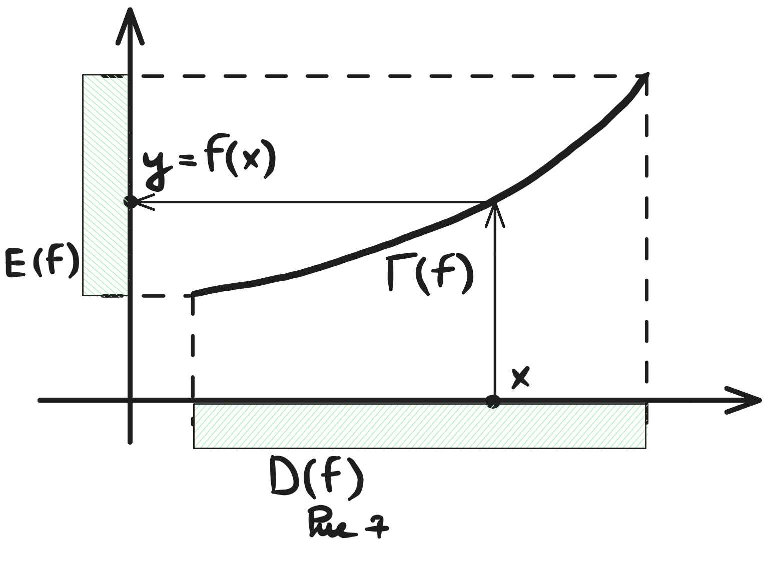
Вопрос 2 (ВМ2)

Функция, график функции. Операции над функциями: сумма, разность, произведение, частное, композиция. Обратная функция.

Функция, график функции



Пусть D - некоторое множество действительных чисел. Говорят, что на множестве D задана (числовая) функция f если каждому числу $x \in D$ (аргументу

функции) поставлено в соответствие единственное число, обозначаемое $f(x)$ и называемое значением функции в точке x. Множество $D(f)$ называется **областью определения** функции, а множество $E(f) = \{y \in \mathbb{R} : y = f(x), x \in D(f)\}$ - **областью значений** функции.
Функция обозначается также $f : D \to \mathbb{R}$ или $x \mapsto f(x), x \in D$, или $y = f(x), x \in D$, или просто $f(x), x \in D$
Графиком функции f (рис. 7) называется множество $\mathit{\Gamma}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = f(x), x \in D(f)\}$
Наиболее распространённый способ заданий функций является **аналитический**.

Операции над функциями

Суммой (разностью) функций f и g называется функция $f + g$ $(f - g)$, определённая на множестве $D(f) \cap D(g)$, значение которой в точке $x \in D(f) \cap D(g)$ вычисляется по формуле

$$(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$$

Произведением функций f и g называется функция $f \cdot g$ определённая на множестве $D(f) \cap D(g)$, значение которой в точке $x \in D(f) \cap D(g)$ вычисляется по формуле

$$(f \cdot g)(x) = f(x)g(x)$$

Частным функций f и g называется функция $\frac{f}{g}$, определённая на множестве

$D_1 = D(f) \cap \{x \in D(g) : g(x) \neq 0\}$, значение которой в точке $x \in D_1$ вычисляется по формуле

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

Композиция функций

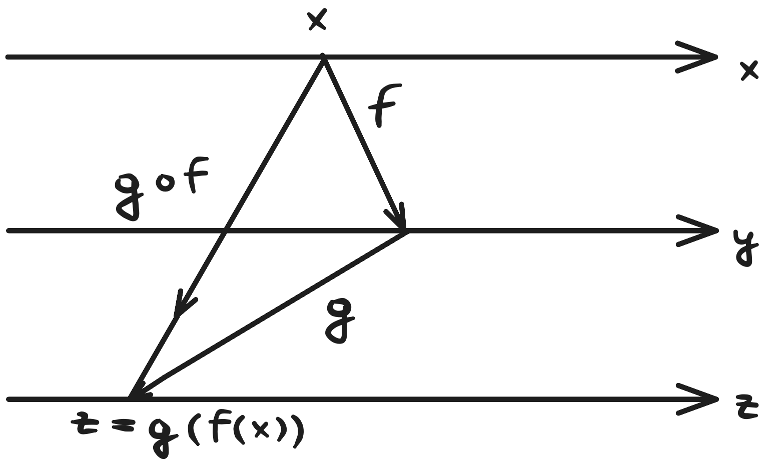


Рис. 8

Композицией функций f и g (или сложной функцией, полученной композицией функций f и g) называется функция $h = g \circ f$ (рис. 8), задаваемая формулой $h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x))$ на множестве $D(h) = \{x \in D(f) : f(x) \in D(g)\}$.

Обратная функция

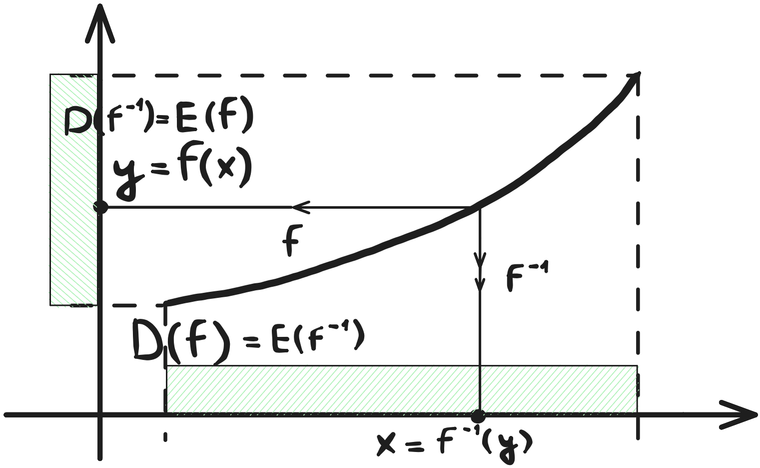


Рис. 9

Пусть функция $f: D \to \mathbb{R}$ такова, что для $\forall x_1, x_2 \in D (x_1 \neq x_2) \implies f(x_1) \neq f(x_2)$, например, f - возрастает: $x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2)$ или f - убывает: $x_1 < x_2 \implies f(x_1) > f(x_2)$.

Тогда $\forall y \in E = E(f)$ найдётся единственное $x \in D$, такое что $f(x) = y$. Тем самым определена функция $f^{-1}, f^{-1}: E \to \mathbb{R}$,

называемая **функцией обратной** к $f: x = f^{-1}(y)$ (рис. 9)

Ясно, что $D(f^{-1}) = E(f), E(f^{-1}) = D(f)$,

$f(f^{-1}(y)) \equiv y$ и $f^{-1}(f(x)) \equiv x$

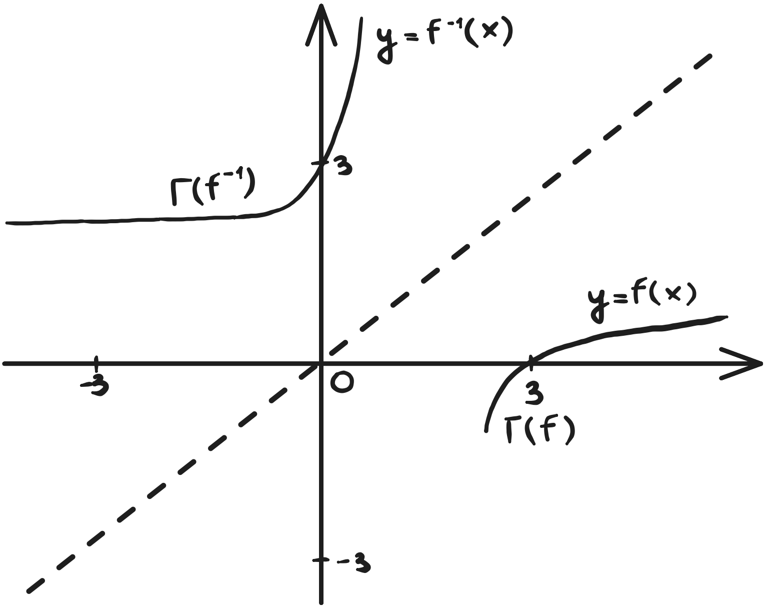


Рис. 10

График $\Gamma(f^{-1})$ обратной функции получается $\Gamma(f)$ преобразованием плоскости $\mathbb{R}^2$, переводящим любую точку (x, y) в точку (y, x), симметричную ей относительно прямой y = x (рис. 10).