

# 主束の理論

mico

2025 年 2 月 15 日

## 1 はじめに

この PDF では多様体の上に定まるベクトル束の定義を、接ベクトル束を一般化する形で確認する。そしてベクトル束の上に定まる構造の具体例を調べ、主束の定義を確認する。

## 2 ベクトル束

### 2.1 接ベクトル束

以下、多様体や写像といえば、特に断りのない限り  $C^\infty$  級のものを指すものとする。

一般に  $m$  次元多様体  $M$  が与えられたとき、各点  $x \in M$  にはそれに対応した  $m$  次元接ベクトル空間  $T_x M$  が定まる。ここで  $(U; x^1, \dots, x^m) \subset M$  を  $M$  の座標近傍とすれば、集合  $TU := \bigsqcup_{x \in U} T_x M$  は自然に  $U \times \mathbb{R}^m$  と同相となる。

実際、

$$TU \ni \sum_{i=1}^m a^i \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right)_{(x^1, \dots, x^m)} \cong (x^1, \dots, x^m, a^1, \dots, a^m) \in U \times \mathbb{R}^m \quad (1)$$

という関係が成り立っている。

$TU$  の非交和をとる範囲をさらに広げて  $TM := \bigsqcup_{x \in M} T_x M$  という集合を考え、写像  $\pi : TM \rightarrow M$  を  $v \in T_x M$  に対して、 $\pi(v) := x$  なる写像として定める。

$\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$  を  $M$  の座標近傍系とする。各  $\alpha \in A$  について、 $\pi^{-1}(U_\alpha) = TU_\alpha$  が成立する。また、各  $\alpha \in A$  に対して写像  $\tilde{\varphi}_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times \mathbb{R}^m$  を式 (1) と同様に定める。

このとき  $TM$  は  $\{(\pi^{-1}(U_\alpha), \tilde{\varphi}_\alpha)\}_{\alpha \in A}$  を座標近傍系とする  $2m$  次元多様体となる。

#### 定義 1: 接ベクトル束

以上のようにして定まる  $2m$  次元多様体  $TM$  を、 $M$  の接ベクトル束 (tangent vector bundle) という。

接ベクトル束を用いた接ベクトル場の定義もしておく.

### 定義 2: 接ベクトル場

$C^\infty$  級写像  $X : M \rightarrow TM$  で,  $\pi \circ X = \text{id}_M$  となるようなものを,  $M$  上の接ベクトル場 (tangent vector field) という.

$M$  上の接ベクトル場全体からなる集合を  $\Gamma(TM)$  と書く.

## 2.2 ベクトル束

前の小節で定めた接ベクトル束の概念をさらに一般化することを考える. 接ベクトル束の持つ性質として, 以下のような物が挙げられる.

1. 各  $x \in M$  に対して,  $\pi^{-1}(x) = T_x M$  は  $m$  次元ベクトル空間である.
2.  $\tilde{\varphi}_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times \mathbb{R}^m$  は微分同相写像である.
3.  $p_1 : U_\alpha \times \mathbb{R}^m \rightarrow U_\alpha$  を射影とすると,  $\pi|_{\pi^{-1}(U_\alpha)} = p_1 \circ \tilde{\varphi}_\alpha$  が成立する. すなわち, 図式

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U_\alpha) & \xrightarrow{\tilde{\varphi}_\alpha} & U_\alpha \times \mathbb{R}^m \\ \pi \downarrow & & \downarrow p_1 \\ U_\alpha & \xlongequal{\quad} & U_\alpha \end{array}$$

は可換である.

4.  $p_2 : U_\alpha \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  を射影とすると, 各  $x \in U_\alpha$  について, 写像  $p_2 \circ \tilde{\varphi}_\alpha|_{T_x M} : T_x M \rightarrow \mathbb{R}^m$  は線型同型である.

これらの性質を抽出して, 一般のベクトル束の概念を構成する.

### 定義 3: ベクトル束

$E, M$  を多様体,  $\pi : E \rightarrow M$  を写像とする. 以下の性質を満たすとき,  $\pi : E \rightarrow M$  は階数  $r$  のベクトル束 (vector bundle) であるという.

1. 各  $x \in M$  に対して,  $E_x := \pi^{-1}(x)$  は  $m$  次元実ベクトル空間である.
2.  $M$  の開被覆  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$  と微分同相写像  $\varphi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times \mathbb{R}^r$  であって, 以下を満たすものが存在する.
  - (a)  $p_1 : U_\alpha \times \mathbb{R}^r \rightarrow U_\alpha$  を射影とすると,  $\pi|_{\pi^{-1}(U_\alpha)} = p_1 \circ \varphi_\alpha$  が成立する. すなわち, 図式

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U_\alpha) & \xrightarrow{\varphi_\alpha} & U_\alpha \times \mathbb{R}^r \\ \pi \downarrow & & \downarrow p_1 \\ U_\alpha & \xlongequal{\quad} & U_\alpha \end{array}$$

は可換である.

(b)  $p_2 : U_\alpha \times \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}^r$  を射影とすると, 各  $x \in U_\alpha$  について, 写像  $p_2 \circ \varphi_\alpha|_{E_x} : E_x \rightarrow \mathbb{R}^r$  は線型同型である.

特に, 1 で与えられる  $E_x$  を  $x$  における  $E$  のファイバー (fiber) といい, 2 を満たす微分同相写像  $\varphi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times \mathbb{R}^r$  を局所自明化 (local trivialization) という.

いくつか例を見てみる.

#### 命題 1

$m$  次元多様体  $M$  の接ベクトル束  $TM$  は,  $M$  上の階数  $m$  のベクトル束である.

説明はすでに書いたので省略する.

#### 命題 2

多様体  $M$  に対し,  $\pi : M \times \mathbb{R}^r \rightarrow M$  を射影とする. 階数  $r$  のベクトル束となる.

この場合, 局所自明化は恒等写像  $\text{id}_{M \times \mathbb{R}^r}$  で自明に与えられる.

接ベクトル場の概念も一般化してみる.

#### 定義 4: 切断

$\pi : E \rightarrow M$  をベクトル束とする.  $C^\infty$  級写像  $s : M \rightarrow E$  で,  $\pi \circ s = \text{id}_M$  となるようなものを, ベクトル束  $\pi : E \rightarrow M$  の切断 (section) という.

ベクトル束  $\pi : E \rightarrow M$  の切断全体からなる集合を  $\Gamma(E)$  とかく.

つまり, 接ベクトル場とは接ベクトル束における切断のことである.

$M$  の開集合  $U$  について,  $E|_U := \pi^{-1}(U)$  とする. また,  $U$  上で定義された切断全体からなる集合を  $\Gamma(E|_U)$  と書くこととする.

一般のベクトル空間には基底が定義されているが, それを切断に一般化したものを考える.

#### 定義 5: 枠場

$M$  の開集合  $U$  上で定義された切断の組  $e_1, \dots, e_r \in \Gamma(E|_U)$  で, 各点  $x \in U$  において接ベクトル  $e_1(x), \dots, e_r(x) \in E_x$  が  $E_x$  の基底になっているものを,  $E|_U$  の枠場 (frame field) という.

局所自明化  $\varphi : E|_U \rightarrow U \times \mathbb{R}^r$  が与えられたとき,  $E|_U$  の枠場を自然に定めることができる. 実際に,  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r$  を  $\mathbb{R}^r$  の標準基底とする.  $p_2 : U \times \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}^r$  を射影とし,  $U$  上の切断

$$e_1, \dots, e_r \in \Gamma(E|_U) \text{ を } (p_2 \circ \varphi)(e_i) = \varepsilon_i \quad (1 \leq i \leq r) \quad (2)$$

なるものとして定める. このようにして与えられた  $e_1, \dots, e_r$  は局所自明化の定義より  $E|_U$  の枠場となっていることが確認できる.

枠場  $e_1, \dots, e_r \in \Gamma(E|_U)$  が与えられれば,  $U$  上の切断  $s$  は

$$s = \sum_{i=1}^r s^i e_i$$

と書くことができる.

### 3 主束

前節で定義したベクトル束  $\pi: E \rightarrow M$  とは, 簡単に言えば多様体  $M$  とベクトル空間  $\mathbb{R}^r$  との直積のような構造を持つ多様体  $E$  のことであった.

この節では, このベクトル空間  $\mathbb{R}^r$  を一般線型群  $GL(r; \mathbb{R})$  に変えてみることを提案し, 枠束を定義する. さらにそれを一般の Lie 群  $G$  に一般化したものである主束の概念を定義する.

#### 3.1 枠束

この小節では,  $r$  階のベクトル束  $\pi: E \rightarrow M$  から,  $M$  と  $\mathbb{R}^r$  の直積のような構造を持つ多様体である枠束を構成することを目的とする.

$\pi: E \rightarrow M$  を  $r$  階のベクトル束とする. 各  $x \in M$  に対して  $P_x$  は  $\mathbb{R}^r$  と同型である. これより, 集合  $P_x$  を

$$P_x := \{\xi: \mathbb{R}^r \rightarrow E_x | \xi: \text{線型同型}\}$$

で定める. 集合  $P$  を  $P := \bigsqcup_{x \in M} P_x$  で定め, 写像  $\pi_P: P \rightarrow M$  を  $\pi_P^{-1}(x) = P_x$  となるように定める.

$\mathbb{R}^r$  の標準基底を  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r$  とする. このとき,  $\xi \in P_x$  を用いて,  $E_x$  の基底  $\xi_1, \dots, \xi_r$  を

$$\xi_i := \xi(\varepsilon_i) \quad (1 \leq i \leq r) \quad (3)$$

で定めることができる. 逆に  $E_x$  の基底  $\xi_1, \dots, \xi_r$  が与えられたとき, 式 (3) となるような  $\xi \in P_x$  を定めることができる. このことから  $\xi \in P_x$  と,  $E_x$  の基底  $(\xi_1, \dots, \xi_r)$  は同一視できることがわかる. このことを用いて, 以降は  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_r)$  と表す.

一般線型群  $GL(r, \mathbb{R})$  の集合  $P$  への右作用を

$$\xi g := \xi \circ g: \mathbb{R}^r \rightarrow E_x \quad (\xi \in P_x \subset P, g \in GL(r; \mathbb{R}))$$

で定める.

$\varphi : E|_{U_\alpha} \rightarrow U_\alpha \times \mathbb{R}^r$  を  $\pi : E \rightarrow M$  の局所自明化とする. このとき, 式 (2) から  $E|_{U_\alpha}$  の枠場  $e_1, \dots, e_r$  を定めることができた.  $P|_{U_\alpha} := \pi_P^{-1}(U_\alpha) \subset P$  とする. このとき,  $p_\alpha : U_\alpha \rightarrow P|_{U_\alpha}$  を

$$p_\alpha(x) := (e_1(x), \dots, e_r(x)) \quad (x \in U_\alpha)$$

で定める.

さらに, 写像  $\varphi^P_\alpha : P|_{U_\alpha} \rightarrow U_\alpha \times GL(r; \mathbb{R})$  を

$$\varphi^P_\alpha(p_\alpha(x)g) := (x, g) \quad (x \in U_\alpha, g \in GL(r; \mathbb{R}))$$

で定める. 各点  $x$  において,  $GL(r; \mathbb{R})$  の  $P_x$  への右作用は忠実かつ充満であるので, 写像  $\varphi^P_\alpha$  は well-defined である.

以上のように定めた  $\pi_P : P \rightarrow M$  及び 写像  $\varphi^P_\alpha : P|_{U_\alpha} \rightarrow U_\alpha \times GL(r; \mathbb{R})$  の持つ構造, 特徴を調べてみよう.

### 命題 3

$\pi_P : P \rightarrow M$  と  $\varphi^P_\alpha : P|_{U_\alpha} \rightarrow U_\alpha \times GL(r; \mathbb{R})$  は以下の性質を満たす.

1.  $\varphi^P_\alpha : P|_{U_\alpha} \rightarrow U_\alpha \times GL(r; \mathbb{R})$  は微分同相写像である.
2.  $p_1 : U_\alpha \times GL(r; \mathbb{R}) \rightarrow U_\alpha$  を射影とすると,  $\pi_P|_{P|_{U_\alpha}} = p_1 \circ \varphi^P_\alpha$  が成立する. すなわち, 図式

$$\begin{array}{ccc} P|_{U_\alpha} & \xrightarrow{\varphi^P_\alpha} & U_\alpha \times GL(r; \mathbb{R}) \\ \pi_P \downarrow & & \downarrow p_1 \\ U_\alpha & \xlongequal{\quad} & U_\alpha \end{array}$$

は可換である.

3.  $GL(r; \mathbb{R})$  の作用は各  $P|_{U_\alpha}$  を保つ. すなわち,

$$\xi \in P|_{U_\alpha} \Rightarrow \xi g \in P|_{U_\alpha} \quad (\forall g \in GL(r; \mathbb{R}))$$

が成立する.

4. 新たに  $GL(r; \mathbb{R})$  の  $U_\alpha \times GL(r; \mathbb{R})$  への右作用を

$$(x, h)g := (x, hg) \quad (x \in U_\alpha, g, h \in GL(r; \mathbb{R}))$$

で定める. このとき,

$$\varphi^P_\alpha(\xi g) = (\varphi^P_\alpha(\xi))g \quad (\forall \xi \in P|_{U_\alpha}, \forall g \in GL(r; \mathbb{R}))$$

が成立する.

*Proof.* 1.  $GL(r; \mathbb{R})$  の各  $P_x$  への右作用が忠実かつ充満であること, 及び  $\varphi^P_\alpha$  の定義から  $\varphi^P_\alpha$  が全単射であることは明らか. 微分同相であることについては省略する.

2. 以下,  $\pi_P|_{P|_{U_\alpha}}$  は省略して単に  $\pi_P$  と書く. 任意に  $\xi \in P_x \subset P|_{U_\alpha}$  をとる. このとき  $\pi_P$  の定義から,  $\pi_P(\xi) = x$  である. また, 1 の議論から  $\xi$  は  $\varphi^P_\alpha \xi = (x, g)$  と適当な  $g \in GL(r; \mathbb{R})$  を用いて書けるので,  $p_1 \circ \varphi^P_\alpha(\xi) = x$  である. よって,  $\pi_P = p_1 \circ \varphi^P_\alpha$ .
3. 自明なので省略する.
4. 任意に  $\xi \in P_x \subset P|_{U_\alpha}, g \in GL(r; \mathbb{R})$  をとる.  $\varphi^P_\alpha(\xi) = (x, h)$ , すなわち  $\xi = p_\alpha(x)h$  であるとする. このとき,

$$\begin{aligned} (\varphi^P_\alpha)(\xi g) &= (\varphi^P_\alpha)(p_\alpha(x)hg) \\ &= (x, hg) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ((\varphi^P_\alpha)(\xi))g &= (x, h)g \\ &= (x, hg) \end{aligned}$$

が成立する. よって  $(\varphi^P_\alpha)(\xi g) = ((\varphi^P_\alpha)(\xi))g$  である.

□

さて, この構造  $\pi_P : P \rightarrow M$  に名前を付けよう.

#### 定義 6: 枠束

以上のようにしてベクトル束  $\pi : E \rightarrow M$  から定まる構造  $\pi_P : P \rightarrow M$  を, ベクトル束  $\pi : E \rightarrow M$  の **枠束** (frame bundle) という.

### 3.2 主束

さて, ベクトル束の時と同様に枠束の持つ性質を抽出, 一般化して新たな概念を定義しよう.

#### 定義 7: 主束

$P, M$  を多様体,  $G$  を Lie 群,  $\pi_P : P \rightarrow M$  を写像とする. 以下の性質を満たすとき,  $\pi_P : P \rightarrow M$  は**主  $G$  束** (principal  $G$ -bundle), あるいは  $G$  を **構造群** (structure group) とする **主束** (principal bundle) であるという.

1.  $G$  が  $P$  に右から作用している.
2.  $M$  の開被覆  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$  と微分同相写像  $\varphi_\alpha : P|_{U_\alpha} \rightarrow U_\alpha \times G$  であって, 以下を満たすものが存在する.
  - (a)  $p_1 : U_\alpha \times G \rightarrow U_\alpha$  を射影とすると,  $\pi_P = p_1 \circ \varphi_\alpha$  が成立する. すなわち, 図式

$$\begin{array}{ccc} P|_{U_\alpha} & \xrightarrow{\varphi_\alpha} & U_\alpha \times G \\ \pi_P \downarrow & & \downarrow p_1 \\ U_\alpha & \xlongequal{\quad} & U_\alpha \end{array}$$

は可換である.

(b)  $G$  の作用は各  $P|_{U_\alpha}$  を保つ. すなわち,

$$\xi \in P|_{U_\alpha} \Rightarrow \xi g \in P|_{U_\alpha} \quad (\forall g \in G)$$

が成立する. また, 新たに  $G$  の  $U_\alpha \times U_\alpha \times G$  への右作用を

$$(x, h)g := (x, hg) \quad (x \in U_\alpha, g, h \in G)$$

で定める. このとき,  $\varphi_\alpha : P|_{U_\alpha} \rightarrow U_\alpha \times G$  は  $G$ -同変 ( $G$ -equivariant) である. すなわち,

$$\varphi_\alpha(\xi g) = (\varphi_\alpha(\xi))g \quad (\forall \xi \in P|_{U_\alpha}, \forall g \in G)$$

が成立する.

## 参考文献

- [1] 今野宏, 微分幾何学, 東京大学出版会, 2013.