Riemann 幾何学と統計多様体の間の関係

mico

2025 年 7 月 30 日

定義 1: 統計多様体

(M, g) を Riemann 多様体とする．M 上の振れを持たないアファイン接続 ∇ が Codazzi 方程式

$$(\nabla_X g)(Y, Z) = (\nabla_Y g)(X, Z) \quad (\forall X, Y, Z \in \Gamma(TM))$$

を満たすとき，(∇, g) を M 上の統計構造といい，(M, ∇, g) を統計多様体という．

定義 2: 双対接続

M, g を Riemann 多様体，∇ を M のアファイン接続とする．このとき等式

$$Xg(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla^*_X Z) \quad (\forall X, Y, Z \in \Gamma(TM))$$

が成り立つような M 上のアファイン接続 ∇^* を一意に定めることができる．このアファイン接続 ∇^* を ∇ の双対接続という．

いくつかの性質を確認しておく．

命題 1

(M, ∇, g) を統計多様体とする．このとき (M, ∇^*, g) も統計多様体となる．この意味で統計多様体を (M, ∇, ∇^*, g) とも記述する．

命題 2

∇^* の双対接続 $(\nabla^*)^*$ は ∇ に等しい．

命題 3

Riemann 多様体 (M, g) の Levi-Civita 接続を ∇^g と書くこととする．このとき (M, ∇^g, g) は統計多様体で，$(\nabla^g)^* = \nabla^g$ が成立する．

命題 4

(M,∇,∇^*,g) が統計多様体ならば, $\nabla^g = \dfrac{\nabla+\nabla^*}{2}$ が成立する.

命題 5

$(\widetilde{M},\widetilde{\nabla},\widetilde{\nabla}^*,h)$ を統計多様体, M を多様体, $f: M \to \widetilde{M}$ をはめ込みとする. このとき, 直和分解 $f_*TM \oplus N_fM$ に沿って, $X,Y \in \Gamma(TM)$ に対して $\nabla_XY, \nabla^*_XY \in \Gamma(TM), \alpha(X,Y), \alpha^*(X,Y) \in \Gamma(N_fM)$ を

$$\begin{aligned}\widetilde{\nabla}_XY &= f_*\nabla_XY + \alpha(X,Y),\\ \widetilde{\nabla}^*_XY &= f_*\nabla^*_XY + \alpha^*(X,Y)\end{aligned}$$

を満たすようにそれぞれ定める. このとき ∇,∇^* はともに M 上のアファイン接続で, $\alpha,\alpha^* \in \Gamma(TM^{(0,2)} \otimes N_fM)$ で, なおかつそれぞれ対称である.

Proof. $\phi: M \to \mathbb{R}$ とする. このとき,

$$\begin{aligned}\widetilde{\nabla}_{\phi X}Y &= \phi\widetilde{\nabla}_XY\\ &= \phi(f_*\nabla_XY + \alpha(X,Y))\\ &= f_*(\phi\nabla_XY) + \phi\alpha(X,Y)\end{aligned}$$

なので,

$$\begin{aligned}\nabla_{\phi X}Y &= \phi\nabla_XY,\\ \alpha(\phi X,Y) &= \phi\alpha(X,Y)\end{aligned}$$

である. また,

$$\begin{aligned}\widetilde{\nabla}_X\phi Y &= X(\phi)f_*Y + \phi\widetilde{\nabla}_XY\\ &= f_*(X(\phi)Y) + \phi(f_*\nabla_XY + \alpha(X,Y))\\ &= f_*(X(\phi)Y + \phi\nabla_XY) + \phi\alpha(X,Y)\end{aligned}$$

なので,

$$\begin{aligned}\nabla_X\phi Y &= X(\phi)Y + \phi\nabla_XY,\\ \alpha(X,\phi Y) &= \phi\alpha(X,Y)\end{aligned}$$

である. 以上より確かに ∇ は M 上のアファイン接続で, $\alpha \in \Gamma(TM^{(0,2)} \otimes N_fM)$ である. (和についての準同型であることについては省略した.) また, $\forall\xi \in \Gamma(N_fM)$ について,

$$\begin{aligned}\widetilde{\nabla}_XY - \widetilde{\nabla}_YX &= T^{\widetilde{\nabla}}(X,Y) + [f_*X, f_*Y]\\ &= f_*[X,Y]\end{aligned}$$

なので, $\alpha(X,Y) = \alpha(Y,X)$ である. ∇^*, α^* については同様なので省略する. $\square$

命題 6

上の命題で定めた ∇, ∇^* は M 上の計量 $g := f^*h$ についての双対接続となる．また，(M, ∇, ∇^*, g) は統計多様体となる．

Proof. まず，∇, ∇^* が g に関する双対接続であることを示す．[追記予定]

$$\begin{aligned} g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla^*_X Z) &= h(f_*\nabla_X Y, f_*Z) + h(f_*Y, f_*\nabla^* XZ) \\ &= h(\widetilde{\nabla}_X Y - \alpha(X,Y), f_*Z) + h(f_*Y, \widetilde{\nabla}^*_X Z - \alpha^*(X,Z)) \\ &= h(\widetilde{\nabla}_X Y, f_*Z) + h(f_*Y, \widetilde{\nabla}^*_X Z) \\ &= (f_*X)h(f_*Y, f_*Z) \\ &= Xg(Y,Z). \end{aligned}$$

よって確かに双対接続となっている．

次に，$T^\nabla = 0$ であることを示す．

$$\begin{aligned} f_*T^\nabla(X,Y) &= f_*(\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y]) \\ &= \widetilde{\nabla}_X Y - \alpha(X,Y) - \widetilde{\nabla}_Y X - \alpha(Y,X) - f_*[X,Y] \\ &= T^{\widetilde{\nabla}}(f_*X, f_*Y) \\ &= 0. \end{aligned}$$

よって $T^\nabla = 0$ である．

最後に，$(\nabla_X g)(Y,Z) = (\nabla_Y g)(X,Z)$ であることを示す．

$$\begin{aligned} f_*(\nabla_X g)(Y,Z) &= f_*(Xg(Y,Z) - g(\nabla_X Y, Z) - g(Y, \nabla_X Z)) \\ &= (f_*X)h(f_*Y, f_*Z) - h(f_*\nabla_X Y, f_*Z) - h(f_*Y, f_*\nabla_X Z) \\ &= (f_*X)h(f_*Y, f_*Z) - h(f_*\widetilde{\nabla}_X Y, f_*Z) - h(f_*Y, \widetilde{\nabla}_X Z) \\ &= (\widetilde{\nabla}_X g)(Y,Z) \end{aligned}$$

なので，

$$\begin{gathered} f_*(\nabla_X g)(Y,Z) = (\widetilde{\nabla}_X g)(Y,Z) = (\widetilde{\nabla}_Y g)(X,Z) = f_*(\nabla_Y g)(X,Z), \\ (\nabla_X g)(Y,Z) = (\nabla_Y g)(X,Z). \end{gathered}$$

□

以上の議論から，統計多様体とその中へのはめ込みが与えられれば，それは部分的な統計構造を持つことがわかる．以降，部分統計構造 $f : (M, \nabla, \nabla^*, g) \to (\widetilde{M}, \widetilde{\nabla}, \widetilde{\nabla}^*, h)$ を中心に考察を行う．

命題 7

通常の等長はめ込み $f : (M, g) \to (\widetilde{M}, h)$ における Gauss の公式を

$$\nabla^h_X Y = f_*\nabla^g_X Y + \alpha^0(X,Y)$$

とする．このとき $\alpha^0 = \dfrac{\alpha + \alpha^*}{2}$ が成立する．

命題 8

等長はめ込み $f : (M, g) \to (\widetilde{M}, h)$ が minimal, すなわち $\alpha^0 = 0$ であることと, $\alpha^* = -\alpha$ であることは同値.

命題 9

先ほどと同様に, 分解 $f_*TM \oplus N_fM$ に沿って, $X \in \Gamma(TM), \xi \in \Gamma(N_fM)$ に対して $A_\xi X, A^*_\xi X \in \Gamma(TM), \nabla^\perp_X \xi, \nabla^{\perp*}_X \xi \in \Gamma(N_fM)$ を

$$\begin{aligned}\widetilde{\nabla}_X \xi &= -f_* A_\xi X + \nabla^\perp_X \xi, \\ \widetilde{\nabla}^*_X \xi &= -f_* A^*_\xi X + \nabla^{\perp*}_X \xi\end{aligned}$$

を満たすようにそれぞれ定める．このとき $A_\xi, A^*_\xi \in \Gamma(TM^{(1,1)})$ で, $\nabla^\perp, \nabla^{\perp*}$ は N_fM の接続である．

Proof. $\phi : M \to \mathbb{R}$ とする．このとき,

$$\begin{aligned}\widetilde{\nabla}_{\phi X} \xi &= \phi \widetilde{\nabla}_X \xi \\ &= \phi(-f_* A_\xi X + \nabla^\perp_X \xi) \\ &= -f_*(\phi A_\xi X) + \phi \nabla^\perp_X \xi\end{aligned}$$

なので,

$$\begin{aligned}A_\xi(\phi X) &= \phi A_\xi X, \\ \nabla^\perp_{\phi X} \xi &= \phi \nabla^\perp_X \xi\end{aligned}$$

である．また,

$$\begin{aligned}\widetilde{\nabla}_X \phi \xi &= X(\phi)\xi + \phi \widetilde{\nabla}_X \xi \\ &= \phi(-f_* A_\xi X + \nabla^\perp_X \xi) + X(\phi)\xi \\ &= -f_*(\phi A_\xi X) + X(\phi)\xi + \phi \nabla^\perp_X \xi\end{aligned}$$

なので,

$$\nabla^\perp_X \phi \xi = X(\phi)\xi + \phi \nabla^\perp_X \xi$$

である．以上より確かに $\nabla^\perp$ は N_fM の接続で, $A_\xi \in \Gamma(TM^{(1,1)})$ である．(和についての準同型であることは省略した．) $\nabla^{\perp*}, A^*_\xi$ については同様なので省略する． □

命題 10

通常の等長はめ込み $f:(M,g)\to(\widetilde{M},h)$ における Weingarten の公式を

$$\nabla^h_X\xi=-f_*A^0_\xi X+\nabla^{\perp 0}_X\xi$$

とする．このとき $A^0_\xi=\dfrac{A_\xi+A^*_\xi}{2},\nabla^{\perp 0}=\dfrac{\nabla^\perp+\nabla^{\perp *}}{2}$ が成立する．

命題 11

任意の $X,Y\in\Gamma(TM),\xi\in\Gamma(N_fM)$ について，

$$\begin{aligned}g(A_\xi X,Y)&=h(\alpha^*(X,Y),\xi)\\ g(A^*_\xi X,Y)&=h(\alpha(X,Y),\xi)\end{aligned}$$

が成立する．また，A_ξ,A^*_ξ は M の計量 g について対称，すなわち

$$\begin{aligned}g(A_\xi X,Y)&=g(X,A_\xi Y),\\ g(A^*_\xi X,Y)&=g(X,A^*_\xi,Y)\end{aligned}$$

が成立する．

Proof. $h(f_*Y,\widetilde{\nabla}_X\xi)$ を計算すると，

$$\begin{aligned}h(f_*Y,\widetilde{\nabla}_X\xi)&=(f_*X)h(f_*Y,\xi)-h(\widetilde{\nabla}^*_XY,\xi)\\&=-h(f_*\nabla^*_XY,\xi)\\&=-h(\alpha^*(X,Y),\xi)\end{aligned}$$

となることがわかる．また，

$$\begin{aligned}h(f_*Y,\widetilde{\nabla}_X\xi)&=h(f_*Y,-f_*A_\xi X+\nabla^\perp_X\xi)\\&=-g(Y,A_\xi X)\end{aligned}$$

でもある．よって，

$$g(A_\xi X,Y)=h(\alpha^*(X,Y),\xi)$$

であることがわかる．また，これより

$$g(A_\xi X,Y)=h(\alpha^*(X,Y),\xi)=h(\alpha^*(Y,X),\xi)=g(A_\xi Y,X)$$

となることもわかる．よって A_ξ は対称．A^*_ξ については同様なので省略する． □

参考文献

[1] 藤原彰夫, 情報幾何学の基礎　情報の内的構造をとらえる新たな地平, 共立出版, 2021.

[2] 佐藤直飛, 双曲空間上の統計構造とその部分多様体