Черчение, часть 3. Операции с векторами.

В 5 классе мы научились выполнять классические построения с помощью циркуля и линейки, решать основные геометрические задачи на построение и познакомились со свойствами особых точек и отрезков в треугольниках.

В 6 классе мы вышли в трёхмерное пространство, познакомились с некоторыми типами многогранников – пирамидами и призмами, и научились решать всего лишь одну, но важную геометрическую задачу – построение сечений многогранников, которая обычно является частью решения стереометрической задачи. В основном мы пользовались двумя методами: методом следов и методом параллельных, и лишь немного упомянули про метод вспомогательной плоскости, но не использовали его. Не у всех вас получилось свободно овладеть построением сечений, но это не беда, вы ещё будете проходить их в курсе геометрии и непременно научитесь. Ключевой момент в построении сечений – «увидеть» взаимное расположение прямых в пространстве, понять какие из них пересекаются, а какие скрещиваются.

Сейчас, в 7 классе, мы разберём методы решения задач черчения без черчения, то есть с помощью просто вычислений, для чего будем использовать алгебру и информатику. Обычно чертежи нам будет достаточно выполнять схематично, иногда даже от руки, но вы всё-таки старайтесь чертить аккуратно.

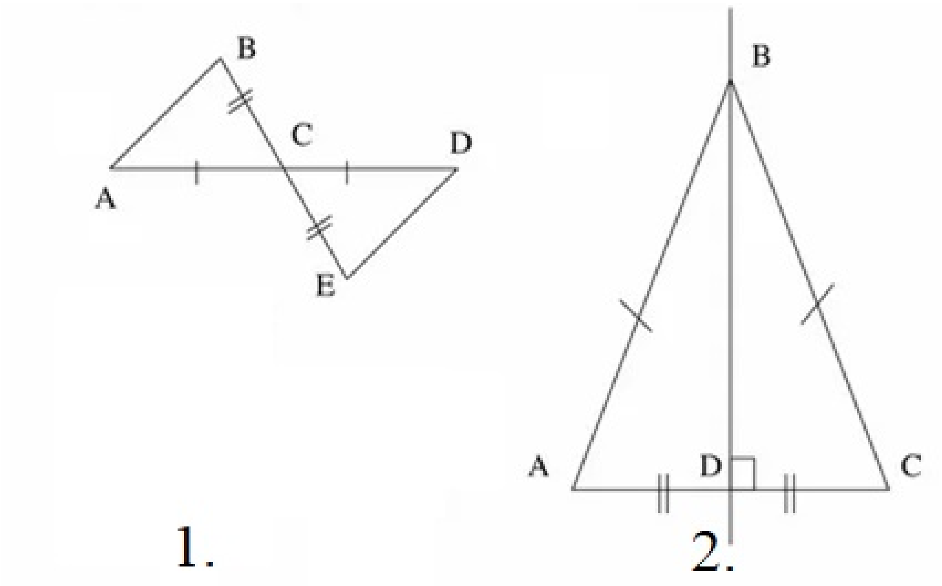
Эти методы называют векторными, иногда координатными, потому что они основаны на векторах и операциях с ними. Операции с векторами обязательно нужно освоить, они скоро потребуются в физике и в астрономии.

Многие задачи геометрии можно решать двумя способами – геометрическим или векторным. Несмотря на то, что векторные способы могут показаться вам более простыми, и даже может создаться иллюзия, что векторами можно решить вообще всю геометрию, вы всё-таки не пренебрегайте обычной классической геометрией, потому что геометрические способы обычно дают более короткие и красивые решения.

<u>**§ 1. Синус, ко́синус**</u>

Равенство и подобие треугольников

Равными называются такие две фигуры, которые можно совместить наложением. Переворачивание разрешается.

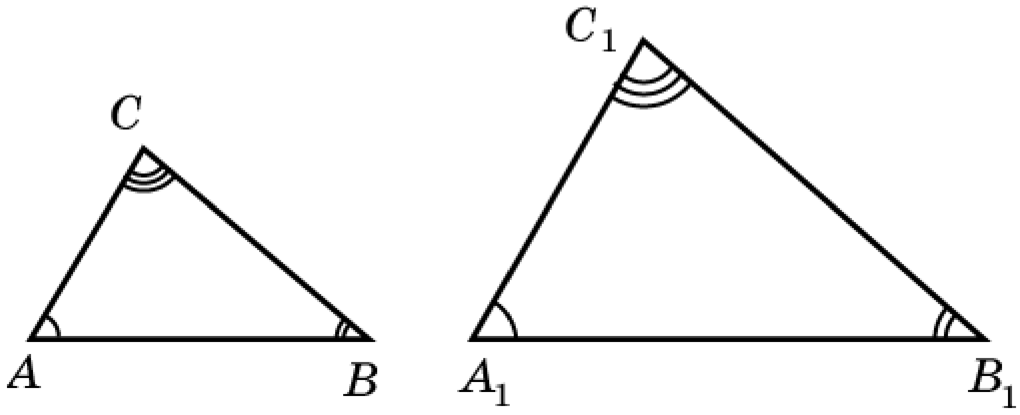


С понятием равенства фигур мы ранее уже встречались, сейчас же нас интересуют конкретно только треугольники.

Выше на чертеже 1 треугольники ABC и DEC равны, их можно совместить вращением одного из них вокруг точки C.

На чертеже 2 треугольники ABD и CBD равны, потому что перевернув один треугольник относительно отрезка BD, мы можем совместить его с другим.

Треугольники могут быть не равными, но подобными, как на следующем чертеже.



Подобными называются треугольники, имеющие соответственно равные углы и пропорциональные стороны.

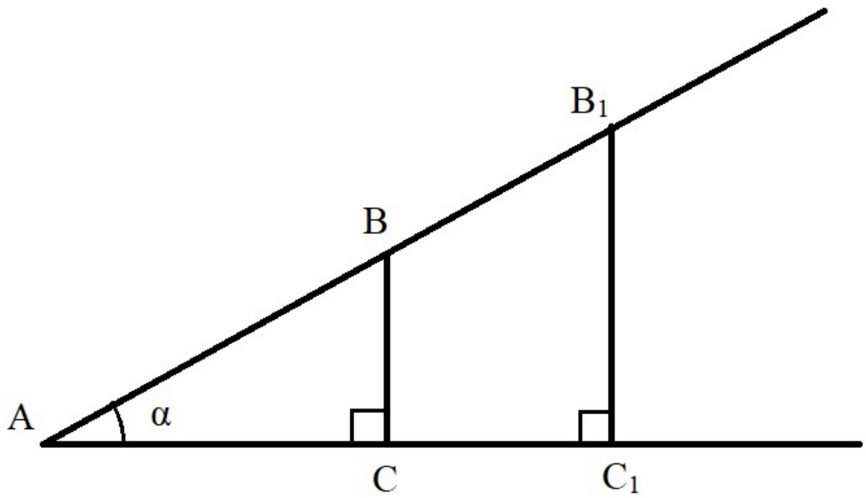
Для подобных треугольников существует понятие коэффициента подобия.

Коэффициент подобия К – число, являющееся коэффициентом пропорциональности сторон. Если умножить длины всех сторон одного треугольника на число К, можно получить длины стороны второго. Этот же коэффициент подобия будет работать и для высот, медиан, биссектрис и любых других соответствующих отрезков подобных треугольников. Площади подобных треугольников относятся как $К^2$, потому что при вычислении площади треугольника $S = \frac{1}{2}ah_a$ приходится применять коэффициент подобия дважды: для стороны-основания a и для высоты h_a, проведённой к этой стороне.

Вы можете по своему усмотрению выбрать коэффициент подобия как отношение сторон меньшего треугольника к большему, тогда получится $K = \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{A}_1B_1} = \frac{\mathrm{B}C}{B_1C_1} = \frac{\mathrm{A}C}{\mathrm{A}_1C_1} < 1$, либо как отношение сторон большего треугольника к меньшему, тогда получится $K = \frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{A_1C_1}{AC} > 1$. Оба варианта законны.

Синус и ко́синус острого угла

Теперь давайте рассмотрим два прямоугольных треугольника, которые построим на сторонах одного угла α с вершиной в точке А. Выберем две произвольные точки С и C_1 на одной из сторон (можно и на разных, рассуждения от этого не изменятся) и построим перпендикуляры до пересечения с другой стороной угла, при этом получим точки В и B_1.

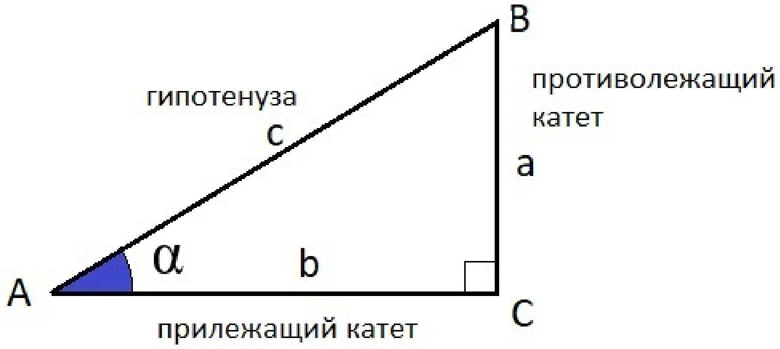


Мы можем точно сказать, что полученные таким образом прямоугольные треугольники АВС и AB_1C_1 подобны, потому что угол α у них общий, углы С и C_1 прямые, следовательно, углы В и B_1 тоже равны между собой и составляют $90^{\circ} - \alpha$.

А раз треугольники подобны, то их соответствующие стороны пропорциональны. Это, в том числе, означает, что $\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AB}} = \frac{\mathrm{B_1C_1}}{\mathrm{AB_1}}$, обратите внимание, что для каждого из треугольников это есть отношение катета, **противолежащего** углу α, к гипотенузе. В прямоугольных треугольниках это отношение зависит только от величины угла α.

Аналогичным образом, всегда выполнится равенство $\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AB}} = \frac{\mathrm{AC_1}}{\mathrm{AB_1}}$, это отношение катета, **прилежащего** к углу α, к гипотенузе. В прямоугольных треугольниках это отношение тоже зависит только от угла α.

Вспомним, что стороны прямоугольного треугольника называются гипотенузой и катетами. Если же мы указываем в треугольнике один из острых углов, например, угол α, то про катеты говорят, что тот, который лежит напротив этого угла – **противолежащий**, на чертеже это катет **a**, а тот, который прилегает к углу, на чертеже это катет **b**, – **прилежащий**.



Определение <u>для острого угла в прямоугольном треугольнике</u>:

<u>Синусом</u> угла α называется отношение <u>противолежащего</u> катета к гипотенузе.
<u>Ко́синусом</u> угла α называется отношение <u>прилежащего</u> катета к гипотенузе.

Сразу же заметим, что поскольку катет всегда короче гипотенузы, значение синуса и косинуса острого угла всегда будет меньше 1. Также заметим, что острый угол α в прямоугольном треугольнике может изменяться только в интервале от 0 до 90°.

Синус и косинус являются безразмерными величинами, ведь при делении длины катета на длину гипотенузы размерность сокращается.

Это определение нас вполне устраивает в геометрии, но для физики, информатики и алгебры такое определение синуса и косинуса слишком ограничено, мы скоро его расширим.

Сейчас мы установили два правила, по которым из некоторого числа, допустим это будет величина угла α, получаются два новых числа. Это значит, что мы определили две функции, они получили такие же названия: синус и косинус.

В математике и физике функции синуса и косинуса угла α записывают следующим образом: $\sin\alpha$, $\cos\alpha$.

В информатике вы помните, что питон отличает имена функций от имён переменных по наличию круглых скобок, в которые нужно заключать аргумент, поэтому в питоне мы обязательно должны писать со скобками: $\sin(\alpha)$, $\cos(\alpha)$. В математике и физике такая запись со скобками тоже допустима, но обычно принято писать без скобок, однако если в качестве аргумента применяется составное выражение, то для исключения путаницы аргумент тоже пишут со скобками, например, $\sin(90^\circ - \alpha)$, $\cos(-2\alpha)$ и т.д.

Часто в задачах нам не требуется находить именно угол в градусах или в радианах, достаточно найти лишь значение одной из функций: либо синус, либо косинус угла, потому что в геометрии между углом, его синусом и косинусом существует однозначное соответствие.

Упражнения:

1.1 В прямоугольном треугольнике катеты имеют длины: AC = 4, BC = 3. Найдите синус и косинус угла A.

Решение:

Сначала найдём гипотенузу AB треугольника, для чего используем теорему Пифагора.

AB = $\sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5.$

Теперь по определению синуса и косинуса, запишем:

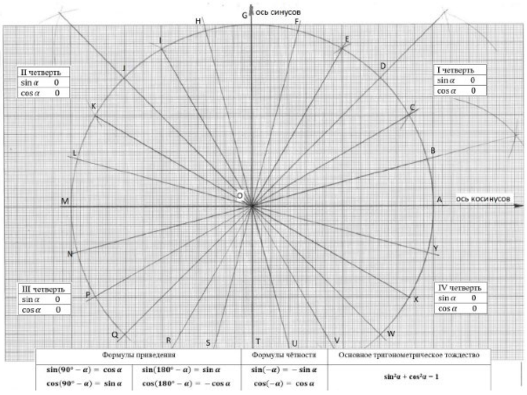
$\sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{3}{5}$; $\cos A = \frac{AC}{AB} = \frac{4}{5}$

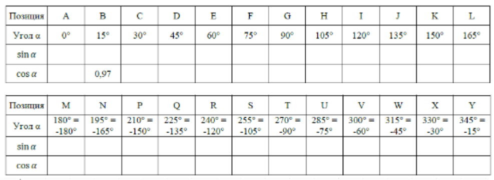
1.2 В прямоугольном треугольнике катеты имеют длины: AC = 5, BC = 12. Найдите синус и косинус угла A.

1.3 В прямоугольном треугольнике катеты имеют длины: AC = 60, BC = 11. Найдите синус и косинус угла A.

Практическая работа

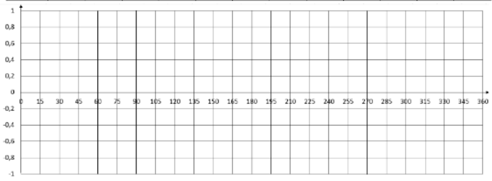
Для выполнения практической работы вам потребуются два рабочих листа A4: окружность на миллиметровке и таблица. Получите их в кабинете или распечатайте самостоятельно.





Позиция	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
Угол α	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°	105°	120°	135°	150°	165°
sin α												
cos α		0,97										

Позиция	M	N	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y
Угол α	180° = -180°	195° = -165°	210° = -150°	225° = -135°	240° = -120°	255° = -105°	270° = -90°	285° = -75°	300° = -60°	315° = -45°	330° = -30°	345° = -15°
sin α												
cos α												



На миллиметровке построена окружность с центром в точке O и радиусом 100 мм = 1 дм, разделённая на 24 равные дуги по 15°.

Горизонтальную ось назовём осью косинусов, вертикальную – осью синусов, смысл этих названий вам скоро станет понятен. Пусть по этой окружности движется точка. Начальное положение точки будет в позиции A на пересечении окружности с осью косинусов, за положительное направление примем стандартное – против часовой стрелки. Угол α будем отсчитывать в положительную сторону от позиции A.

Поставим нашу точку в позицию B, она находится на угле α = 15°. Тогда на радиусе OB мы можем, как на гипотенузе, представить прямоугольный треугольник, катетами которого будут координаты точки B. Горизонтальный катет, выраженный в дециметрах, делённый на гипотенузу (которая равна радиусу, то есть 1 дм), представляет из себя косинус угла α, а вертикальный катет аналогичным образом даст нам синус угла α.

Определите по миллиметровке координаты точки В и запишите в таблицу на втором листе. Одно число я подскажу: $\cos 15° = 0{,}97$.

Повторите измерения для позиций C на угле 30° и D на угле 45°.

Вероятно, вы уже заметили, что поскольку треугольник в позиции D имеет угол 45°, то другой острый угол тоже составляет 45°, следовательно, этот треугольник равнобедренный, следовательно, $\sin 45° = \cos 45°$.

СТОП! Измерения для последующих позиций делать не нужно, все числа у вас уже есть! Нужно только заметить, что треугольник в позиции F на угле 75° равен уже измеренному треугольнику в позиции B на угле 15°. Разница только в том, что здесь синус и косинус поменялись местами.

Как же получить значения синуса и косинуса в верхней части I четверти? Предположим, мы знаем синус 1°, тогда он же будет равен косинусу 89°. И наоборот, косинус 1° равен синусу 89°. Из этого наблюдения можем получить формулы, называемые «формулами приведения» (от слова «приводить», т.к. они позволяют привести значения синуса и косинуса одних углов к другим, симметричным относительно биссектрисы I четверти):

$$\mathbf{\sin(90° - \alpha) = \cos \alpha}$$
$$\mathbf{\cos(90° - \alpha) = \sin \alpha}$$

Используя формулы приведения, либо симметрию, заполните таблицу для позиций E, F.

Теперь, понимая закономерность получения значений синуса и косинуса в I четверти, можем понять, что в позиции A значение синуса равно 0, а косинуса равно 1. Заполните таблицу для позиций A и G, и идём дальше.

Важно заметить, что в I четверти значения и синуса, и косинуса положительные. Когда точка в своём движении по окружности переходит во II четверть, значения синуса по-прежнему остаются положительными, потому что точка находится выше горизонтальной оси, а вот значения косинуса становятся отрицательными, потому что точка уходит левее вертикальной оси. Опять-таки, нам не нужно повторно производить измерения, достаточно заметить, что:

$$\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$$

$$\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$$

Эти формулы тоже относится к группе формул приведения. Заполните таблицу для II четверти, до позиции M, обращая особое внимание на знаки: здесь синус положителен, косинус отрицателен.

Остановимся в позиции M и вернём точку обратно в начальную позицию A. Теперь пойдём в противоположную сторону, в IV четверть. Отсчёт угла позиции Y можем сделать двумя эквивалентными способами: это и $\alpha = 360° - 15° = 345°$, и одновременно $\alpha = -15°$. Эти два значения угла α дают одну и ту же позицию точки. В геометрии угол, конечно же, не может быть отрицательным, невозможно представить себе фигуру с отрицательным углом, а в физике отрицательный угол вполне имеет смысл, он показывает движение точки по окружности в отрицательном направлении, то есть по часовой стрелке.

Нам, опять-таки, не нужно повторно выполнять измерения, все необходимые значения у нас уже есть. Достаточно заметить, что в IV четверти значения синуса получаются отрицательными, а косинуса положительными. Закономерность здесь достаточно очевидна:

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$$

$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$$

Эти две формулы называются формулами чётности.

Помимо косинуса, существуют ещё другие функции, для которых выполняется закономерность $f(-x) = f(x)$, например, это $y(x) = x^2$, $y(x) = |x|$, такие функции называются чётными. Функции, для которых выполняется закономерность $f(-x) = -f(x)$, называются нечётными. Помимо синуса, к таким функциям, например, относится $y(x) = x^3$. В алгебре можно использовать свойства чётности функций для поиска более коротких путей решения задач, но сейчас мы просто возьмём на заметку, что синус является нечётной функцией, а косинус – чётной.

Используя закономерности, которые вы уже заметили, заполните таблицу для III четверти. Обратите особое внимание, что в III четверти значения и синуса, и косинуса отрицательны.

Если мы знаем знаки синуса и косинуса для какого-либо угла, то можем сразу, не вычисляя сам угол, сказать какой четверти принадлежит этот угол.

И, наконец, ещё одна полезная формула: если мы возьмём треугольник в любой позиции на нашей единичной окружности, и применим к нему теорему Пифагора, то есть возведём оба катета в квадрат, то получим квадрат гипотенузы, а он равен 1. Поэтому справедлива следующая формула, называемая основным тригонометрическим то́ждеством:

$$\mathbf{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1}$$

Основное тригонометрическое то́ждество является одной из форм записи теоремы Пифагора. Основное тригонометрическое тождество мы используем, когда знаем значение одной из функций, синуса либо косинуса, и нужно найти значение другой функции. Единственно, при этом теряется знак. Знак значения функции необходимо понять из условий задачи.

Упражнения:

1.4 Некоторый угол φ имеет следующие значения синуса и косинуса: $\sin\varphi = 0{,}5, \quad \cos\varphi \approx -0{,}866$. Какой четверти принадлежит угол φ?

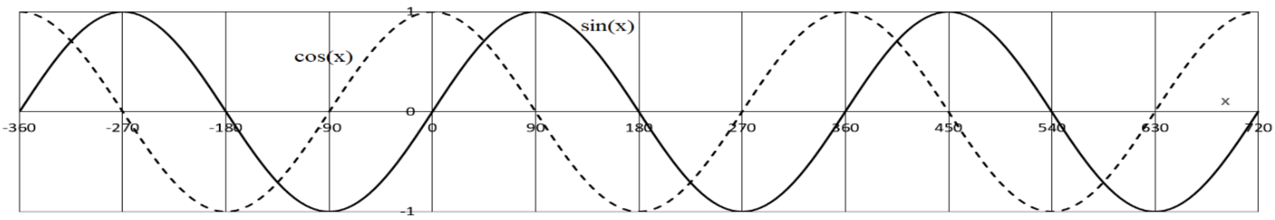
Решение: смотрим на знаки. Если синус положителен, то угол принадлежит I или II четверти. Если косинус отрицателен, то угол принадлежит II или III четверти. Сопоставляя знаки понимаем, что угол φ принадлежит II четверти.

1.5 Некоторый угол β имеет следующие значения синуса и косинуса: $\sin\beta = -0{,}5$, $\cos\beta \approx 0{,}866$. Какой четверти принадлежит угол β?

1.6 В прямоугольном треугольнике ABC угол α при вершине A имеет значение синуса $\sin\alpha = 0{,}8$. Чему равно значение косинуса этого угла?

Теперь, после того как таблица на втором рабочем листе полностью заполнена, постройте на поле по точкам графики функций синуса и косинуса на интервале от 0 до 360°. Линии проведите карандашом от руки, постарайтесь сделать это аккуратно.

Если точка продолжит движение в любую сторону на следующие обороты окружности, то графики синуса и косинуса будут повторяться, поэтому функции синуса и косинуса называют периодическими.



Полные графики функций синуса и косинуса показаны на этом чертеже. График функции синуса называют синусоидой. Но график косинуса не называют «косинусоидой», такого термина нет.

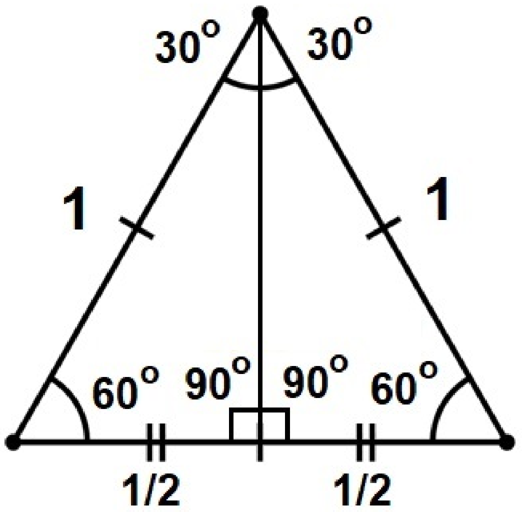
График косинуса симметричен относительно вертикальной оси – это свойство чётных функций. График синуса симметричен относительно начала координат – это свойство нечётных функций.

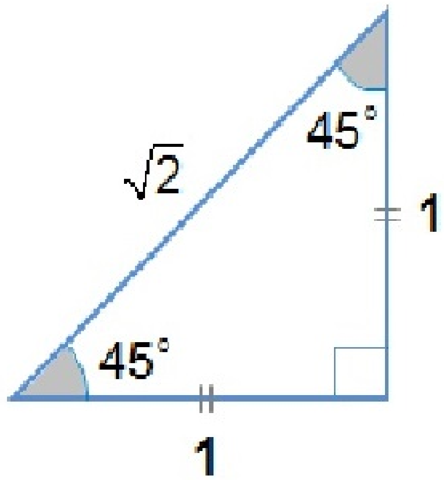
Вопрос:

1.7 Верно ли, что если сдвинуть график косинуса вправо на 90°, то он точно совпадёт с графиком синуса?

Синусы и косинусы основных углов

Нет простых алгебраических формул, по которым можно вычислить значения синуса и косинуса произвольного угла, однако значения синуса некоторых основных углов нужно выучить наизусть.





Возьмём равносторонний треугольник со стороной 1 и проведём в нём высоту. Высота разобьёт противоположную сторону пополам, а угол 60° на два равных по 30°. Отсюда увидим, что $sin\, 30° = \frac{1}{2}$.

Используя основное тригонометрическое тождество $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ получим, что $cos\, 30° = \sqrt{1 - sin^2 30°} = \sqrt{1 - (\frac{1}{2})^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Возьмём прямоугольный равнобедренный треугольник с катетом 1, его острые углы равны по 45°. Гипотенуза по теореме Пифагора равна $\sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$, отсюда $sin\, 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

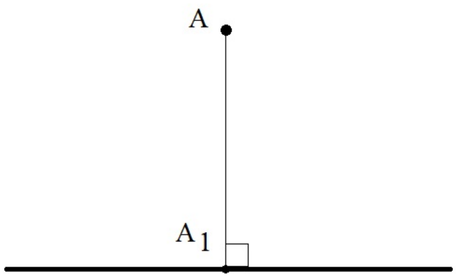
С учётом формул приведения выпишем таблицу:

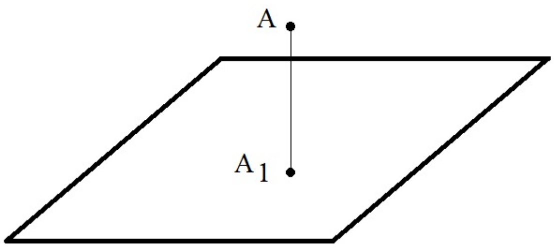
$\sin 0°$	$=$	$\cos 90°$	$=$	0
$\sin 30°$	$=$	$\cos 60°$	$=$	$\frac{1}{2}$
$\sin 45°$	$=$	$\cos 45°$	$=$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\sin 60°$	$=$	$\cos 30°$	$=$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\sin 90°$	$=$	$\cos 0°$	$=$	1

Её нужно выучить наизусть, значения синуса и косинуса основных углов нам будут требоваться много раз.

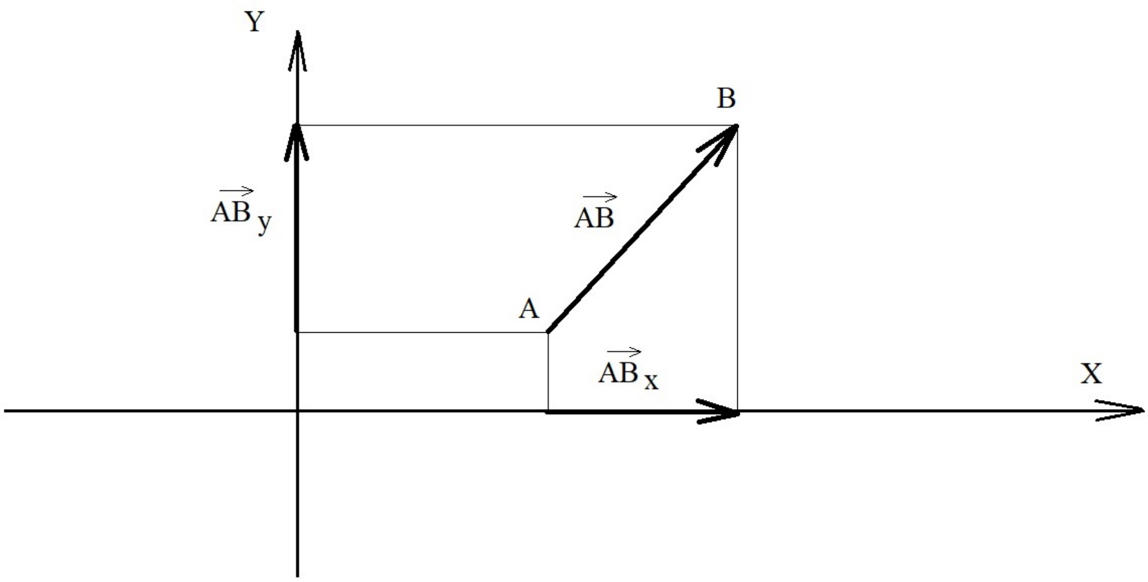
§ 2. Проекции. Проекции вектора

В простейшем виде мы определим проекцию точки А на прямую или на плоскость как другую точку, A_1 – основание перпендикуляра, проведённого из точки А на соответствующую прямую или плоскость. На этих чертежах точка A_1 – проекция точки А на прямую и на плоскость.





Похожим образом мы можем получить проекцию отрезка и вектора на прямую и на плоскость, сейчас нас интересуют проекции вектора на прямые, причём не на произвольные прямые, а конкретно на координатные оси. Для этого спроектируем на координатные оси две точки: начало и конец вектора $\overrightarrow{AB}$.



На этом чертеже показаны проекции вектора $\overrightarrow{AB}$ на оси X и Y. Строго говоря, проекции вектора на координатные оси $\overrightarrow{AB}x$ и $\overrightarrow{AB}y$ тоже являются векторами, но в физике ради упрощения принято соглашение: считать проекции скалярными величинами. В самом деле, направления проекций однозначно заданы осями, поэтому скаляр, то есть просто число, вполне определяет проекцию. Это число может быть положительным или отрицательным.

Кратко напомним, что вектор мы понимаем как отрезок, у которого назначено направление. Векторы могут быть:

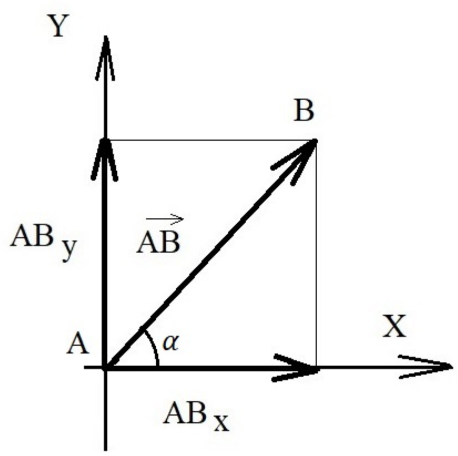
- **Свободными**. Свободный вектор можно передвигать по плоскости и в пространстве как угодно, сохраняя лишь прежним его длину и направление;

- **Скользящими**. Скользящий вектор можно передвигать только по прямой, которой он принадлежит, также сохраняя прежние длину и направление;

- **Связанными**. Связанный вектор нельзя двигать.

В математике и информатике мы имеем дело только со свободными векторами, в физике можем считать вектора свободными до тех пор, пока не начнём рассматривать вращение тела, имеющего размеры. Материальная точка таковым не считается, потому что она не имеет размера. Пока, в 7 классе, в механике мы рассматриваем все тела как материальные точки.

Поскольку вектор с предыдущего чертежа $\overrightarrow{AB}$ свободный, мы можем переместить его так, чтобы начало вектора $\overrightarrow{AB}$ совпало с началом координат. <u>Это всё ещё тот же вектор!</u>



Теперь, если мы знаем модуль, то есть длину вектора $\overrightarrow{AB}$ и угол между вектором и осью OX, можем найти проекции вектора на оси следующим образом:

ABx = $|\overrightarrow{AB}| \cdot \cos\alpha$

ABy = $|\overrightarrow{AB}| \cdot \sin\alpha$

Упражнения:

2.1 Вектор скорости $\vec{v}$ имеет модуль 5 $\frac{\text{м}}{\text{с}}$ и направлен вверх вправо под углом 60° к оси OX. Найдите проекции вектора скорости на оси.

Решение:

$$v_x = |\vec{v}| \cdot \cos\alpha = 5 \ \cdot \cos 60° = 5 \cdot \frac{1}{2} = 2{,}5 \ \frac{\text{м}}{\text{с}}$$

$$v_y = |\vec{v}| \cdot \sin\alpha = 5 \ \cdot \sin 60° = \ 5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 4{,}33 \ \frac{\text{м}}{\text{с}}$$

По соглашению мы не считаем проекции векторами, поэтому не ставим над проекциями стрелку – знак вектора, однако <u>проекции являются размерными величинами</u>, они имеют ту же размерность, что и сам вектор. Проекции имеют знак, в данном случае обе проекции имеют знак +.

2.2 Вектор ускорения $\vec{a}$ имеет модуль 2 $\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$ и направлен вверх вправо под углом 135° к оси OX. Найдите проекции вектора ускорения a_x и a_y на координатные оси.

Если нам известны проекции, то мы можем найти модуль вектора по теореме Пифагора: $|\vec{a}|$ = $\sqrt{a_x^2 + \ a_y^2}$, а потом синус и косинус угла между этим вектором и осью OX: $sin\,\alpha = \frac{a_y}{|\vec{a}|}$, $cos\,\alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|}$

Упражнения:

2.3 По известным проекциям вектора силы на оси: $F_x = -12H, F_y = -5H,$ найдите модуль вектора силы, синус и косинус угла между вектором силы и осью OX.

Решение:

Модуль вектора силы найдём по теореме Пифагора:

$$\overrightarrow{|F|} = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13\ H$$

$$\sin\alpha = \frac{F_y}{|\vec{F}|} = -\frac{5}{13}, \qquad \cos\alpha = \frac{F_x}{|\vec{F}|} = -\frac{12}{13}$$

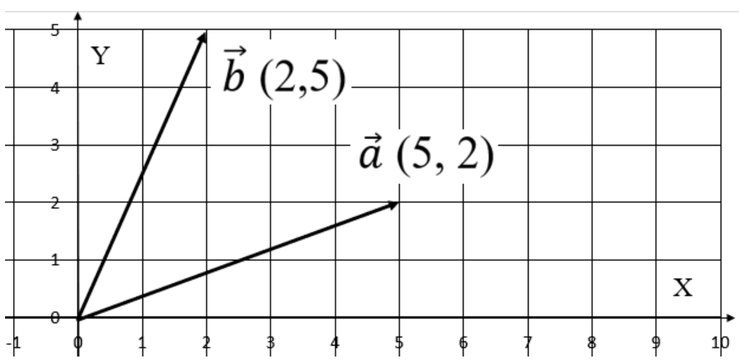
2.4 По известным проекциям вектора $\vec{Q}$ на оси: $Q_x = 8,\ Q_y = -6,$ найдите модуль вектора, синус и косинус угла между вектором силы и осью OX.

<u>§ 3. Координаты вектора. Сложение векторов. Умножение вектора на число</u>

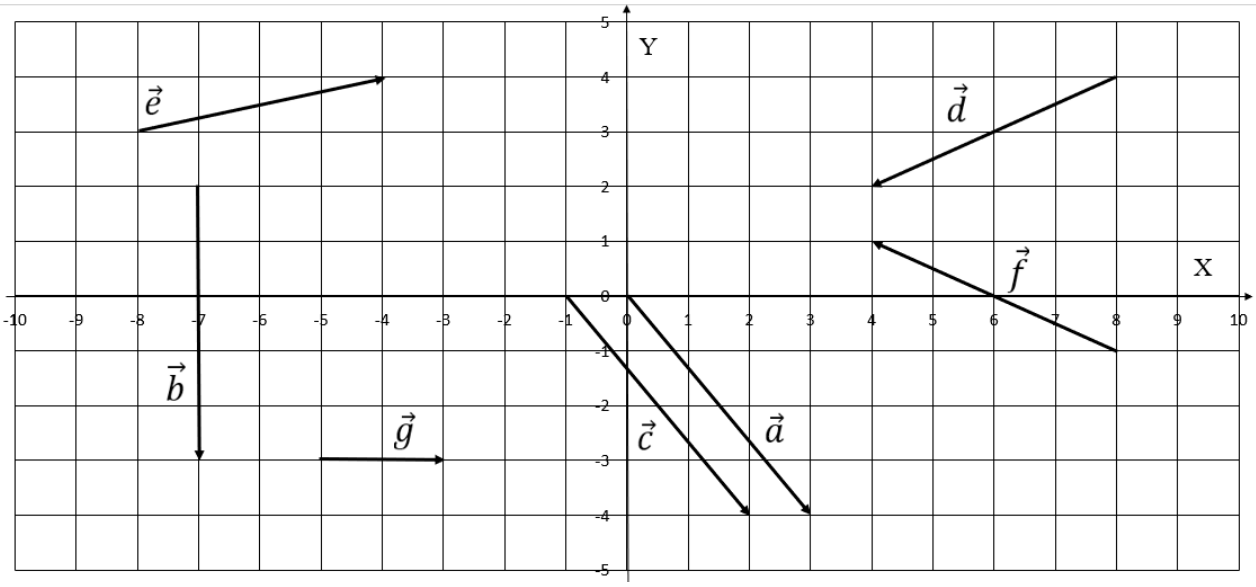
Координаты вектора указывают на сколько координаты конца вектора больше координат его начала. Геометрический смысл координат вектора: если мы переместим начало вектора в начало координат, то координаты точки конца вектора и будут координатами вектора.

Если вектор находится в произвольном месте плоскости, то для получения координат вектора мы <u>вычитаем из координат конца вектора координаты его начала</u>.

Координаты вектора перечисляем в круглых скобках, при этом <u>**порядок важен!**</u> Порядок следования чисел в записи координат вектора обязательно должен соответствовать порядку именования осей: сначала X, потом Y– только так. Например, записи (5, 2) и (2, 5) – это разные координаты, они соответствуют разным векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$.



Векторы, изображённые на следующем чертеже, имеют следующие координаты: $\vec{a}$ (3, -4), $\vec{b}$ (0, -5).



Упражнение:

3.1. Запишите координаты векторов $\vec{c}$, $\vec{d}$, $\vec{e}$, $\vec{f}$, $\vec{g}$

Модуль, то есть длина вектора, – это расстояние между точками начала и конца вектора. Для получения модуля вектора применяем теорему Пифагора. Модуль вектора записываем в привычных вертикальных палочках, как модуль числа.

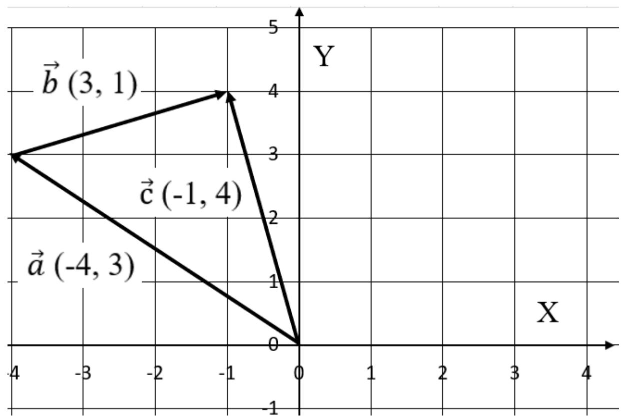
Сложение векторов

Сложение векторов нам требуется при решении таких задач, как нахождение равнодействующей силы, суммарной скорости, ускорения, перемещения.

В 6 классе для сложения векторов мы использовали геометрический способ, когда следующий вектор пристыковывается своим началом к концу предыдущего, для чего выполняли на чертеже параллельный перенос векторов. Этот способ наглядный, но трудоёмкий. Когда мы работаем с векторами в координатной системе, используем более простой метод, координатный. <u>Результатом сложения векторов является вектор.</u>

На чертеже показано выполнение операции сложения векторов:

$\vec{a}$ (-4, 3) + $\vec{b}$ (3, 1) = $\vec{c}$ (-1, 4).



Вполне очевидно, что:

при сложении векторов мы складываем все X-координаты слагаемых векторов, получаем X результирующего вектора, складываем все Y-координаты слагаемых и получаем Y результирующего.

Для этого не нужно строить чертёж.

Упражнение:

3.2. Без построения чертежа найдите координаты вектора $\vec{f}$, являющегося суммой векторов: $\vec{f} = \vec{a}$ (-2, -2) + $\vec{b}$ (5, -1) + $\vec{c}$ (1, 5) + $\vec{d}$ (-2, 0)

Решение:

Координаты результирующего вектора получаем сложением соответствующих координат исходных векторов.

$\vec{f}$ (-2 + 5 + 1 -2 , -2 -1 +5 +0) = $\vec{f}$ (2, 2)

3.3. На тело действуют силы: $\vec{F}_1$ = (2, 2), $\vec{F}_2$ = (-3, 2), $\vec{F}_3$ = (1, 0), $\vec{F}_4$ = (0, -6). Найдите модуль и направление равнодействующей силы $\vec{F}$, а также определите ускорение тела, если его масса m = 0,5 кг.

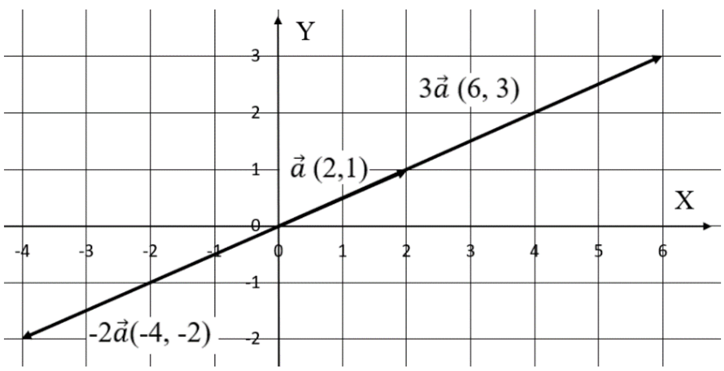
3.4. Пират в поисках клада прошёл по карте от места высадки на берег острова сначала на север s_1 = 10 миль, потом на восток s_2 =7 миль, потом на север s_3 = 3 мили, потом на запад s_4 = 2 мили, потом на юг s_5 = 1 милю.

Запишите перемещения пирата в виде суммы векторов, найдите координаты результирующего вектора перемещения $\vec{s}$, расстояние от места высадки до клада в милях, и азимут А от места высадки на клад. Азимут выразите в виде синуса и косинуса угла между направлением от места высадки на клад и направлением на север. (Азимут – угол, отсчитываемый от севера в направлении востока, то есть по часовой стрелке).

Умножение вектора на число

Вектор можно умножить на число k, при этом мы получим вектор, направленный вдоль той же прямой, что и исходный, но его модуль увеличится в k раз. Число k может быть любым, больше или меньше 1, положительным или отрицательным. При этом обе координаты вектора, X и Y увеличиваются в k раз.

На чертеже показано умножение вектора $\vec{a}(2, 1)$ на 3 и на -2.



При умножении вектора на 0 получается нулевой вектор $\vec{0}$, то есть вектор нулевой длины.

Если два вектора параллельны друг другу, то про них говорят, что они **коллинеарны** (то есть принадлежат одной линии – прямой). При умножении вектора на число получается вектор, коллинеарный исходному.

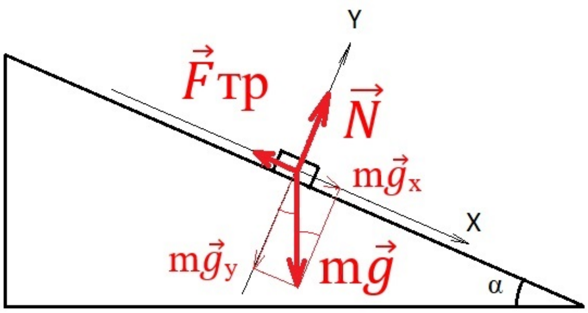
Из этого следует, что поскольку во 2-м законе Ньютона $\vec{F} = m\vec{a}$ выполняется умножение ускорения на массу, которая является числом (скаляром), ускорение и сила всегда коллинеарны, и так как масса всегда положительна, то ускорение и сила всегда сонаправлены.

Очевидным является факт, что если какой-либо вектор равен нулевому $\vec{0}$, то и его проекции на координатные оси равны нулю. Значит, если равнодействующая сила, действующая на тело равна нулю $\vec{F} = \vec{0}$, то и её проекции на оси тоже равны нулю.

Внимательно посмотрите решение следующей задачи, здесь используется характерный для физики приём.

Задача:

3.5. На наклонной плоскости, расположенной под углом α к горизонту, покоится тело массой m. Найдите силу трения $F_{\text{тр}}$ и силу реакции N, действующие на тело.



На первый взгляд может показаться, что в условии не хватает данных, однако это не так, данных достаточно. Рассмотрим решение по действиям:

1) Решение задач такого типа **<u>всегда начинаем с изображения сил.</u>** На этом этапе важно учесть все силы, никакую не забыть, и правильно определить их направления. В этой задаче на тело действует три силы: **сила тяжести** – вниз, **сила трения** – вдоль наклонной плоскости против возможного движения тела,

то есть влево-вверх, и **сила реакции опоры** – перпендикулярно плоскости, от материала плоскости, потому что поверхность может только отталкивать тело, но не может его притягивать.

2) Учитываем, что тело неподвижно, следовательно его ускорение равно нулю, следовательно, равнодействующая сила тоже равна нулю. С учётом этого условия записываем 2-й закон Ньютона, запись получается в векторной форме, потому что силы – векторные величины.

$m\vec{g} + \vec{F}тр + \vec{N} = m\vec{a}$, а поскольку $\vec{a} = \vec{0}$, то

$m\vec{g} + \vec{F}тр + \vec{N} = \vec{0}$

3) Выберем оси координат. Логично, что за центр координат желательно принять тело, причём любую точку тела, мы же считаем его материальной точкой. Но как направить оси? **Одну из осей желательно направить вдоль движения,** реального или возможного, вторую – перпендикулярно первой. Почему так? Потому, что при таком расположении координатных осей проекции некоторых сил обнуляются, и это сильно упрощает дальнейшее решение. Запомните этот приём, в физике он применяется очень часто.

4) Теперь можем записать проекции сил на оси. Поскольку равнодействующая сила равна нулю, то и проекции сил на обе оси тоже равны нулю. Также вспоминаем, что по соглашению мы обозначаем проекции как величины скалярные.

На ось ОХ сила реакции $\vec{N}$ проектируется нулём, потому что она перпендикулярна оси, сила реакции не оказывает действия вдоль оси ОХ, $N_x = 0$.

Сила трения $\vec{F}$тр коллинеарна оси, поэтому проектируется полностью, а в записи проекции мы поставим перед ней знак –, потому что она направлена против оси. $F_{тр} = F_{трx} = -|\vec{F}тр|$.

Сила тяжести направлена под углом к осям, поэтому внимательно смотрим на треугольники, и замечаем, что угол между силой тяжести и осью OY составляет α, так как геометрический треугольник наклонной плоскости и треугольник с силой тяжести подобны. Значит проекция вектора $m\vec{g}$ на ось OX будет равна $mg_x = |\overrightarrow{mg}| \cdot \sin\alpha$, знак +, потому что направление по оси.

Теперь можем записать уравнение проекции сил на ось OX:

OX: $\boldsymbol{-F_{\text{тр}} + mg\ \sin\alpha = 0}$, откуда узнаём силу трения:

$$\boldsymbol{F_{\text{тр}} = mg\ \sin\alpha}$$

Аналогичными рассуждениями в отношении проекции сил на ось OY получаем, что сила трения даёт нулевую проекцию, проекция силы реакции равна модулю силы, а проекция силы тяжести равна $mg\,cos\,\alpha$, откуда запишем уравнение проекций сил на ось OY:

OY: $\boldsymbol{N - mg\ \cos\alpha} = 0$, и получаем силу реакции:

$$\boldsymbol{N = mg\ \cos\alpha}$$

Ответ: $F_{\text{тр}} = mg\ \sin\alpha\ ,\ N = mg\ \cos\alpha.$

3.6. Достаточно ли в этой задаче данных чтобы узнать коэффициент трения μ?

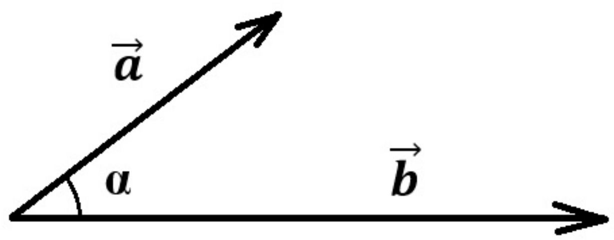
3.7. Тело покоится на плоскости, угол наклона которой к горизонту постепенно увеличивают. При некотором значении угла α тело начинает медленно и без ускорения скользить вниз. Найдите коэффициент трения тела о плоскость.

§ 4. Скалярное произведение векторов

Скалярным произведением двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется **<u>число</u>**, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними.

Существует два способа обозначения скалярного произведения: с точкой $\vec{a} \cdot \vec{b}$ или с круглыми скобками $(\vec{a}\ ,\ \vec{b})$. Это одно и то же. К сожалению, не выработано единого стандарта, применяются оба варианта. Мы будем придерживаться варианта с точкой. Итак,

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\alpha$$



Скалярное произведение векторов мы упоминали при изучении работы силы. По определению, работа силы – скалярное произведение векторов силы и перемещения.

$$A = \vec{F} \cdot \vec{s} = F\ s\ \cos\alpha$$

Скалярное произведение обладает свойством коммутативности, то есть можно переставлять вектора местами:

$$A = \vec{F} \cdot \vec{s} = \vec{s} \cdot \vec{F}$$

Из законов Ньютона следует, что работа силы изменяет кинетическую энергию тела:

$$A = \Delta E_к = E_к - E_{к0}$$

Упражнение:

4.1. Тело переместилось по направляющей под действием силы $\vec{F} = 2$Н, направленной под углом 60° к направляющей, на расстояние 3 м. Найдите работу силы $\vec{F}$.

Существует ещё одна, очень важная формула вычисления скалярного произведения, на использовании которой в геометрии основан метод нахождения углов между прямыми.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y$$

Если у нас имеется система координат, то используем обе известные нам формулы скалярного произведения:

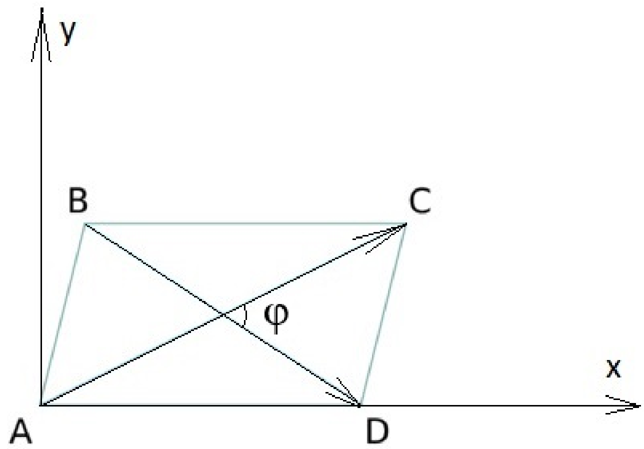
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\alpha = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y$$

Выразим из них косинус угла, и получим:

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}}$$

Задача:

4.2. Параллелограмм ABCD имеет стороны AB = 8, AD = 18, угол A = 60°. Найдите угол φ между диагоналями AC и BD.



Для решения задачи векторным методом нам обязательно необходима система координат, которую мы можем ввести как нам удобно. Например, введём систему координат с центром в точке A и осью X, совпадающей со стороной AD. Ось Y направлена перпендикулярно оси X.

Решение всех задач векторным методом производится по одному алгоритму:

1. определяем координаты точек;
2. определяем координаты векторов;
3. выполняем операции с векторами.

Итак, РЕШЕНИЕ:

1. Определим координаты точек:

A (0, 0)

B ($AB\cos\alpha, AB\sin\alpha$) = ($8\cdot\frac{1}{2}, 8\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$) = (4, $4\sqrt{3}$)

C ($AB\cos\alpha + AD,\ AB\sin\alpha$) $= \left(4 + 18,\ 4\sqrt{3}\right) = (22, 4\sqrt{3})$

D (AD, 0) = (18, 0)

2. Определим координаты векторов $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BD}$:

$\overrightarrow{AC}$ ($22 - 0, 4\sqrt{3} - 0$) = (22, $4\sqrt{3}$)

$\overrightarrow{BD}\left(18 - 4, 0 - 4\sqrt{3}\right) = \left(14, -4\sqrt{3}\right)$

3. Определим косинус угла между векторами $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BD}$:

$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}}{|\overrightarrow{AC}| \cdot |\overrightarrow{BD}|}$$

Для этого считаем числитель - скалярное произведение

$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 22 \cdot 14 - 4\sqrt{3} \cdot 4\sqrt{3} = 308 – 16 \cdot 3 = 260$

Также считаем знаменатель - длины векторов

$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{22^2 + (4\sqrt{3})^2} = \sqrt{484 + 48} = \sqrt{532}$

$|\overrightarrow{BD}| = \sqrt{14^2 + (4\sqrt{3})^2} = \sqrt{196 + 48} = \sqrt{244}$

$\cos\varphi = \frac{260}{\sqrt{532}\cdot\sqrt{244}}$

В геометрии полученный косинус угла φ уже является ответом.

В физике мы досчитаем, что

$\cos\varphi = \frac{260}{\sqrt{532}\cdot\sqrt{244}} \approx 0{,}7216$, что соответствует углу $\varphi \approx 43{,}8°$.

Узнать какому углу соответствует найденный косинус можно на калькуляторе с помощью функции арккосинус, она часто обозначается cos^{-1}.

4.3 Параллелограмм ABCD имеет стороны AB = 6, AD = 15, угол A = 30°. Найдите угол φ между диагоналями AC и BD.

4.4 Напишите на питоне программу, вычисляющую угол между двумя векторами. В программу нужно ввести координаты двух векторов. В ответ выведите косинус угла, а также значение самого угла в градусах.

Например, если считаем угол между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$, где координаты векторов: $\overrightarrow{AB}$ (7, -3) и точек $\overrightarrow{CD}$ (3, 5), то ввод будет в две строчки:

7 -3

3 5

В ответ должно получиться:

cosA= 0.13511320473331348 , A= 82.23483398157467

Руководство к решению:

В этой программе нам потребуется вычислять квадратный корень и арккосинус. В самом языке питон таких операций нет, они вынесены в математическую библиотеку, поэтому нам потребуется её импортировать. Это делается с помощью вот такой строки, которую принято писать в самом начале программы:

```
import math
```

Далее, поскольку мы вводим в одной строке несколько чисел, нам нужно использовать split(), причём поскольку координаты векторов могут быть не обязательно целыми, а вещественными – в питоне этот тип называется **float**, то первая строка ввода должна выглядеть так:

```
ABx, ABy = map ( float, input().split() )
```

Эта строка выполняет чтение ввода, разбивает его на два вещественных числа (то есть типа float) и присваивает их в переменные, соответствующие обеим координатам вектора AB.

Аналогичным образом смостоятельно напишите следующую строку, в которой вы введёте координаты вектора CD.

Старайтесь давать переменным логичные имена, по которым можно понять что они означают.

Далее найдёте скалярное произведение векторов по формуле

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = ABx \cdot CDx + ABy \cdot CDy$$

Далее, используя теорему Пифагора найдёте модули векторов. В питоне это запишется так:

```
AB = math.sqrt ( ABx**2 + ABy**2 )
```

Аналогично найдёте модуль вектора $\overrightarrow{CD}$.

После того, как эти числа – модули обоих векторов посчитаны, находите косинус угла как отношение скалярного произведения к произведению модулей. Например, эту переменную вы назовёте cosA.

Сам угол находится через арккосинус с помощью библиотечной функции math.acos(). <u>Внимание</u>: все математические функции во всех языках программирования работают с углами в радианах, а мы хотим получить ответ в градусах, для этого вспоминаем, что π радиан = 180°. Поэтому для перевода угла в градусы, ответ функции math.acos() умножаем на 180 и делим на math.pi.

```
A = math.acos ( cosA ) * 180. / math.pi
```

В конце не забываем вывести ответ, cosA и A.

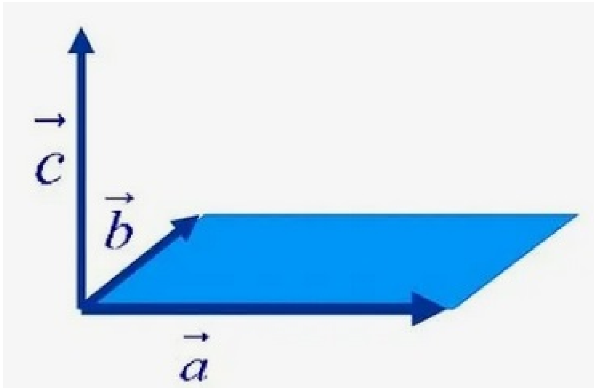
4.5. С помощью написанной программы проверьте решения задач 4.2 и 4.3.

Скалярное произведение векторов – универсальный способ нахождения углов между прямыми на плоскости и в пространстве, он также практически в этом же виде используется в пространстве для нахождения угла между прямой и плоскостью, а также угла между плоскостями. Пока, в 7 классе нас интересует только угол между прямыми на плоскости.

В физике скалярное произведение векторов силы и перемещения по определению является физической величиной, называемой работой силы A, которая определяет изменение кинетической энергии тела. Мы ещё встретимся со скалярным произведением в физике, когда будем изучать электромагнитные явления при определении величины потока магнитного поля через контур.

§ 5. Векторное произведение векторов

Векторным произведением двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется **вектор**, перпендикулярный обоим векторам, $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и численно равный площади параллелограмма, построенного на исходных векторах, что эквивалентно равно произведению длин этих векторов на синус угла между ними.



Существует два способа обозначения векторного произведения: с крестиком $\vec{\boldsymbol{a}} \times \vec{\boldsymbol{b}}$ или с квадратными скобками $[\vec{\boldsymbol{a}}\ ,\ \vec{\boldsymbol{b}}]$. Применяются оба варианта. Мы будем придерживаться варианта с крестиком.

Косое произведение векторов

Пока, в 7 классе нам потребуется только простейший частный случай векторного произведения векторов – когда оба перемножаемых вектора располагаются в плоскости *XY*, то есть случай плоской задачи. Такой частный случай называется **косым произведением** векторов. Результатом косого произведения векторов является скаляр, то есть просто число.

Из геометрии нам известна формула площади параллелограмма со сторонами a, b и углом между сторонами α:

$$S = a\ b\ \sin\alpha$$

Сравнивая её с определением косого произведения векторов, мы получим:

$$\boldsymbol{S} = \vec{\boldsymbol{a}} \times \vec{\boldsymbol{b}} = |\vec{\boldsymbol{a}}| \cdot |\vec{\boldsymbol{b}}|\ \boldsymbol{sin}\ \alpha$$

В координатной форме формула косого произведения векторов выглядит так:

$$\vec{a} \times \vec{b} = a_x \cdot b_y - a_y \cdot b_x$$

Обратите внимание на знак минус и на то, что координаты x и y «перекрещиваются».

Если у нас имеется система координат, то используем обе известные нам формулы косого произведения:

$$\vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin\alpha = a_x \cdot b_y - a_y \cdot b_x$$

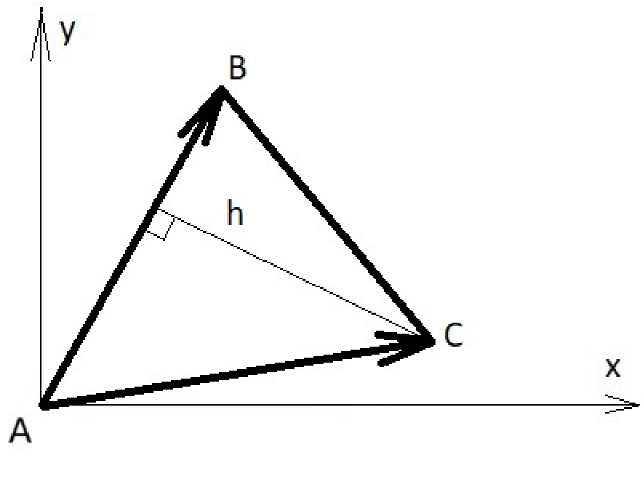
Векторное, в том числе косое произведение векторов используется для решения двух задач:

- нахождение площади треугольника;

- нахождение расстояния от точки до прямой.

Пример

5.1. Треугольник ABC задан вершинами с координатами:
A (0, 0), B (5, 10), C (10, 2). Найдите площадь треугольника S_{ABC} и расстояние h от точки C до прямой AB.



План решения задачи прост: нужно посчитать косое произведение векторов $\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AB}$ и взять от него половину, т.к. площадь треугольника, образованного диагональю параллелограмма, равна половине площади параллелограмма.

Для ответа на второй вопрос задачи используем метод площадей: зная площадь треугольника и основание – длину стороны AB, которая представляет из себя модуль вектора $|\overrightarrow{AB}|$, из формулы $S = \frac{1}{2}\, a\, h_a$ найдём высоту h_a, которая и является искомым расстоянием: $h = \frac{2S}{a}$

Итак,

$\overrightarrow{AC}\ (\,10 - 0,\ \ 2 - 0\,) = (10, 2)$

$\overrightarrow{AB}\ (\,5 - 0,\ \ 10 - 0\,) = (5, 10)$

$\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AB} = AC_x \cdot AB_y - AC_y \cdot AB_x = 10 \cdot 10 - 2 \cdot 5 = 90$

$S_{ABC} = \frac{1}{2}\ \overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2} \cdot 90 = 45$

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{5^2 + 10^2} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$

$h = \frac{2S_{ABC}}{|\overrightarrow{AB}|} = \frac{2 \cdot 45}{5\sqrt{5}} = \frac{2 \cdot 9}{\sqrt{5}} = \frac{18\sqrt{5}}{5} \approx 8{,}05$

Обратите внимание, что знак векторного произведения зависит от порядка сомножителей, то есть $\vec{a} \times \vec{b} = -\ \vec{b} \times \vec{a}$. Это свойство называется антикоммутативностью. Например, проверим произведение векторов из этого примера в обратном порядке:

$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = AB_x \cdot AC_y - AB_y \cdot AC_x = 2 \cdot 5 - 10 \cdot 10 = -90$

Свойство антикоммутативности позволяет определять по какую сторону от первого вектора лежит второй. Если второй вектор произведения направлен в левую полуплоскость относительно направления первого вектора, то векторное произведение будет положительным, если же в правую полуплоскость, то отрицательным. Это логично, поскольку при повороте второго вектора относительно первого влево – в I квадрант, мы получаем положительный знак синуса угла между векторами, а при повороте вправо – в IV квадрант, получаем отрицательный знак синуса.

Отрицательной площади, так же как и отрицательного расстояния от точки до прямой, в геометрии не бывает, поэтому если вы при решении задачи нахождения площади треугольника и расстояния от точки до прямой получаете отрицательный результат, то можете просто взять его модуль. Знак векторного произведения в такого типа задачах геометрии не важен, но он важен в физике и информатике.

Задачи

5.2 Треугольник ABC задан вершинами с координатами: A (0, 0), B (-3, 3), C (8, 2). Найдите площадь треугольника S_{ABC} и расстояние h от точки B до прямой AC.

Решить задачу можно вообще не составляя чертёж, но вы можете его схематично изобразить для ясности.

5.3 Взяв за основу программу задачи 4.4 для вычисления угла между векторами с помощью скалярного произведения, доработайте её так, чтобы программа вычисляла площадь треугольника, образованного двумя введёнными векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$. Протестируйте программу на простейшем прямоугольном треугольнике.

5.4 С помощью программы проверьте решение задачи 5.2.

Шпаргалка по произведениям векторов

Тип произведения векторов	Скалярное произведение	Векторное произведение (на плоскости – косое)
Какие задачи решаем	Ищем угол между векторами	Ищем площадь треугольника; и расстояние от точки до прямой
Формулы для вычисления	$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_x\cdot b_x + a_y\cdot b_y$	$\vec{a}\times\vec{b} = a_x\cdot b_y - a_y\cdot b_x$
	$\vec{a}\cdot\vec{b} = \lvert\vec{a}\rvert\cdot\lvert\vec{b}\rvert\cos\alpha$	$\vec{a}\times\vec{b} = \lvert\vec{a}\rvert\cdot\lvert\vec{b}\rvert\sin\alpha$
Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны и сонаправлены	$\alpha = 0$, $\cos\alpha = 1$ $\vec{a}\cdot\vec{b} > 0$ и принимает максимальное значение	$\alpha = 0$, $\sin\alpha = 0$ $\vec{a}\times\vec{b} = 0$
Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ взаимно перпендикулярны	$\alpha = \pm 90°$, $\cos\alpha = 0$ $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$	$\alpha = \pm 90°$, $\sin\alpha = \pm 1$ $\vec{a}\times\vec{b}$ принимает максимальное значение по модулю
Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны и направлены противоположно	$\alpha = 180°$, $\cos\alpha = -1$ $\vec{a}\cdot\vec{b} < 0$ и принимает максимальное значение по модулю	$\alpha = 180°$, $\sin\alpha = 0$ $\vec{a}\times\vec{b} = 0$

Ответы и решения:

1.2. $\sin A = \frac{12}{13}$; $\cos A = \frac{5}{13}$

1.3. $\sin A = \frac{11}{61}$; $\cos A = \frac{60}{61}$

1.5. Угол β принадлежит IV четверти

1.6. Примените основное тригонометрическое тождество. $\cos\alpha = \sqrt{1-0{,}8^2} = \sqrt{0{,}36} = 0{,}6.$

1.7. Верно

2.2. $a_x \approx -1{,}41\frac{м}{с^2}$, $a_y \approx 1{,}41\frac{м}{с^2}$, будьте внимательны со знаками!

2.4. $|\vec{Q}| = 10$, $\sin\alpha = -0{,}6$, $\cos\alpha = 0{,}8$

3.1. $\vec{c}$ (3, -4), $\vec{d}$ (-4, -2), $\vec{e}$ (4, 1), $\vec{f}$ (-4, 2), $\vec{g}$ (2, 0)

3.3. $\vec{F}$ = (0, -2), то есть равнодействующая сила имеет модуль 2Н и действует вниз. Ускорение тела направлено в ту же сторону, что и сила, и согласно второму закону Ньютона $\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} = \frac{2\ Н}{0{,}5\ кг} = 4\ \frac{м}{с^2}$

3.4. $\vec{s}$ = (0, 10) + (7, 0) + (0, 3) + (-2, 0) + (0, -1) = (5, 12)

$|\vec{s}| = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13$ миль, $\sin A = \frac{5}{13}$, $\cos A = \frac{12}{13}$

3.6. Нет, из имеющихся данных вычислить коэффициент трения невозможно.

3.7. $\mu = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

4.1. $A = \vec{F} \cdot \vec{s} = F\ s\cos\alpha$ = 2 Н · 3 м · 0,5 = 3 Дж

4.3. $\cos\varphi \approx 0{,}90286$, $\varphi \approx 25{,}46°$

4.4. Вся программа полностью выглядит так:

```
import math                              # импортируем математическую библиотеку
ABx, ABy = map(float, input().split())   # ввод координат вектора AB
CDx, CDy = map(float, input().split())   # ввод координат вектора CD

ABCD = ABx * CDx + ABy * CDy             # скалярное произведение AB·CD
AB = math.sqrt ( ABx**2 + ABy**2 )       # модуль вектора AB
CD = math.sqrt ( CDx**2 + CDy**2 )       # модуль вектора CD
cosA = ABCD / ( AB * CD )                # косинус угла A
A = math.acos ( cosA ) * 180. / math.pi  # угол A, выражаем в градусах
print ( "cosA=" , cosA, " , A=", A )
```

5.2 $S_{ABC} = 15$; $|\overrightarrow{AC}| = 2\sqrt{17}$; $h \approx 3{,}638$

5.3 К программе задачи 4.4 нужно добавить две строчки:

```
S = ( ABx * CDy - ABy * CDx ) / 2
print ( "S=" , S )
```