151. Il modello matematico sottostante alla curva dei rendimenti della BCE

di Gabriella D'Agostino[1], Antonio Guglielmi[2]
{gabriella.dagostino; antonio.guglielmi}@unisalento.it
[Dip. SEMS - Università del Salento]

Sunto

I tassi d'interesse sono grandezze finanziarie non direttamente quotate sui mercati finanziari, infatti sono ricavati da altri strumenti finanziari il cui prezzo, invece, viene registrato sui mercati.
Le informazioni implicite nei tassi di mercato di diverse attività finanziarie forniscono indicazioni prospettiche sulle aspettative del mercato riguardo a numerosi fattori fondamentali, come l'evoluzione futura delle attività economiche e l'inflazione, nonché l'andamento del costo del denaro. L'analisi di tali aspettative è importante per l'attuazione di politiche di gestione del rischio di tasso d'interesse [ADGS].
La curva dei rendimenti è la curva che si ottiene dalla relazione che lega l'evoluzione del rendimento di un titolo rispetto alla scadenza dello stesso.
Molti modelli sono stati proposti negli ultimi anni per stimare la curva dei rendimenti, alcuni basati direttamente sul prezzo di titoli a reddito certo (titoli a cedola nulla e titoli a cedola certa) e maturity (scadenza) in funzione di alcuni parametri (*cross-sectional dimension*), ad esempio il modello di Neson-Siegel (1987) [NS], il modello di estensione di Svensson (1994) [S] (o modello di Nelson-Siegel-Svensson), altri basati sulla specificazione esogena delle dinamiche di alcun rilevanti fattori (time-series dimension), come ad esempio il modello di Vasicek (1977) [V] ed il modello di Cox–Ingersoll-Ross (1985) [CIR].
Lo scopo principale di questo contributo è introdurre e discutere il modello utilizzato dalla banca Centrale Europea (BCE) per la stima della curva dei rendimenti, ovvero la cosiddetta struttura per scadenza dei rendimenti.
Verrà dapprima discusso il modello di valutazione di Nelson – Siegel – Svensson e successivamente verrà discussa l'applicazione che ne fa la BCE.

Classificazione AMS: 91B24; 62M20.
Classificazione JEL: G120.
Parole chiave: curva dei rendimenti, modello di Nelson - Siegel - Svensson, stima dei parametri, strutture per scadenza risk-free BCE.

Introduzione e principali definizioni

La funzione di sconto (o funzione valore) è quella relazione di equivalenza finanziaria intertemporale attraverso la quale è possibile determinare l'importo $P(t,T,s)$ che concordato al tempo t (stipula) deve essere versato in T (valuta) per ricevere alla scadenza del contratto s una posta unitaria. La differenza $(s-T)$ è la durata del contratto o maturity. Se la data di stipula coincide con la data di valuta $(t=T)$ il contratto si definisce a pronti e la funzione valore si indica con $P(t,s)$, mentre se $(t \neq T)$ il contratto si definisce a termine e la funzione valore è espressa da $P(t,T,s)$[3]. Pertanto il valore attualizzato, ovvero il valore al tempo t di un importo X_s disponibile al tempo s sarà

$$X_t = X_s \cdot P(t,s) \qquad (1)$$

[1] Dottore di Ricerca in "Scienze Matematico – Statistiche per la Finanza e la Geostatistica" – Indirizzo Finanza.
[2] Dottorando di Ricerca in "Scienze Economiche e Matematico – Statistiche" – Indirizzo Finanza.
[3] Per una trattazione analitica delle proprietà della funzione valore vedi [M].

Allo stesso tempo possiamo affermare che X_t è la quantità di denaro da versare al tempo t per avere una quantità di denaro X_s disponibile al tempo s.
Il valore $W(t,X)$ del vettore dei flussi X, dato da un titolo che paga cedole costanti dell'importo c e che rimborsa a scadenza il valore nominale C con maturity N, su un vettore di tempi $\{t_1,t_2,.......t_N\}$ al tempo t sarà

$$W(t,X)=c\cdot P(t,t_1)+c\cdot P(t,t_2)+..........+(c+C)\cdot P(t,t_N) \qquad (2)$$

La curva dei rendimenti a scadenza $R(t,s)$ è definita dalla seguente relazione

$$P(t,s)=\exp(-(s-t)\cdot R(t,s)) \quad \Leftrightarrow \quad R(t,s)=-\frac{1}{s-t}\ln P(t,s) \qquad (3)$$

Un'altra quantità importante è l'intensità istantanea d'interesse $f(t,s)$, che è definito dalla seguente relazione

$$P(t,s)=\exp\left(-\int_t^s f(t,u)du\right) \quad \Leftrightarrow \quad f(t,s)=-\frac{\partial}{\partial s}\ln P(t,s) \qquad (4)$$

Il tasso d'interesse $i(t,s)$ è dato dalla seguente relazione

$$i(t,s)=(P(t,s))^{t-s}-1 \qquad (5)$$

Pertanto, dato un insieme Ω di titoli obbligazionari, con diverse scadenze e cedole, si può per ognuno di essi calcolare il corrispondente rendimento a scadenza $R(t,s)$, in questo modo si avrà un insieme di coppie ordine, in cui l'ascissa è data dalla scadenza e l'ordinata dal relativo rendimento, la curva che se ne ottiene prende il nome di curva dei rendimenti.

Il modello di Nelson-Siegel-Svensson

Date le relazioni che sussistono tra la funzione di sconto $P(t,s)$, il rendimento a scadenza $R(t,s)$ e l'intensità istantanea d'interesse $f(t,s)$, parleremo di modelli *cross-sectional* quando si stabilisce una forma funzionale rispetto alla variabile *s* per una di queste funzioni. L'idea è quella di postulare una forma funzionale per la funzione da stimare che può essere data da una famiglia specifica di funzioni dipendenti da un vettore di parametri. Il problema della stima della relativa curva dei rendimenti è quindi ridotto alla stima del vettore dei parametri dai dati di mercato.
Una classe di modelli particolarmente utilizzata è costituita dai modelli parsimoniosi. L'idea di base di questa classe di modelli, è quella di imporre a priori alcune proprietà e contemporaneamente di limitare il numero dei parametri che determinano la forma funzionale. Tali parametri devono essere quindi stimati a partire dalle quantità osservate.
Ai fini del presente contributo si illustreranno i modello proposto da Nelson - Siegel in [NS] e l'estensione di quest'ultimo proposta da Svensson in [S].
Il modello di Nelson - Siegel (NS) assume che l'intensità istantanea d'interesse $f(t,s)$ è la soluzione dell'equazione

$$f(t,s)=\beta_0+\beta_1\cdot\exp\left(\frac{t-s}{\tau}\right)+\beta_2\cdot\frac{s-t}{\tau}\cdot\exp\left(\frac{t-s}{\tau}\right) \qquad (6)$$

Questa equazione genera una famiglia di curve in cui monotonia, curvatura e forma dipendono dai valori di β_1, β_2 e τ ed ha un asintoto in β_0.
Il rendimento a scadenza $R(t,s)$ è dato da

$$R(t,s)=\frac{1}{s-t}\int_t^s f(t,u)du$$

da cui si ottiene integrando $R(t,\bullet)$ tra t e s e dividendo per $(s-t)$ si ottiene

$$R(t,s) = \beta_0 + (\beta_1 + \beta_2)\cdot\left(1-\exp\left(\frac{t-s}{\tau}\right)\right)\cdot\frac{\tau}{s-t} - \beta_2\cdot\exp\left(\frac{t-s}{\tau}\right) \qquad (7)$$

Se si pone $\tau = 1$, $\beta_0 = 1$, $(\beta_0 + \beta_1) = 0$ e $\beta_2 = a$ la (7) diviene

$$R(t,s) = 1-(1-a)\cdot(1-\exp(t-s))/(s-t) - a\cdot\exp(t-s)$$

Al variare del parametro a con incrementi costanti da -6 a +6 si ottengono le diverse forme di curve del rendimento a scadenza (gobbe, curve ad U, forme ad s e curve monotone) come si evince dalla figura 1.

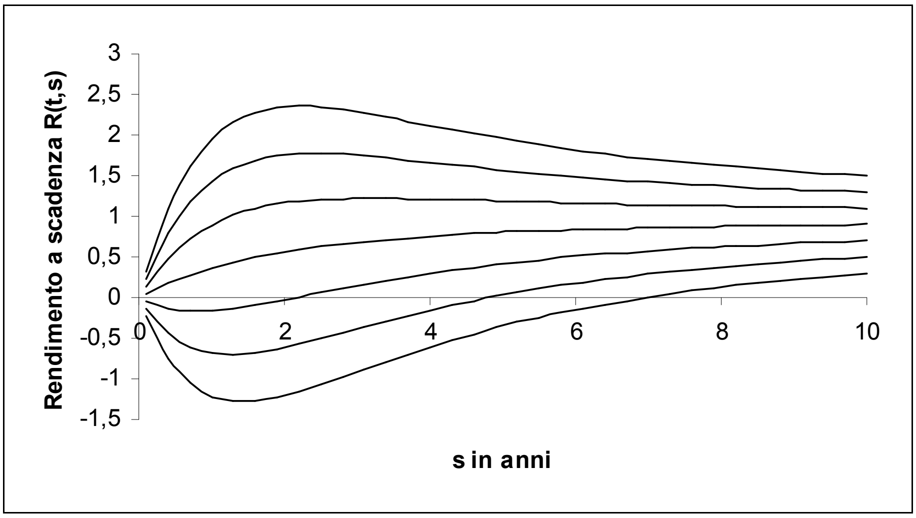

Figura 1

I coefficenti del modello misurano le forze delle componenti del breve, medio e lungo termine, infatti, il contributo del lungo termine è determinato da β_0, quello del breve termine da β_1, mentre β_2 indica il contributo della componente del medio termine. La componente del lungo termine è una costante che non tende a zero in limite.

La curva del medio termine è la sola nel modello che parte da zero e tende a zero. La curva del breve termine non parte da zero e tende a zero ed è quella che decade più velocemente, come si evince dalla figura 2, in cui si è posto $\beta_0 = 0{,}07$; $\beta_1 = 0{,}05$; $\beta_2 = 0{,}12$ e $\tau = 1$;

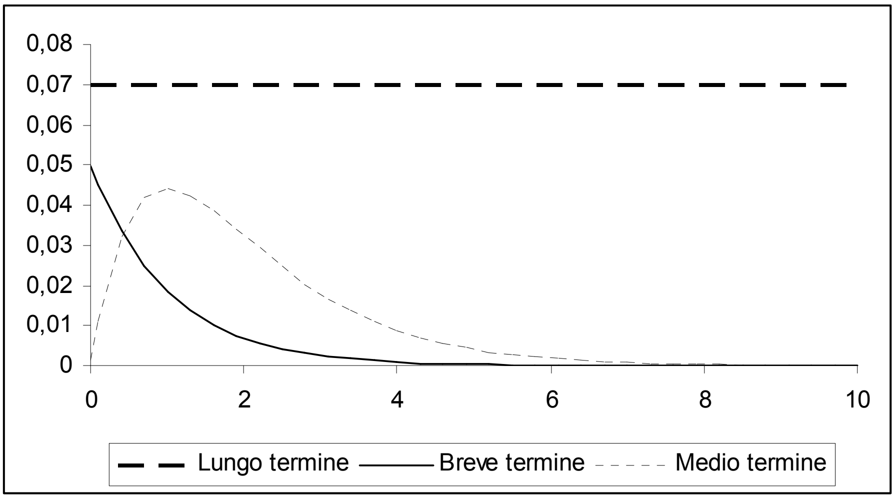

Figura 2 Componenti dell'intensità istantanea d'interesse

E' facile notare che scegliendo appropriatamente i pesi di queste componenti si possano generare diverse curve dei rendimenti basate sul tasso.
Per incrementare la flessibilità e migliorare l'adattamento Svensson in [S] estende la funzione di Nelson - Sigiel (6) aggiungendo un quarto termine

$$\beta_3 \cdot \frac{s-t}{\tau_2} \cdot \exp\left(\frac{t-s}{\tau_2}\right)$$

che genera una seconda gobba (o una forma ad U) con due nuovi parametri β_3 e τ_2. Il comportamento di questa nuova componente è del tutto simile alla componente del medio termine di NS con β_3 e τ_2 al posto di β_2 e τ. Nel modello di Nelson – Siegel - Svensson (NSS) la struttura per scadenza delle intensità istantanea di interesse al tempo t è definita dalla funzione

$$f(t,s) = \beta_0 + \beta_1 \cdot \exp\left(\frac{t-s}{\tau_1}\right) + \beta_2 \cdot \frac{s-t}{\tau_1} \cdot \exp\left(\frac{t-s}{\tau_1}\right) + \beta_3 \cdot \frac{s-t}{\tau_2} \cdot \exp\left(\frac{t-s}{\tau_2}\right) \tag{8}$$

definita per $(s-t) \geq 0$ e dove β_0, β_1, β_2, β_3, τ_1 e τ_2 sono parametri reali che soddisfano i vincoli di significatività

$$\beta_0 > 0 \qquad \beta_0 + \beta_1 > 0 \qquad \tau_1 > 0 \qquad \tau_2 > 0 \tag{9}$$

Il modello NSS può essere riscritto come somma di quattro componenti

$$f(t,s) = f_0(t,s) + f_1(t,s) + f_2(t,s) + f_3(t,s)$$

Pertanto, la curva del modello è la risultante della somma delle quattro componenti.
I parametri dipendono dalla data t di contrattazione ed il modello non fa nessuna ipotesi di dipendenza da t, ovvero sulla sua dinamica, in questo senso è un modello statico, infatti descrive solo la struttura per scadenza al tempo t. Inoltre, il modello non dipende da s, ma solo dalla differenza tra t e s.
La struttura per scadenza del rendimento a scadenza al tempo t è definita dalla funzione

$$R(t,s) = \frac{1}{s-t} \int_t^s f(t,u)du$$

ovvero

$$R(t,s) = \beta_0 + \tau_1 \cdot \beta_1 \cdot \left(1 - \exp\frac{t-s}{\tau_1}\right)/(s-t) +$$

$$+ \beta_2 \cdot \left[\tau_1 \left(1 - \exp\left(\frac{t-s}{\tau_1}\right)\right)/(s-t) - \exp\left(\frac{t-s}{\tau_1}\right)\right]$$

$$+ \beta_3 \cdot \left[\tau_2 \cdot \left((1 - \exp\left(\frac{t-s}{\tau_2}\right)\right)/(s-t)] - \exp\left(\frac{t-s}{\tau_2}\right)\right] \tag{10}$$

La struttura per scadenza del tasso d'interesse a pronti al tempo t è definita dalla funzione

$$i(t,s) = \exp(R(t,s)) - 1$$

La funzione di sconto è definita da

$$P(t,s) = \exp((s-t) \cdot R(t,s)) \tag{11}$$

La curva dei rendimenti della BCE

La Banca Centrale Europea utilizza il modello di NSS per la stima delle curve dei rendimenti riferite all'euro mercato.
La BCE pubblica giornalmente sul suo sito le curve dei rendimenti stimate con il metodo di NSS dal 6 settembre 2004, calcolate a partire dalle quotazioni sull'Euro MTS (Mercato dei Titoli di Stato). La BCE stima quotidianamente a fine giornata due curve dell'area euro. Quella principale è stimata sui prezzi di titoli di Stato con rating (Fitch) AAA, che assume il significato della struttura per scadenza *risk-free* dell'area euro. Un'altra curva è calcolata a partire dai prezzi di tutti i titoli di Stato dell'area euro.
In entrambi i casi vengono considerati solo titoli denominati in euro, con poste deterministiche (titoli senza cedola e titoli con cedola fissa), *maturity* da 3 mesi a 30 anni, nominale emesso di almeno 5 miliardi di euro ed effettivamente scambiati nella giornata.

La calibrazione dei parametri

Per calibrare i parametri del modello la BCE in una generica data t procede nel seguente modo:

1. reperisce dal mercato i prezzi dei titoli quotati a fine giornata con le caratteristiche precedentemente specificate e li classifica per maturity;
2. assume che i tassi d'interesse seguano una forma funzionale i cui parametri le consentono di essere sufficientemente duttili;
3. calibra i parametri della forma funzionale (modello) in modo da renderla il più aderente possibile ai dati reperiti dal mercato;
4. ottiene i dati mancanti utilizzando la forma funzionale stimata.

Quindi, alla data di riferimento t, si considerano n titoli x_j, con $j = 1,2,........n$ con prezzo P_j con $j = 1,2,........n$ che generano ciascuno un proprio flusso $\{c_{j1}, c_{j2}, ..., c_{jm} + C_j\}$ su uno scadenzario comune $\{t_1, t_2, ..., t_m\}$. Il prezzo stimato $\overline{P}_j$ del j-titolo utilizzando la (2) al tempo t è

$$\overline{P}_j = c_{j1} \cdot P_\omega(t, t_1) + c_{j2} \cdot P_\omega(t, t_2) + ... + (c_{jm} + C_j) \cdot P_\omega(t, t_m)$$

dove $P_\omega(t, t_k)$ con $k = 1,2,........m$ è il fattore di sconto tra il tempo t ed il tempo t_k definito dalla (11) e dipendente dal parametro ω.
La metodologia per la calibrazione dei parametri del modello di NSS prevede che il vettore $\omega = \{\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \tau_1, \tau_2\}$ dei parametri stimati degli n titoli sia la soluzione del problema di ottimizzazione vincolata

$$\min_{\omega \in \Omega} \sum_{j=1}^{n} (P_j - \overline{P}_j)^2$$

dove Ω è l'insieme dei vettori che soddisfano i vincoli di significatività (9).

Nella figura 3 sono riportati i grafici su base annua dell'intensità istantanea $f(t,s)$, del rendimento a scadenza $R(t,s)$ e dei tassi a pronti $i(t,s)$ stimati dalla BCE del 28/02/2011, il tempo è espresso in anni con i seguenti valori dei parametri: $\beta_0 = 1{,}605537\%$, $\beta_1 = -1{,}048783\%$, $\beta_2 = 13{,}387869\%$, $\beta_3 = -4{,}068860\%$, $\tau_1 = 9{,}260119$ e $\tau_2 = 9{,}068778$.

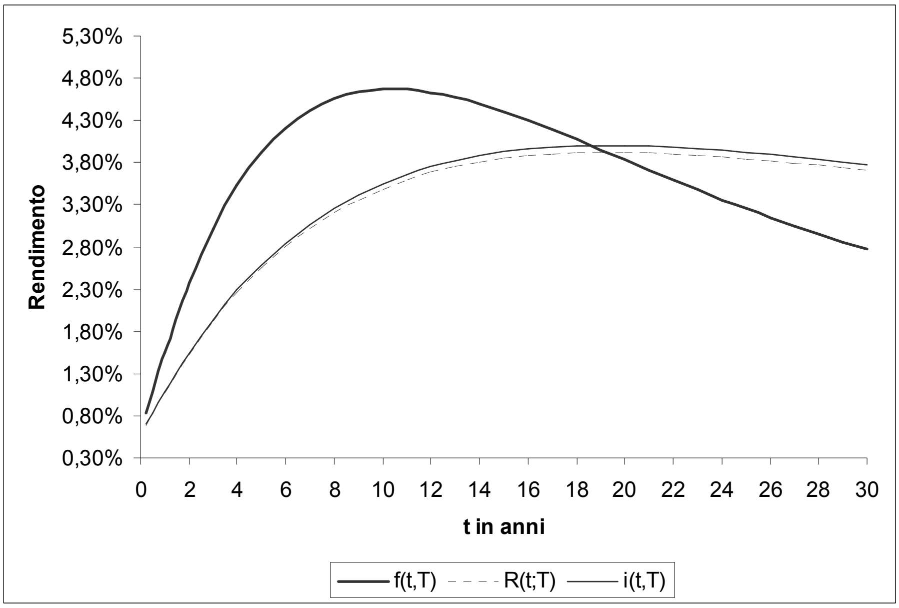

Figura 3 Struttura per scadenza risk- free stimata dalla BCE il 28/02/2011

Nella figura 4 sono riportati i grafici delle quattro componenti dell'intensità istantanea $f(t,s)$ risk- free stimata dalla BCE il 28/02/2011

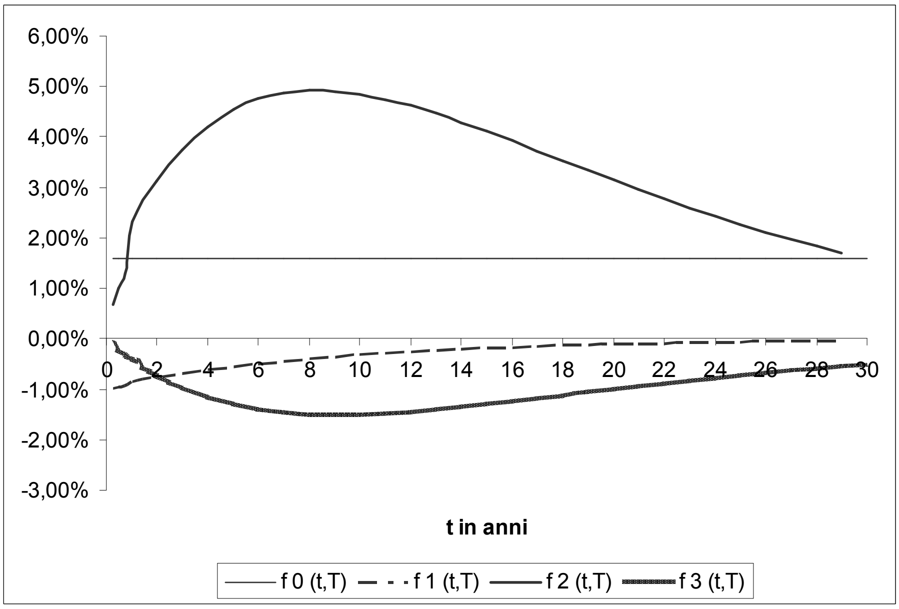

Figura 4 Componenti dell'intensità istantanea d'interesse risk- free stimata dalla BCE il 28/02/2011.

Bibliografia

[ADGS] Anzilli L., D'Agostino G., Guglielmi A., Scolozzi D., *Liability Management negli Enti Locali*.Trepuzzi (LE), Edizioni Publigrafic, pp. 1-128, ISBN 8890226641.

[BCE] BCE *Techical notes*.
http://www.ecb.europa.eu/stats/money/yc/html/technical_notes.pdf

[CIR] Cox, J.C., Ingersoll, J.E., Ross, S.A. *A Theory of the Term Structure of Interest Rate*. In Econometrica, 53, pp. 385-407, 1985.

[H] Hull, J. C. *Option, futures ed altri derivati*. Prentice - Hall International, 2000.

[M] Moriconi, F. *Matematica finanziaria*. Bologna, Il Mulino, 1995.

[NS] Nelson, C. R., Siegel, A. (1987) *A Parsimonious Modelling of Yield Curves*. Journal of Business, vol. 60, n. 4, pp. 473-489.

[S] Svensson, L.E.O., (1994) *Estimating and interpreting forward interest rates: Sweden 1992-1994*, IMF Working Paper, n. 114.

[V] Vasicek, O. (1977) *An equilibrium characterization of the term structure*, Journal of Financial Economics, 5, pp. 177-188.