Вопрос 10 (ВМ)

Ориентация в пространстве: правые и левые тройки векторов. Векторное произведение: определение, свойства, механический смысл. Выражение векторного произведения через координаты. Выражение площадей параллелограмма и треугольника через векторное произведение.

Ориентация в пространстве: правые и левые тройки векторов.

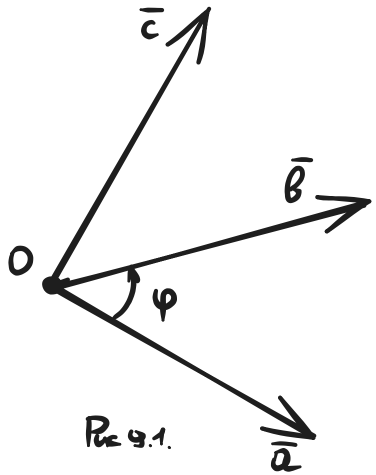

Рис 9.1.

Пусть векторы $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ в пространстве не являются компланарными, и их начала помещены в общую точку O (рис. 9.1)
Упорядоченная тройка векторов $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ называется **правой**, если при наблюдении из конца вектора $\vec{c}$ поворот вектора $\vec{a}$ к вектору $\vec{b}$ виден против часовой стрелки (тройка **левая**, если поворот - по часовой стрелке)
Тройка базисных векторов $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ всегда предполагается правой

Векторное произведение

Векторным произведением вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ называется вектор, обозначаемый $\vec{a}$ x $\vec{b}$ и однозначно определяемый следующими условиями.

1. Его длина

$$|\vec{a} \text{ x } \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$$

Если $\vec{a}||\vec{b}$, то из (9.1) следует, что $|\vec{a} \text{ x } \vec{b}|$ = 0, и потому $\vec{a} \text{ x } \vec{b}$ = 0

Если $\vec{a}||\vec{b}$, то требуется чтобы (рис. 9.2)

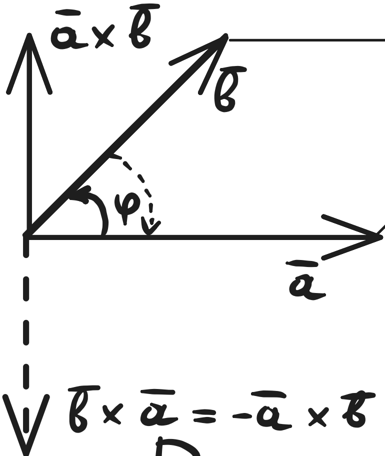

Рис. 9.2.

2. Вектор $\vec{a}$ x $\vec{b}$ был перпендикулярен к $\vec{a}$ и $\vec{b}$
3. Тройка векторов $\vec{a}, \vec{b}$, $\vec{a}$ x $\vec{b}$ являлась правой

Свойства векторного произведения:

Для любых векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ и для любого числа λ:

1. $\vec{b} \text{ x } \vec{c}$ = $-(\vec{a} \text{ x } \vec{b})$
2. $(\vec{\lambda} a) \text{ x } \vec{b} = \vec{a} \text{ x } (\vec{\lambda} b) = \lambda(\vec{a} \text{ x } \vec{b})$
3. $(\vec{a} + \vec{b}) \text{ x } \vec{c} = \vec{a} \text{ x } \vec{c} + \vec{b} \text{ x } \vec{c}$, $\vec{c} \text{ x } (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{c} \text{ x } \vec{a} + \vec{c} \text{ x } \vec{b}$

Механических смысл

В механике и электродинамике векторное произведение один из основных "инструментов". Момент $\vec{M}$ силы $\vec{F}$, приложенной в точке P твердого тела, относительно точки O равен векторному произведению радиус-вектора $\vec{OP}$ точки P на вектор силы $\vec{F}$:

$$\vec{M} = \vec{OP} \text{ x } \vec{F}$$

Выражение векторного произведения через координаты.

Выражение векторного произведение в ортонормированном правом базисе можно записать в виде формального определителя, разложенного по элементам первой строки:

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \bar{i} \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - \bar{j} \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + \bar{k} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} =$$

$$= (a_2 b_3 - a_3 b_2)\bar{i} - (a_1 b_3 - a_3 b_1)\bar{j} + (a_1 b_2 - a_2 b_1)\bar{k} \quad (9.2)$$

Выражение площадей параллелограмма и треугольника через векторное произведение.

Площадь $S_{\square}$ параллелограмма ABCD, "построенного на векторах" $\vec{a} = \vec{AB}$ и $\vec{b} = \vec{AC}$, равна модулю их векторного произведения:

$$S_{\square} = |\vec{a} \text{ x } \vec{b}|$$

Площадь $S_{\triangle}$ треугольника ABC, "построенного на векторах" $\vec{a} = \vec{AB}$ и $\vec{b} = \vec{AC}$, равна половине модуля их векторного произведения:

$$S_{\triangle} = \frac{1}{2}|\vec{a} \text{ x } \vec{b}|$$

Пример:

4. Найти векторное произведение векторов $\vec{a} = -\vec{j} + 2\vec{k}$ и $\vec{b} = 2\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}$.

$\bar{a} = (0, -1, 2)$

$\bar{b} = (2, -1, -2)$

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \end{vmatrix} = \bar{i}\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} - \bar{j}\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} + \bar{k}\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} =$$

$= 4\bar{i} + 4\bar{j} + 2\bar{k}$

$\bar{a} \times \bar{b} = \underline{(4, 4, 2)}$