Introducción

Apuntes de clase

Definiciones

- **Red eléctrica**: interconexión de componentes, que pueden ser pasivos o activos. No necesariamente debe estar expuesta la salida. La interconexión es arbitraria, aunque idealmente la red debe cumplir una función. En nuestro caso, esa función será filtrar.

  En cualquier punto de la red pueden exponerse dos bornes. Entre dos bornes tendremos dos variables: una tensión y una corriente. Una de ellas será independiente, y la otra quedará fijada por esta y por la red (dependiente).

- Si yo sólo tengo dos bornes (un puerto) expuestos, sólo puedo determinar una relación entre tensión y corriente de ese mismo puerto. Esa relación será una función excitación.

  Otra característica de un puerto es que la corriente entrante a un borne tiene que ser igual a la corriente saliente por el otro borne.

  Definiendo la función excitación $F(s) = \frac{R(s) \rightarrow \text{respuesta}}{E(s) \rightarrow \text{excitación}}$, vemos que $E(s)$ y $R(s)$ deben estar medidas en el mismo puerto. Tenemos dos casos particulares:

  1. Si $E(s)$ es una tensión $V(s)$, $F(s)$ será una función admitancia $Y(s)$.
  2. Si $E(s)$ es una corriente $I(s)$, $F(s)$ será una función impedancia $Z(s)$.

  Resumen: Excitación: relación entre tensión y corriente en un mismo puerto. $\begin{cases} V \text{ independiente} \rightarrow Y(s) \\ I \text{ independiente} \rightarrow Z(s) \end{cases}$

- Si ahora tenemos dos (o más, pero vamos de a poco) puertos, podemos hallar relaciones entre tensiones y corrientes entre puertos. Estas relaciones serán funciones transferencia. Existen de 4 tipos:

Variable ind.	Variable dep.	Función
V_1	V_2	Transferencia de tensión (T/T_V)
V_1	I_2	Transadmitancia (Y)
I_1	V_2	(Z) Transimpedancia
I_1	I_2	Transferencia de corriente (T/T_I)

▸ Cuando mido con instrumentos ideales, surgen las condiciones de puerto descargado debido a la idealidad:

$T_V = \dfrac{V_2}{V_1} \rightarrow$

$I_2 = 0 \longrightarrow$ porque $R_V = \infty$

$\Downarrow$

$$T_V = \left.\frac{V_2}{V_1}\right|_{I_2=0}$$

$T_I = \dfrac{I_2}{I_1} \rightarrow$

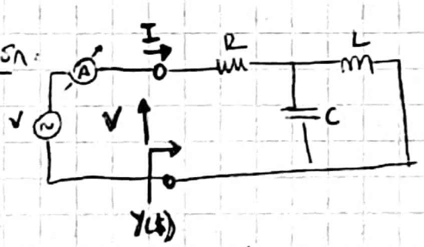
porque $R_A = 0 \Rightarrow T_I = \left.\dfrac{I_2}{I_1}\right|_{V_2=0}$

∘ Análogamente, $Y = \left.\dfrac{I_2}{V_1}\right|_{V_2=0}$, $Z = \left.\dfrac{V_2}{I_1}\right|_{I_2=0}$

—o—

• **Ejemplos:**

1. Excitación:



$$\rightarrow Y(s) = \left.\frac{I}{V}\right| = \frac{1}{R + \frac{1}{sC + \frac{1}{sL}}} = \dots = \frac{1}{R} \cdot \frac{s^2 + 1/LC}{s^2 + s\frac{1}{RC} + \frac{1}{LC}} \rightarrow \omega_0^2$$

hay que operar

∘ Ceros de la función: analizamos el numerador:

$$|Y(j\omega)| = \left|Y(s)\right|_{s=j\omega}\Big| = \frac{-\omega^2 + \frac{1}{LC}}{\dots} \longrightarrow$$ tendremos ceros complejos en $\pm \frac{j}{\sqrt{LC}} = \pm j\omega_0$

∘ Polos: los polos estarán en una circunferencia de radio ω_0. Si asumimos que serán complejos conjugados, tendrán la forma $(-\alpha \pm j\beta)$:

$$s^2 + s\frac{1}{RC} + \frac{1}{LC} = (s+\alpha+j\beta)(s+\alpha-j\beta)$$
$$= s^2 + s\,2\alpha + (\alpha^2+\beta^2)$$

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC} = \alpha^2+\beta^2$$
$$2\alpha = \frac{1}{RC}$$

Llamando $Q = \omega_0 RC \rightarrow \dfrac{Q}{\omega_0} = RC \rightarrow 2\alpha = \dfrac{\omega_0}{Q}$

* Q es el factor de calidad de un elemento capacitivo. Se define como la relación entre potencia reactiva y activa:

$$Q = \frac{P_x}{P_R} = \frac{V^2}{X_C} \cdot \frac{R}{V^2} = \frac{R}{X_C} = \omega C R$$

Nos interesa particularmente $\omega = \omega_0$.

- Una parametrización que vamos a usar siempre:

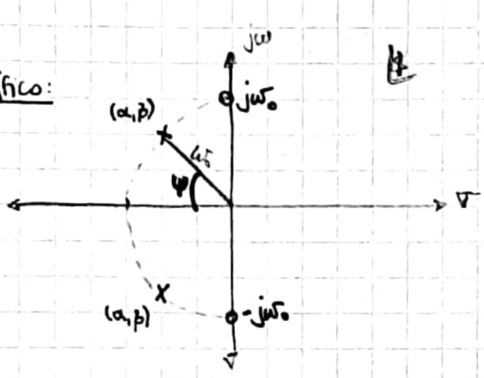
$$s^2 + s\frac{1}{RC} + \frac{1}{LC} = s^2 + s\frac{\omega_0}{Q} + \omega_0^2$$

↳ general. En este caso, $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

$Q = \omega_0 RC$

$\frac{Q}{\omega_0} = RC \rightarrow \frac{\omega_0}{Q} = \frac{1}{RC}$

- Gráfico:



→ Gráficamente se ve que:

$$\frac{2\alpha}{\omega_0} = 2\cos(\varphi) \quad \text{(multiplicando por 2 a ambos lados)}$$

$$2\alpha = 2\cos(\varphi)\cdot\omega_0 = \frac{\omega_0}{Q}$$

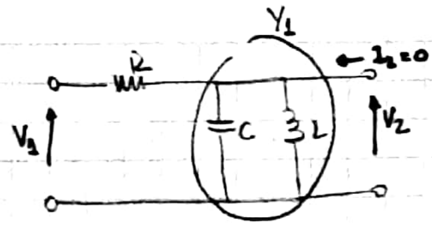
$$\Rightarrow Q = \frac{1}{2\cos(\varphi)} \rightarrow s^2 + s\,\omega_0 \cdot 2\cdot\cos(\varphi) + \omega_0^2$$

en la ecuación aparece la ubicación de los polos en la circunferencia.

→ Modificar el Q modifica el ángulo sobre la circunferencia de radio ω_0 de los polos, respecto al eje σ.

- Cuando los polos están sobre el eje $j\omega$, $\varphi = \pi/2$ y $Q \to \infty$
- Cuando los polos están sobre el eje σ, $\varphi = 0$ y $Q = 1/2$
- $Q < 1/2$ implica raíces reales distintas. Ya no tiene sentido la ecuación con φ.
- En $Q = 1/2$ tenemos un cero real doble.

2. Transferencia:

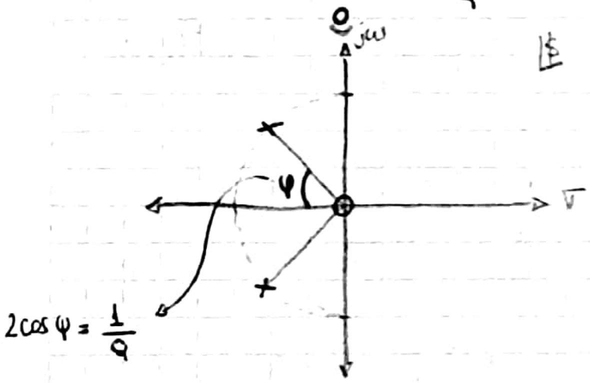


$$\rightarrow T_{(s)} = \left.\frac{V_2(s)}{V_1(s)}\right|_{I_2=0}$$

- Como $I_2 = 0$, tenemos un divisor de tensión

$$\rightarrow Y_1 = sC + \frac{1}{sL} \Rightarrow \frac{V_2}{V_1} = \frac{1/R}{1/R + Y_1} = \frac{1/R}{1/R + sC + \frac{1}{sL}} = \frac{1}{RC} \cdot \frac{s}{s^2 + s\frac{1}{RC} + \frac{1}{LC}}$$

$$\rightarrow T = \frac{s\frac{\omega_0}{Q}}{s^2 + s\frac{\omega_0}{Q} + \omega_0^2} \quad \text{con} \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\omega_0}{Q} = \frac{1}{RC} \rightarrow Q = RC\frac{1}{\sqrt{LC}} = R\sqrt{\frac{C}{L}} \quad (??) \\ \omega_0^2 = \frac{1}{LC} \end{array} \right.$$



- También hay un 0 en ∞.

Normalización

Normalización

• Muchas veces (por no decir siempre) nos va a convenir reducir al máximo posible la cantidad de parámetros de una función excitación o transferencia, obviamente sin modificar su naturaleza. Para esto, recurrimos a la normalización.

• Hay varias formas de normalizar. Para este ejemplo, vamos a hacer un cambio de variable. Tomamos una transferencia pasabajos genérica:

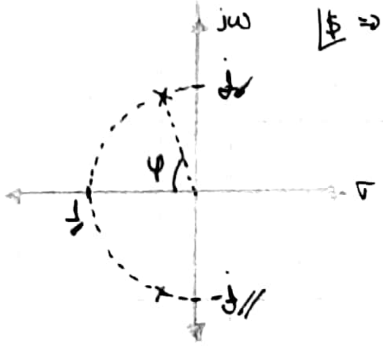
$$T(s) = \frac{\omega_c^2}{s^2 + s\frac{\omega_0}{Q} + \omega_0^2}$$

. Realizamos un cambio de variable $s = \frac{\$}{\omega_0}$, de forma que la transferencia normalizada resultará:

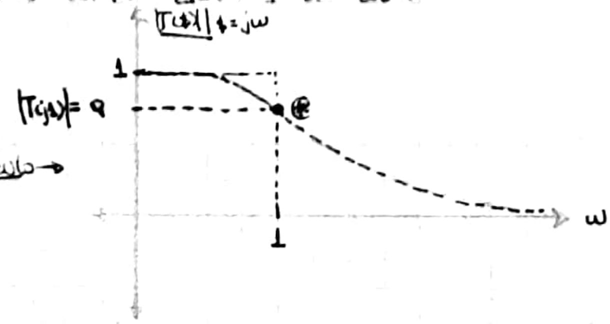
$$T(\$) = \frac{1}{\$^2 + \$\frac{1}{Q} + 1}$$

, donde vemos que ahora ~~dos~~ el único parámetro será Q.

La transferencia y el diagrama de polos y ceros estarán escalados a ω_0.



→ Pasamos al módulo →



$$\bullet \; |T(\$)|\Big|_{\$=j\omega} = |T(j\omega)| = \frac{\omega_0^2}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2 + \left(\frac{\omega \cdot \omega_0}{Q}\right)^2}}$$

⊛ En general, la transferencia en este punto valdrá $3dB = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (ó 6dB en potencia), que es lo que definimos como el ancho de banda del sistema.

Notar que tener un $Q > 1$ (normalizado) podría llevar a sobretensiones o sobrecorrientes en $\omega = 1$ (normalizado). Esto no implica ganancia, es un fenómeno que surge de la resonancia entre capacitores e inductores.

El máximo de transferencia se da para $\omega = 1 - \frac{1}{2Q^2}$

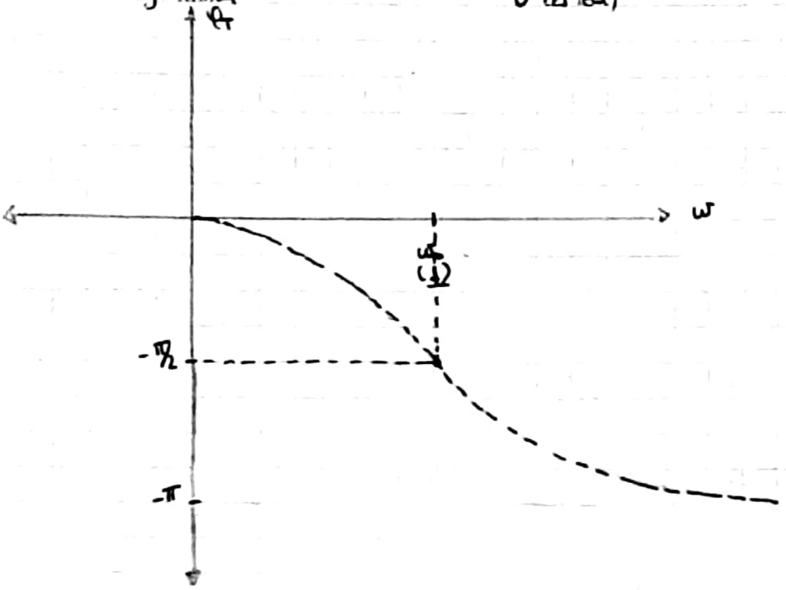
↓

surge de la fórmula

→ Pasamos a fase y en escala logarítmica → $\varphi_T = \varphi_{num} - \varphi_{den} = -\text{atg}\left(\dfrac{\omega \cdot \omega_0/Q}{\omega_0^2 - \omega^2}\right)$

φ_{num}: 0 (es real)

↳ función sigmoidea 



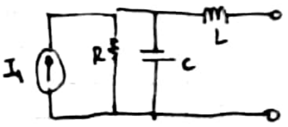
® Cuando tenemos que graficar a mano una función de este estilo tenemos dos opciones:

1) Recordar la forma típica (sigmoidea)

2) Método gráfico (el que usamos en el ejemplo).

- Notar que a medida que cambia Q, cambia la pendiente de la fase. En particular,
  - ▷ Si Q ~~aumenta~~ disminuye, la curva es más suave
  - ▷ Si Q aumenta, la pendiente aumenta.

- De la misma forma en que podemos normalizar ω_0, podemos normalizar los componentes circuitales. Ejemplo:



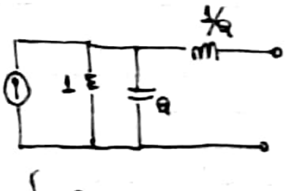
→ $T_I(s) = \dfrac{1/LC}{s^2 + s\frac{1}{RC} + \frac{1}{LC}}$ Como dijimos que $\omega_0 = 1$

→ $\dfrac{1}{LC} = 1$ → $L = \dfrac{1}{C}$

- Tomamos como norma de impedancia el resistor de forma que $\Omega_Z = R \Rightarrow R = 1$

- Entonces $\dfrac{1}{RC} = \dfrac{1}{Q} \Rightarrow C = Q \Rightarrow L = \dfrac{1}{Q}$

→ La red normalizada resulta:

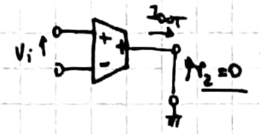


- ¿Cómo desnormalizamos? ⟹ $\begin{cases} R = R_N \cdot \Omega_Z \\ C = \dfrac{Q}{\Omega_Z} \\ L = \dfrac{\Omega_Z}{Q} \end{cases}$ (respecto a impedancia, también se desnormaliza respecto a frecuencia).

Clase 2 — Elementos Activos

OTA (Amplificador Operacional de Transconductancia)

- Un OTA es un amplificador que a la salida tiene una corriente igual a la tensión de entrada por su Transconductancia g_m.



$\rightarrow$ $\boxed{I_{out} = g_m \cdot V_i}$

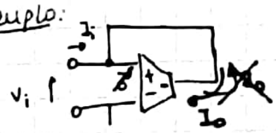
® Se lo dibuja así porque constructivamente el OTA es la primer etapa del OPAMP.

® La corriente de salida puede ser saliente o entrante. Esto se indica con un (+) ó un (−), respectivamente, en la salida del OTA.

- El valor de la transconductancia g_m puede modularse imponiéndole una corriente de operación al OTA con una fuente externa (Recordar que $g_m = \frac{\partial I_D}{\partial V_{GS}}$).
- Características ideales: un OTA ideal no toma corriente en la entrada, y genera una corriente de salida $= g_m \cdot V_i$ como ya dijimos.

$\rightarrow$ Modelo ideal

- Ejemplo:



$\rightarrow$ ¿ $\frac{V_i}{I_i}$? $\rightarrow$ Se ve que $I_i = -I_o$

ó $I_i = I_o$ si definimos I_o entrante

$\rightarrow$ Como $I_o = g_m \cdot V_i$

$\rightarrow$ $\boxed{\frac{V_i}{I_i} = \frac{1}{g_m}}$

Biblio: Schaumann Cap 4

Transferencia de 2do orden con elementos activos

- La principal diferencia entre la implementación de una transferencia de 2do orden con elementos activos respecto a la misma con elementos pasivos es que podemos considerar una fase de 180° para toda frecuencia y una cierta ganancia. Esto se contempla multiplicando la expresión por un término $-H$:

$$\boxed{T(s) = -H \frac{\omega_0^2}{s^2 + s\frac{\omega_0}{Q} + \omega_0^2}}$$

(pasabajos), donde H será la ganancia

• ¿Cómo implementamos una expresión pasabajos genérica con elementos activos?:

Partimos de $T(s)$ y la definimos como una transferencia de tensión $\frac{V_L}{V_I}$ y operamos:

$$\frac{V_L}{V_I} = \frac{-H \quad \omega_0^2}{s^2 + s\frac{\omega_0}{Q} + \omega_0^2} \; \cdots\longrightarrow \; V_L \cdot s = \underbrace{-HV_I + V_L \cdot \frac{1}{s + 1/Q}}$$

lo llamamos V_B, de forma que

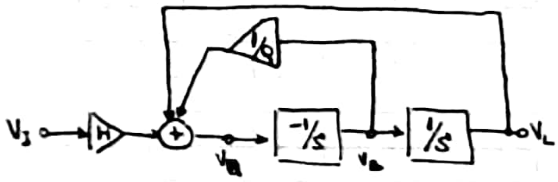
$$\rightarrow \underline{V_L = \frac{1}{s} V_B}$$

→ Seguimos operando: $V_B = (-HV_I + V_L)\frac{1}{s + 1/Q}$

$$\cdots\rightarrow \; V_B \cdot s = -\underbrace{\left(HV_I + V_L + \frac{V_B}{Q}\right)}$$

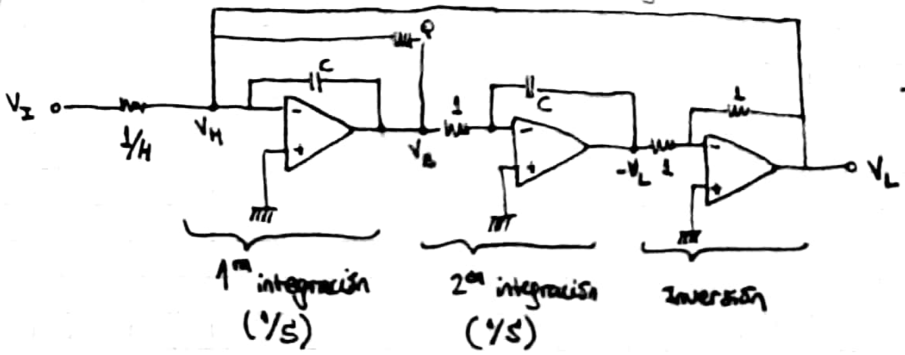
llamamos V_H, de forma que: → $\underline{V_B = V_H \frac{-1}{s}}$

Entonces:
$$\begin{cases} V_H = V_I \cdot H + V_L + V_B/Q \\ V_B = V_H \cdot \frac{-1}{s} \\ V_L = V_B \frac{1}{s} \end{cases}$$
→ En bloques, esto es:



Este es el esquema conceptual del circuito Tow-Thomas.

→ La implementación circuital del diagrama será:



→ A este circuito se lo llama Tow-Thomas.

• Si normalizamos los capacitores ($\underline{C=1}$), la frecuencia también estará normalizada $\underline{\omega_0 = 1}$.

• Transferencia pasabanda:

$$\boxed{T_B(s) = \frac{-s\,K}{s^2 + s\frac{1}{Q} + 1}}$$

(normalizada)

, donde $K = H\frac{\omega_0}{Q} = \frac{H}{Q}$

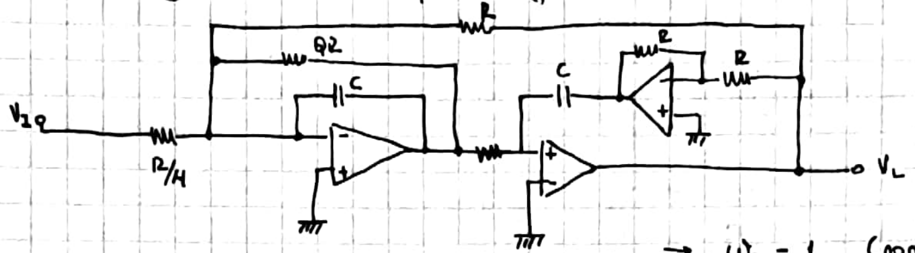
norm

En video 3 - clase 2 está el desarrollo

Transferencia | pasaaltos:

$$\boxed{T_H(s) = \frac{s'^2 \cdot H}{s'^2 + s'\frac{1}{q} + 1}}$$

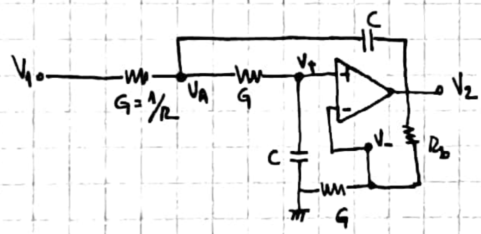
- Topología Åckerberg-Mossberg: es otra topología para implementar transferencias de 2do orden que incluye realimentación para mitigar la dispersión debida a los procesos de fabricación.



→ $\omega_0 = 1$ (normalizado)

  - Es otra forma de implementar la estructura de Tow-Thomas con k bandas explicada más arriba.

Topología | Sallen-Key: otra forma de implementar un pasabajos:



$$\begin{cases} V_A(G+G+s'C) - V_2\, s'C - V_+ G = 0 \\ V_+(G + s'C) - V_A(G) = 0 \\ V_-(G+G_b) - V_2(G_b) = 0 \\ V_+ = V_- \end{cases}$$

→ desarrollando, llegamos a que: $\boxed{\begin{cases} \omega_0^2 = 1/(RC)^2 \\ H = 1 + \frac{R_b}{R} \\ Q = \frac{1}{3-H} \end{cases}}$, $R = \frac{1}{G}$

Sensibilidad

- Es el estudio de la dependencia directa de una variable dependiente de sus variables independientes.
- La sensibilidad define el cambio relativo en la variable dependiente (una transferencia, por ejemplo) en función a un cambio relativo en una variable que ~~[illegible]~~ consideramos independiente (una resistencia, por ejemplo).

NOTA

- Como la dependencia puede ser muy compleja, tomamos únicamente el primer término (lineal), correspondiente a la derivada primera.

- Por ejemplo, en una topología Sallen-Key podemos estudiar la sensibilidad de Q respecto de k:

  - $Q = \frac{1}{3-k}$.

  - $S_k^Q = \frac{k}{Q} \cdot \frac{\partial Q}{\partial k} = \frac{k}{Q} \frac{1}{(3-k)^2} = k(\cancel{3-k}) \frac{1}{(3-k)^{\cancel{2}}} = \frac{k}{3-k} = k \cdot Q$

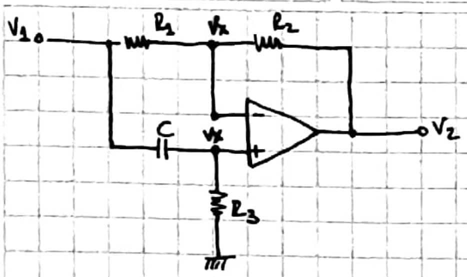
  → Esto nos indica que un cambio en k se ve amplificado en Q k veces.

- Definición matemática de sensibilidad: $\boxed{S_x^y = \frac{x}{y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x}}$

Tarea Semanal 1

HOJA N° 1

FECHA



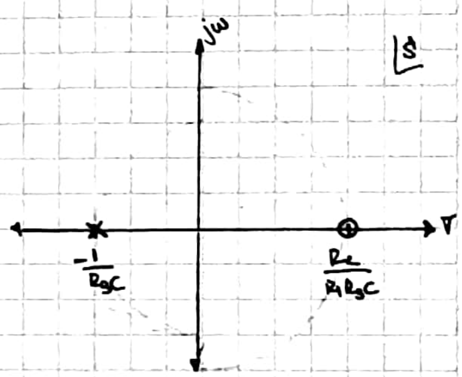
1. $\frac{V_1 - V_x}{R_1} = \frac{V_x - V_2}{R_2} \rightarrow V_x = V_1 \frac{R_2}{R_1+R_2} + V_2 \frac{R_1}{R_1+R_2}$ (1)

• $V_x = V_1 \frac{R_3}{R_3 + \frac{1}{sC}} = V_1 \frac{sCR_3}{sCR_3+1} = V_x$ (2)

(1) y (2) $\Rightarrow V_1 \frac{R_2}{R_1+R_2} + V_2 \frac{R_1}{R_1+R_2} = V_1 \frac{sCR_3}{sCR_3+1}$

$\Rightarrow V_1 \left(\frac{R_2}{R_1+R_2} - \frac{sCR_3}{sCR_3+1} \right) = -V_2 \frac{R_1}{R_1+R_2}$

$V_1 \frac{1}{R_1} \cdot \frac{sCR_1R_3 - R_2}{sCR_3+1} = V_2 \Rightarrow \boxed{\frac{V_2}{V_1} = \frac{1}{R_1} \frac{sCR_1R_3 - R_2}{sCR_3+1} = \frac{s - \frac{R_2}{R_1R_3C}}{s + \frac{1}{R_3C}}}$



2. Es un filtro pasatodo. Ref.: Schaumann, Tabla 3.1 (pág. 77). (T_7)

3. $\Omega_Z = R_3$, $\Omega_W = \frac{1}{CR_3} \Rightarrow \boxed{\frac{V_2}{V_1} = \frac{s - \frac{R_2}{R_1}}{s+1}}$ $\left(R_{3n} = 1 \quad C_n = 1 \quad R_{2n} = \frac{R_2}{R_3} \quad R_{1n} = \frac{R_1}{R_3} \right)$

○ Circuitalmente, la frecuencia $\frac{1}{CR_3}$ representa

4. Incluir gráfico de Spyder. Consideración: se toma $R_{2n} = 1$ y $R_{1n} = 1$ $(R_1 = R_2 = R_3)$.

5. Incluir gráfico de Spyder.

6. Se observa en la respuesta en frecuencia que el circuito cambia la fase de la señal de entrada sin modificar su módulo. Si se quisiera generar un cambio de fase determinado en una señal a una frecuencia dada sin alterar el módulo a ninguna frecuencia se podrían diseñar los valores de este circuito con ese fin.

NOTA