主束の理論

mico

2025 年 2 月 18 日

1 はじめに

この PDF では多様体の上に定まるベクトル束の定義を, 接ベクトル束を一般化する形で確認する. そしてベクトル束の上に定まる構造の具体例を調べ, 主束の定義を確認する.

2 ベクトル束

2.1 接ベクトル束

以下, 多様体や写像といえば, 特に断りのない限り C^∞ 級のものを指すものとする.

一般に m 次元多様体 M が与えられたとき, 各点 $x \in M$ にはそれに対応した m 次元接ベクトル空間 T_xM が定まる. ここで $(U; x^1, \cdots, x^m) \subset M$ を M の座標近傍とすれば, 集合 $TU := \bigsqcup_{x \in U} T_xM$ は自然に $U \times \mathbb{R}^m$ と同相となる.

実際,

$$TU \ni \sum_{i=1}^m a^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{(x^1,\cdots,x^m)} \cong (x^1, \cdots, x^m, a^1, \cdots, a^m) \in U \times \mathbb{R}^m \tag{1}$$

という関係が成り立っている.

TU の非交和をとる範囲をさらに広げて $TM := \bigsqcup_{x \in M} T_xM$ という集合を考え, 写像 $\pi : TM \to M$ を $v \in T_xM$ に対して, $\pi(v) := x$ なる写像として定める.

$\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ を M の座標近傍系とする. 各 $\alpha \in A$ について, $\pi^{-1}(U_\alpha) = TU_\alpha$ が成立する. また, 各 $\alpha \in A$ に対して写像 $\widetilde{\varphi}_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times \mathbb{R}^m$ を式 (1) と同様に定める.

このとき TM は $\{(\pi^{-1}(U_\alpha), \widetilde{\varphi}_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ を座標近傍系とする $2m$ 次元多様体となる.

定義 1: 接ベクトル束

以上のようにして定まる $2m$ 次元多様体 TM を, M の**接ベクトル束** (tangent vector bundle) という.

接ベクトル束を用いた接ベクトル場の定義もしておく.

定義 2: 接ベクトル場

C^∞ 級写像 $X : M \to TM$ で, $\pi \circ X = \mathrm{id}_M$ となるようなものを, M 上の**接ベクトル場** (tangent vector field) という.
M 上の接ベクトル場全体からなる集合を $\Gamma(TM)$ と書く.

2.2 ベクトル束

前の小節で定めた接ベクトル束の概念をさらに一般化することを考える. 接ベクトル束の持つ性質として, 以下のような物が挙げられる.

1. 各 $x \in M$ に対して, $\pi^{-1}(x) = T_xM$ は m 次元ベクトル空間である.
2. $\widetilde{\varphi}_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times \mathbb{R}^m$ は微分同相写像である.
3. $p_1 : U_\alpha \times \mathbb{R}^m \to U_\alpha$ を射影とすると, $\pi|_{\pi^{-1}(U_\alpha)} = p_1 \circ \widetilde{\varphi}_\alpha$ が成立する. すなわち, 図式

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(U_\alpha) \arrow[r, "\widetilde{\varphi}_\alpha"] \arrow[d, "\pi"'] & U_\alpha \times \mathbb{R}^m \arrow[d, "p_1"] \\ U_\alpha \arrow[r, equal] & U_\alpha \end{tikzcd}$$

   は可換である.
4. $p_2 : U_\alpha \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ を射影とすると, 各 $x \in U_\alpha$ について, 写像 $p_2 \circ \widetilde{\varphi}_\alpha|_{T_xM} : T_xM \to \mathbb{R}^m$ は線型同型である.

これらの性質を抽出して, 一般のベクトル束の概念を構成する.

定義 3: ベクトル束

E, M を多様体, $\pi : E \to M$ を写像とする. 以下の性質を満たすとき, $\pi : E \to M$ は階数 r の**ベクトル束** (vector bundle) であるという.

1. 各 $x \in M$ に対して, $E_x := \pi^{-1}(x)$ は m 次元実ベクトル空間である.
2. M の開被覆 $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ と微分同相写像 $\varphi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times \mathbb{R}^r$ であって, 以下を満たすものが存在する.
   (a) $p_1 : U_\alpha \times \mathbb{R}^r \to U_\alpha$ を射影とすると, $\pi|_{\pi^{-1}(U_\alpha)} = p_1 \circ \varphi_\alpha$ が成立する. すなわち, 図式

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(U_\alpha) \arrow[r, "\varphi_\alpha"] \arrow[d, "\pi"'] & U_\alpha \times \mathbb{R}^r \arrow[d, "p_1"] \\ U_\alpha \arrow[r, equal] & U_\alpha \end{tikzcd}$$

は可換である．

(b) $p_2 : U_\alpha \times \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}^r$ を射影とすると，各 $x \in U_\alpha$ について，写像 $p_2 \circ \varphi_\alpha|_{E_x} : E_x \to \mathbb{R}^r$ は線型同型である．

特に，1 で与えられる E_x を x における E の**ファイバー** (fiber) といい，2 を満たす微分同相写像 $\varphi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times \mathbb{R}^r$ を**局所自明化** (local trivialization) という．

いくつか例を見てみる．

命題 1

m 次元多様体 M の接ベクトル束 TM は，M 上の階数 m のベクトル束である．

説明はすでに書いたので省略する．

命題 2: 自明なベクトル束

多様体 M に対し，$\pi : M \times \mathbb{R}^r \to M$ を射影とする．このとき $\pi : M \times \mathbb{R}^r \to M$ は階数 r のベクトル束となる．

この場合，局所自明化は恒等写像 $\mathrm{id}_{M\times\mathbb{R}^r}$ で自明に与えられる．
接ベクトル場の概念も一般化してみる．

定義 4: 切断

$\pi : E \to M$ をベクトル束とする．C^∞ 級写像 $s : M \to E$ で，$\pi \circ s = id_M$ となるようなものを，ベクトル束 $\pi : E \to M$ の **切断** (section) という．
ベクトル束 $\pi : E \to M$ の切断全体からなる集合を $\Gamma(E)$ とかく．

つまり，接ベクトル場とは接ベクトル束における切断のことである．
M の開集合 U について，$E|_U := \pi^{-1}(U)$ とする．また,U 上で定義された切断全体からなる集合を $\Gamma(E|_U)$ と書くこととする．
一般のベクトル空間には基底が定義されているが，それを切断に一般化したものを考える．

定義 5: 枠場

M の開集合 U 上で定義された切断の組 $e_1, \cdots, e_r \in \Gamma(E|_U)$ で，各点 $x \in U$ において接ベクトル $e_1(x), \cdots, e_r(x) \in E_x$ が E_x の基底になっているものを，$E|_U$ の **枠場** (frame field) という．

局所自明化 $\varphi : E|_U \to U \times \mathbb{R}^r$ が与えられたとき，$E|_U$ の枠場を自然に定めることができる．実際に，$\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_r$ を $\mathbb{R}^r$ の標準基底とする．$p_2 : U \times \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}^r$ を射影とし，U 上の切断

$e_1, \cdots, e_r \in \Gamma(E|_U)$ を

$$(p_2 \circ \varphi)(e_i) = \varepsilon_i \quad (1 \leq i \leq r) \tag{2}$$

なるものとして定める．このようにして与えられた $e_1, \cdots, e_r$ は局所自明化の定義より $E|_U$ の枠場となっていることが確認できる．

枠場 $e_1, \cdots, e_r \in \Gamma(E|_U)$ が与えられれば, U 上の切断 s は

$$s = \sum_{i=1}^{r} s^i e_i$$

と書くことができる．

3 主束

前節で定義したベクトル束 $\pi : E \to M$ とは, 簡単に言えば多様体 M とベクトル空間 $\mathbb{R}^r$ との直積のような構造を持つ多様体 E のことであった．

この節では, このベクトル空間 $\mathbb{R}^r$ を一般線型群 $GL(r;\mathbb{R})$ に変えてみることを提案し, 枠束を定義する．さらにそれを一般の Lie 群 G に一般化したものである主束の概念を定義する．

3.1 枠束

この小節では, r 階のベクトル束 $\pi : E \to M$ から, M と $\mathbb{R}^r$ の直積のような構造を持つ多様体である枠束を構成することを目的とする．

$\pi : E \to M$ を r 階のベクトル束とする．各 $x \in M$ に対して P_x は $\mathbb{R}^r$ と同型である．これより, 集合 P_x を

$$P_x := \{\xi : \mathbb{R}^r \to E_x | \xi : \text{線型同型}\}$$

で定める．集合 P を $P := \displaystyle\bigsqcup_{x \in M} P_x$ で定め, 写像 $\pi_P : P \to M$ を ${\pi_P}^{-1}(x) = P_x$ となるように定める．

$\mathbb{R}^r$ の標準基底を $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_r$ とする．このとき, $\xi \in P_x$ を用いて, E_x の基底 $\xi_1, \cdots, \xi_r$ を

$$\xi_i := \xi(\varepsilon_i) \quad (1 \leq i \leq r) \tag{3}$$

で定めることができる．逆に E_x の基底 $\xi_1, \cdots, \xi_r$ が与えられたとき, 式 (3) となるような $\xi \in P_x$ を定めることができる．このことから $\xi \in P_x$ と, E_x の基底 $(\xi_1, \cdots, \xi_r)$ は同一視できることがわかる．このことを用いて, 以降は $\xi = (\xi_1, \cdots, \xi_r)$ と表す．

一般線型群 $GL(r,\mathbb{R})$ の集合 P への右作用を

$$\xi g := \xi \circ g : \mathbb{R}^r \to E_x \quad (\xi \in P_x \subset P, g \in GL(r;\mathbb{R}))$$

で定める．

$\varphi : E|_{U_\alpha} \to U_\alpha \times \mathbb{R}^r$ を $\pi : E \to M$ の局所自明化とする．このとき，式 (2) から $E|_{U_\alpha}$ の枠場 $e_1, \cdots, e_r$ を定めることができた．$P|_{U_\alpha} := {\pi_P}^{-1}(U_\alpha) \subset P$ とする．このとき，$p_\alpha : U_\alpha \to P|_{U_\alpha}$ を

$$p_\alpha(x) := (e_1(x), \cdots, e_r(x)) \quad (x \in U_\alpha)$$

で定める．

さらに，写像 ${\varphi^P}_\alpha : P|_{U_\alpha} \to U_\alpha \times GL(r;\mathbb{R})$ を

$${\varphi^P}_\alpha(p_\alpha(x)g) := (x, g) \quad (x \in U_\alpha, g \in GL(r;\mathbb{R}))$$

で定める．各点 x において，$GL(r;\mathbb{R})$ の P_x への右作用は忠実かつ充満であるので，写像 ${\varphi^P}_\alpha$ は well-defined である．

以上のように定めた $\pi_P : P \to M$ 及び 写像 ${\varphi^P}_\alpha : P|_{U_\alpha} \to U_\alpha \times GL(r;\mathbb{R})$ の持つ構造，特徴を調べてみよう．

命題 3

$\pi_P : P \to M$ と ${\varphi^P}_\alpha : P|_{U_\alpha} \to U_\alpha \times GL(r;\mathbb{R})$ は以下の性質を満たす．

1. ${\varphi^P}_\alpha : P|_{U_\alpha} \to U_\alpha \times GL(r;\mathbb{R})$ は微分同相写像である．
2. $p_1 : U_\alpha \times GL(r;\mathbb{R}) :\to U_\alpha$ を射影とすると，$\pi_P|_{P|_{U_\alpha}} = p_1 \circ {\varphi^P}_\alpha$ が成立する．すなわち，図式

$$\begin{tikzcd} P|_{U_\alpha} \arrow[r, "{\varphi^P}_\alpha"] \arrow[d, "\pi_P"'] & U_\alpha \times GL(r;\mathbb{R}) \arrow[d, "p_1"] \\ U_\alpha \arrow[r, equal] & U_\alpha \end{tikzcd}$$

   は可換である．
3. $GL(r;\mathbb{R})$ の作用は各 $P|_{U_\alpha}$ を保つ．すなわち，

$$\xi \in P|_{U_\alpha} \Rightarrow \xi g \in P|_{U_\alpha} \quad (\forall g \in GL(r;\mathbb{R}))$$

   が成立する．
4. 新たに $GL(r;\mathbb{R})$ の $U_\alpha \times GL(r;\mathbb{R})$ への右作用を

$$(x, h)g := (x, hg) \quad (x \in U_\alpha, g, h \in GL(r;\mathbb{R}))$$

   で定める．このとき，

$${\varphi^P}_\alpha(\xi g) = ({\varphi^P}_\alpha(\xi))g \quad (\forall \xi \in P|_{U_\alpha}, \forall g \in GL(r;\mathbb{R}))$$

   が成立する．

Proof. 1. $GL(r;\mathbb{R})$ の各 P_x への右作用が忠実かつ充満であること，及び ${\varphi^P}_\alpha$ の定義から ${\varphi^P}_\alpha$ が全単射であることは明らか．微分同相であることについては省略する．

2. 以下, $\pi_P|_{P|_{U_\alpha}}$ は省略して単に π_P と書く．任意に $\xi \in P_x \subset P|_{U_\alpha}$ をとる．このとき π_P の定義から, $\pi_P(\xi) = x$ である．また, 1 の議論から ξ は ${\varphi^P}_\alpha \xi = (x, g)$ と適当な $g \in GL(r; \mathbb{R})$ を用いて書けるので, $p_1 \circ {\varphi^P}_\alpha(\xi) = x$ である．よって, $\pi_P = p_1 \circ {\varphi^P}_\alpha$.
3. 自明なので省略する．
4. 任意に $\xi \in P_x \subset P|_{U_\alpha}, g \in GL(r; \mathbb{R})$ をとる．${\varphi^P}_\alpha(\xi) = (x, h)$, すなわち $\xi = p_\alpha(x)h$ であるとする．このとき,

$$\begin{aligned}({\varphi^P}_\alpha)(\xi g) &= ({\varphi^P}_\alpha)(p_\alpha(x)hg)\\ &= (x, hg)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(({\varphi^P}_\alpha)(\xi))g &= (x, h)g\\ &= (x, hg)\end{aligned}$$

が成立する．よって $({\varphi^P}_\alpha)(\xi g) = (({\varphi^P}_\alpha)(\xi))g$ である．

□

さて, この構造 $\pi_P : P \to M$ に名前を付けよう．

定義 6: 枠束

以上のようにしてベクトル束 $\pi : E \to M$ から定まる構造 $\pi_P : P \to M$ を, ベクトル束 $\pi : E \to M$ の **枠束** (frame bundle) という．

3.2 主束

さて, ベクトル束の時と同様に枠束の持つ性質を抽出, 一般化して新たな概念を定義しよう．

定義 7: 主束

P, M を多様体, G を Lie 群, $\pi_P : P \to M$ を写像とする．以下の性質を満たすとき, $\pi_P : P \to M$ は**主 G 束** (principal G -bundle), あるいは G を **構造群** (structure group) とする **主束** (principal bundle) であるという．

1. G が P に右から作用している．
2. M の開被覆 $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ と微分同相写像 $\varphi_\alpha : P|_{U_\alpha} :\to U_\alpha \times G$ であって, 以下を満たすものが存在する．
   (a) $p_1 : U_\alpha \times G \to U_\alpha$ を射影とすると, $\pi_P = p_1 \circ \varphi_\alpha$ が成立する．すなわち, 図式

$$\begin{array}{ccc} P|_{U_\alpha} & \xrightarrow{\varphi_\alpha} & U_\alpha \times G \\ {\scriptstyle \pi_P}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p_1} \\ U_\alpha & = & U_\alpha \end{array}$$

は可換である．

(b) G の作用は各 $P|_{U_\alpha}$ を保つ．すなわち，

$$\xi \in P|_{U_\alpha} \Rightarrow \xi g \in P|_{U_\alpha} \quad (\forall g \in G)$$

が成立する．また，新たに G の $U_\alpha \times G$ への右作用を

$$(x,h)g := (x,hg) \quad (x \in U_\alpha, g,h \in G)$$

で定める．このとき，$\varphi_\alpha : P|_{U_\alpha} :\to U_\alpha \times G$ は G -**同変** (G -equivariant) である．すなわち，

$$\varphi_\alpha(\xi g) = (\varphi_\alpha(\xi))g \quad (\forall \xi \in P|_{U_\alpha}, \forall g \in G)$$

が成立する．

特に，2 を満たす微分同相写像 $\varphi_\alpha : P|_{U_\alpha} :\to U_\alpha \times G$ を **局所自明化** (local trivialization) という．

主束に対してもベクトル束同様に切断を定義する．

定義 8: 切断

$\pi : P \to M$ を主束とする．C^∞ 級写像 $s : M \to P$ で，$\pi \circ s = \mathrm{id}_M$ となるようなものを，主束 $\pi : P \to M$ の **切断** (section) という．
主束 $\pi : P \to M$ の切断全体からなる集合を $\Gamma(P)$ とかく．

3.3 主束に付随するベクトル束

ベクトル束から主束である枠束を構成したが，その逆，主束からベクトル束を構成することもやってみよう．

$\pi_P : P \to M$ を主 G 束，V をベクトル空間，$\rho : G \to GL(V)$ を G の表現とする．このとき，G の集合 $P \times V$ への右作用を

$$(\xi, v)g := (\xi g, \rho(g)^{-1}v) \quad (\xi \in P, v \in V, g \in G)$$

で定めることができる．これを用いて $P \times V$ 上に同値関係 $\sim_\rho$ を

$$(\xi_1, v_1) \sim_\rho (\xi_2, v_2) \overset{\text{def}}{\iff} \exists g \in G, \text{ s.t.} (\xi_1, v_1)g = (\xi_2, v_2) \quad (\xi_1, \xi_2 \in P, v_1, v_2 \in V)$$

定め，同値関係で割った商集合を

$$P \times_\rho V := (P \times V)/\sim_\rho$$

と書くこととする．集合 $P \times_\rho V$ について, $\xi \times_\rho v \quad (\xi \in P, v \in V)$ で $(\xi, v) \in P \times V$ が属する同値類を表すものとする．

以降, E で集合 $P \times_\rho V$ を指すものとする．さて, 写像 $\pi_E : E \to M$ を

$$\pi_E(\xi \times_\rho v) := \pi_P(\xi) \quad (\xi \in P, v \in V)$$

で定める．

命題 4

写像 $\pi_E : E \to M$ は well-defined である．

Proof. $\xi_1 \times_\rho v_1 = \xi_2 \times_\rho v_2 \Rightarrow \pi_E(\xi_1 \times_\rho v_1) = \pi_E(\xi_2 \times_\rho v_2)$ を示せばよい．

$(\xi_1, v_1)g = (\xi_2, v_2)$ なる $g \in G$ をとる．このとき右作用の定義から, $\xi_2 = \xi_1 g$ が成り立っている．$\pi_P(\xi_1) \in M$ が属する開集合 U と局所自明化 $\varphi : P|_U \to U \times G$ を適当に一つ取ってくる．局所自明化の定義より G の P への作用は $P|_U$ を保つので, $\xi_2 = \xi_1 g \in P|_U$ が成立する．よって, $\varphi(\xi_1), \varphi(\xi_2)$ はともに

$$\begin{aligned}\varphi(\xi_1) &= (x_1, h_1), \\ \varphi(\xi_2) &= (x_2, h_2)\end{aligned}$$

と $x_1, x_2 \in U, h_1, h_2 \in G$ を用いて一意に書ける．

局所自明化の定義より, φ は $G-$ 同変なので,

$$\begin{aligned}\varphi(\xi_2) &= \varphi(\xi_1 g) \\ &= \varphi(\xi_1)g \\ &= (x_1, h_1)g \\ &= (x_1, h_1 g)\end{aligned}$$

である．以上より, 射影 $\pi_1 : U \times G \to U$ について $\pi_P(\xi_2) = (\pi_1 \circ \varphi)(\xi_2) = x_1$ となる．$\pi_P(\xi_1) = x_1$ については明らかなので省略する．

したがって,

$$\pi_E(\xi_1 \times_\rho v_1) = \pi_E(\xi_2 \times_\rho v_2) = x_1$$

となり, π_E が well-defined であることが示された． □

さて, 本題となる命題を示そう．

命題 5

写像 $\pi_E : E \to M$ はベクトル束である．

Proof. ベクトル束の満たすべき条件を確認していく．

1. 任意の $x \in M$ をとり, x が属する開集合 U と $\pi_P : P \to M$ の局所自明化 $\varphi : U \to U \times G$ を適当に一つ取ってくる. U 上で定義される切断 $p \in \Gamma(P|_U)$ を

$$\varphi \circ p(x) = (x, e) \tag{4}$$

なるものとして定める.

$$\pi_E^{-1}(x) = \{\xi \times_\rho v \in E | \pi_E(\xi \times_\rho v) = \pi_P(\xi) = x\}$$

である. この集合に含まれるような $\xi \times_\rho v$ について考察する.
まず, $\varphi(\xi) = (x, h) \quad (h \in G)$ と書けることに注意する. このとき, $\varphi(\xi h^{-1}) = \varphi(\xi)h^{-1} = (x, e)$ で, $\xi h^{-1} = p(x)$ であることがわかる. また,

$$\begin{aligned} \xi \times_\rho v &= (\xi \times_\rho v)h^{-1} \\ &= (\xi h^{-1}) \times_\rho (\rho(h)v) \end{aligned}$$

という式変形ができる. このことから $\pi_E^{-1}(x)$ は

$$\pi_E^{-1}(x) = \{p(x) \times_\rho v | v \in V\}$$

とできる. ここで $\pi_E^{-1}(x)$ の元を $p(x) \times_\rho v$ と表示したときにあらわれる $v \in V$ は一意であることに注意する.
したがって, 自然に同型

$$\pi_E^{-1}(x) \cong V$$

が得られる.

2. $\pi_P : P \to M$ は主束なので, M の開被覆 $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ とそれらの上の局所自明化 $\varphi_\alpha : P|_{U_\alpha} \to U_\alpha \times G$ が存在する. これらを用いて新たに $\pi_E : E \to M$ の局所自明化 $\widetilde{\varphi}_\alpha^E : E|_{U_\alpha} \to U_\alpha \times V$ を

$$\widetilde{\varphi}^E(p_\alpha(x) \times_\rho v) := (x, v)$$

なるものとして定める. ここで切断 $p_\alpha \in \Gamma(P|_U)$ は式 (4) と同様に定めたものである. これが全単射であるのは先の議論より明らかである. C^∞ 級であることについては省略する. これが局所自明化の条件を満たすかを確認していく.
   (a) 執筆中
   (b) 執筆中

□

参考文献

[1] 今野宏, 微分幾何学, 東京大学出版会, 2013.