
River bathymetry estimation from surface measurements

Auteurs :

Rémi Colin

Mickaël Song

Superviseur :

Jérôme Monnier

1 Introduction

Ce rapport présente les résultats d'une étude sur l'estimation de la bathymétrie fluviale à partir de mesures de surface, exploitant des modèles de flux non linéaires. L'objectif principal est de résoudre le problème inverse pour déterminer la configuration de la bathymétrie en utilisant des techniques d'Assimilation de Données Variationnelle (VDA). Pour cela, nous considérons le modèle d'équations suivant :

$$-\Lambda_{\text{ref}}(\partial_x H_{\text{ref}}, b; H)(x) \partial_x^2 H(x) + \partial_x H(x) = \partial_x b(x) \quad \forall x \in [0, L]$$

Avec :

$$\Lambda_{\text{ref}}(\partial_x H_{\text{ref}}, b; H) = \frac{3}{10} \frac{(H - b)(x)}{|\partial_x H_{\text{ref}}(x)|}$$

2 Système d'optimalité

2.1 Modèle adjoint

La forme faible du système d'optimalité présenté dans l'introduction est :

$$a(H, p) = \int_{\Omega} \frac{\partial H(x)}{\partial_x} p \, dx + \int_{\Omega} \frac{\partial(\Lambda_{\text{ref}} \cdot p(x))}{\partial_x} \frac{\partial H(x)}{\partial_x} \, dx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial H(x)}{\partial_x} \Lambda_{\text{ref}} \cdot p(x) \, dS$$

Cette forme faible induit le modèle adjoint suivant :

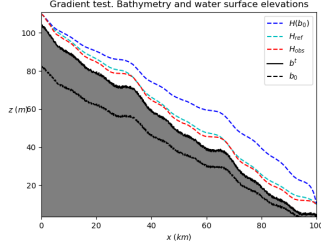
$$\begin{aligned} a^*(H, p) &= \sum_{m=1}^M 2(H(x_m) - H^{\text{obs}}(x_m)) \\ &= \int_{\Omega} \frac{\partial z}{\partial_x} \cdot p(x) \, dx + \int_{\Omega} \frac{\partial(\Lambda_{\text{ref}}(x) \cdot p(x))}{\partial_x} \frac{\partial z}{\partial_x} \, dx + \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial_x} \left(\frac{3}{10} \frac{1}{|\partial_x H^{\text{obs}}(x)|} \cdot z \cdot p(x) \right) \frac{\partial H(x)}{\partial_x} \, dx \end{aligned}$$

2.2 Expression du gradient

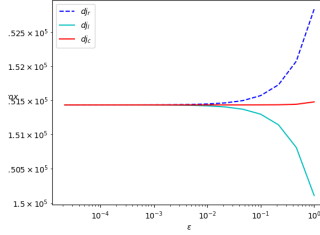
On en déduit alors le gradient :

$$j'(b) \cdot \delta b = \langle 2(b - b_b), \delta b \rangle = \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial_x} \left(\frac{-3}{10} \frac{\delta b}{|\partial_x H^{\text{obs}}(x)|} p^b(x) \right) \frac{\partial H}{\partial_x} \, dx + \int_{\Omega} \frac{\partial(\delta b)(x)}{\partial_x} p^b(x)$$

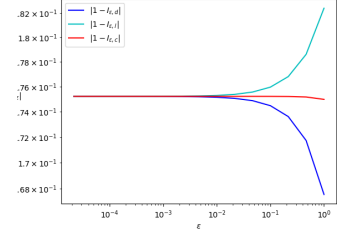
2.3 Validation des courbes du gradient



(a) Bathymétrie



(b) Coûts normalisés

(c) Perturbation ϵ selon les différentes dérivées

La figure 1a montre que la hauteur obtenue pour le first guess b_0 capte bien la forme de H_{obs} et est assez proche de la hauteur de référence H_{ref} mais s'en écarte à mesure que x augmente, ce qui montre que le first guess b_0 est assez bon mais demande à être optimisé.

La figure 1b présente des résultats similaires pour les différentes approximations du coût du gradient calculés (à droite, à gauche ou centré) par différences finies pour un ϵ faible.

Enfin, la figure 1c montre la diminution de l'erreur relative des approximations des différences finies du gradient par rapport au gradient calculé par le modèle adjoint, avec une diminution de ϵ . Les courbes convergent lorsque ϵ diminue, ce qui indique que le calcul du gradient est robuste malgré une erreur persistante autour de 10^{-1} (erreur de l'ordre du pourcent venant des erreurs des mesures d'observation).

3 Problème inverse

3.1 Paramètres de la bathymétrie

Nous avons utilisé les paramètres suivants pour générer la bathymétrie :

Paramètre	Valeur
L	100.0 km
$npts$ (nombre de points sur la grille)	1001
$slope$	1.0×10^{-3}
$href$ (profondeur de l'eau)	10.0 m
n_wave_bathy	3
amp_wave_bathy	$\frac{href}{5}$
ω	$\frac{2\pi}{L}$

3.2 Impact du terme a priori sur la VDA

3.2.1 First guess en fonction de prior = $H_{ref} = 10$

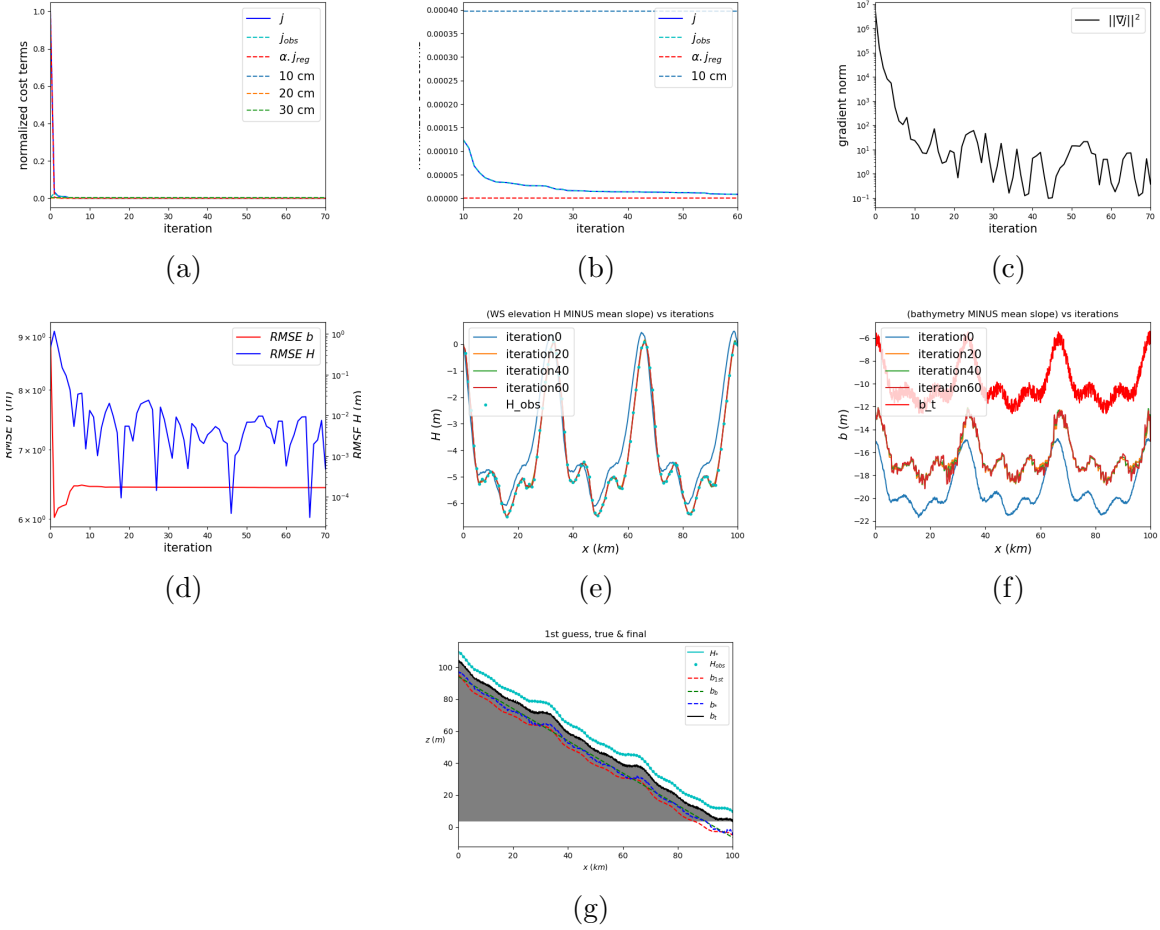


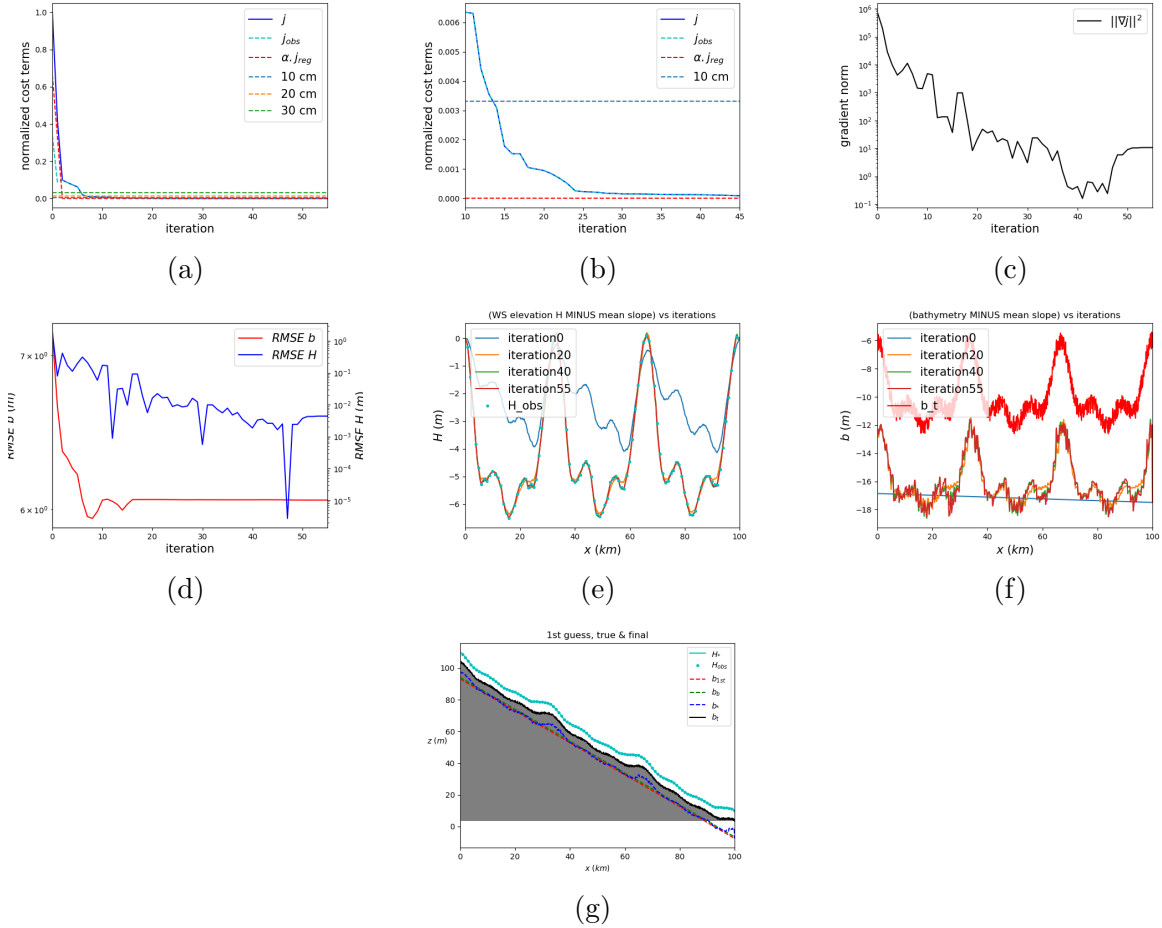
FIGURE 2 – Résultats de la VDA avec un first guess = $H_{obs} - 1.5 \times H_{ref}$

La figure 2g montre que notre modèle de bathymétrie b^* se rapproche bien de la réalité terrain b_t , tout comme H^* correspond bien aux observations H_{obs} .

Ensuite, la figure 2f illustre comment notre modèle converge progressivement vers la bathymétrie réelle b_t après soustraction de la pente moyenne.

De plus, la figure 2e montre que notre modèle s'ajuste très bien aux observations, surtout à l'itération 60.

Enfin, les figures 2a, 2b, 2c et 2d indiquent une amélioration progressive de la précision du modèle. La norme du gradient est en moyenne décroissante et, même nous pouvons y remarquer des oscillations, elle converge en 10^{-1} . Néanmoins, nous pouvons supposer qu'une meilleure paramétrisation pourrait engendrer de meilleurs résultats.

3.2.2 First guess en fonction de b_b FIGURE 3 – Résultats de la VDA avec un first guess en fonction de b_b

La figure 3g montre que, avec ce first guess encore, notre modèle de bathymétrie b^* se rapproche bien de la réalité terrain b_t , tout comme H^* correspond bien aux observations H_{obs} .

La figure 3e nous permettrait d'affirmer que le modèle converge vers une solution assez réaliste car la solution, à l'itération 55, passe par toutes les observations H_{obs} .

La figure 3f, quant à elle, montre que notre modèle converge un petit peu moins vite vers la bathymétrie réelle que dans le cas précédent. La figure 3c nous permet également d'affirmer que le modèle a un petit peu plus de mal à converger vers la solution réelle car la norme du gradient converge en 10^0 .

Enfin, les figures 3a, 3b, 3c et 3d indiquent encore une fois une amélioration progressive de la précision du modèle.

3.2.3 First guess : régression linéaire centrée en 0

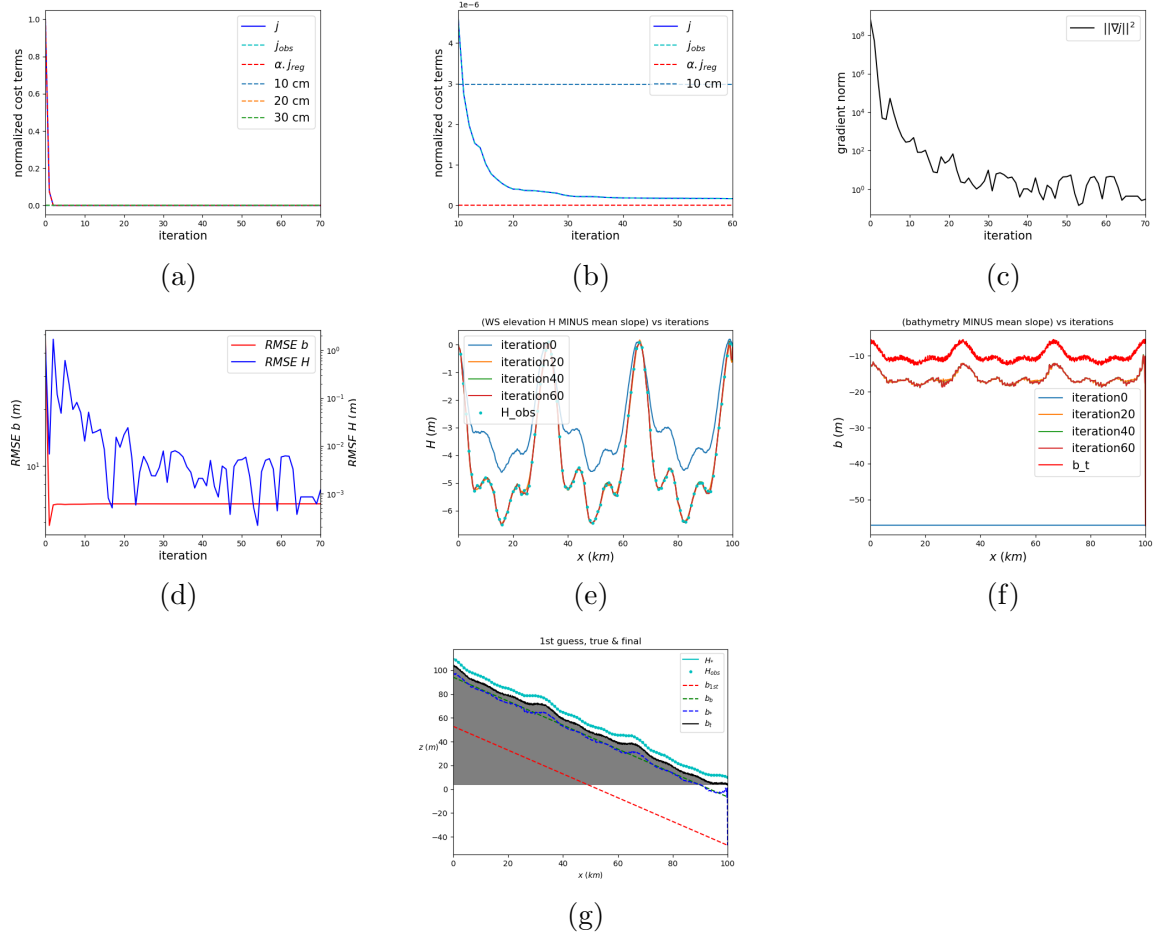


FIGURE 4 – Résultats de la VDA avec un first guess régression linéaire centrée en 0 ($\in [(max(b_t) - mean(b_t), min(b_t) - mean(b_t))]$)

Cette fois encore, les figures 4g et 4f montrent que notre modèle de bathymétrie b^* se rapproche assez bien de la réalité terrain b_t à l'itération 60, excepté pour le terme de bord à $x = 100$ qui tend vers le first guess. Anomalie qui vient certainement d'un problème de code.

La figure 4e nous permet d'affirmer, encore une fois, que le modèle converge vers une solution assez réaliste car la solution, à l'itération 60, passe par toutes les observations H_{obs} .

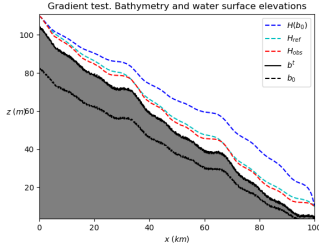
La norme du gradient, représentée dans la figure 4c, converge encore une fois mais vers une valeur assez grande (de l'ordre de 10^0). Ce qui confirme que le modèle trouvé à l'itération finale est assez proche du modèle réel mais pourrait être amélioré.

Enfin, les figures 4a, 4b, 4c et 4d indiquent, quant à elles, encore une fois une amélioration progressive de la précision du modèle en fonction du nombre d'itérations.

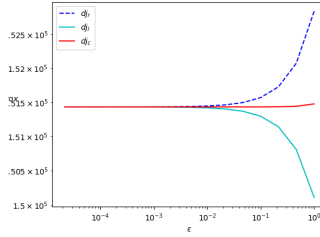
4 Changement de métrique

Dans cette section, nous activons le changement de variables.

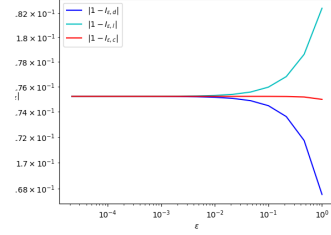
4.1 Validation des courbes du gradient



(a) Bathymétrie



(b) Coûts normalisés



(c) Perturbation ϵ selon les différentes dérivées

Après changement de variable, les figures de validation des courbes de gradient n'ont pratiquement pas changé. Les commentaires de la section Validation des courbes du gradient s'appliquent donc ici, ce qui permet de confirmer, encore une fois, une convergence acceptable.

4.2 Comportement des résultats en fonction du noyau de covariance C et de L

4.2.1 Matrice de covariance identité

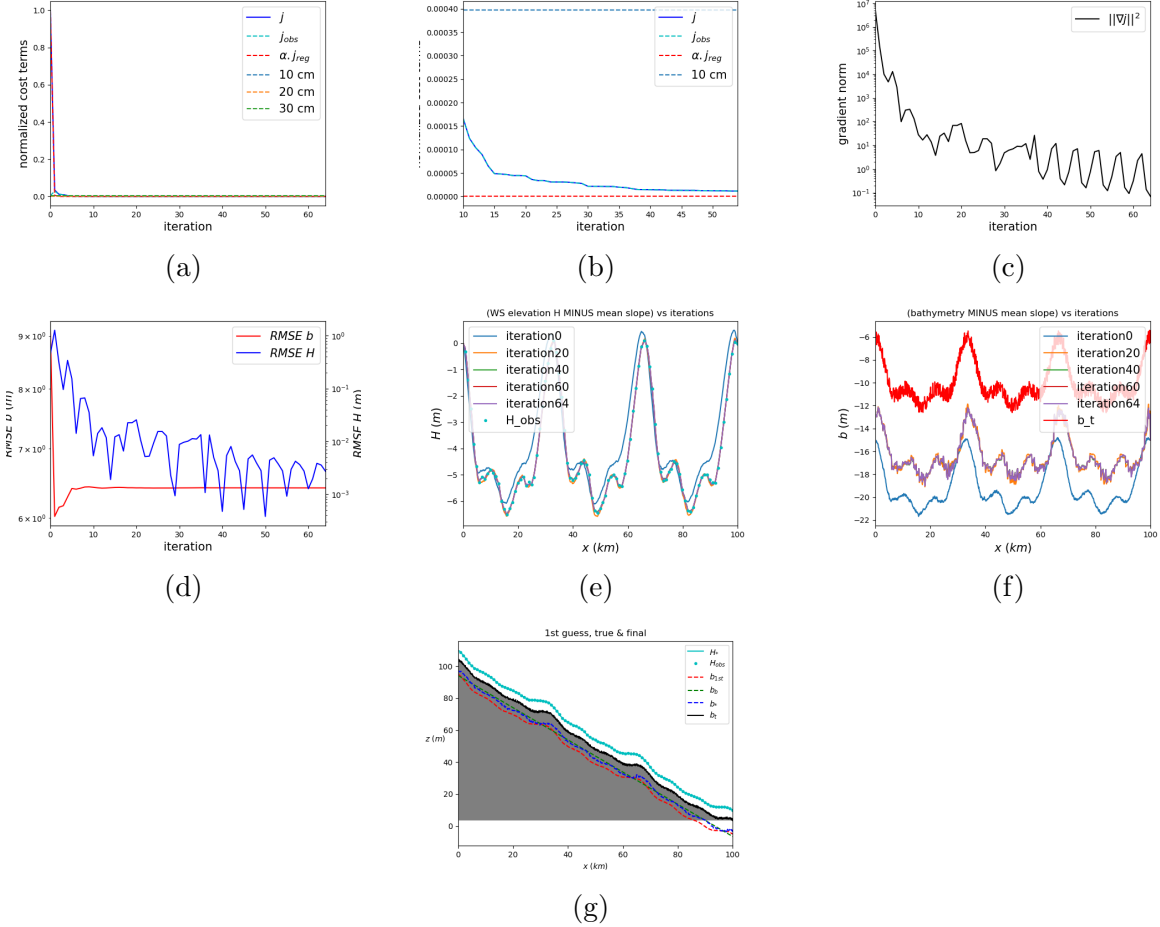


FIGURE 6 – Résultats de la VDA avec une matrice de covariance $C = Id$

Les figures 6g et 6f montrent que, après changement de variables et avec une matrice de covariance égale à l'identité, notre modèle de bathymétrie b^* se rapproche assez bien de la réalité terrain b_t à l'itération 64 puisqu'il "capte" la tendance de la vérité terrain. Néanmoins, notre modèle est translaté par rapport à la vérité terrain.

La figure 6e nous permet d'affirmer que le modèle converge vers une solution assez réaliste car la solution, à l'itération 64, passe par toutes les observations H_{obs} .

De plus, la norme du gradient, représentée dans la figure 6c, converge en 10^{-1} . Le modèle est donc acceptable.

Enfin, les figures 6a, 6b, 6c et 6d indiquent, quant à elles, encore une fois une amélioration progressive de la précision du modèle en fonction du nombre d'itérations.

4.2.2 Matrice de covariance exponentielle

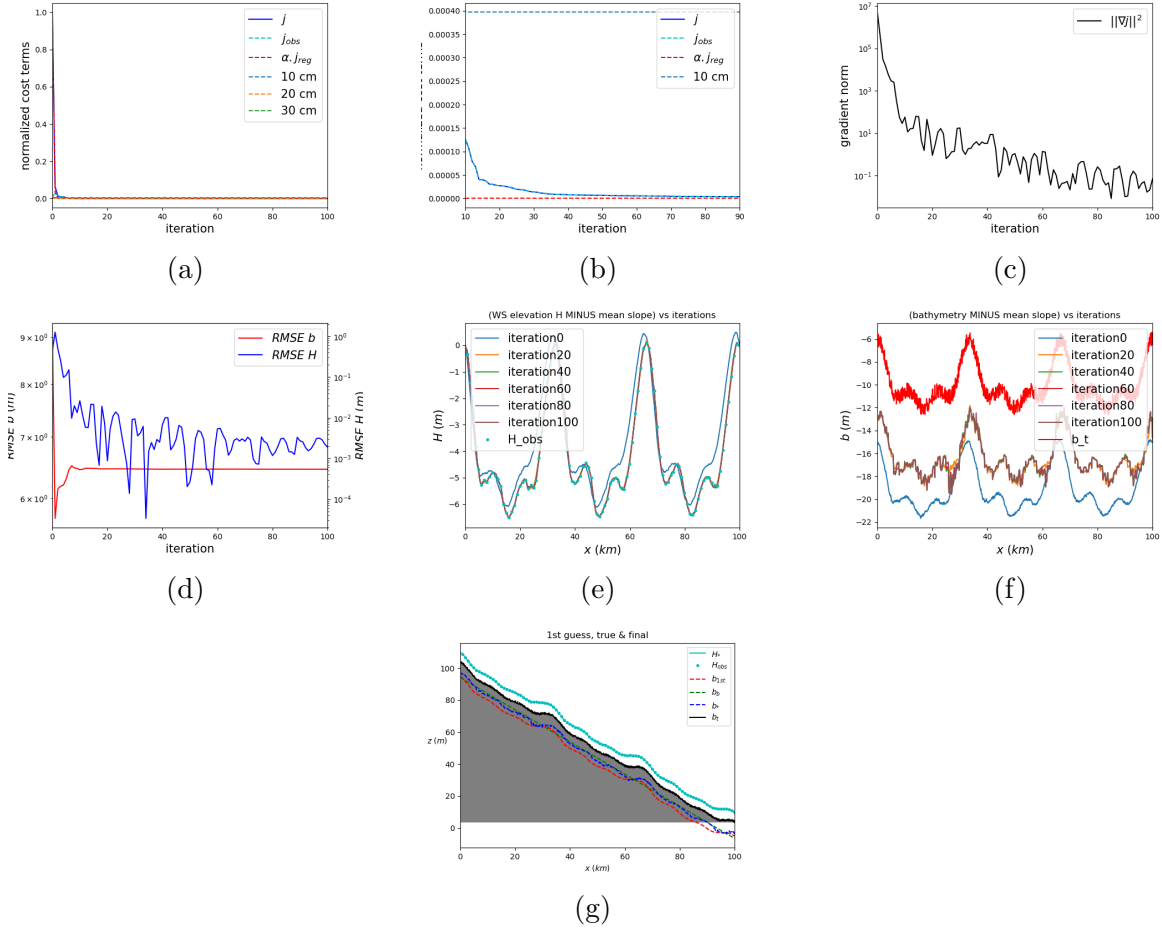


FIGURE 7 – Résultats de la VDA avec une matrice de covariance exponentielle $C = CovExpo$ et $L = 50$

Les figures 7g et 7f montrent que, après changement de variables et avec une matrice de covariance exponentielle, notre modèle de bathymétrie b^* se rapproche assez bien de la réalité terrain b_t mais après un grand nombre d'itérations (il n'a toujours pas convergé à l'itération 100). Notre modèle est, ici encore, translaté par rapport à la vérité terrain.

La figure 7e, quant à elle, semble indiquer que le modèle trouvé à l'itération 100 est une solution assez réaliste car elle passe par toutes les observations H_{obs} .

De plus, la norme du gradient, représentée dans la figure 7c, converge en 10^{-1} . Le modèle semble donc acceptable.

4.2.3 Matrice de covariance gaussienne

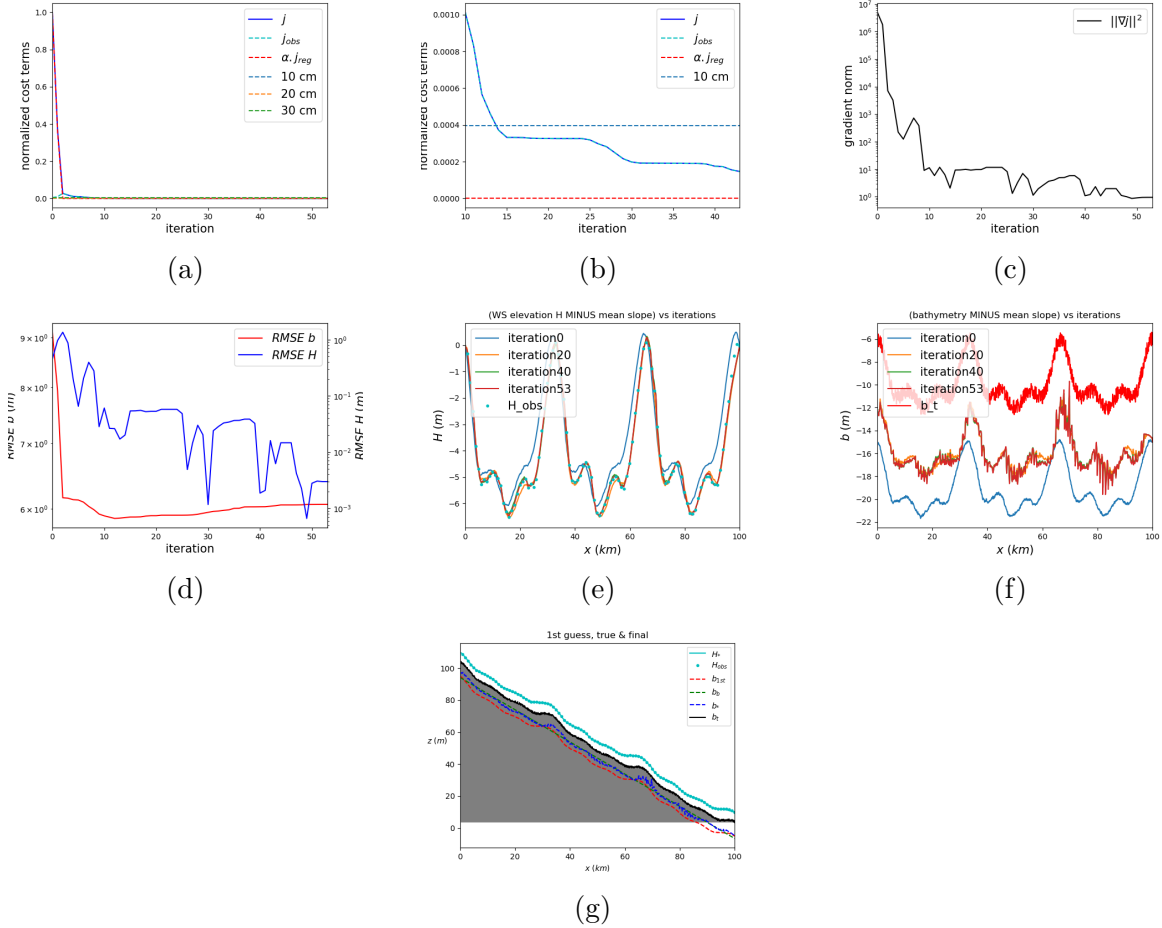


FIGURE 8 – Résultats de la VDA avec une matrice de covariance gaussienne $C = CovGauss$ et $L = 10$

Les figures 8g et 8f montrent que, après changement de variables et avec une matrice de covariance gaussienne, notre modèle de bathymétrie b^* se rapproche assez bien de b_t qu'avec une matrice de covariance égale à l'identité mais après moins d'itération (53 itérations dans ce cas).

La figure 8e nous permet d'affirmer, encore une fois, que le modèle converge vers une solution qui colle aux observations à l'itération 53.

Néanmoins, la norme du gradient, représentée dans la figure 8c, converge en 10^0 . Le modèle trouvé à l'itération 53 semble donc encore améliorable et moins précis comparé aux modèles trouvés précédemment.

5 Conclusion

Ce projet a montré l'efficacité de la VDA (Assimilation de Données Variationnelle) pour estimer la bathymétrie fluviale, en se concentrant sur l'influence des noyaux de covariance et des changements de variable. D'après les résultats obtenus, nous pouvons affirmer qu'une sélection appropriée de la fonction de covariance, en particulier la covariance gaussienne, améliore considérablement la vitesse de convergence et la précision de notre modèle. De plus, le changement de variable, spécialement par la transformation de Cholesky, a stabilisé et également accéléré le processus d'optimisation, rendant notre modèle plus robuste et efficace.