# TD 1 : Différences Finies

*UF ≪ Modélisation et calcul scientifique ≫*
*Formation ModIA ≪ Modélisation et Intelligence Artificielle ≫*

Nicolas Bertier (nicolas.bertier@onera.fr)

INSA, 4A

# Exercice 1 : Etude du schéma « Leapfrog » pour l'équation d'advection

**Equation d'advection discrétisée à l'aide du schéma Leapfrog :**

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^{n-1}}{2\Delta t} + a\frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x} = 0$$

1. Quels sont les ordres en espace et en temps de ce schéma ?
2. Étudiez la stabilité de ce schéma.
3. Quels sont les avantages et inconvénients de ce schéma ?

# Analyse de stabilité

## Ecriture explicite de $u_i^{n+1}$ en fonction des autres états :

$$u_i^{n+1} = u_i^{n-1} - \mathcal{C}\left(u_{i+1}^n - u_{i-1}^n\right)$$

## Analyse de Von Neumann pour l'étude de stabilité :

- domaine périodique ;
- décomposition de la solution discrète en série de Fourier finie, chaque terme étant de la forme $A^n\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}i\varphi}$.

En réinjectant ce mode dans le schéma discret en espace et en temps on obtient successivement :

$$\begin{aligned}
A^{n+1}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}i\varphi} &= A^{n-1}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}i\varphi} - \mathcal{C}\left(A^n\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(i+1)\varphi} - A^n\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(i-1)\varphi}\right)\\
A^{n+1} &= A^{n-1} - \mathcal{C}\left(A^n\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi} - A^n\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\varphi}\right)\\
A^{n+1} &= A^{n-1} - \mathcal{C}A^n\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\varphi}\right)
\end{aligned}$$

# Equation du facteur d'amplification

Par définition, on a :

$$\mathcal{G} = \frac{A^{n+1}}{A^n}$$

Or, le facteur d'amplification ne dépendant pas de $n$, on a également :

$$\mathcal{G} = \frac{A^n}{A^{n-1}} = \frac{A^{n+1}}{A^n}$$

En divisant l'expression précédente par $A^n$ on obtient successivement :

$$\begin{aligned} \frac{A^{n+1}}{A^n} &= \frac{A^{n-1}}{A^n} - \mathcal{C}\left(e^{j\varphi} - e^{-j\varphi}\right) \\ \mathcal{G} &= \frac{1}{\mathcal{G}} - \mathcal{C}\left(e^{j\varphi} - e^{-j\varphi}\right) \end{aligned}$$

En multipliant cette équation par $\mathcal{G}$, on obtient l'équation du second degré :

$$\mathcal{G}^2 + \mathcal{G}\,\underbrace{\mathcal{C}\left(e^{j\varphi} - e^{-j\varphi}\right)}_{B} - 1 = 0$$

# Résolution de l'équation du facteur d'amplification

Soit l'équation du second degré pour $\mathcal{G}$ :

$$\mathcal{G}^2 + B\mathcal{G} - 1 = 0$$

avec :

$$B = \mathcal{C}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\varphi}\right) = 2\mathrm{j}\mathcal{C}\sin\varphi$$

Le discriminant $\Delta$ de l'équation s'écrit :

$$\Delta = B^2 + 4 = -4\mathcal{C}^2\sin^2\varphi + 4 = 4\left(1 - \mathcal{C}^2\sin^2\varphi\right)$$

Les racines de l'équation sont alors :

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_1 &= -\mathrm{j}\mathcal{C}\sin\varphi + \sqrt{\left(1 - \mathcal{C}^2\sin^2\varphi\right)} \\
\mathcal{G}_2 &= -\mathrm{j}\mathcal{C}\sin\varphi - \sqrt{\left(1 - \mathcal{C}^2\sin^2\varphi\right)}
\end{aligned}$$

# Stabilité du schéma selon $\mathcal{C}$

On observe que ce schéma est **conditionnellement stable** :

- Si $\mathcal{C} > 1$ alors les solutions sont **purement imaginaires** (le discriminant est négatif) et de module supérieur à l'unité. Le schéma est donc **instable** sous cette condition.
- Si $\mathcal{C} \leq 1$, le discriminant est positif et les solutions comportent alors une partie imaginaire et une partie réelle. Le carré du module du facteur d'amplification s'écrit alors (qu'il s'agisse de $\mathcal{G}_1$ ou $\mathcal{G}_2$) :

$$\begin{aligned} |\mathcal{G}|^2 &= \left(1 - \mathcal{C}^2 \sin^2 \varphi\right) + \mathcal{C}^2 \sin^2 \varphi = 1 \\ |\mathcal{G}| &= 1 \end{aligned}$$

Le module du facteur d'amplification est donc toujours égal à l'unité, quel que soit $\mathcal{C} \leq 1$. On parle alors dans ce cas de **stabilité neutre**.

# Exercice 2 : Etude d'une équation de diffusion discrète

**Soit l'équation de diffusion :**

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

1. Proposez un schéma DF centré pour la dérivée seconde en espace de $u$.
2. Utilisez le schéma d'intégration temporelle d'Euler explicite afin d'écrire un schéma discret (en espace et en temps)
3. Quelles sont les condition de stabilité de ce schéma ?
4. Mettez en perspective les résultats obtenus par rapport à ce qui a été étudié en cours sur l'équation d'advection.

# Rappel de trigonométrie

## Rappel des formules d'Euler :

$$\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2}$$
$$\sin\varphi = \frac{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}{2}$$

## Ce qui permet d'écrire après quelques transformations :

$$\sin^2\varphi = \frac{1-\cos(2\varphi)}{2}$$

INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES TOULOUSE

# Correction exercice 2 / question 1

## Question 1

Proposez un schéma DF pour la dérivée seconde en espace de $u$.

## Principe de résolution

- De la même manière que l'on a exprimé les dérivées premières de $u$ par des différences entre des valeurs de $u$ en différents points de discrétisation, on va maintenant **exprimer la dérivée seconde comme une différence de dérivées premières**.
- On choisit ici de prendre un décentrement dans le sens de l'écoulement :

$$\frac{\partial u}{\partial t} \approx \frac{1}{\Delta x}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i+1} - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i}\right]$$

# Correction exercice 2 / question 1

**Développement de Taylor à l'ordre trois de $u_{i-1}$ au point $i$**

$$u_{i-1} = u_i - \Delta x \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\Bigg|_i + \frac{(\Delta x)^2}{2!}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)\Bigg|_i - \frac{(\Delta x)^3}{3!}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)\Bigg|_i + \mathcal{O}(\Delta x)^4$$

**Développement de Taylor à l'ordre trois de $u_i$ au point $i+1$**

$$u_i = u_{i+1} - \Delta x \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\Bigg|_{i+1} + \frac{(\Delta x)^2}{2!}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)\Bigg|_{i+1} - \frac{(\Delta x)^3}{3!}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)\Bigg|_{i+1} + \mathcal{O}(\Delta x)^4$$

INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES TOULOUSE

# Correction exercice 2 / question 1

Expression des dérivées premières aux points $i$ et $i+1$ :

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\Big|_{i} &= \frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta x} - \frac{\Delta x}{2!}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)\Big|_{i} + \frac{(\Delta x)^2}{3!}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)\Big|_{i} + \mathcal{O}(\Delta x)^3 \\
\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\Big|_{i+1} &= \frac{u_{i+1} - u_{i}}{\Delta x} - \frac{\Delta x}{2!}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)\Big|_{i+1} + \frac{(\Delta x)^2}{3!}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)\Big|_{i+1} + \mathcal{O}(\Delta x)^3
\end{aligned}
$$

# Correction exercice 2 / question 1

On peut alors écrire la différence entre les expressions discrètes de ces dérivées :

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i+1} - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i} = \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x)^3$$

Soit

$$\frac{1}{\Delta x}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i+1} - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i}\right] = \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{(\Delta x)^2} + \mathcal{O}(\Delta x)^2$$

On notera bien que ce schéma DF pour la dérivée seconde est **d'ordre deux** :

$$\left.\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)\right|_{i} = \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{(\Delta x)^2} + \mathcal{O}(\Delta x)^2$$

# Correction exercice 2 / question 2

## Question 2

Utilisez le schéma d'intégration temporelle d'Euler explicite afin d'écrire un schéma discret (en espace et en temps)

Utiliser le schéma d'intégration d'Euler explicite implique :

- De discrétiser la dérivée partielle par rapport au temps comme :

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)\Bigg|_i^n = \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + \mathcal{O}(\Delta t)$$

- D'évaluer les états du second membre de l'équation à l'instant $n$.

En utilisant la discrétisation centrée de la dérivée seconde établie précédemment et l'intégration Euler explicite, on obtient le schéma discret en espace et en temps suivant :

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = \kappa \left(\frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{(\Delta x)^2}\right)$$

# Correction exercice 2 / question 3

## Question 3

Quelles sont les condition de stabilité de ce schéma ?

Ecriture explicite de $u_i^{n+1}$ en fonction des autres états :

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \frac{\kappa \Delta t}{\Delta x^2}\left(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n\right)$$

On note un nouveau groupement combinant les pas d'espace et de temps, que l'on note $\mathcal{D}$ :

$$\mathcal{D} = \frac{\kappa \Delta t}{\Delta x^2}$$

Soit :

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \mathcal{D}\left(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n\right)$$

# Correction exercice 2 / question 3

**Afin d'étudier la stabilité de ce schéma, on va mettre en oeuvre l'analyse de Von Neumann, qui nécessite :**

- de se placer sur un domaine périodique ;
- de décomposer la solution discrète en série de Fourier finie.

- On rappelle que chaque terme de la série de Fourier est de la forme $A^n \, \mathrm{e}^{\mathrm{j} i \varphi}$.
- En réinjectant ce mode dans le schéma discret en espace et en temps on obtient successivement :

$$\begin{aligned}
A^{n+1} \, \mathrm{e}^{\mathrm{j} i \varphi} &= A^n \, \mathrm{e}^{\mathrm{j} i \varphi} + \mathfrak{D} \left( A^n \, \mathrm{e}^{\mathrm{j}(i+1)\varphi} - 2A^n \, \mathrm{e}^{\mathrm{j} i \varphi} + A^n \, \mathrm{e}^{\mathrm{j}(i-1)\varphi} \right) \\
A^{n+1} &= A^n + \mathfrak{D} \left( A^n \, \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi} - 2A^n + A^n \, \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\varphi} \right)
\end{aligned}$$

# Correction exercice 2 / question 3

On rappelle que le facteur d'amplification $\mathcal{G}$ peut s'écrire :

$$\mathcal{G} = \frac{A^{n+1}}{A^n}$$

Soit successivement :

$$\begin{aligned}
\mathcal{G} &= 1 + \mathfrak{D}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi} - 2 + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\varphi}\right) \\
&= 1 + \mathfrak{D}\left(\cos\varphi + \mathrm{j}\sin\varphi + \cos\varphi - \mathrm{j}\sin\varphi - 2\right) \\
&= 1 + 2\mathfrak{D}\left(\cos\varphi - 1\right)
\end{aligned}$$

Or, on rappelle la formule de trigonométrie (directement issue de la formule d'Euler) :

$$\sin^2\varphi = \frac{1 - \cos(2\varphi)}{2}$$

Soit enfin :

$$\mathcal{G} = 1 - 2\mathfrak{D}\left(2\sin^2\frac{\varphi}{2}\right) = 1 - 4\mathfrak{D}\sin^2\frac{\varphi}{2}$$

# Correction exercice 2 / question 3

On rappelle que le schéma numérique est stable ssi :

$$||\mathcal{G}|| \leq 1$$

Soit :

$$|1 - 4\mathfrak{D}\sin^2\frac{\varphi}{2}| \leq 1$$

Ce qui se traduit par la double inégalité :

$$\begin{array}{rcl} -1 \leq & 1 - 4\mathfrak{D}\sin^2\frac{\varphi}{2} & \leq 1 \\ -2 \leq & 4\mathfrak{D}\sin^2\frac{\varphi}{2} & \leq 0 \\ 2 \geq & 4\mathfrak{D}\sin^2\frac{\varphi}{2} & \geq 0 \end{array}$$

# Correction exercice 2 / question 3

## Le schéma est donc **conditionnellement stable**

- $\kappa > 0$ : le coefficient de diffusion doit être ***positif*** $\Rightarrow$ condition sur la **nature du phénomène physique** étudié (pas une condition numérique)
- $\mathcal{D} \leq \frac{1}{2}$ : condition liée à la discrétisation du problème, qui est l'équivalent pour une équation de diffusion de la condition sur $\mathcal{C}$ pour une équation de convection.

## Quelques remarques supplémentaires :

- On note que, contrairement au schéma centré pour la dérivée spatiale dans l'équation de convection, la discrétisation centrée de la dérivée seconde de l'équation est **stable**.
- Cela est lié à la manière dont l'information se propage avec les deux types d'équations physiques.