

Représentation graphique 2D : Transformée de Fourier et Transformée en Ondelettes pour le dessin

Projet - UF Traitement du Signal

Raphaël Bourgeois, Julien Kaszuba, Yousra Bouchikhi, Thomas Savary, Mountassir El Moustaaïd

Juin 2022



Table des matières

1	Introduction	1
2	Acquisition et représentation machine d'un dessin	2
3	Dessin par la série de Fourier	3
3.1	Le calcul des coefficients de Fourier	3
3.2	Dessin 2D par la Transformée de Fourier	3
4	Dessin par la transformée en ondelettes	4
4.1	Décomposition d'un signal dans une base d'ondelettes	4
4.2	Dessin 2D par transformée en ondelettes	4

1 Introduction

Dans ce travail nous allons voir comment il est possible de tracer des dessins en 2D , dans un premier temps, à l'aide de la série de Fourier, puis dans un second temps, à partir de la transformée en Ondelettes complexes de Daubechies. Le choix de deux méthodes différentes pour effectuer la même expérience est justifié. Nous verrons au cours de cette étude dans quels cas a-t-on besoin d'avoir recours à la Transformée en Ondelettes. Pour l'animation graphique des dessins nous allons utiliser la librairie Manim de python.

2 Acquisition et représentation machine d'un dessin

Définissons ce qu'on appelle un dessin en 2D. Une forme à dessiner est décrite par une fonction paramétrique :

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{C} \\ t &\mapsto f(t) \end{aligned}$$

Les coordonnées sont donc données par la partie réelle et la partie imaginaire.

Nous avons fait le choix d'acquérir des formes à dessiner depuis plusieurs sources : des caractères LaTeX, des dessins faits par l'utilisateur et des images dont on extrait le contour.

Les fonctions paramétriques qui représentent les dessins n'ont bien évidemment pas de formule analytique. Ces fonctions sont représentées en machine par des tableaux de coefficients complexes décrivant les états à chaque instant. Nous avons utilisé 3 méthodes différentes afin d'extraire les tableaux paramétriques.

La première méthode consiste à utiliser une fonction *manim* qui prend en entrée un caractère (le caractère Sigma par exemple) en LaTeX, et qui renvoie la liste des points dans le bon ordre.

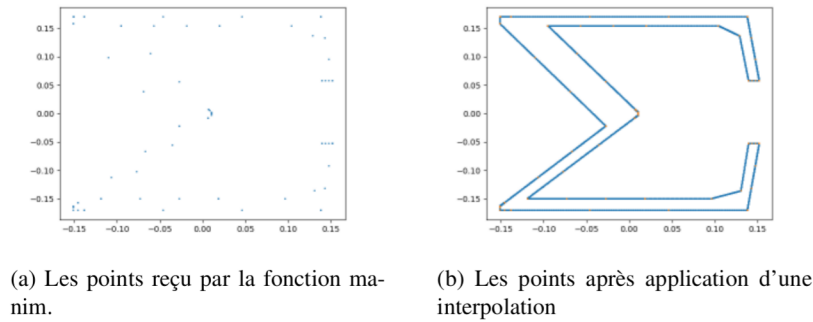


FIGURE 1 – Fonctions paramétriques par Manim

La deuxième méthode consiste à utiliser *Open-Cv* pour afficher une interface sur laquelle l'utilisateur peut dessiner avec sa souris. Le dessin est transformé en temps réel en une liste de points ayant le même ordre que les mouvements de la souris (voir FIGURE 2). Une fois le dessin est prêt, Il ne reste qu'à cliquer sur "q" pour fermer l'interface et lancer le calcul et la visualisation.

La troisième méthode consiste à prendre une image simple (FIGURE 3) et d'en extraire les points (FIGURE 4). Les points extraites ne seront pas forcément dans le bon ordre pour avoir une bonne visualisation avec Fourier ou avec les Ondelettes, Il faut donc les ordonner (problème du voyageur - graphe hamiltonien).

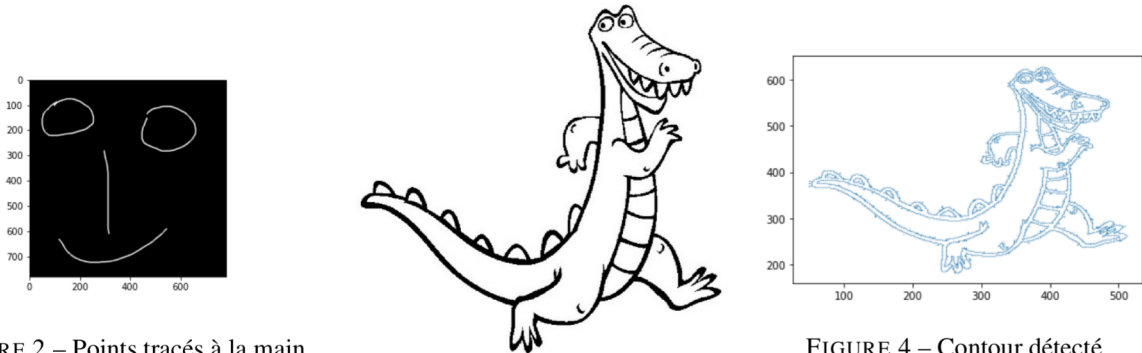


FIGURE 2 – Points tracés à la main

FIGURE 3 – Image originale

FIGURE 4 – Contour détecté

3 Dessin par la série de Fourier

3.1 Le calcul des coefficients de Fourier

On rappelle que la série de Fourier associée à une fonction f est donnée par :

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{int} \quad (1)$$

avec

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t) e^{-int} dt \quad (2)$$

T étant la période de la fonction f .

f est égale à sa série de Fourier. On a donc l'approximation suivante :

$$f(t) \approx \sum_{-N}^{+N} c_n e^{int} \quad (3)$$

avec $N \in \mathbb{N}$

Nous pouvons donc approcher la fonction paramétrique, donc une forme géométrique, par une somme finie de fonctions complexes dépendants du temps : $c_n e^{int}$. Pour le calcul des coefficients c_n , nous avons utilisé l'intégrale de Riemann afin d'approximer numériquement l'intégrale de leur définition sur des segments de longueur 2π .

3.2 Dessin 2D par la Transformée de Fourier

Une fois les coefficients de Fourier de l'équation paramétrique sont obtenus, la magie peut opérer. En effet, l'équation (3) montre que la fonction paramétrique peut être décomposée dans une base **d'exponentielles complexes**, plus précisément dans la base de cercles paramétriques $\{e^{in\omega t}\}_{n \in \mathbb{Z}}$.

Graphiquement, la fonction complexe e^{int} est un point complexe qui décrit un cercle unitaire à travers le temps. Sa vitesse angulaire est donnée par n . Si n est positive, alors le point tournera dans le sens trigonométrique. Inversement, si n est négatif, le point tournera dans le sens des aiguilles d'une montre.

Ces fonctions complexes sont multipliées par les coefficients de Fourier qui sont complexes. Le module de ce coefficient donnera le rayon du cercle et l'argument du coefficient de Fourier aura pour effet de donner une rotation au cercle. L'effet est plutôt discret car un cercle tourné de 90° (ou $\frac{\pi}{2}$) est toujours un cercle. Mais l'on peut voir cet effet comme un changement de condition initiale. Par exemple, le point associé à e^{it} commencera sa courbe à droite du cercle là où le point associé à $\frac{\pi}{2} e^{it}$ commencera son tracé en haut du cercle.

$$f(t) = \dots + c_{-2}e^{-2 \cdot 2\pi i t} + c_{-1}e^{-1 \cdot 2\pi i t} + c_0e^{0 \cdot 2\pi i t} + c_1e^{1 \cdot 2\pi i t} + c_2e^{2 \cdot 2\pi i t} + \dots$$

L'addition de ces cercles va nous décrire la forme géométrique représentée par la fonction paramétrique. Quand nous parlons d'addition de cercles, cela veut dire que l'on définit le centre d'un nouveau cercle par le point qui décrit le cercle précédent. Ainsi le point décrivant le dernier cercle, représentera la somme de toutes les composantes exponentielles complexes, et donc la forme géométrique.

4 Dessin par la transformée en ondelettes

4.1 Décomposition d'un signal dans une base d'ondelettes

Dans la partie précédente, on a vu que l'on pouvait décomposer toute fonction f de $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$ à l'aide de la famille $(e^{-in\omega t})_{n \in \mathbb{Z}}$. On dit alors que cette famille est une base hilbertienne de $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$.

En 1986, le mathématicien français Yves Meyer (prix Abel 2017) introduit la notion de bases hilbertiennes d'ondelettes s'appuyant sur des espaces d'approximation V_j et des espaces de détails W_j vérifiant un certains nombre de propriétés, dont la suivante :

$$\forall j \in \mathbb{Z}, V_{j-1} = V_j \oplus W_j \quad (4)$$

On en déduit alors que, $\forall l \geq j$:

$$V_j = \left(\bigoplus_{k=j+1}^l W_k \right) \oplus V_l \quad (5)$$

On introduit les fonctions d'échelles $(\phi_{j,k})_{k \in \mathbb{Z}}$ et les ondelettes $(\psi_{j,k})_{k \in \mathbb{Z}}$ qui sont respectivement des bases de V_j et de W_j . La décomposition en ondelettes d'une fonction f de $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$ est alors donnée par :

$$f = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \psi_{j,k} \rangle \psi_{j,k} \quad (6)$$

D'un point de vue pratique, si l'on souhaite décomposer en ondelettes un signal de taille 2^N (prenons par exemple $N = 10$), on le considère comme un élément de V_{-10} et on utilise le principe décrit par la formule (4). Cela se traduit par une décomposition successive du signal dans V_{-9} et W_{-9} puis dans V_{-8}, W_{-8} et W_{-9} et ceci jusqu'à atteindre le niveau d'approximation souhaité. Par exemple, si l'on veut décomposer notre signal de taille 1024 jusqu'à atteindre V_{-3} , on aura :

$$f = \sum_{j=-10}^{-3} \sum_{k=0}^{2^{-j}-1} \langle f, \psi_{j,k} \rangle \psi_{j,k} + \sum_{l=0}^{2^{-3}+1} \langle f, \phi_{-3,l} \rangle \phi_{-3,l} \quad (7)$$

Pour calculer les $\langle f, \phi_{j,k} \rangle$ et les $\langle f, \psi_{j,k} \rangle$, on interprète les 1024 points du signal initial comme les coefficients de projection de f dans V_{-10} (la première valeur du signal correspond à $\langle f, \phi_{-10,0} \rangle$ par exemple) et on utilise les formules suivantes :

$$\phi_{j,k} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_n \phi_{j-1,n+2k} \quad (8)$$

$$\psi_{j,k} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} g_n \psi_{j-1,n+2k} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^{1-n} h_{1-n} \psi_{j-1,n+2k} \quad (9)$$

4.2 Dessin 2D par transformée en ondelettes

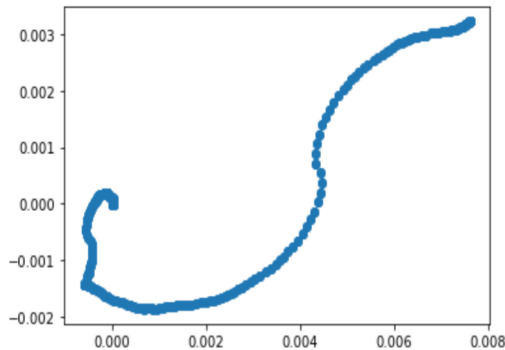


FIGURE 5 – Fonction d'échelle $(\phi_{-3,0})$

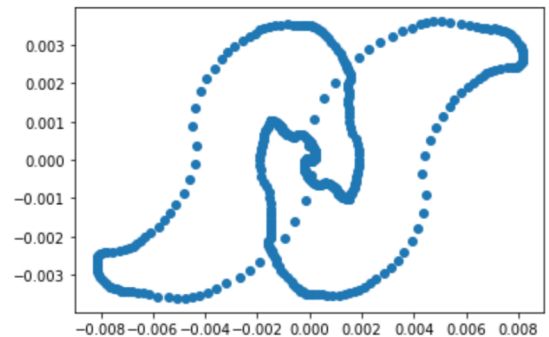


FIGURE 6 – Ondelette $(\psi_{-3,0})$

Dans cette partie, nous n'avons plus à faire à des fonctions complexes décrivant des cercles mais d'autres formes géométriques décrites par les fonctions complexes : $\Phi_{j,k}$ et $\Psi_{j,k}$. Vous pouvez apprécier leur forme géométrique sur la figure ci-dessus.