Функции

Мы уже познакомились с двумя великими научными книгами Древности, имеющими практическое значение до сих пор.

Евклид в III веке до н.э. написал «Начала» - учебник геометрии, по которому учились многие поколения, и мы тоже изучаем геометрию на самом деле по переводу «Начал». Геометрия Евклида имеет огромное практическое значение, она лежит в основе всей нашей техники и почти всей науки. Со следующего занятия мы продолжим заниматься черчением - одним из важных приложений геометрии.

В течение тысячелетий Евклид был единственным и абсолютным авторитетом в геометрии, до тех пор, пока наш великий соотечественник Николай Иванович Лобачевский не разработал другую геометрию, которую мы называем неевклидовой, нашедшую в XX веке применение в теории относительности. Неевклидову геометрию мы в школе не изучаем — это университетский материал.

Во II веке уже нашей эры **Клавдий Птолемей** написал астрономическую книгу «Альмагест», в которой описал движение светил в **гео**центрической системе мира («гея» (греч.) – Земля). Как мы сейчас знаем, геоцентрическая система неверна; на самом деле в центре солнечной системы находится Солнце, это объяснил Николай Коперник в XVI веке, предложив **гелио**центрическую систему («гелиос» (греч.) – Солнце). Несмотря на свою ошибочность, геоцентрическая система хорошо работает для навигации, ориентирования и других повседневных целей. Руководствуясь геоцентрической системой, астрономы Древности и Средних веков сделали множество правильных открытий, эта система используется на практике и поныне.

Сегодня мы приоткроем первую страницу ещё одной древней книги, давшей начало алгебре. Алгебра в основном изучает **функции**, их свойства, операции над функциями и как функции можно использовать. Эту книгу написал Абу́ Абдулла́х Муха́ммад ибн Муса́ аль-Хорезми́ (мы говорим **аль-Хоре́зми**), работавший в Багдаде в IX веке, и она называется «Книга восполнения и противопоставления», по-арабски «Китаб **аль-джабр** ва-ль-мукабала». Аль-Хорезми также известен тем, что ввёл в использование цифры, которые мы сейчас называем арабскими, а он их заимствовал из Индии, и, в том числе, среди этих цифр ноль.

От имени аль-Хорезми происходит слово «алгоритм». От слова «аль-джабр» («восполнение») из названия его книги происходит название науки алгебры.

Мы сейчас разберём что такое функция, потому что вы начнёте изучать функции на математике уже в 6 классе. Функция – важнейший, фундаментальный математический объект, столь же важный, как и само понятие числа.

Функция – это правило, которое превращает одно число (аргумент), в другое (значение). Функция может быть задана: формулой, графиком, таблицей, алгоритмом, текстовым описанием, физическим устройством и другими способами.

Можно представить, что функция – это действие, выполняемое с числами, аналогично тому, как глагол выполняет действия с существительными. Иногда говорят, что «функция устанавливает некоторую зависимость своего значения от аргумента».

Ещё одна аналогия: функция – это машинка, волшебная коробочка, которая по некоторому правилу превращает одно число в другое. Если это правило вам известно, то машинка прозрачная, вы видите всё, что внутри неё происходит, как поворачиваются все её шестерёнки. Если вы не знаете это правило, то машинка непрозрачная, как чёрный ящик, но тем не менее, она всё равно как-то исправно работает, просто вы не знаете как именно.

Функция имеет имя, после которого в круглых скобках указывают аргумент. Например, запись **s(t)** говорит, что есть некоторая функция по имени **s**, которая принимает число, обозначаемое буквой **t** (это её аргумент), и как-то превращает его в другое число. Запись читают так: «s от t», используется предлог «от». Как именно превращает? А это смотря какое правило установлено функцией.

<u>Пример:</u>

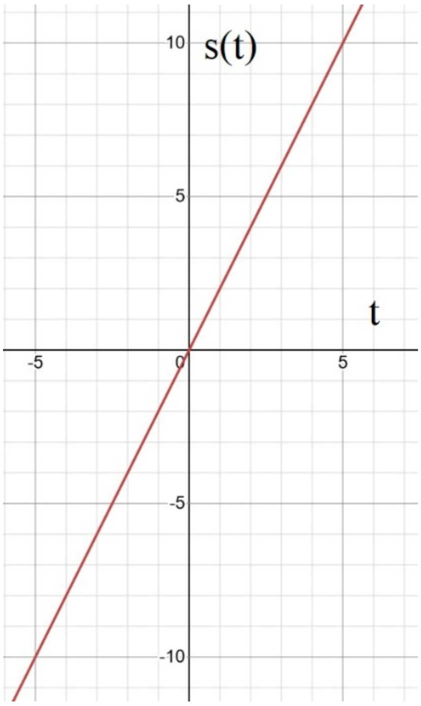
Функция s(t) может быть задана описанием: *«s — это путь в метрах, пройденный телом с постоянной скоростью 2 м/с за время t секунд»*.

Эта же функция может быть задана формулой: $s(t) = 2t$.

Эта же функция может быть задана таблицей:

t	s(t)
0	0
1	2
2	4
3	6
4	8
5	10

Эта же функция может быть задана графиком:

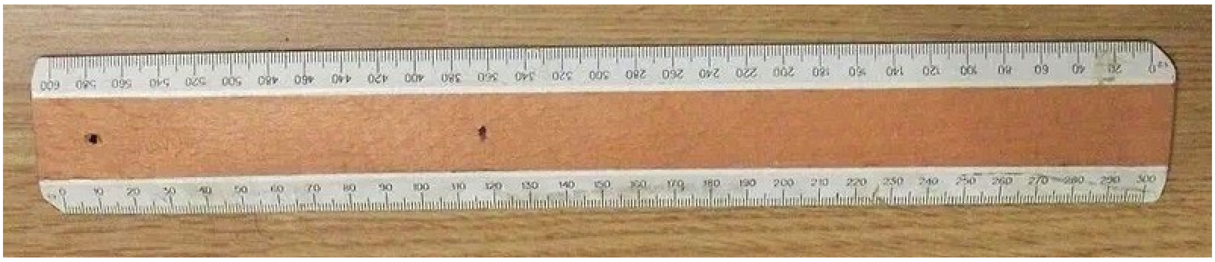


По общему соглашению, на графиках аргумент принято откладывать по горизонтальной оси, значение – по вертикальной.

Эта же функция может быть задана алгоритмом, например, на питоне:

```
def  s ( t ):
        return 2 * t
```

Эта же функция может быть задана физическим устройством, например, существуют линейки с двумя шкалами для измерения отверстий и получения радиуса или диаметра.



Важно понимать, что выше описаны <u>разные способы задания одной и той же функции</u>.

Потренируемся в представлении функций разными способами.

Упражнение 1. Функция задана формулой $s(t) = \frac{1}{2}\,t$. Как выглядят её алгоритм, таблица и график?

Используя питон, получим таблицу. Для этого помимо самой функции, напишем программу, печатающую таблицу с помощью цикла while:

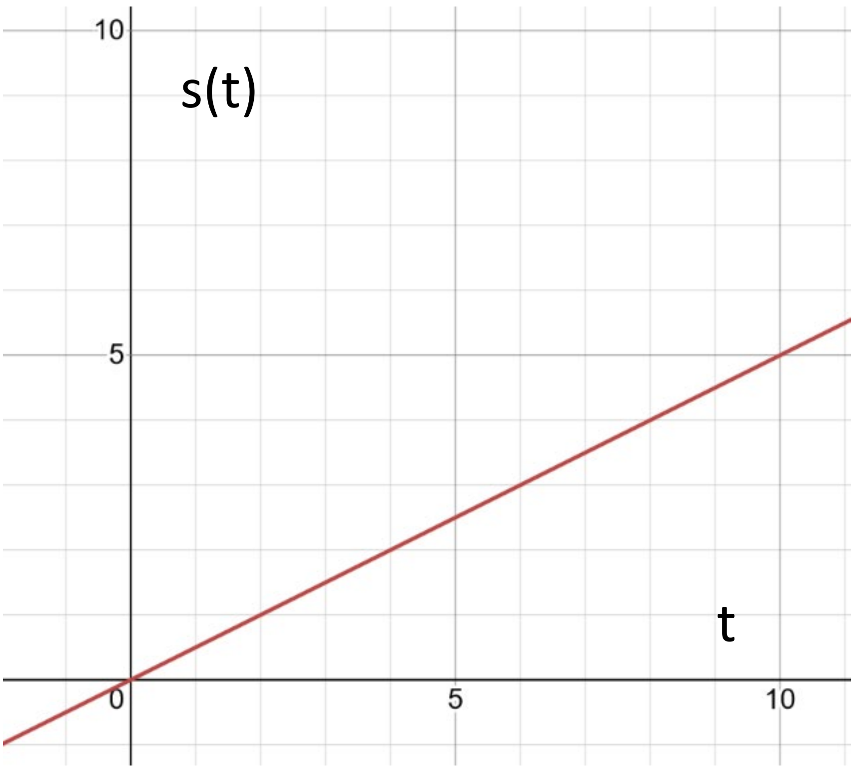
```
def s ( t ):
        return 0.5 * t

t = 0
while t <= 6:
        print ( t, s(t) )
        t += 1
```

Получим таблицу:

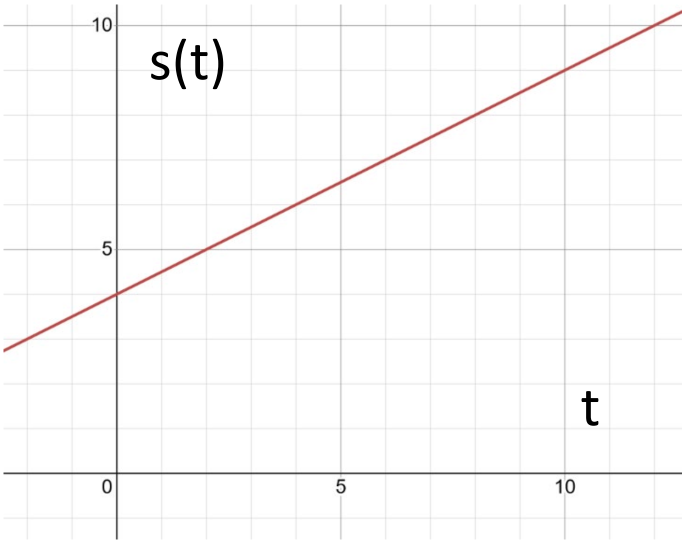
0	0
1	0.5
2	1
3	1.5
4	2
5	2.5
6	3

И построим по точкам график



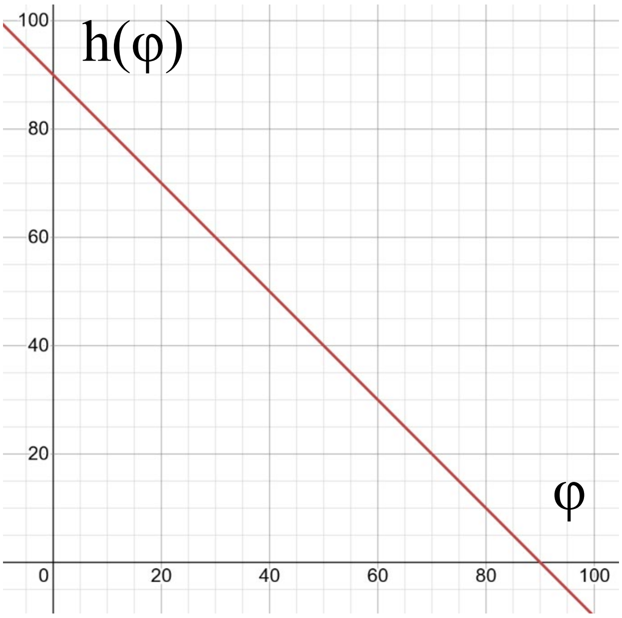
Упражнение 2.

Повторим то же с функцией s(t) = $\frac{1}{2}t + 4$ и получим график:



Упражнение 3.

Вспомним астрономию. Высота Солнца в полдень в день равноденствия определяется формулой h = 90° - φ, где φ - широта места наблюдения. Это тоже функция h(φ) = 90° - φ, получим её график.



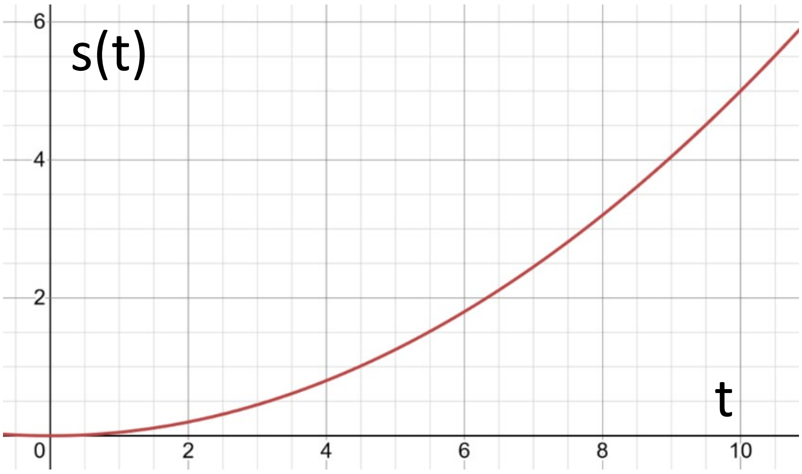
Функции, графики которых представляют собой прямые, называются линейными. Это самый простой, но и в то же время самый часто используемый в технике тип функций.

Обратите внимание, что число, на которое умножается аргумент, определяет наклон графика, а число, добавляемое к аргументу, определяет смещение графика вверх или вниз.

Аль-Хорезми, помимо линейных, исследовал свойства квадратичных функций.

Упражнение 4.

При равноускоренном движении пройденный путь определяется по формуле s(t) = $\frac{1}{2}at^2$. Построим график этой функции для a = 0,1.



Такая функция называется квадратичной, потому что она, среди прочих операций, возводит аргумент в квадрат. Она нелинейная. График квадратичной функции называется **пара́болой.**

Упражнение 5.

И ещё один тип функций, который вам потребуется уже в 6 классе: обратная пропорциональность. У этой функции аргумент находится в знаменателе. Например, вот такая функция: $y(x) = \frac{6}{x}$

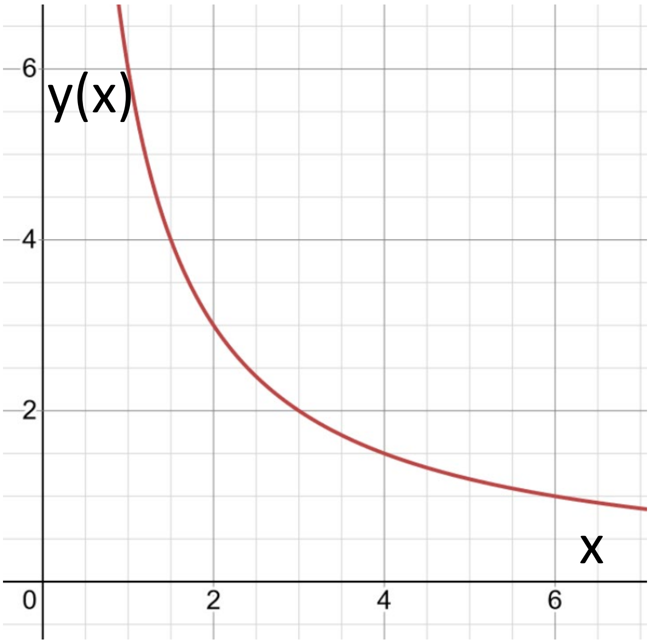
При вычислении таблицы обратите внимание, что обратная пропорциональность не может дать ответ при $x = 0$, ведь на ноль делить нельзя. В таких случаях говорят, что в каких-то точках функция не определена.

Иногда функция не может применить своё правило для некоторых аргументов, тогда у неё для таких аргументов просто нет ответа. Для таких аргументов функция не определена.

Это нормально, некоторые функции имеют такое свойство согласно своему правилу.

Поэтому для функции $y(x) = \frac{6}{x}$ посчитаем таблицу начиная не с 0, а с 1, и получим такой график.

График обратной пропорциональности называется **гипе́рболой**:



Парабола, гипербола и ещё одна кривая, эллипс, оказываются близнецами. Эти три кривые, несмотря на их непохожесть между собой, объединяет то, что все они являются коническими сечениями. С их поистине удивительными свойствами мы познакомимся при продолжении изучения астрономии в 7 классе.

И ещё одно важное свойство функций.

Функции работают только в одну сторону: по заданному аргументу вычисляют значение. В обратную сторону функции не работают. Это значит, что функции не могут по данному значению назвать аргумент.

Домашнее задание:

1. На одном поле постройте графики двух нелинейных функций: гипе́рболу и пара́болу.

а) $y(x) = \frac{8}{x} + 2$ и б) $y(x) = 0{,}1x^2 + 1.$

2*. На этом же поле проведите данную прямую и подберите формулу, выражающую эту линейную функцию.

Для выполнения этого задания вспомните, что число, на которое умножается аргумент, определяет наклон графика линейной функции, а число, добавляемое к аргументу, определяет смещение графика вверх-вниз. В качестве образца посмотрите на графики функций выше в упражнениях 1 и 2.