Hodge の定理

mico

2025 年 2 月 9 日

1 Hodge $*$作用素

以下, 多様体, 微分形式などはすべて C^∞ のものを考える.

(M, g) を向きづけられた m 次元 Riemann 多様体とする. このとき各点 $p \in M$ における接ベクトル空間 T_pM 上に, 内積 g_p が定まる. これを用いて T_pM の k 次交代テンソル積空間 $\wedge^k T_p^*M \quad (1 \leq k \leq m)$ の上に内積を定める.

定義 1: $\wedge^k T_p^*M$ の内積

$\{e_1, \cdots, e_m\}$ を T_pM の正規直交基底とする. このとき, この基底に関する T_p^*M の双対基底 $\{\theta^1, \cdots, \theta^m\}$ が定まる. これを用いて $\wedge^k T_p^*M$ の上に内積 g_p を, 基底

$$\left\{\theta^{i_1} \wedge \cdots \wedge \theta^{i_k} \middle| 1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq m\right\}$$

が正規直交基底となるように定める.

ここで T_pM の内積と $\wedge^k T_p^*M$ の内積に共通の記号 g_p を用いたが, 以降も混同の恐れがないかぎり共通の記号を用いる. また, この内積は正規直交基底 $\{e_1, \cdots, e_m\}$ によらず定まる.

続いて, Hodge $*$ 作用素を定義する. 多様体 M に向きが定まっていることから, 接ベクトル空間 T_pM にも自然に向きが定まる. 正の向きの T_pM の正規直交基底 $\{e_1, \cdots, e_m\}$ に対して, その双対基底 $\{\theta^1, \cdots, \theta^m\}$ を考え, これから定まる m 次交代テンソル $v_{g_p} := \theta^1 \wedge \cdots \wedge \theta^m$ を (M, g) の p における体積要素と呼んでいた. これを用いて $* : \wedge^k T_p^*M \to \wedge^{m-k} T_p^*M$ を定める.

定義 2: Hodge $*$ 作用素

$\omega \in \wedge^k T_p^*M$ とする. このとき,

$$\eta \wedge (*\omega) = g_p(\omega, \eta) v_{g_p} \quad (\forall \eta \in \wedge^k T_p^*M)$$

なる $*\omega \in \wedge^{m-k} T_p^*M$ が一意に定まる. これにより定まる写像 $* : \wedge^k T_p^*M \to \wedge^{m-k} T_p^*M$ を Hodge $*$ 作用素という.

命題 1

Hodge $*$ 作用素は $\wedge^k T_p^* M$ から $\wedge^{m-k} T_p^* M$ への線型同型を与える.

M 上の k 次微分形式全体からなる集合を $A^k(M)$ とする. 以上の定義は $A^k(M)$ 上に拡張することができる. すなわち, $\omega, \eta \in A^k(M)$ には, その各点 $p \in M$ における内積 $g_p(\omega_p, \eta_p)$ が定まり, これにより M 上の関数 $g(\omega, \eta) : M \ni p \mapsto g_p(\omega_p, \eta_p) \in \mathbb{R}$ が定まる. また, $M \ni p \mapsto *\omega_p \in \wedge^{m-k} T_p^* M$ とすることで, $*\omega \in A^{m-k}(M)$ が定まる.

2 調和形式

前節の条件に加え, 以降は M をコンパクトで境界を持たないものとする. このとき, $A^k(M)$ 上に内積 $(,)$ を定めることができる.

定義 3: $A^k(M)$ の内積

$\omega, \eta \in A^k(M)$ に対し, 内積 (ω, η) を

$$(\omega, \eta) := \int_M \eta \wedge (*\omega) = \int_M g(\omega, \eta) v_g$$

で定める. これにより $(A^k(M), (,))$ は内積空間となる.

$A^*(M) := \bigoplus_{k=0}^{m} A^k(M)$ とする. ここで $0 \leq k, l \leq m$ について $A^k(M) \perp A^l(M)$ と約束すれば, $A^*(M)$ にも内積構造が自然に定まる. よって, $A^k(M)$ 上の作用素が与えられればその共役作用素を考えることができる.

命題 2

外微分 $d : A^*(M) \to A^*(M)$ の共役作用素を δ とする. このとき δ は $\omega \in A^k(M) \quad (\forall k \in M)$ に対して

$$\delta(\omega) = (-1)^k *^{-1} d * \omega$$

なるものである.

Proof. k 次微分形式 ω と $k+1$ 次微分形式 η について, $(d\omega, \eta) = (\omega, \delta\eta)$ となることを示せれば十分である. $(d\omega) \wedge *\eta$ を計算すると,

$$\begin{aligned}
(d\omega) \wedge (*\eta) &= d(\omega \wedge (*\eta)) - (-1)^k \omega \wedge (d * \eta) \\
&= d(\omega \wedge (*\eta)) + \omega \wedge ((-1)^{k+1} d * \omega) \\
&= d(\omega \wedge (*\eta)) + \omega \wedge (*\delta\eta).
\end{aligned}$$

ここで

$$\delta : A^k(M) \xrightarrow{\ *\ } A^{m-k}(M) \xrightarrow{\ d\ } A^{m-k+1}(M) \xrightarrow{\ *^{-1}\ } A^{k-1}(M) \xrightarrow{(-1)^k} A^{k-1}(M)$$

より $\delta\eta \in A^k(M)$ であることに注意すると, 両辺はともに m 次微分形式になっていることがわかる. よって, M 上で積分すると

$$\int_M (d\omega) \wedge (*\eta) = \int_M d(\omega \wedge (*\eta)) + \int_M \omega \wedge (*\delta\eta).$$

ここで $A^*(M)$ 上の内積の定義より

$$\int_M (d\omega) \wedge (*\eta) = (d\omega, \eta), \quad \int_M \omega \wedge (*\delta\eta) = (\omega, \delta\eta).$$

また, Stokes の定理より

$$\int_M d(\omega \wedge (*\eta)) = 0.$$

したがって, $(d\omega, \eta) = (\omega, \delta\eta)$. □

定義 4: ラプラシアン, 調和形式

外微分 d と, その共役作用素 δ から定まる作用素

$$\Delta := \delta d + d\delta : A^k(M) \to A^k(M)$$

をラプラシアンという. また, $\omega \in A^*(M)$ が

$$\Delta\omega = 0$$

を満たすとき, ω は調和形式であるという.

命題 3

$\omega \in A^*(M)$ が調和形式であるための必要充分条件は, $d\omega = \delta\omega = 0$ となることである.

Proof. Δ の定義より $d\omega = \delta\omega = 0 \Rightarrow \Delta\omega = 0$ は明らか. 逆を示す.

$\Delta\omega = 0$ であるとき,

$$0 = (\Delta\omega, \omega) = (\delta d\omega + d\delta\omega, \omega) = (d\omega, d\omega) + (\delta\omega, \delta\omega) = |d\omega|^2 + |\delta\omega|^2.$$

よって, $d\omega = \delta\omega = 0$. □

3 Hodge 分解, Hodge の定理

$\mathbb{H}^k(M)$ を M 上の調和 k 次微分形式全体からなる集合とする. $\mathbb{H}^k(M)$ について, 次の命題が成り立っている.

命題 4

$A^k(M)$ の部分空間 $\mathbb{H}^k(M), dA^{k-1}(M), \delta A^{k+1}(M)$ は内積 $(\,,\,)$ について各々直交している. また, 直和 $\mathbb{H}^k(M) \oplus dA^{k-1}(M) \oplus \delta A^{k+1}(M)$ と直交するような $A^k(M)$ の元は 0 に限る.

Proof. 前半について示す. $\omega \in \mathbb{H}^k(M), \eta \in A^{k-1}(M), \theta \in A^{k+1}(M)$ とする. 命題 3 及び δ が d の共役作用素であることより

$$(\omega, d\eta) = (\delta\omega, \eta) = 0, \quad (\omega, \delta\theta) = (d\omega, \theta) = 0, \quad (d\eta, \delta\theta) = (d^2\eta, \theta) = 0$$

である. これで前半は示された.

後半について示す. $\omega \in A^k(M)$ が $dA^{k-1}(M)$ の任意の元 $d\eta$ と直交すると仮定する. このとき, $0 = (\omega, d\eta) = (\delta\omega, \eta)$ より $\delta\omega = 0$ である. 同様に $\delta A^{k+1}(M)$ の任意の元 $\delta\theta$ と直交することを仮定すれば, $d\omega = 0$ であることがわかる. よって, 命題 3 より $\omega \in \mathbb{H}^k(M)$ である. さらに, ω が $\mathbb{H}^k(M)$ と直交していることを用いれば, $(\omega, \omega) = 0$ で $\omega = 0$ を得る. □

実は, 次の定理が成り立っている.

定理 1: Hodge 分解

向きづけられたコンパクト Riemann 多様体上において, 直交直和分解

$$A^k(M) = \mathbb{H}^k(M) \oplus dA^{k-1}(M) \oplus \delta A^{k+1}(M)$$

が成立している.

Hodge の定理の主張を述べるため, de Rham コホモロジーの定義を確認する.

定義 5: de Rham コホモロジー群

外微分 d は $d^2 = 0$ を満たすため, d による複体

$$0 \longrightarrow A^0(M) \xrightarrow{\ d\ } A^1(M) \xrightarrow{\ d\ } \cdots \xrightarrow{\ d\ } A^m(M) \longrightarrow 0$$

が定まる. これを用いて $0 \leq k \leq m$ に対して部分空間 $Z_k, B_k \subset A^k(M)$ を

$$Z_k := \left\{\omega \in A^k(M) \middle| d\omega = 0\right\}, \quad B_k := \left\{d\omega \middle| \omega \in A^{k-1}(M)\right\}$$

で定める. このとき定まる商空間

$$H^k_{DR}(M) := Z_k / B_k$$

を, M の k 次 de Rham コホモロジー群という.

命題 3 より $\mathbb{H}^k(M) \subset Z_k(M)$ である. よって, 各 $\omega \in \mathbb{H}^k(M)$ に対して ω が属する $H^k_{DR}(M)$ の同値類を考えることにより自然な写像 $\phi : \mathbb{H}^k(M) \to H^k_{DR}(M)$ を考えることができる.

定理 2: Hodge の定理

写像 $\phi : \mathbb{H}^k(M) \to H^k_{DR}(M)$ は線型同型である.

Proof. ϕ が線型であることは明らか. 単射であることを示す. 単射であることを示すには, $\omega \in \mathbb{H}^k(M)$ について $\phi(\omega) = 0$, すなわち ω が完全形式であるならば, $\omega = 0$ であることを示せばよい. 実際に $\omega = d\eta$ とすると, 命題 3 より

$$(\omega, \omega) = (\omega, d\eta) = (\delta\omega, \eta) = 0.$$

よって, $\omega = 0$ で, これより ϕ は単射であることがわかる.

次に ϕ が全射であることを示す. これの証明には定理 1 を用いる. $\omega \in A^k(M)$ を任意の閉形式とする. このとき定理 1 より

$$\omega = \omega_H + d\eta + \delta\theta$$

なる $\omega_H \in \mathbb{H}^k(M), \eta \in A^{k-1}(M), \theta \in A^{k+1}(M)$ が一意に存在する. ω は閉形式だったので, 命題 3 より $0 = d\omega = d\delta\theta$ である. よって, $0 = (d\delta\theta, \theta) = (\delta\theta, \delta\theta)$ で, $\delta\theta = 0$. すなわち $\omega = \omega_H + d\eta$ である. 以上より $\omega - \omega_H = d\eta \in B_k$ なので, Z_k/B_k において ω と ω_H は同じ同値類に属する. すなわち $\phi\omega_H = \omega$ で, ϕ は全射である. したがって ϕ は線型同型. $\square$

この定理は, 各 de Rham コホモロジー群の元 (de Rham コホモロジー類) に対して, それを代表するような調和形式が一意に存在することを主張している.

参考文献

[1] 森田茂之, 微分形式の幾何学 2, 岩波書店, 1997.

[2] 浦川肇, 変分法と調和写像 (復刊), 裳華房, 2022