Projekt 1

Magdalena Jeczeń, Michał Kukla, Michał Iwicki

Zadanie 1

Zadanie 1)

```
In[∘]:= J = {{λ, 1, 0, 0}, {0, λ, 1, 0}, {0, 0, λ, 1}, {0, 0, 0, λ}}
Out[∘]= {{λ, 1, 0, 0}, {0, λ, 1, 0}, {0, 0, λ, 1}, {0, 0, 0, λ}}

In[∘]:= MatrixForm[J]
```

Out[∘]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

```
In[∘]:= MatrixPower[J, 2] // MatrixForm
```

Out[∘]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} \lambda^2 & 2\lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda^2 & 2\lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda^2 & 2\lambda \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^2 \end{pmatrix}$$

```
In[∘]:= MatrixPower[J, 3] // MatrixForm
```

Out[∘]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} \lambda^3 & 3\lambda^2 & 3\lambda & 1 \\ 0 & \lambda^3 & 3\lambda^2 & 3\lambda \\ 0 & 0 & \lambda^3 & 3\lambda^2 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^3 \end{pmatrix}$$

```
In[∘]:= MatrixPower[J, 4] // MatrixForm
```

Out[∘]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} \lambda^4 & 4\lambda^3 & 6\lambda^2 & 4\lambda \\ 0 & \lambda^4 & 4\lambda^3 & 6\lambda^2 \\ 0 & 0 & \lambda^4 & 4\lambda^3 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^4 \end{pmatrix}$$

A tak wygląda n-ta potęga macierzy:

```
In[∘]:= MatrixPower[J, n] // MatrixForm
```

Out[∘]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{-1+n} & \frac{1}{2}(-1+n)\,n\,\lambda^{-2+n} & \frac{1}{6}(-2+n)(-1+n)\,n\,\lambda^{-3+n} \\ 0 & \lambda^n & n\lambda^{-1+n} & \frac{1}{2}(-1+n)\,n\,\lambda^{-2+n} \\ 0 & 0 & \lambda^n & n\lambda^{-1+n} \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^n \end{pmatrix}$$

Zatem zauważam, że jeżeli rozpisać macierz $J = \lambda * I + U$ (gdzie macierz U to górnotrójkątna, a $\lambda * I$ to diagonalna), to

$$J^n = (\lambda * I + U)^n$$

Możemy to rozpisać, korzystając ze wzoru dwumianowego Newtona (rozpatrujemy macierz 4x4 z zadania):

$$(\lambda * I + U)^n = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} * \lambda^{n-m} * U^m$$

A ogólnie dla macierzy mxm będzie to tak samo:

$$(\lambda * I + U)^n = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} * \lambda^{n-m} * U^m$$

Zadanie 2

(a) Zweryfikuj, że każda macierz z zadania ma ten sam wielomian charakterystyczny, którego jedynym pierwiastkiem jest pewna liczba λ

```
a = {{4, -1, -3, 5, -2}, {-5, -1, 1, -4, 4}, {8, -1, -4, 6, -5}, {1, 0, 0, -1, -1}, {5, -1, -3, 5, -3}};
b = {{-1, 0, -1, 1, 1}, {-5, -1, 1, -4, 4}, {3, 0, -2, 2, -2}, {1, 0, 0, -1, -1}, {0, 0, -1, 1, 0}};
c = {{-9, 1, 2, -5, 6}, {-2, -1, 0, -2, 2}, {-5, 1, 1, -4, 3}, {1, 0, 0, -1, -1}, {-8, 1, 2, -5, 5}};
d = {{-4, 0, 0, -1, 3}, {-2, -1, 0, -2, 2}, {0, 0, -1, 0, 0}, {1, 0, 0, -1, -1}, {-3, 0, 0, -1, 2}};
e = {{0, 0, -1, 2, 0}, {-3, -1, 1, -2, 2}, {3, 0, -2, 2, -2}, {1, 0, 0, -1, -1}, {1, 0, -1, 2, -1}};
f = {{2, 0, -1, 2, -2}, {-3, -1, 1, -2, 2}, {3, 0, -2, 2, -2}, {0, 0, 0, -1, 0}, {3, 0, -1, 2, -3}};
g = {{-1, 0, 0, 0, 0}, {0, -1, 0, 0, 0}, {0, 0, -1, 0, 0}, {0, 0, 0, -1, 0}, {0, 0, 0, 0, -1}};
```

```
In[92]:= CharacteristicPolynomial[a, λ]
         CharacteristicPolynomial[b, λ]
         CharacteristicPolynomial[c, λ]
         CharacteristicPolynomial[d, λ]
         CharacteristicPolynomial[e, λ]
         CharacteristicPolynomial[f, λ]
         CharacteristicPolynomial[g, λ]
```

Out[92]= $-1-5\lambda-10\lambda^2-10\lambda^3-5\lambda^4-\lambda^5$

Out[93]= $-1-5\lambda-10\lambda^2-10\lambda^3-5\lambda^4-\lambda^5$

Out[94]= $-1-5\lambda-10\lambda^2-10\lambda^3-5\lambda^4-\lambda^5$

Out[95]= $-1-5\lambda-10\lambda^2-10\lambda^3-5\lambda^4-\lambda^5$

Out[96]= $-1-5\lambda-10\lambda^2-10\lambda^3-5\lambda^4-\lambda^5$

Out[97]= $-1-5\lambda-10\lambda^2-10\lambda^3-5\lambda^4-\lambda^5$

Out[98]= $-1-5\lambda-10\lambda^2-10\lambda^3-5\lambda^4-\lambda^5$

```
In[99]:= Eigenvalues[a]
Out[99]= {-1, -1, -1, -1, -1}
```

Widzimy, że przy użyciu funkcji `CharacteristicPolynomial` dla każdej z macierzy, otrzymujemy te same wielomiany charakterystyczne.
Wartość własna dla każdej z tych macierzy wynosi -1, co obliczyliśmy przy użyciu funkcji `Eigenvalues`.

(b) Sprawdź do jakiej macierzy blokowej podobne są odpowiednie macierze, w szczególności ile klatek Jordana ma dana macierz blokowa (przydatne będzie polecenie `JordanDecomposition` z Mathematici).

In[39]:= `MatrixForm[JordanDecomposition[a][[2]]]`

Out[39]//MatrixForm=
$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Tak wygląda macierz Jordana podobna do macierzy a. Widzimy, że liczba klatek wynosi 1.

In[40]:= `MatrixForm[JordanDecomposition[b][[2]]]`

Out[40]//MatrixForm=
$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Tak wygląda macierz Jordana podobna do macierzy b. Widzimy, że liczba klatek wynosi 2.

```
In[41]:= MatrixForm [JordanDecomposition[c][[2]]]
```

Out[41]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Tak wygląda macierz Jordana podobna do macierzy c. Widzimy, że liczba klatek wynosi 2.

```
In[42]:= MatrixForm [JordanDecomposition[d][[2]]]
```

Out[42]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Tak wygląda macierz Jordana podobna do macierzy d. Widzimy, że liczba klatek wynosi 3.

```
In[43]:= MatrixForm [JordanDecomposition[e][[2]]]
```

Out[43]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Tak wygląda macierz Jordana podobna do macierzy e. Widzimy, że liczba klatek wynosi 3.

```
In[44]:= MatrixForm [JordanDecomposition[f][[2]]]
```

Out[44]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Tak wygląda macierz Jordana podobna do macierzy f. Widzimy, że liczba klatek wynosi 4.

```
In[45]:= MatrixForm [JordanDecomposition[g][[2]]]
```

Out[45]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Tak wygląda macierz Jordana podobna do macierzy g. Widzimy, że liczba klatek wynosi 5.

(c) Dla każdej macierzy X z zadania oblicz wymiar jądra przekształcenia $X - \lambda I$ (przydatne będzie polecenie `MatrixRank` z Mathematici)

```
{Length[a] - MatrixRank[a - (-1) * IdentityMatrix[Length[a]]],
 Length[a] - MatrixRank[b - (-1) * IdentityMatrix[Length[b]]],
 Length[a] - MatrixRank[c - (-1) * IdentityMatrix[Length[c]]],
 Length[a] - MatrixRank[d - (-1) * IdentityMatrix[Length[d]]],
 Length[a] - MatrixRank[e - (-1) * IdentityMatrix[Length[e]]],
 Length[a] - MatrixRank[f - (-1) * IdentityMatrix[Length[f]]],
 Length[a] - MatrixRank[g - (-1) * IdentityMatrix[Length[g]]]}
Out[47]= {1, 2, 2, 3, 3, 4, 5}
```

Wymiary jądra przekształcenia $(X - \lambda I)$ dla każdej macierzy z zadania wynoszą odpowiednio 1,2,2,3,3,4,5 dla macierzy a,b,c,d,e,f,g. (każda z macierzy jest rozmiaru 5x5, stąd $Length[a] = Length[b] = ...$itd.)

(d) Napisz hipotezę w której dla macierzy X nad C, która posiada jedną wartość własną, napiszesz wzór na liczbę klatek Jordana macierzy X w zalezności od $dimker(X - \lambda * I)$ (przydatna będzie funkcja `IdentityMatrix`).

$$k = dimker(X - \lambda I)$$

gdzie k jest liczbą klatek Jordana dla macierzy X

(e) Udowodnij hipotezę z poprzedniego podpunktu. Warto przy okazji udowodnić lemat, że jeśli macierze A i B są podobne, to macierze $A - \lambda * I$ oraz $B - \lambda * I$ są również podobne.

Udowodnijmy najpierw lemat.
Niech A, B są podobnymi macierzami $\Leftrightarrow$ istnieje taka macierz P, że $B = P^{-1}AP$.
Weźmy tą macierz P oraz pewną liczbę λ należącą do ciała nad którym są macierze A oraz B.

$$(B - \lambda I) = P^{-1}AP - \lambda P^{-1}IP = P^{-1}(A - \lambda I)P \implies (B - \lambda I) \text{ oraz } (A - \lambda I) \text{ są podobne}$$

Udowodnijmy teraz naszą hipotezę
Niech X będzie macierzą nxn nad $\mathbb{C}$, która posiada jedną wartość własną λ oraz niech J będzie macierzą Jordana o k klatkach podobną do macierzy X. Skoro macierz J jest podobna do macierzy X, to powołując się na lemat udowodniony wyżej, $\implies$ macierz $(J - \lambda I)$ jest podobna do macierzy $(A - \lambda I)$ $\implies$ $dimker(A - \lambda I) = dimker(J - \lambda I)$
Zauważmy, że liczba zerowych kolumn macierzy $(J - \lambda I)$ jest równa liczbie klatek macierzy J. Zobaczmy to na przykładzie macierzy 4x4 z 1 klatką

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, (J - \lambda I) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Oznaczmy liczbę zerowych kolumn macierzy $J - \lambda I$ jako z. Zatem

$$dimker(A - \lambda I) = dimker(J - \lambda I) = n - rank(J - \lambda I) = n - (n - z) = z = k$$

c.n.d.

(f) Hipoteza ta też działa dla macierzy $X \in M_n(C)$ oraz liczby klatek Jordana dla ustalonej wartości własnej macierzy X. Uzasadnij to.

W tym przypadku mamy powiedziane, że hipoteza

$$k = dimker(X - \lambda * I),$$

gdzie k jest liczbą klatek Jordana z daną wartością własną macierzy X nad C, a λ jest pewną ustaloną wartością własną, również zachodzi.
Weźmy podobnie jak w podpunkcie e) macierz 4x4 z trzema klatkami.

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, (J - \lambda_1 I) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 - \lambda_1 \end{pmatrix}, (J - \lambda_2 I) = \begin{pmatrix} \lambda_1 - \lambda_2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 - \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 - \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Zauważmy, że dla wartości λ_1 mamy 2 klatki i $dimker(J - \lambda_1 = 2$ oraz dla λ_2 mamy 1 klatkę i $dimker(J - \lambda_2) = 1$. Jest tak dlatego, że klatki macierzy Jordana możemy tak pogrupować tak, by dana grupa miała daną wartość własną.

Jeżeli dla jakiejś wartości λ_1 mamy n klatek, to po odjęciu przekątnych tych klatek otrzymamy dokładnie n zerowych kolumn, zatem wymiar jądra macierzy złożonej tylko z tych klatek, gdzie na przekątnej jest zero, wyniesie 2 (zgodnie z udowodnioną hipotezą z podpunktu d)). Zostało nam pokazać, że $dimker(X - \lambda_1 * I) = n$. Na przekątnej takiej macierzy otrzymamy tylko n zerowych elementów (gdyż tam, gdzie było λ_1 mamy zero, tam gdzie λ_2 jest $\lambda_2 - \lambda_1$, ... oraz λ_1 jest różne od λ_2, λ_3, itd.). Otrzymaliśmy macierz, która ma dokładnie n zerowych kolumny (i jest "zeschodkowana"), zatem hipoteza jest prawdziwa.

(g) Dla każdej macierzy X z zadania oblicz kolejne wymiary jąder przekształceń $X - \lambda * I$, $(X - \lambda I)^2$,$(X - \lambda I)^3$,...
Po pewnym czasie wymiar ten się stabilizuje (tak będzie zawsze, nie trzeba tego uzasadniać). Opisz zależności wielkości klatek Jordana macierzy X od odpowiednich wymiarów jąder potęg macierzy $X - \lambda * I$.

```
{Length[a] - MatrixRank[a - (-1) * IdentityMatrix[Length[a]]],
 Length[a] - MatrixRank[MatrixPower[a - (-1) * IdentityMatrix[Length[a]], 2]],
 Length[a] - MatrixRank[MatrixPower[a - (-1) * IdentityMatrix[Length[a]], 3]],
 Length[a] - MatrixRank[MatrixPower[a - (-1) * IdentityMatrix[Length[a]], 4]],
 Length[a] - MatrixRank[MatrixPower[a - (-1) * IdentityMatrix[Length[a]], 5]],
 Length[a] - MatrixRank[MatrixPower[a - (-1) * IdentityMatrix[Length[a]], 6]],
 Length[a] - MatrixRank[MatrixPower[a - (-1) * IdentityMatrix[Length[a]], 7]]}

{Length[b] - MatrixRank[b - (-1) * IdentityMatrix[Length[b]]],
 Length[b] - MatrixRank[MatrixPower[b - (-1) * IdentityMatrix[Length[b]], 2]],
 Length[b] - MatrixRank[MatrixPower[b - (-1) * IdentityMatrix[Length[b]], 3]],
 Length[b] - MatrixRank[MatrixPower[b - (-1) * IdentityMatrix[Length[b]], 4]],
 Length[b] - MatrixRank[MatrixPower[b - (-1) * IdentityMatrix[Length[b]], 5]],
 Length[b] - MatrixRank[MatrixPower[b - (-1) * IdentityMatrix[Length[b]], 6]],
 Length[b] - MatrixRank[MatrixPower[b - (-1) * IdentityMatrix[Length[b]], 7]]}

{Length[c] - MatrixRank[c- (-1) * IdentityMatrix[Length[c]]],
 Length[c] - MatrixRank[MatrixPower[c - (-1) * IdentityMatrix[Length[c]], 2]],
 Length[c] - MatrixRank[MatrixPower[c - (-1) * IdentityMatrix[Length[c]], 3]],
 Length[c] - MatrixRank[MatrixPower[c - (-1) * IdentityMatrix[Length[c]], 4]],
 Length[c] - MatrixRank[MatrixPower[c - (-1) * IdentityMatrix[Length[c]], 5]],
 Length[c] - MatrixRank[MatrixPower[c - (-1) * IdentityMatrix[Length[c]], 6]],
 Length[c] - MatrixRank[MatrixPower[c - (-1) * IdentityMatrix[Length[c]], 7]]}

{Length[d] - MatrixRank[d - (-1) * IdentityMatrix[Length[d]]],
 Length[d] - MatrixRank[MatrixPower[d - (-1) * IdentityMatrix[Length[d]], 2]],
 Length[d] - MatrixRank[MatrixPower[d - (-1) * IdentityMatrix[Length[d]], 3]],
 Length[d] - MatrixRank[MatrixPower[d - (-1) * IdentityMatrix[Length[d]], 4]],
 Length[d] - MatrixRank[MatrixPower[d - (-1) * IdentityMatrix[Length[d]], 5]],
 Length[d] - MatrixRank[MatrixPower[d - (-1) * IdentityMatrix[Length[d]], 6]],
 Length[d] - MatrixRank[MatrixPower[d - (-1) * IdentityMatrix[Length[d]], 7]]}

{Length[e] - MatrixRank[e - (-1) * IdentityMatrix[Length[e]]],
 Length[e] - MatrixRank[MatrixPower[e - (-1) * IdentityMatrix[Length[e]], 2]],
 Length[e] - MatrixRank[MatrixPower[e - (-1) * IdentityMatrix[Length[e]], 3]],
 Length[e] - MatrixRank[MatrixPower[e - (-1) * IdentityMatrix[Length[e]], 4]],
 Length[e] - MatrixRank[MatrixPower[e - (-1) * IdentityMatrix[Length[e]], 5]],
 Length[e] - MatrixRank[MatrixPower[e - (-1) * IdentityMatrix[Length[e]], 6]],
 Length[e] - MatrixRank[MatrixPower[e - (-1) * IdentityMatrix[Length[e]], 7]]}

{Length[f] - MatrixRank[f - (-1) * IdentityMatrix[Length[f]]],
 Length[f] - MatrixRank[MatrixPower[f - (-1) * IdentityMatrix[Length[f]], 2]],
 Length[f] - MatrixRank[MatrixPower[f - (-1) * IdentityMatrix[Length[f]], 3]],
 Length[f] - MatrixRank[MatrixPower[f - (-1) * IdentityMatrix[Length[f]], 4]],
 Length[f] - MatrixRank[MatrixPower[f - (-1) * IdentityMatrix[Length[f]], 5]],
 Length[f] - MatrixRank[MatrixPower[f - (-1) * IdentityMatrix[Length[f]], 6]],
 Length[f] - MatrixRank[MatrixPower[f - (-1) * IdentityMatrix[Length[f]], 7]]}

{Length[g] - MatrixRank[g - (-1) * IdentityMatrix[Length[g]]],
 Length[g] - MatrixRank[MatrixPower[g - (-1) * IdentityMatrix[Length[g]], 2]],
 Length[g] - MatrixRank[MatrixPower[g - (-1) * IdentityMatrix[Length[g]], 3]],
 Length[g] - MatrixRank[MatrixPower[g - (-1) * IdentityMatrix[Length[g]], 4]],
 Length[g] - MatrixRank[MatrixPower[g - (-1) * IdentityMatrix[Length[g]], 5]],
 Length[g] - MatrixRank[MatrixPower[g - (-1) * IdentityMatrix[Length[g]], 6]],
 Length[g] - MatrixRank[MatrixPower[g - (-1) * IdentityMatrix[Length[g]], 7]]}
```

```
{1, 2, 3, 4, 5, 5, 5}
{2, 3, 4, 5, 5, 5, 5}
{2, 4, 5, 5, 5, 5, 5}
{3, 4, 5, 5, 5, 5, 5}
{3, 5, 5, 5, 5, 5, 5}
{4, 5, 5, 5, 5, 5, 5}
{5, 5, 5, 5, 5, 5, 5}
```

Dla macierzy A mamy jedną klatkę Jordana 4x4. Zatem wymiary $dimker(A - \lambda * I)$ maleją przy kolejnych potęgach o 1 aż do 5.
Dla macierzy B mamy 2 klatki Jordana (po przekształceniu macierzy oczywiście) o wielkości 3x3 i 1x1, wymiary jądra macierzy $B - \lambda * I$ maleją o 1 z każdą potęgą od 2 aż do 5.
Dla macierzy C mamy 2 klatki - jedną 3x3 i jedną 2x2. Kolejne wymiary szukanego jądra to 2,4, a potem 5,5,5,...
Jest tak dlatego, bo jedna klatka (3x3) daje przy kolejnej potędze macierzy +1 do wymiaru jądra, a druga tak samo.
Analogicznie dla kolejnych macierzy:
Dla macierzy D, sprowadzając ją do postaci klatkowej, mamy 3 klatki - jedną 3x3 oraz dwie 1x1.
Dla macierzy E 3 klatki - dwie 2x2 i jedna 1x1.
Dla macierzy F 4 klatki - trzy 1x1 i jedna 2x2.
Dla macierzy G 5 klatek - wszystkie 1x1.

(h) Zweryfikuj znalezioną zależność z poprzedniego podpunktu dla następujących macierzy H oraz K, czyli:
• Wyznacz wartości własne macierzy Y (Y to ustalona macierz z tego podpunktu), też okaże się, że macierz Y ma tylko jedną wartość własną.
• Oblicz $dimker(Y - \lambda * I)$, $dimker(Y - \lambda * I)^2$, $dimker(Y - \lambda * I)^3$, ...
I na podstawie tego zapisz wielkości poszczególnych klatek Jordana macierzy Y.
• Następnie sprawdź, że się zgadza.

Wyznaczamy wartości własne:

```
Eigenvalues[h]

{2, 2, 2, 2, 2, 2}

Eigenvalues[k]

{2, 2, 2, 2, 2, 2}
```

Widzimy, że w obu przypadkach jest jedna wartość własna 2.

```
{Length[h] - MatrixRank[h - (2) * IdentityMatrix[Length[h]]],
 Length[h] - MatrixRank[MatrixPower[h - (2) * IdentityMatrix[Length[h]], 2]],
 Length[h] - MatrixRank[MatrixPower[h - (2) * IdentityMatrix[Length[h]], 3]],
 Length[h] - MatrixRank[MatrixPower[h - (2) * IdentityMatrix[Length[h]], 4]],
 Length[h] - MatrixRank[MatrixPower[h - (2) * IdentityMatrix[Length[h]], 5]],
 Length[h] - MatrixRank[MatrixPower[h - (2) * IdentityMatrix[Length[h]], 6]],
 Length[h] - MatrixRank[MatrixPower[h - (2) * IdentityMatrix[Length[h]], 7]]}
{2, 4, 6, 6, 6, 6, 6}

{Length[k] - MatrixRank[k - (2) * IdentityMatrix[Length[k]]],
 Length[k] - MatrixRank[MatrixPower[k - (2) * IdentityMatrix[Length[k]], 2]],
 Length[k] - MatrixRank[MatrixPower[k - (2) * IdentityMatrix[Length[k]], 3]],
 Length[k] - MatrixRank[MatrixPower[k - (2) * IdentityMatrix[Length[k]], 4]],
 Length[k] - MatrixRank[MatrixPower[k - (2) * IdentityMatrix[Length[k]], 5]],
 Length[k] - MatrixRank[MatrixPower[k - (2) * IdentityMatrix[Length[k]], 6]],
 Length[k] - MatrixRank[MatrixPower[k - (2) * IdentityMatrix[Length[k]], 7]]}
{3, 4, 5, 6, 6, 6, 6}
```

Spójrzmy najpierw na macierz H. Wymiar $dimker(H - \lambda * I)$ to 2. Oznacza to, że macierz H jest podobna do takiej macierzy Jordana, która ma 2 klatki 3x3 (wnioskuję tak patrząc, że wymiar jądra dla kolejnej potęgi rośnie o 2) Dla macierzy K mamy natomiast 3 klatki - jedną 4x4 i dwie 1x1.

(i) Metoda z poprzedniego podpunktu będzie działać również dla macierzy, które posiadają więcej niż jedną wartość własną, wtedy odpowiednie wymiary jąder przekształceń liczymy dla kazdej z wartości własnych. Znajdź postać Jordana każdej macierzy z tego podpunktu, licząc wartości własne oraz wymiary jąder odpowiednich potęg przekształceń (i następnie zweryfikuj poprawność swoich wniosków).

Macierz M:

```
MatrixForm[m]

MatrixForm=
(-11 -13 -3  0  4 12)
(-5    3  1 -2  5 -1)
(-31 -37 -1  6 -2 36)
(-1   -1  0  5  0  1)
(-17 -14 -3  0  9 13)
(-21 -15 -2 -2  9 16)

Eigenvalues[m]

{5, 5, 5, 2, 2, 2}

{ Length[m] - MatrixRank[MatrixPower[m - (5) * IdentityMatrix[Length[m]], 1]],
  Length[m] - MatrixRank[MatrixPower[m - (5) * IdentityMatrix[Length[m]], 2]],
  Length[m] - MatrixRank[MatrixPower[m - (5) * IdentityMatrix[Length[m]], 3]],
  Length[m] - MatrixRank[MatrixPower[m - (2) * IdentityMatrix[Length[m]], 1]],
  Length[m] - MatrixRank[MatrixPower[m - (2) * IdentityMatrix[Length[m]], 2]],
  Length[m] - MatrixRank[MatrixPower[m - (2) * IdentityMatrix[Length[m]], 3]]}

{2, 3, 3, 1, 2, 3}
```

Dla macierzy M mamy 2 wartości własne: trzy 5 i trzy 2. Będziemy rozpatrywać najpierw grupę klatek, które mają na przekątnej wartość 5, a następnie 2. Zarówno 5, jak i 2 wystąpią na przekątnej po 3 razy. Patrząc na $dimker(M - 5 * I) = 2$, widzimy, że występują 2 klatki z 5 na przekątnej. Zatem mamy jedną klatkę 2x2 i jedną klatkę 1x1.

Inaczej jest przy wartości własnej 2. $dimker(M-2*I) = 1$ co oznacza, że mamy jedną klatkę z trzema dwójkami na przekątnych. Postać Jordana macierzy M może wyglądać więc tak:

$$J(M) = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Macierz N:

```
MatrixForm[n]

MatrixForm=
(-21 -29  -5  4  0 28)
(-40 -53  -6 12 -9 55)
(-26 -29   0  4  0 28)
(-1   -1   0  5  0  1)
(-27 -30  -5  4  5 29)
(-66 -87 -11 16 -9 88)

Eigenvalues[n]

{5, 5, 5, 5, 2, 2}

{ Length[n] - MatrixRank[MatrixPower[n - (5) * IdentityMatrix[Length[n]], 1]],
  Length[n] - MatrixRank[MatrixPower[n - (5) * IdentityMatrix[Length[n]], 2]],
  Length[n] - MatrixRank[MatrixPower[n - (5) * IdentityMatrix[Length[n]], 3]],
  Length[n] - MatrixRank[MatrixPower[n - (2) * IdentityMatrix[Length[n]], 1]],
  Length[n] - MatrixRank[MatrixPower[n - (2) * IdentityMatrix[Length[n]], 2]],
  Length[n] - MatrixRank[MatrixPower[n - (2) * IdentityMatrix[Length[n]], 3]]}

{3, 4, 4, 1, 2, 2}
```

Tutaj także mamy dwie wartości własne: 5 cztery razy i 2 dwa razy. Oznacza to, że w postaci Jordana 5 będzie na 4 miejscach na przekątnej, a 2 wystąpi tam 2 razy. $dimker(N - 5I) = 3$, zatem mamy 3 klatki, gdzie na przekątnej jest 5. Będą to 1 klatka 2x2 i 2 klatki 1x1. $dimker(N - 2 * I) = 1$, zatem mamy jedną klatkę 2x2 z dwójkami na przekątnej. Także postać Jordana macierzy może wyglądać tak:

$$J(M) = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Sprawdzenie:

In[50]:=

```
MatrixForm[JordanDecomposition[m][[2]]]
```

Out[50]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

In[51]:= `MatrixForm[JordanDecomposition[n][[2]]]`

Out[51]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Zatem widzimy, że dobrze wyznaczyliśmy postać Jordana.

Zadanie 3

Macierz realizująca pododobieństwo macierzy $\mathbf{A} \in M_n(C)$ ze swoją postacią klatkową Jordana J(A) znajduje się o wiele trudniej niz postać blokową J(A). Dokładny schemat jest np. dostępny w pozycji [1] w bibliografii. W Mathematice mozna tę macierz znaleźć używając komendy `JordanDecomposition`. Znajdź macierz realizującą podobieństwo dla macierzy H z poprzedniego zadania (wystarczy to zrobić uzywając odpowiedniej funkcji w Mathematice) i sprawdź poprawność, wykonując odpowiednie mnozenie macierzy.

```
In[6]:= (* Zadanie 3 *)
        h = {{-17, -26, -3, 6, -3, 25}, {4, 9, 1, -2, 2, -7}, {-19, -28, -1, 6, -5, 27},
          {-1, -2, 0, 2, -1, 2}, {-20, -27, -3, 6, -1, 26}, {-15, -19, -2, 4, -1, 20}};
        {p, j} = JordanDecomposition[h];
        MatrixForm[p]

ut[8]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & -3 & -4 \\ 1 & 1 & -3 & 2 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

```
In[9]:= z = p.j.Inverse[p];
        h == z

Out[10]= True
```

Zadanie 4

Jak zostało napisane na początku pliku pdf z treścią projektu, każda macierz A należąca do przestrzeni macierzy kwadratowych nxn o wyrazach z ciała liczb zespolonych jest podobna do pewnej macierzy blokowej złożonej z klatek Jordana. Skoro są to macierze podobne, to widma ich wartości własnych są równe. Oprócz tego ślady obydwu macierzy są równe, bo: załóżmy, że $A = C^{-1} * J * C$, zatem $tr(A) = tr(C^{-1} * J * C) = tr(J * C * C^{-1}) = tr(J * I) = tr(J)$ otrzymujemy, że $tr(A) = tr(J)$ – skorzystaliśmy tu z tego, że $tr(ABC) = tr(BCA)$, co było pokazane na ćwiczeniach). Śladem drugiej macierzy jest suma wartości własnych - macierz złożona z klatek Jordana (jak wartość własna jest pierwiastkiem np. 3-krotnym wielomianu charakterystycznego, to w tej sumie ta wartość własna występuje 3 razy). Zatem ślad macierzy jest sumą wszystkich jej wartości własnych.

Załóżmy teraz, że macierz A ma wielomian charakterystyczny dany wzorem

$$det(A - \lambda * I) = (a - \lambda)^n * (b - \lambda)^m * ... * (x - \lambda)^z,$$

gdzie $a, b, ..., x$ to pewne liczby zespolone, a $n, m, ..., z$ (potęgi) to liczby rzeczywiste. Wtedy mamy wartości własne a krotności n, b krotności m, itd. Iloczyn to

$$a^n * b^m * ... * x^z.$$

Natomiast

$$det(A - 0 * I) = det(A) = a^n * b^m * ... * x^z.$$

Liczby te są równe - co było do pokazania.

Zadanie 5

Podnieś macierz C z zadanka 2. do potęgi 2021, korzystając z postaci Jordana macierzy C

```
In[18]:= (* Zadanie 5 *)
         {p, j} = JordanDecomposition[c];
         MatrixForm /@ {p, j}
         MatrixForm[ p.MatrixPower[j, 2021].Inverse[p]]
```

Out[19]= $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 7 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\right\}$

Out[20]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 2\,025\,041 & 2\,021 & 4\,042 & -10\,105 & -2\,029\,084 \\ 4\,078\,378 & -1 & 0 & -4\,042 & -4\,078\,378 \\ -10\,105 & 2\,021 & 4\,041 & -8\,084 & 6\,063 \\ 2\,021 & 0 & 0 & -1 & -2\,021 \\ 2\,025\,042 & 2\,021 & 4\,042 & -10\,105 & -2\,029\,085 \end{pmatrix}$$

Zadanie 6

Niech A $\in$ Mn(C) będzie macierzą nilpotentną (tzn. taką, której jedyna wartość własna to 0). Podaj przykład (lub uzasadnij, ze to niemożliwe) takiego A w postaci Jordana, że

(a) $dimkerA^k$ przyjmowało kolejno wartości 1, 2, 3, 4, 4, 4, ...

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(b) $dimkerA^k$ przyjmowało kolejno wartości 2, 4, 5, 5, 5, 5, ...

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(c) $dimkerA^k$ przyjmowało kolejno wartości 1, 2, 3, 3, 4, 4, . ..

Nie jest to możliwe w tym przypadku, gdyż jeżeli jakaś wartość $dimkerA^k$ się powtórzy, to $dimkerA^l$ dla każdego $l > k$ musi być równa tej wartości