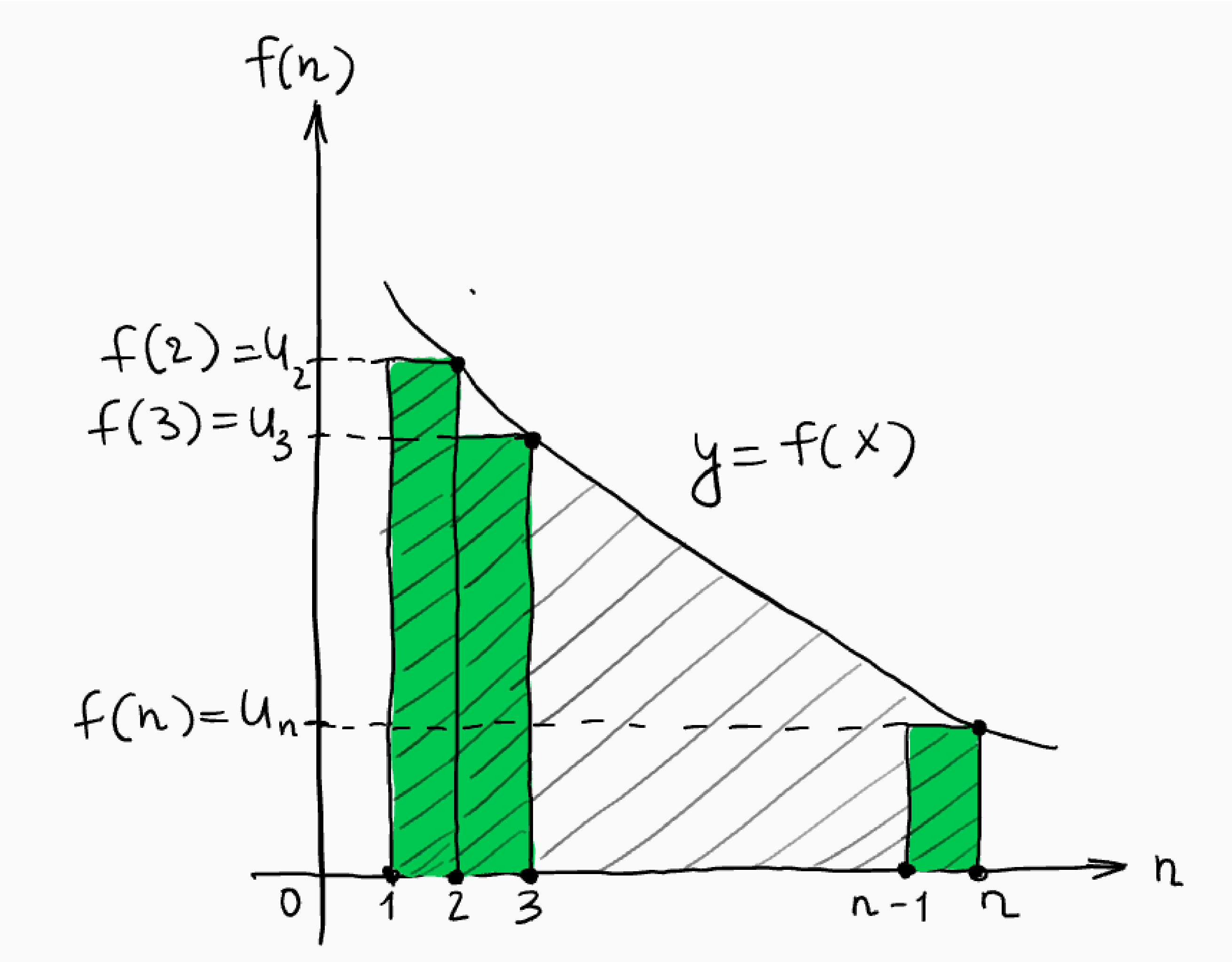
Куплено у @ystu_exams_bot

32. Интегральный признак сходимости рядов с положительными членами. Ряд Дирихле и условия его сходимости.

Интегральный признак сходимости рядов с положительными членами. (Интегральный признак Коши)

Пусть $f(x), x \in [1, \infty]$, непрерывная положительная убывающая функция, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, где $u_n = f(n)$ сходится (расходится) тогда и только тогда, когда сходится (расходится) **==несобственный интеграл==** $\int_1^{\infty} f(x)dx$.



$$u_2 + u_3 + \cdots + u_n = S_n < \int_1^n f(x)dx$$

где $\int_1^n f(x)dx$ - площадь под графиком

$$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n \leq u_1 + \int_1^n f(x)dx \leq u_1 + \underbrace{\int_1^\infty f(x)dx}_{сходится} = M$$

То есть все частичные суммы S_n - ограничены по следствию ряд сходится.

Пример:

1) $$\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{n^2}}_{u_n} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots$$

$$f(x) = \frac{1}{x^2}$$

$$\int_1^b \frac{1}{x^2} dx = \lim_{b \to +\infty} \int_1^b \frac{dx}{x^2} = \lim_{b \to +\infty} -\frac{1}{x} = 0.$$

Обобщенный гармонический ряд (ряд Дирихле) и условия его сходимости

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$$

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x} = \lim_{b \to +\infty} \int_1^b \frac{dx}{x} = \lim_{b \to +\infty} \ln b = \infty$$

интеграл расходится $=>$ гармонический ряд расходится так, что ряд Дирихле с переменной p (обобщенный гармонический ряд)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \quad \begin{matrix} \text{сходится при } p > 1 \\ \text{расходится при } p \leq 1 \end{matrix}$$

Ряд Дирихле используется для сравнения с другими рядами

$$\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{n^2 + n - 1}{n^3 - n^2 + 2}}_{u_n}$$

$u_n \sim \frac{n^2}{n^3} = \frac{1}{n} = u_n$ – гармонический ряд расходится =>

=> $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ – расходится.