(Cours) TD 1 : Propriétés d'ellipticité des coefficients d'élasticité

On cherche à montrer que la forme bilinéaire de l'élasticité classique :

$$a(\underline{u},\underline{v}) = \int_\Omega \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{v}) : \underline{\underline{\underline{\underline{D}}}}\, \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u})\, d\Omega \qquad \forall\, u,v \in V$$ (e.v. contenant les champs de dépl)

est symétrique :

$$a(u,v) = a(v,u) \quad \forall\, u,v \in V.$$

et positive :

$$a(u,u) \geq 0 \qquad \forall\, u \in V.$$

On se place dans le cadre élastique, linéaire, homogène et isotrope.

Q1] On note $\underline{\underline{\varepsilon}}' = \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{v})$ et $\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u})$, on calcule :

$$\underline{\underline{\varepsilon}}' : \underline{\underline{\underline{\underline{D}}}}\, \underline{\underline{\varepsilon}} \underset{\text{déf Hooke}}{=} \underline{\underline{\varepsilon}}' : (\lambda \operatorname{Tr}(\underline{\underline{\varepsilon}})\, \underline{\underline{I}} + 2\mu\, \underline{\underline{\varepsilon}})$$

déf : $= \operatorname{Tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}' (\lambda \operatorname{Tr}(\underline{\underline{\varepsilon}})\underline{\underline{I}} + 2\mu\, \underline{\underline{\varepsilon}}))$

linéarité de la Trace : $= \lambda \operatorname{Tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}' \operatorname{Tr}(\underline{\underline{\varepsilon}})\underline{\underline{I}}) + 2\mu \operatorname{Tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}'\underline{\underline{\varepsilon}})$

$$\begin{pmatrix} \varepsilon'_{11}\operatorname{Tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}) & \times & \times \\ \times & \varepsilon'_{22}\operatorname{Tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}) & \times \\ \times & \times & \varepsilon'_{33}\operatorname{Tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}) \end{pmatrix}$$

$$= \lambda \operatorname{Tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}') \operatorname{Tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}) + 2\mu \operatorname{Tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}\,\underline{\underline{\varepsilon}}')$$

symétrie de Trace

$\operatorname{Tr} = \operatorname{Tr}(\underline{\underline{\varepsilon}})\,(\varepsilon'_{11} + \varepsilon'_{22} + \varepsilon'_{33})$

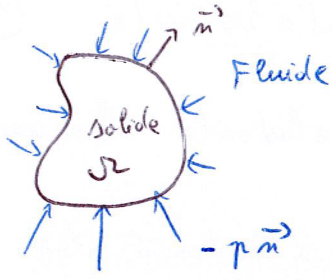
$$= \operatorname{Tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}(\lambda \operatorname{Tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}')\underline{\underline{I}})) + 2\mu \operatorname{Tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}\,\underline{\underline{\varepsilon}}')$$

$$= \underline{\underline{\varepsilon}} : (\lambda \operatorname{Tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}')\underline{\underline{I}} + 2\mu\, \underline{\underline{\varepsilon}}')$$

$$= \underline{\underline{\varepsilon}} : \underline{\underline{\underline{\underline{D}}}}\, \underline{\underline{\varepsilon}}'$$

Q2] d'où $a(u,v) = \int_\Omega \underline{\underline{\varepsilon}}' : \underline{\underline{\underline{\underline{D}}}}\, \underline{\underline{\varepsilon}}\, d\Omega = \int_\Omega \underline{\underline{\varepsilon}} : \underline{\underline{\underline{\underline{D}}}}\, \underline{\underline{\varepsilon}}'\, d\Omega = a(v,u) \quad \forall\, u,v \in V.$

CQFD symétrie.



Q3] On a $\begin{cases} -\underline{\mathrm{div}}(\underline{\underline{\sigma}}) = \underline{0} & \text{dans } \Omega \\ \underline{\underline{\sigma}}\,\underline{n} = -p\,\underline{n} & \text{sur } \Gamma_F \ (= \partial\Omega) \end{cases}$

$\boxed{\underline{\underline{\sigma}} = -p\,\underline{\underline{I}}}$ ok !

Q4] $\underline{\underline{\sigma}} = \lambda \mathrm{Tr}(\underline{\underline{\varepsilon}})\underline{\underline{I}} + 2\mu\,\underline{\underline{\varepsilon}}$ $\qquad \mathrm{Tr}(\underline{\underline{\sigma}}) = (3\lambda + 2\mu)\,\mathrm{Tr}(\underline{\underline{\varepsilon}})$

Q5] $\mathrm{Tr}(\underline{\underline{\sigma}}) = -3p < 0$

$\mathrm{Tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}) = \mathrm{Tr}(\nabla\underline{u}) = \mathrm{div}(\underline{u})$ → dilatation volumique donc <0 ici car compression du solide

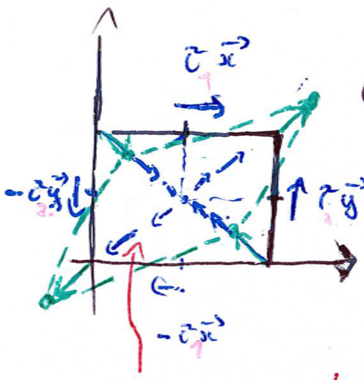
or $\mathrm{div}(\underline{u})$ peut être interprété comme une déformation volumique relative

$\frac{dv - dv^0}{dv^0} = \mathrm{div}(\underline{u})$, $\quad J = \frac{dv}{dv^0}$

$\hookrightarrow \det(F) = \det(\nabla\phi) = \det(I + \nabla u) \simeq 1 + \det(\nabla u)$

$\Rightarrow (3\lambda + 2\mu) > 0$

(Réaction naturelle à la contraction)



Note : $\mathrm{Tr}[\varepsilon] = 0$ donc conservation du volume.

Q6] si on veut mettre un τ_1 et un τ_2

$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} 0 & \tau_1 & 0 \\ \tau_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\underline{\underline{\sigma}}\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\\tau_2\\0\end{bmatrix}$ $x=1$ ok $\qquad \underline{\underline{\sigma}}\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\tau_1\\0\\0\end{bmatrix}$ $y=1$ ok

$\underline{\underline{\sigma}}\begin{bmatrix}-1\\0\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\-\tau_2\\0\end{bmatrix}$ $x=0$ ok $\qquad \underline{\underline{\sigma}}\begin{bmatrix}0\\-1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-\tau_1\\0\\0\end{bmatrix}$ $y=0$ ok

bien sûr $\underline{\mathrm{div}}(\underline{\underline{\sigma}}) = 0$

Q7] on a $\mathrm{Tr}(\underline{\underline{\sigma}}) = 0 \Rightarrow \mathrm{Tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}) = 0$ (car $\mathrm{Tr}([\underline{\underline{\sigma}}]) = (3\lambda + 2\mu)\mathrm{Tr}([\underline{\underline{\varepsilon}}])$)

d'où $\underline{\underline{\sigma}} = 2\mu\,\underline{\underline{\varepsilon}} \Rightarrow \tau = 2\mu\,\varepsilon_{12} = \mu\left(\underbrace{\frac{\partial u_x}{\partial y}}_{>0} + \frac{u_y}{\partial x}\right)$ donc $\mu > 0$.

Q8] $\underline{\underline{\varepsilon}} : \underline{\underline{\underline{\underline{D}}}}\,\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{\varepsilon}} : (\lambda \mathrm{Tr}(\underline{\underline{\varepsilon}})\underline{\underline{I}} + 2\mu\,\underline{\underline{\varepsilon}})$

$= \lambda \mathrm{Tr}^2(\underline{\underline{\varepsilon}}) + 2\mu\,|\varepsilon|^2$

Q9] cas $\lambda > 0$ alors $\lambda \mathrm{Tr}^2(\underline{\underline{\varepsilon}}) > 0$ alors on peut prendre $\alpha_0 = 2\mu$

Q10) On a $f : x \to x^2$ fonction convexe, d'où

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \leq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) \quad \text{avec} \begin{cases} \lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 1 \end{cases}$$

On peut étendre ça

$$(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3)^2 \leq \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3 x_3^2$$

d'où, par exemple

$$\left(\frac{1}{3}\varepsilon_{11} + \frac{1}{3}\varepsilon_{22} + \frac{1}{3}\varepsilon_{33}\right)^2 \leq \frac{1}{3}\varepsilon_{11}^2 + \frac{1}{3}\varepsilon_{22}^2 + \frac{1}{3}\varepsilon_{33}^2$$

$$\leq \frac{1}{3} \underbrace{\sum_{i,j=1}^{3} (\varepsilon_{ij})^2}_{|\varepsilon|^2}$$

Ou alors on peut utiliser Cauchy-Schwarz sur S :

$$|Tr(\varepsilon : I)|^2 \leq |\varepsilon|^2 |I|^2 \Rightarrow Tr^2(\varepsilon) \leq 3|\varepsilon|^2$$

matrice identité

$$\Rightarrow \frac{1}{3} Tr^2(\varepsilon) \leq |\varepsilon|^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{9} Tr^2(\underline{\underline{\varepsilon}}) \leq \frac{1}{3}|\varepsilon|^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3} Tr^2(\varepsilon) \leq |\varepsilon|^2$$

Q11) $\Rightarrow \lambda Tr^2(\varepsilon) \geq 3\lambda|\varepsilon|^2$ qd $\lambda < 0$

d'où $\varepsilon : \Delta\varepsilon = \lambda Tr^2(\varepsilon) + 2\mu|\varepsilon|^2 \geq \underbrace{(3\lambda + 2\mu)}_{> 0}|\varepsilon|^2$

donc $\alpha_0 = 3\lambda + 2\mu$ CQFD !

Au final $\alpha_0 = \mathrm{Inf}(2\mu, 3\lambda + 2\mu)$

Q12) $a(u, u) = \int_\Omega \varepsilon : \Delta\varepsilon \, d\Omega \geq \alpha_0 \int_\Omega |\varepsilon|^2 d\Omega \geq 0$