BE - Couplage de domaines en élasticité

Objectif du bureau d'étude

Le but de ce BE est de réaliser numériquement le couplage de deux domaines élastiques au moyen de la méthode des multiplicateurs de Lagrange. Les deux maillages seront supposés géométriquement conformes mais ils pourront être incompatibles à l'interface (nœuds en vis-à-vis non alignés). Le travail demandé s'appuie sur les fichiers python `couplage_elast2D_1.py`, `couplage_elast2D_2.py` et `couplage_elast2D_3.py`.

Présentation du problème

On considère une plaque rectangulaire 2D élastique modélisée avec l'hypothèse des contraintes planes en petites perturbations (cf. figure ci-dessous). On suppose un bi-matériaux isotrope pour la plaque. La partie gauche (module de Young E_1) est plus souple que la partie droite (module de Young E_2). La plaque est soumise à de la traction par application d'un effort horizontal f_{sx} sur son bord droit. On lui impose des conditions de symétrie sur son bord gauche et sur son bord inférieur.

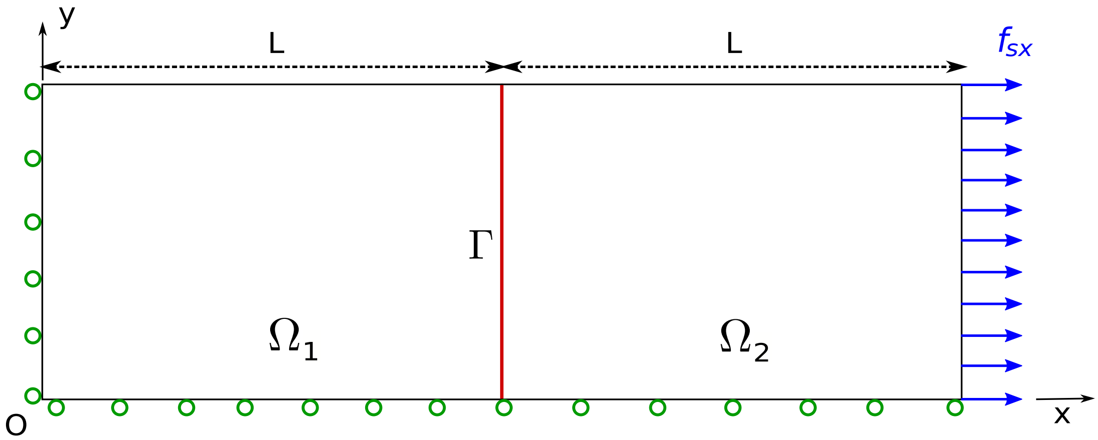

FIGURE 1 – Couplage de domaines élastiques 2D

Pour calculer numériquement la solution du problème, on va réaliser un couplage des deux domaines Ω_1 et Ω_2 au travers de l'interface Γ.

Travail demandé

Partie 1 : Prise en main du modèle de calcul EF

Pour commencer, on va réaliser le calcul sur un seul domaine.

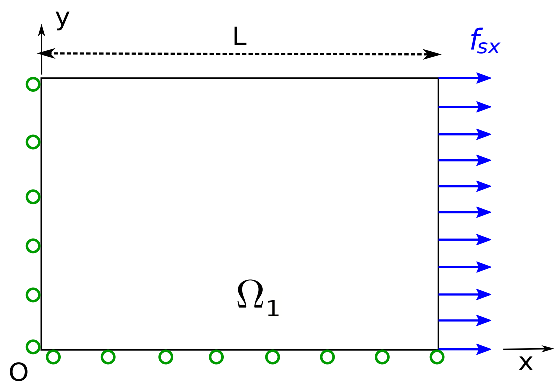

FIGURE 2 – Calcul préliminaire sur un seul domaine

Q1 : Écrire les équations fortes associées au problème d'élasticité de ce TP.

Q2 : Étant données les conditions aux limites, on peut supposer que la matrice des contraintes $\underline{\underline{\sigma}}$ possède une unique composante $\sigma_{xx}(x)$ qui ne dépend que de x. Avec cette hypothèse, résoudre analytiquement le problème d'élasticité de ce TP afin de calculer le déplacement horizontal de la plaque le long d'une ligne $y = constante$.

Q3 : Comprendre globalement la section "CALCUL DES DEPLACEMENTS" du fichier `couplage_elast2D_1.py`. Comment sont rangés les degrés de liberté du champ de déplacement ?

Q4 : Faire tourner le code afin de résoudre le système linéaire EF et visualiser la déformée du maillage. En particulier, étudier les cas $\nu = 0$ et $\nu \neq 0$ (par exemple, $\nu = 0.3$) pour mettre en évidence l'effet poisson.

Q5 : En post-traitement, tracer le déplacement horizontal le long du bord inférieur de la plaque et vérifier que vous obtenez un résultat cohérent avec la réponse à la question 2.

Q6 : Enfin, en vous servant du calcul de la contrainte σ_{xx} effectuée dans le code, récupérer la déformation longitudinale ε_{xx} pour la tracer sur le maillage.

Partie 2 : Couplage de domaines dans le cas de maillages compatibles

On revient à présent au problème de référence, à savoir celui présentant deux domaines avec des matériaux distincts. On se place tout d'abord dans le cas de maillages compatibles à l'interface, c'est-à-dire que les nœuds des éléments des deux maillages sont en vis-à-vis le long de Γ.

Q7 : En considérant un coefficient de poisson $\nu = 0$ pour les deux matériaux, intuiter l'expression analytique du déplacement horizontal de la plaque le long d'une ligne $y = constante$.

Q8 : À partir de la formulation de couplage et du système linéaire augmenté qu'il en découle, montrer que dans le cas de maillages compatibles, les opérateurs de Mortar se réduisent simplement à des opérateurs booléens qui sélectionnent les degrés de liberté d'interface des deux maillages.

Q9 : Compléter le fichier `couplage_elast2D_2.py` afin de mettre place le couplage de maillages compatibles.

Q10 : En post-traitement, tracer le déplacement horizontal le long du bord inférieur de la plaque et afficher la déformation longitudinale ε_{xx} sur le maillage des deux domaines.

Partie 3 : Couplage de domaines dans le cas de maillages incompatibles

Pour finir, on considère le raccordement de maillages incompatibles. En fait, on se restreint au cas de maillages hiérarchiques, c'est-à-dire que le maillage le plus fin est obtenu par sous-découpage du maillage grossier. C'est ce qui est la plupart du temps réalisé en pratique. Ici, on prend le cas d'une subdivision par deux entre le maillage du domaine Ω_1 (le plus grossier) et le maillage du domaine Ω_2 (le plus fin). On discrétisera le multiplicateur de Lagrange avec le maillage le plus fin sur l'interface.

Q11 : En reprenant le raisonnement de Q8, montrer les légères modifications à effectuer sur les opérateurs de Mortar dans le cas de maillages hiérarchiques.

Q12 : Réaliser ces modifications dans le fichier `couplage_elast2D_3.py`.

Q13 : Qu'en déduisez-vous sur l'intérêt d'un tel couplage pour la simulation de structures complexes ?