 \\ C & B & C & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & C & B & C \\ 0 & \dots & 0 & C & B \end{pmatrix}$$

avec  $B$  et  $C$  des matrices carrées de taille  $n$  telles que

$$B = \text{tridiag}(-1, 4, -1) \quad \text{et} \quad C = -I_n.$$

On dit que la matrice est alors tri-diagonale par bloc.

Terminons cette application par le calcul du second membre en utilisant les quadratures du triangle. Le principe est le même qu'en dimension 1 : une quadrature à  $l_g$  points sur une maille  $T$  consiste en la donnée de  $l_g$  réels  $(\omega_1, \dots, \omega_{l_g})$  appelés poids et de  $l_g$  points  $(\xi_1, \dots, \xi_{l_g})$  de  $T$  appelés noeuds de la quadrature. L'intégrale d'une fonction  $\chi : T \rightarrow \mathbb{R}$  est alors approchée par une somme finie :

$$\int_T \chi(x, y) \, dT \simeq \sum_{l=1}^{l_g} \omega_l \chi(\xi_l).$$

Introduisons l'espace vectoriel des fonctions polynômiales en  $x$  et  $y$  de degré total inférieur ou égal à  $k$  :

$$\mathbb{P}_k = \left\{ p : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : p(x, y) = \sum_{\substack{0 \leq n, m \leq k \\ m+n \leq k}} \alpha_{m,n} x^m y^n, \alpha_{m,n} \in \mathbb{R} \right\}.$$

$\mathbb{P}_k$  est un espace vectoriel de dimension  $\frac{1}{2}(k+1)(k+2)$ . Le degré de la quadrature est alors défini comme le plus grand entier  $k_g$  tel que

$$\forall p \in \mathbb{P}_{k_g}, \quad \int_T p(x, y) \, dT = \sum_{l=1}^{l_g} \omega_l p(\xi_l).$$

En dimension 2, il est commode de repérer les noeuds de la quadrature en indiquant les coordonnées barycentriques relativement aux sommets du triangle. Le tableau 3.2 représente différentes formules de quadrature. Dans ce tableau, nous appelons multiplicité le nombre de permutations à effectuer sur les coordonnées barycentriques afin d'obtenir tous les noeuds de la quadrature. Par exemple, la quadrature de degré 2 utilise les 3 noeuds  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$ ,  $(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$  et  $(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ , avec à chaque fois le poids  $\frac{1}{3} |T|$ .

$k_g$	$l_g$	Poids	Noeuds	Mult.
1	1	$ T $	$(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$	1
1	3	$\frac{1}{3}  T $	$(1, 0, 0)$	3
2	3	$\frac{1}{3}  T $	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$	3
4	4	$-\frac{9}{16}  T $	$(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$	1
		$\frac{25}{48}  T $	$(\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{3}{5})$	3

TABLE 3.2 – Table de quadrature sur un triangle  $T$ .

### 3.3 Extensions et analyse des éléments finis en dimension 2

#### 3.3.1 Éléments finis d'ordre 2

Définissons l'espace polynômial

$$\mathbb{P}_2 := \left\{ p : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \mid p(x, y) = \sum_{\substack{0 \leq n, m \leq 2 \\ m+n \leq 2}} \alpha_{m,n} x^m y^n \right\}.$$

Cet espace est de dimension 6. Introduisons maintenant l'espace d'approximation

$$V_h^{(2)} = \left\{ v_h \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega}) \mid \forall \ell = 1..N_T, \ v_h|_{T_\ell} \in \mathbb{P}_2, \ v|_{\partial\Omega} = 0 \right\}. \quad (3.26)$$

Cet espace est constitué de fonctions globalement continues et localement paraboliques sur chaque triangle du maillage. Pour déterminer une base de cet espace, considérons

$M \in \mathcal{N}_h$  un noeud intérieur du maillage et notons  $\mathcal{T}(M)$  l'ensemble des mailles contenant ce point comme sommet. Introduisons les fonctions  $\varphi_M : H^2(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$

$$\varphi_M(\mathbf{x}) = \begin{cases} \lambda_{T,M}(\mathbf{x})(2\lambda_{T,M}(\mathbf{x}) - 1) & \text{si } \mathbf{x} \in T, \text{ avec } T \in \mathcal{T}(M), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (3.27)$$

Pour un point  $N \in \mathcal{N}_h \cup \mathcal{N}_h^\partial$  relié par une arête au point  $M$ , on note  $E_{M,N}$  l'arête du maillage reliant ces deux points. A chacune de ces arêtes, on associe la fonction

$$\psi_{E_{M,N}}(\mathbf{x}) = \begin{cases} 4\lambda_{T,M}(\mathbf{x})\lambda_{T,N}(\mathbf{x}) & \text{si } \mathbf{x} \in T, \text{ avec } T \in \mathcal{T}(M) \cap \mathcal{T}(N), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (3.28)$$

Dans la suite, on notera  $\mathcal{E}_h$  l'ensemble des arêtes du maillage qui ne sont pas portées sur le bord  $\partial\Omega$  (mais qui peuvent avoir une extrémité sur le bord) :

$$\mathcal{E}_h = \{E_{M_i, M_j} \mid i = 1 \dots N, j = 1 \dots N^\circ, i > j\} \quad (3.29)$$

On pourra vérifier le résultat suivant :

**Proposition 3.3.1.** *L'ensemble  $\{\{\varphi_M\}_{M \in \mathcal{N}_h}, \{\psi_E\}_{E \in \mathcal{E}_h}\}$  forme une base de  $V_h^{(2)}$ .*

L'opérateur d'interpolation  $\mathcal{I}_h^{(2)} : \mathcal{C}^0(\overline{\Omega}) \rightarrow V_h^{(2)}$  est défini, comme dans le cas de la dimension 1 sous la forme

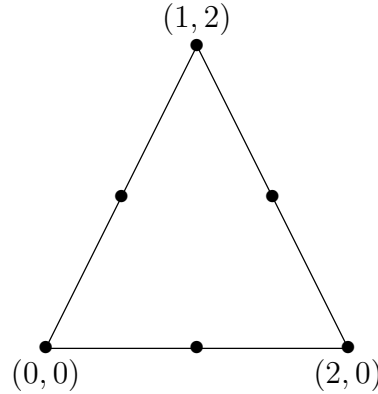
$$\mathcal{I}_h^{(2)} : v \mapsto \sum_{M \in \mathcal{N}_h} v(M)\varphi_M + \sum_{E_{M,N} \in \mathcal{E}_h} v\left(\frac{M+N}{2}\right)\psi_{E_{M,N}}.$$

**Proposition 3.3.2.** *Il existe une constante  $c > 0$  telle que, pour tout  $v \in H^3(\Omega)$ ,*

$$\|\mathcal{I}_h^{(2)}(v) - v\|_{L^2(\Omega)} + h \left| \mathcal{I}_h^{(2)}(v) - v \right|_{H^1(\Omega)} \leq ch^3 |v|_{H^3(\Omega)}$$

Les éléments finis  $\mathbb{P}_2$  Lagrange pourront être envisagés pour l'approximation du problème de Poisson avec un second membre régulier. Dans le cas d'un second membre non régulier, l'utilisation des éléments  $\mathbb{P}_1$  sera suffisant.

**Exercice 3.3.1.** Calculer la matrice de masse avec les éléments finis de Lagrange  $\mathbb{P}_2$  sur le triangle suivant



### 3.4 Exercices

**Exercice 3.4.1.** Considérons  $\Omega = ]a, b[$  muni du maillage (3.1) et  $\mathbb{P}_0$  l'espace des polynômes définis sur  $\mathbb{R}$  et de degré 0. Introduisons l'espace d'approximation

$$V_h^{(0)} = \left\{ v \in \mathbb{L}^2(\Omega) \mid v_{T_i} \in \mathbb{P}_0 \text{ pour tout } 0 \leq i \leq N \right\}.$$

1. Montrer que  $V_h^{(0)}$  est un espace vectoriel. Calculer sa dimension et proposer une base que l'on notera  $\{\varphi_0, \varphi_1, \dots\}$ .
2. Cet espace est-il  $H^1(I)$ -conforme ?  $\mathcal{C}^0(I)$ -conforme ?
3. Introduisons l'opérateur d'interpolation  $\mathcal{I}_h^{(0)}$  défini par

$$\mathcal{I}_h^{(0)} : H^1(\Omega) \ni v \mapsto \mathcal{I}_h^{(0)}(v) = \sum_{i=0}^N \left( \frac{1}{h_i} \int_{x_i}^{x_{i+1}} v(t) dt \right) \varphi_i.$$

Montrer que pour tout  $v \in H^1(\Omega)$ , on a

$$\|v - \mathcal{I}_h^{(0)} v\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \leq h \|v'\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}.$$

**Exercice 3.4.2** (Élément fini de Crouzeix-Raviart). Considérons le triangle  $T$  de sommets  $(M_i)_{i=1..3}$ . On définit les forme linéaires

$$\sigma_{M_i}^{\text{CR}}(v) := \frac{1}{|E_{M_i}|} \int_{E_{M_i}} v,$$

avec  $E_{M_i}$  l'arête qui est opposée au sommet  $M_i$ . Introduisons les fonctions de base

$$\theta_{M_i}(\mathbf{x}) = 1 - 2\lambda_{T, M_i}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in T.$$

1. Montrer  $(\theta_{M_1}, \theta_{M_2}, \theta_{M_3})$  forme une base de  $\mathbb{P}_1$ .
2. Pour une fonction  $v \in \mathbb{L}^2(\Omega)$ , exprimer l'opérateur d'interpolation. Quel avantage présente cet opérateur en comparaison de l'opérateur d'interpolation de Lagrange  $\mathbb{P}_1$  ?



# Bibliographie

- [1] Finite Elements, A.Ern et J.-L. Guermond, 2021,
- [2] Analyse Numérique et Optimisation, G. Allaire, 2010,
- [3] The mathematical theory of the finite element methods, S.Brenner et L.R. Scott, 2008

Les références ci-dessus ont été utilisées pour la rédaction de ce manuscript et pourront être consultées pour des précisions supplémentaires ou pour aller plus loin.