Riemann 幾何学と統計多様体の間の関係

mico

2025 年 7 月 29 日

定義 1: 統計多様体

(M, g) を Riemann 多様体とする．M 上の捩れを持たないアファイン接続 ∇ が Codazzi 方程式

$$(\nabla_X g)(Y, Z) = (\nabla_Y g)(X, Z) \quad (\forall X, Y, Z \in \Gamma(TM))$$

を満たすとき，(∇, g) を M 上の統計構造といい，(M, ∇, g) を統計多様体という．

定義 2: 双対接続

M, g を Riemann 多様体，∇ を M のアファイン接続とする．このとき等式

$$Xg(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla^*_X Z) \quad (\forall X, Y, Z \in \Gamma(TM))$$

が成り立つような M 上のアファイン接続 ∇^* を一意に定めることができる．このアファイン接続 ∇^* を ∇ の双対接続という．

いくつかの性質を確認しておく．

命題 1

(M, ∇, g) を統計多様体とする．このとき (M, ∇^*, g) も統計多様体となる．この意味で統計多様体を (M, ∇, ∇^*, g) とも記述する．

命題 2

∇^* の双対接続 $(\nabla^*)^*$ は ∇ に等しい．

命題 3

Riemann 多様体 (M, g) の Levi-Civita 接続を ∇^g と書くこととする．このとき (M, ∇^g, g) は統計多様体で，$(\nabla^g)^* = \nabla^g$ が成立する．

命題 4

$(\widetilde{M}, \widetilde{\nabla}, \widetilde{\nabla}^*, h)$ を統計多様体，M を多様体，$f : M \to \widetilde{M}$ をはめ込みとする．このとき，直和分解 $f_* TM \oplus N_f M$ に沿って，$X, Y \in \Gamma(TM)$ に対して $\nabla_X Y, \nabla^*_X Y \in \Gamma(TM), \alpha(X,Y), \alpha^*(X,Y) \in \Gamma(N_f M)$ を

$$\widetilde{\nabla}_X Y = f_* \nabla_X Y + \alpha(X,Y),$$

$$\widetilde{\nabla}^*_X Y = f_* \nabla^*_X Y + \alpha^*(X,Y)$$

を満たすようにそれぞれ定める．このとき ∇, ∇^* はともに M 上のアファイン接続で，$\alpha, \alpha^* \in \Gamma(TM^{(0,2)} \otimes N_f M)$ でそれぞれ対称である．

Proof. $\phi : M \to \mathbb{R}$ とする．このとき，

$$\begin{aligned}\widetilde{\nabla}_{\phi X} Y &= \phi \widetilde{\nabla}_X Y \\ &= \phi(f_* \nabla_X Y + \alpha(X,Y)) \\ &= f_*(\phi \nabla_X Y) + \phi\alpha(X,Y)\end{aligned}$$

なので，

$$\begin{aligned}\nabla_{\phi X} Y &= \phi \nabla_X Y, \\ \alpha(\phi X, Y) &= \phi \alpha(X,Y)\end{aligned}$$

である．また，

$$\begin{aligned}\widetilde{\nabla}_X \phi Y &= X(\phi) f_* Y + \phi \widetilde{\nabla}_X Y \\ &= f_*(X(\phi)Y) + \phi(f_* \nabla_X Y + \alpha(X,Y)) \\ &= f_*(X(\phi)Y + \phi \nabla_X Y) + \phi\alpha(X,Y)\end{aligned}$$

なので，

$$\begin{aligned}\nabla_X \phi Y &= X(\phi) Y + \phi \nabla_X Y, \\ \alpha(X, \phi Y) &= \phi \alpha(X,Y)\end{aligned}$$

である．以上より確かに ∇ は M 上のアファイン接続で，$\alpha \in \Gamma(TM^{(0,2)} \otimes N_f M)$ である．また，$\forall \xi \in \Gamma(N_f M)$ について，

$$\begin{aligned}\widetilde{\nabla}_X Y - \widetilde{\nabla}_Y X &= T^{\widetilde{\nabla}}(X,Y) + [f_* X, f_* Y] \\ &= f_*[X,Y]\end{aligned}$$

なので，$\alpha(X,Y) = \alpha(Y,X)$ である．∇^*, α^* については同様なので省略する． □

命題 5

上の命題で定めた ∇, ∇^* は M 上の計量 $g := f^*h$ についての双対接続となる．また，(M, ∇, ∇^*, g) は統計多様体となる．

Proof. まず，∇, ∇^* が g に関する双対接続であることを示す．[追記予定]

次に，$T^\nabla = 0$ であることを示す．

$$\begin{aligned} f_* T^\nabla(X, Y) &= f_*(\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]) \\ &= \widetilde{\nabla}_X Y - \alpha(X, Y) - \widetilde{\nabla}_Y X - \alpha(Y, X) - f_*[X, Y] \\ &= T^\nabla(f_* X, f_* Y) \\ &= 0. \end{aligned}$$

よって $T^\nabla = 0$ である．

最後に，$(\nabla_X g)(Y, Z) = (\nabla_Y g)(X, Z)$ であることを示す．[追記予定] □

参考文献

[1] 藤原彰夫, 情報幾何学の基礎　情報の内的構造をとらえる新たな地平, 共立出版, 2021.