メタプレクティック作用素と Fourier 積分作用素

ky

2021 年 8 月 14 日

1　序

以前，擬微分作用素の Egorov の定理（を線型正準変換に限ったもの）を学ぶために [3] でメタプレクティック作用素について触れたことがあった．メタプレクティック作用素とは，ラフに言えば，線型な正準変換（シンプレクティック変換）をある意味で「量子化」したユニタリ作用素のことである.「相関数」に二次形式をもち，自由 Schrödinger 方程式の解作用素が一例である．これをきっかけに正準変換の理論的背景にあるシンプレクティック幾何学や Fourier 積分作用素論への興味が再燃した．勉強をしようと思い超局所解析の教科書（例えば [2]．これは良い本だと思う）を眺めてみると，相関数に一次斉次性の条件を課しているため，自由 Schrödinger 方程式はこの本の Fourier 積分作用素の枠組では扱えないように思えた．ただ，自由 Schrödinger 方程式は様々なものが具体的に計算・表示でき個人的に親しみがあったこと，見た目上は Fourier 積分作用素と酷似していることから「自由 Schrödinger 方程式を突破口に，メタプレクティック作用素と Fourier 積分作用素の関係をなんとか見出したい」と思うようになった．そのような中，Cappiello-Schulz-Wahlberg らの論文 [1] で相関数を二次形式にとった場合の Fourier 積分作用素が論じられていることを発見し,（細かいことを抜きにすれば）**メタプレクティック作用素は Fourier 積分作用素とみなせるのではないか**と確信するに至った．

このノートは，メタプレクティック作用素（やその例としての自由 Schrödinger 方程式の解作用素）と Fourier 積分作用素の一般論との関係を計算した時のまとめである．上記のモチベーションにより，未定義語が多く数学的厳密性は犠牲にしていること，また，間違いが潜んでいるかもしれないことをお断りしておく．

■記号　$x = (x_1, \dots, x_d), y = (y_1, \dots, y_d) \in \mathbb{R}^d$ に対し，$\langle x, y\rangle = \sum_{j=1}^{d} x_j y_j$ は $\mathbb{R}^d$ 上の内積とする．Fourier 変換の定義は $\hat{u}(\xi) = (2\pi)^{-d/2} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\langle x,\xi\rangle} u(x)dx$ を採用する．

2　メタプレクティック作用素と正準変換

Lerner の本 [3] の 4 章 4 節にある説明をまとめる．

定義 2.1（メタプレクティック作用素） $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ 上の二次形式を

$$S(x,\eta) = \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle + \langle Bx, \eta\rangle + \frac{1}{2}\langle C\eta, \eta\rangle \left(= \frac{1}{2}\left\langle \begin{pmatrix} A & B^t \\ B & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ \eta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ \eta \end{pmatrix} \right\rangle \right) \tag{1}$$

で定める．ここで A, C は d 次実対称行列，B は d 次実正則行列である．この上で，

$$M_S u(x) = (2\pi)^{-d/2} |\det B|^{1/2} \int_{\mathbb{R}^d} e^{iS(x,\eta)} \hat{u}(\eta) d\eta, \quad x \in \mathbb{R}^d \tag{2}$$

を**メタプレクティック作用素 (metaplectic operator)** と呼ぶ.

注意 2.2 M_S は $L^2(\mathbb{R}^d)$ 上のユニタリ作用素，$\mathscr{S}(\mathbb{R}^d), \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ 上の連続かつ可逆な作用素を定める.

定義 2.3（正準変換） 定義 2.1 の二次形式 S に対し，

$$\chi_S : \big(S'_\eta(x,\eta), \eta\big) \mapsto \big(x, S'_x(x,\eta)\big) \tag{3}$$

なる $T^*\mathbb{R}^d$ から $T^*\mathbb{R}^d$ への変換を S に付随する（線型）**正準変換 (canonical transformation)**（または**シンプレクティック変換 (symplectic transformation)**）と呼ぶ.

注意 2.4 χ_S は $2d \times 2d$ の実シンプレクティック行列で表される．実際，(3) の作用を具体的に書くと，$y = S'_\eta(x,\eta) = Bx + C\eta$ とおくとき，$x = B^{-1}y - B^{-1}C\eta$ である．そして

$$\xi = S'_x(x,\eta) = Ax + B^t\eta = AB^{-1}y + (B^t - AB^{-1}C)\eta$$

から

$$\chi_S : \begin{pmatrix} y \\ \eta \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} B^{-1}y - B^{-1}C\eta \\ AB^{-1}y + (B^t - AB^{-1}C)\eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^{-1} & -B^{-1}C \\ AB^{-1} & B^t - AB^{-1}C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \\ \eta \end{pmatrix}$$

という表示を得る．なお，

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} B^{-1} & -B^{-1}C \\ AB^{-1} & B^t - AB^{-1}C \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} B^{-1} & O \\ AB^{-1} & B^t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & -C \\ O & I \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} I & O \\ A & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B^{-1} & O \\ O & B^t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & -C \\ O & I \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{4}$$

であり，最後の式に出てくる三つの行列はシンプレクティック変換群の生成元になっている．これらの行列は S に応じて得られることから，二次形式 S を正準変換の**生成関数 (generating function)** と呼ぶこともある．シンプレクティック変換を与えると，対応するメタプレクティック作用素が定まるのである.

3 Fourier 積分作用素の一般論

Grigis-Sjöstrand の本 [2] を参考に，ラフにまとめる．$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ を開集合とする．$\dot{\mathbb{R}}^d = \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ とする．$a \in S^m_{\rho,\delta}(\Omega \times \mathbb{R}^d)$ をシンボル関数とし，**相関数 (phase function)**$\varphi \in C^\infty(\Omega \times \dot{\mathbb{R}}^d)$ は

実数値とする[*1]．この上で，振動積分で定まる超関数

$$I(a,\varphi)(X)=\int_{\mathbb{R}^d}e^{i\varphi(X,\eta)}a(X,\eta)d\eta,\quad X\in\Omega \tag{5}$$

を考える[*2]．そして**臨界点集合 (critical set)** を

$$C_\varphi=\{(X,\eta)\in\Omega\times\dot{\mathbb{R}}^d\mid\varphi'_\eta(X,\eta)=0\} \tag{6}$$

と定義する．また

$$\Lambda_\varphi=\{(X,\varphi'_X(X,\eta))\mid(X,\eta)\in C_\varphi\}=j(C_\varphi) \tag{7}$$

と定義する．ここで

$$j:C_\varphi\ni(X,\eta)\mapsto(X,\varphi'_X(X,\eta))\in T^*\Omega\setminus 0$$

である．

このノートでは，式 (5) において $\Omega=\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d$ の場合を考える．この時の $I(a,\varphi)(x,y)$ を積分核にもつ作用素

$$\begin{aligned}T_{a,\varphi}u(x)&=(2\pi)^{-d}\int_{\mathbb{R}^d}I(a,\varphi)(x,y)u(y)dy\\&=(2\pi)^{-d}\iint_{\mathbb{R}^{2d}}e^{i\varphi(x,y,\eta)}a(x,y,\eta)u(y)dyd\eta\end{aligned} \tag{8}$$

を **Fourier 積分作用素 (Fourier integral operator)** の定義とする[*3]．u は $\mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$ や $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ の元であると考えておけばよい．

シンプレクティック幾何学から用語を拝借しておこう．ただ，$M,N=T^*\mathbb{R}^d$ を念頭に置いておけば十分である．シンプレクティック多様体 M の部分多様体 Λ が **Lagrange 部分多様体 (Lagrangian submanifold)** であるとは，M のシンプレクティック形式 σ の Λ への制限 $\sigma|_\Lambda$ が 0 に等しいときにいう．また，M,N をシンプレクティック多様体とするとき，$\mathcal{H}:M\to N$ が正準変換であることは，そのグラフ $C_{\mathcal{H}}=\{(\mathcal{H}(\rho),\rho)\mid\rho\in M\}\subset N\times M$ が Lagrange 部分多様体となることと同値である.（ここで $N\times M$ は $\sigma_N-\sigma_M$ をシンプレクティック形式としてシンプレクティック多様体となっている.）

事実 3.1　式 (7) の Λ_φ は $T^*\Omega\setminus 0$ の Lagrange 部分多様体になっている．

[*1] このほかにも満たすべき条件（$d\varphi\neq 0$ など．この条件は $a(X,\eta)$ の η 遠方での挙動を $e^{i\varphi(X,\eta)}$ の振動で「キャンセル」するために必要となる.）があるにはあるが，細かいことは気にしないことにする．

[*2] 詳細は割愛するが，例えば，$\psi(0)=1$ なるカットオフ関数 $\psi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ に対し，テスト関数 $f\in\mathscr{D}(\Omega)$ とのカップリングを

$$\langle I(a,\varphi),f\rangle=\lim_{\varepsilon\to 0}\iint_{X\times\mathbb{R}^d}e^{i\varphi(X,\eta)}\psi(\varepsilon\eta)a(X,\theta)f(X)dXd\eta$$

と定めることで $I(a,\varphi)\in\mathscr{D}'(\Omega)$ となる．また，テスト関数を Schwartz クラス $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ にとれば，緩増加超関数と考えられる

[*3] 本来は (8) のような局所的な振動積分表示を張り合わせた大域的定義があるようなのだが，本ノートでは多様体として Euclid 空間しか考えないのでこの定義を採用した．

4　メタプレクティック作用素への適用

序文で述べたように Grigis-Sjöstrand の本 [2] での相関数 $\varphi(X,\eta)$ は η について一次斉次であることが仮定されているため，厳密にはメタプレクティック作用素の定義は適合しないのだが，あまり気にせずに計算していこう．定義 2.1 の生成関数 S により誘導される線形正準変換

$$\chi_S : \big(S'_\eta(x,\eta),\eta\big) \mapsto \big(x, S'_x(x,\eta)\big)$$

に対して，そのグラフ

$$\Lambda_{\chi_S} := \Big\{\Big(\big(x,S'_x(x,\eta)\big),\big(S'_\eta(x,\eta),\eta\big)\Big)\Big\} = \Big\{\Big(\chi_S\big(S'_\eta(x,\eta),\eta\big),\big(S'_\eta(x,\eta),\eta\big)\Big)\Big\}$$

は Lagrange 部分多様体（実際には $T^*\mathbb{R}\times T^*\mathbb{R}^d$ の部分線型空間）になっている．ここで，$T^*\mathbb{R}^d\times T^*\mathbb{R}^d$ のシンプレクティック形式は $((x,\xi),(y,\eta))$ の座標のもと

$$\sigma = d\xi\wedge dx - d\eta\wedge dy$$

と負号つきで表される．実際 $y=\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}, \xi=\frac{\partial\varphi}{\partial x}$ として考えると

$$\begin{aligned}\sigma|_{\Lambda_{\chi_S}} &= d\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)\wedge dx - d\eta\wedge d\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\right)\\ &= \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}dx + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial\eta}d\eta\right)\wedge dx - d\eta\wedge\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial\eta}dx + \frac{\partial^2\varphi}{\partial\eta^2}d\eta\right)\\ &= \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial\eta}d\eta\wedge dx - d\eta\wedge\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial\eta}dx = 0\end{aligned}$$

が成り立つことから Λ_{χ_S} は Lagrange 部分多様体である．

定義 2.1 のメタプレクティック作用素を

$$M_S u(x) = (2\pi)^{-d}|\det B|^{1/2}\iint_{\mathbb{R}^{2d}} e^{i(S(x,\eta)-\langle y,\eta\rangle)}u(y)dyd\eta$$

と表す．これを Fourier 積分作用素の定義 (8) と比べると，$|\det B|^{1/2}$ の定数倍はあるものの非常に似ていることに気づく．シンボルは $a(x,y,\eta)=1$ であり，相関数は

$$\varphi(x,y,\eta) = S(x,\eta) - \langle y,\eta\rangle$$

に対応する．こうしてメタプレクティック作用素は Fourier 積分作用素と見ることができる．これに対して，臨界点集合は

$$C_\varphi = \{((x,y),\eta)\mid \varphi'_\eta(x,\eta)=0\} = \{((x,y),\eta)\mid S'_\eta(x,\eta)-y=0\}$$

であり，対応する Lagrange 部分多様体は

$$\Lambda_\varphi = \{((x,y),\varphi'_{(x,y)}(x,y,\eta))\mid ((x,y),\eta)\in C_\varphi\}$$

$$
\begin{aligned}
&= \{((x,y),(S'_x(x,\eta),-\eta)) \mid y = S'_\eta(x,\eta)\} \\
&= \{((x,S'_\eta(x,\eta)),(S'_x(x,\eta),-\eta))\} \\
&= \{(x,y,\xi,-\eta) \mid (x,\xi) = \chi_S(y,\eta)\} \\
&\simeq \{(x,\xi,y,-\eta) \mid (x,\xi) = \chi_S(y,\eta)\} = \Lambda'_{\chi_S}
\end{aligned}
$$

となる．ここで Λ'_{χ_S} は Λ_{χ_S} の第二余変数 η の符号を反転させたものである．結果，相関数 φ の臨界点集合から作られる Lagrange 部分多様体 Λ_φ と，正準変換のグラフとしての Lagrange 部分多様体 Λ_{χ_S} との関係が導けた．この Lagrange 部分多様体は**波面集合 (wave front set)**（関数の超局所的な特異性を記述する，相空間 $T^*\mathbb{R}^d$ の部分集合）との関係が深いのだが，ここでは触れないことにする．

5　自由 Schrödinger 方程式

自由粒子の Schrödinger 方程式（自由 Schrödinger 方程式）

$$
\begin{cases} i\partial_t u(t,x) = -\frac{1}{2}\Delta u(t,x), & (t,x) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^d \\ u(0,x) = u_0(x) \end{cases} \tag{9}
$$

を考える．x 変数についての Fourier 変換・逆変換を用いることで，方程式 (9) の解は

$$
u(t,x) = (2\pi)^{-d/2}\int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle x,\eta\rangle} e^{-\frac{1}{2}it\langle\eta,\eta\rangle}\widehat{u_0}(\eta)d\eta =: e^{\frac{1}{2}it\Delta}u_0(x) \tag{10}
$$

と表される．この表示により，対応する生成関数は

$$
S(x,\eta) = \langle x,\eta\rangle - \frac{t}{2}\langle\eta,\eta\rangle
$$

である．また相関数は

$$
\varphi(x,y,\eta) = S(x,\eta) - \langle y,\eta\rangle = \langle x-y,\eta\rangle - \frac{t}{2}\langle\eta,\eta\rangle
$$

なので

$$
\begin{aligned}
\Lambda_\varphi &= \{((x,x-t\eta),(\eta,-\eta)) \mid x,\eta\in\mathbb{R}^d\} \\
&= \{((y+t\eta,y),(\eta,-\eta)) \mid y,\eta\in\mathbb{R}^d\}
\end{aligned}
$$

となる（波面集合との関連をつけないとわかりにくいかな...）．

この自由 Schrödinger 方程式のハミルトニアン $p_0(x,\xi) = \frac{1}{2}\xi^2$ に対する正準方程式

$$
\dot{x}(t) = \frac{\partial p_0}{\partial\xi}(x(t),\xi(t)), \quad \dot{\xi}(t) = -\frac{\partial p_0}{\partial x}(x(t),\xi(t)) \tag{11}
$$

は初期条件 $(x(0),\xi(0)) = (x_0,\xi_0)$ のもとで解

$$
x(t) = x_0 + t\xi_0, \quad \xi(t) = \xi_0
$$

を持つ．これは Euclid 空間における初期位置 x_0，初期速度 ξ_0 の等速直線運動となっている．行列表示すれば

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ \xi(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & tI \\ O & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ \xi_0 \end{pmatrix}$$

である．これは正準方程式 (11) の解写像つまり Hamilton フロー $\exp tH_{p_0}$ が (1) や (4) において $A = O, B = I, C = -tI$ で表される線形正準変換であることを意味する．以上から，Hamilton フローと生成関数 S から得られる線型正準変換が一致する．

6　今後書きたいこと

波面集合との関連を書きたい．また，正準関係 (canonical relation)，特異性の伝播定理についても書きたい．

参考文献

[1] M. Cappiello, R. Schulz, and P. Wahlberg. ”Lagrangian distributions and Fourier integral operators with quadratic phase functions and Shubin amplitudes.” Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences 56.3 (2020): 561-602.
（実際に参照したのは arxiv 版である.）

[2] A. Grigis, J. Sjöstrand. Microlocal analysis for differential operators: an introduction. Vol. 196. Cambridge University Press, 1994.

[3] N. Lerner. Metrics on the phase space and non-selfadjoint pseudo-differential operators. Vol. 3. Springer Science & Business Media, 2011.