

Apuntes de clase

Introducción

- Red eléctrica: interconexión de componentes, que pueden ser pasivos o activos. No necesariamente debe estar expuesta la salida. La interconexión es arbitraria, aunque idealmente la red debe cumplir una función. En nuestro caso, esa función será filtros.
En cualquier punto de la red pueden aparecerse dos bornes. Entre los bornes tendrán las variables una tensión y una corriente. Una de ellas será independiente, y la otra quedará fijada por esta y por la red (dependiente).
• Si yo solo tengo dos bornes (un puerto) expuestos, solo puedo determinar una relación entre tensión y corriente de ese mismo puerto. A veces esa relación será una función excitación.

Otra característica de un puerto es que la corriente entrante a un borne tiene que ser igual a la corriente saliente por el otro borne.

Definiendo la función excitación $F(s) = \frac{R(s)}{E(s)}$ → respuesta / veces fue $E(s)$ y $R(s)$ deben estar medidas en el mismo puerto. Tendrás dos casos particulares:

1. Si $E(s)$ es una tensión $V(s)$, $F(s)$ será una función admitancia $Y(s)$.
2. Si $E(s)$ es una corriente $I(s)$, $F(s)$ será una función impedancia $Z(s)$.

Resumen: Excitación: relación entre tensión y corriente en un mismo puerto.
 $\left. \begin{array}{l} \rightarrow V \text{ independiente} \rightarrow Y(s) \\ \rightarrow I \text{ independiente} \rightarrow Z(s) \end{array} \right\}$

- Si ahora tenemos dos (o más, pero vamos de a poco) puertos, podemos trazar relaciones entre tensiones y corrientes entre puertos. Estas relaciones serán funciones transferencia. Existen de 4 tipos:



Variable ind.	Variable dep.	Función
V_1	V_2	(T/T_V) Transferencia de tensión
V_1	I_2	Transadmitancia (Y)
I_1	V_2	(Z) Transimpedancia
I_1	I_2	(T/T_I) Transferencia de corriente

• Cuando medido con instrumentos ideales, surgen las condiciones de Puerto descarregado

(condiciones adicionales) debidas a la idealidad:

$$T_V = \frac{V_2}{V_1} \rightarrow$$

porque $R_L = \infty$

$$T_V = \frac{V_2}{V_1} \Big|_{I_2=0}$$

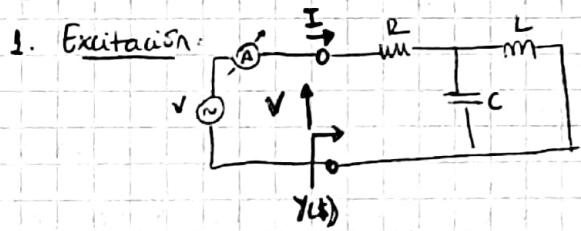
$$T_I = \frac{I_2}{I_1} \rightarrow$$

porque $R_L = 0 \Rightarrow T_I = \frac{I_2}{I_1} \Big|_{V_2=0}$

o Análogamente, $Y = \frac{I_2}{V_2} \Big|_{V_2=0}$, $Z = \frac{V_2}{I_1} \Big|_{I_2=0}$

-o-

Ejemplos:



$$\rightarrow Y(s) = \frac{I}{V} = \frac{1}{R + \frac{1}{sC}} = \dots = \frac{1}{R} \cdot \frac{s^2 + \frac{1}{sC}}{s^2 + s \frac{1}{RC} + \left(\frac{1}{LC}\right)} \rightarrow \omega_b^2$$

hay que operar

• Ceros de la función: analizamos el numerador:

$$|Y(j\omega)| = |Y(s)|_{s=j\omega} = \frac{-\omega^2 + \frac{1}{\omega C}}{\dots} \rightarrow \text{tendremos ceros complejos en } \pm \frac{1}{\sqrt{LC}} = \pm j\omega_0$$

• Polos: los polos estarán en una circunferencia de radio ω_0 . Si asumimos que serán complejos conjugados, tendrán la forma ($\alpha \pm j\beta$):

$$\begin{aligned} s^2 + s \frac{1}{RC} + \frac{1}{LC} &= (\beta + j\alpha)(\beta - j\alpha) \\ &= \beta^2 + \alpha^2 + (\alpha^2 + \beta^2) \end{aligned}$$

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC} = \alpha^2 + \beta^2$$

$$2\alpha = \frac{1}{RC}$$

$$\text{Llamando } Q = \omega_0 RC \rightarrow \frac{Q}{\omega_0} = LC \rightarrow 2\alpha = \frac{\omega_0}{Q}$$

• Q es el factor de calidad de un elemento capacitivo. Se define como la relación entre potencia reactiva y activa:

$$Q = \frac{P_R}{P_Q} = \frac{V^2}{X_C} \cdot \frac{R}{V^2} = \frac{R}{X_C} = \omega_0 C. \text{ Nos interesa particularmente } \omega = \omega_0.$$

- Una parametrización que valea a usar siempre:

$$\$^2 + \$ \frac{1}{RC} + \frac{1}{LC} = \$^2 + \$ \frac{\omega_0}{Q} + \omega_0^2$$

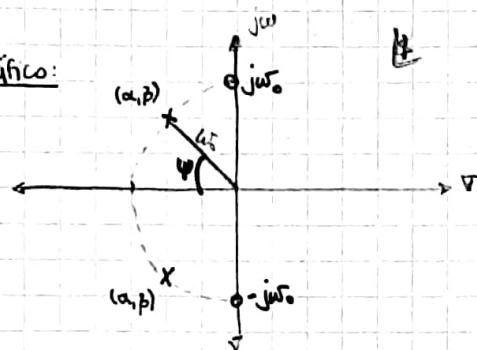
↳ general. En este caso,

$$\omega_0 = \frac{1}{RC}$$

$$Q = \frac{R}{\omega_0 C}$$

$$\frac{1}{Q} = RC \rightarrow \frac{\omega_0}{Q} = \frac{1}{RC} = \frac{1}{\omega_0}$$

- Gráfico:



→ Gráficamente se ve que:

$$\frac{2\alpha}{\omega_0} = 2 \cos(\psi) \quad (\text{multiplicando por 2 a ambos lados})$$

$$2\alpha = 2 \cos(\psi) \cdot \omega_0 = \frac{\omega_0}{Q}$$

$$\Rightarrow Q = \frac{1}{2 \cos(\psi)} \rightarrow \$^2 + \$ \omega_0 \cdot 2 \cos(\psi) + \omega_0^2$$

en la ecuación aparece la ubicación de los polos en las circunferencias.

→ Modificar el Q modifica el círculo sobre la circunferencia de radio ω_0 de los polos, respecto al eje R .

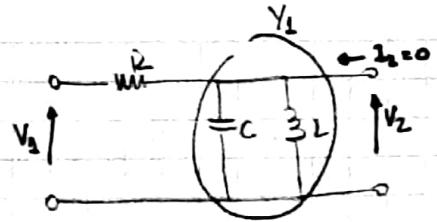
• Cuando los polos están sobre el eje $j\omega$, $\psi = \pi/2$ y $Q \rightarrow \infty$

• Cuando los polos están sobre el eje R , $\psi = 0$ y $Q = 1/2$

• $Q < 1/2$ implica raíces reales distintas. Ya no tiene sentido la ecuación con ψ .

• En $Q = 1/2$ tenemos una raíz doble.

2. Transferencia:



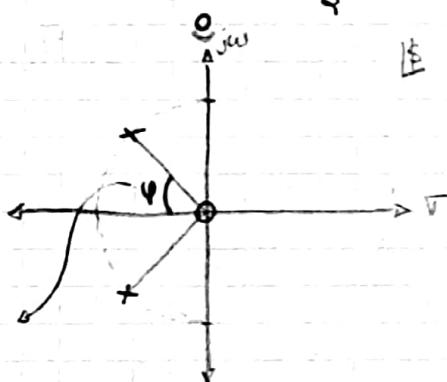
$$\rightarrow T = \left. \frac{V_2(s)}{V_s(s)} \right|_{I_2=0}$$

• Como $I_2 = 0$, tenemos un divisor de tensión

$$\Rightarrow Y_1 = \frac{1}{R} + \frac{1}{sL} \Rightarrow \frac{V_2}{V_s} = \frac{Y_2}{Y_1 + Y_2} = \frac{\frac{1}{sL}}{\frac{1}{sL} + \frac{1}{R} + \frac{1}{sC}} = \frac{1}{\frac{1}{sL} + \frac{1}{R} + \frac{1}{sC}}$$

$$\rightarrow T = \frac{\frac{1}{sL}}{\frac{1}{s^2} + \frac{1}{sL} + \frac{1}{R^2}} \quad \text{con} \quad \left. \begin{array}{l} \frac{1}{sL} = \frac{1}{j\omega} \\ \omega^2 = \frac{1}{LC} \end{array} \right\} \quad \frac{1}{s^2} + \frac{1}{sL} + \frac{1}{R^2} = \frac{1}{s^2} + \frac{j}{\omega} + \frac{1}{R^2}$$

• También hay un θ en ∞ .



$$2\cos\theta = \frac{1}{Q}$$

~~Algunas veces se usa el criterio del criterio de lazos:~~

Normalización

- Muchas veces (pero no decir siempre) nos va a convenir reducir al máximo posible la cantidad de parámetros de una función excitación o transferencia, obviamente sin modificar su naturaleza. Para esto, recurriremos a la normalización.
- Hay varias formas de normalizar. Para este ejemplo, vamos a hacer un cambio de variable. Tomamos una transferencia pasabanda genérica:

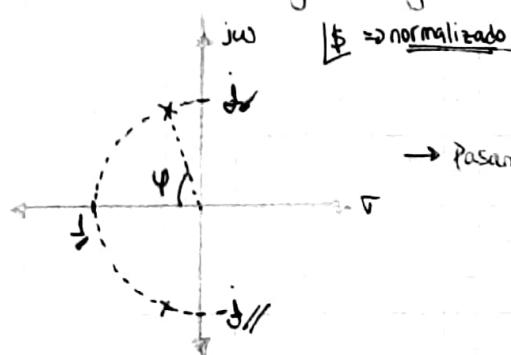
$$T(s) = \frac{\omega_0^2}{s^2 + s \frac{\omega_0}{Q} + \omega_0^2}$$

Realizaremos un cambio de variable $s = \frac{t}{\omega_0}$, de

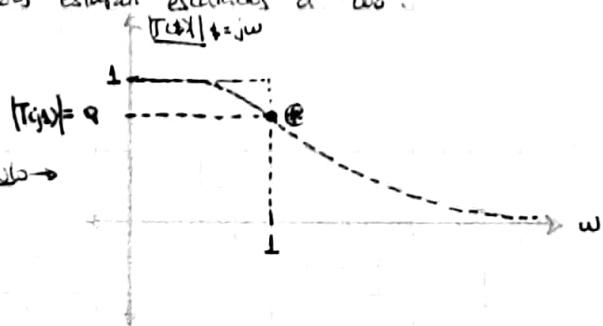
forma que la transferencia normalizada resultaría:

$$T(\frac{t}{\omega_0}) = \frac{1}{\frac{t^2}{\omega_0^2} + \frac{t}{\omega_0} + 1}, \text{ donde verás que aquí el único parámetro será } Q.$$

La transferencia y el diagrama de polos y ceros estarán escalados a ω_0 .



→ Pasamos al módulo →



$$|T(j\omega)|_{s=j\omega} = |T(j\omega_0)| = \frac{\omega_0^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\omega \cdot \omega_0)^2}}$$

• En general, la transferencia en este punto

valdrá $3dB = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (o 6dB en potencia), que es lo que definimos como el ancho de banda del sistema.

Notar que tener un $Q > 1$ (normalizado) podría llevar a sobretensiones o sobrecorrientes en $\omega = 1$ (normalizado). Esto no implica ganancias; es un fenómeno que surge de la resonancia entre capacitores e inductores.

El máximo de transferencia se da para $\omega = 1 - \frac{1}{2Q^2}$

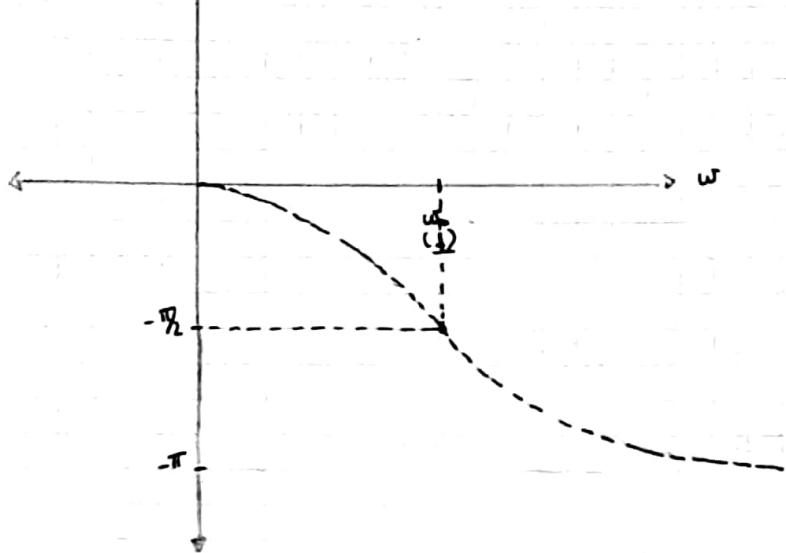
↓
surge de la fórmula

→ Pasando a base → $\varphi_f = \varphi_{num} - \varphi_{den} = -\operatorname{arctg}\left(\frac{\omega \cdot w}{w_0^2 - \omega^2}\right)$

y en escala logarítmica

$$\varphi_f = \operatorname{arctg}\left(\frac{\omega \cdot w}{w_0^2 - \omega^2}\right)$$

0 (en red) ↗ función signo de los



• Cuando tenemos que graficar q

nave una función de este tipo

términos de los operadores:

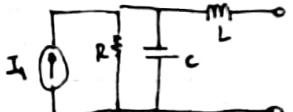
- 1) Recorriendo la forma típica (signo de los)
- 2) Método gráfico (el que usamos en el ejemplo).

- Notar que a medida que cambia q, cambia la pendiente de la fase. En particular,

▷ Si q disminuye, la curva es más suave

▷ Si q aumenta, la pendiente aumenta.

- De la misma forma en que podemos normalizar w_0, podemos normalizar los componentes circuitales. Ejemplo:

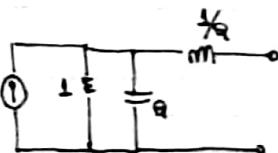
 $\rightarrow T_{Z(S)} = \frac{1/LC}{s^2 + s \frac{1}{LC} + \frac{1}{R^2}}$ Como dijimos que $w_0 = 1$

$$\rightarrow \frac{1}{LC} = 1 \rightarrow L = \frac{1}{C}$$

- Tomaremos como norma de impedancia el resistor de forma que $JL_2 = R \Rightarrow R = 1$

- Entonces $\frac{1}{LC} = \frac{1}{q} \Rightarrow C = q \Rightarrow L = \frac{1}{q}$

→ La red normalizada resulta:

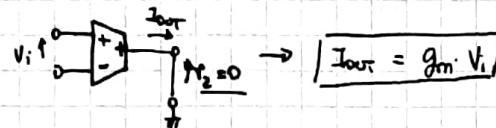


- ¿Cómo desnormalizamos? $\rightarrow \begin{cases} R = R_0 \cdot R_2 \\ C = \frac{q}{JL_2} \\ L = \frac{JL_2}{q} \end{cases}$

(respecto a impedancia, también se desnormaliza respecto a frecuencia).

OTA (Amplificador Operacional de Transconductancia)

- Un OTA es un amplificador que a la salida tiene una corriente igual a la tensión de entrada por su Transconductancia g_m .

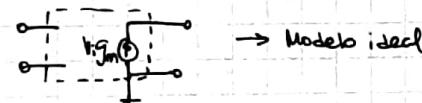


• Se lo dibuja así porque constructivamente el OTA es la primera etapa del opAmp.

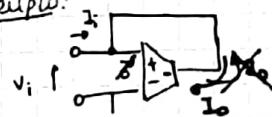
• La corriente de salida puede ser saliente o entrante. Esto se indica con un (+) o un (-), respectivamente, en la salida del OTA.

- El valor de la transconductancia g_m puede modularse imponiéndole una corriente de operación $I_{Q_{OTA}}$ con una fuente externa (Recordar que $g_m = \frac{\partial v}{\partial i_{DS}}$).

- Características ideales: un OTA ideal no tiene corriente en la entrada, y genera una corriente de salida $= g_m \cdot V_i$ como ya dijimos:



• Ejemplo:



$$\rightarrow \frac{V_i}{I} ? \rightarrow \text{Se ve que } I_i = -I_o$$

o $I_i = I_o$ si definimos I_o entrante

$$\rightarrow \text{Caso } I_o = g_m \cdot V_i$$

$$\rightarrow \frac{V_i}{I} = \frac{1}{g_m}$$

Fábio

Schawman
Cap 4

Transferencia de 2º orden con elementos activos

- La principal diferencia entre la implementación de una transferencia de 2º orden con elementos activos respecto a la misma con elementos pasivos es que podemos considerar una fase de 180° para toda frecuencia y una cierta ganancia. Esto se contempla multiplicando la expresión por un término $-H$:

$$T(s) = -H \cdot \frac{\omega_0^2}{s^2 + s \frac{\omega_0}{Q} + \omega_0^2} \quad (\text{pasabajos}), \text{ donde } H \text{ será la ganancia}$$

NOTA

• ¿Cómo implementar una expresión para lograr ganancia con elementos activos?

Partidas de $T(s)$ y la definimos como una transferencia de tensión $\frac{V_L}{V_I}$; y quedas:

$$\frac{V_L}{V_I} = \frac{-H \frac{\omega_0^2}{s^2 + S \frac{\omega_0^2}{Q} + \omega_0^2}}{1} \rightarrow V_L \cdot S = -H V_I + V_L \cdot \frac{1}{S + \frac{1}{Q}}$$

lo llamamos V_B , de forma que

$$\rightarrow V_L = \frac{1}{S} \cdot V_B$$

$$\rightarrow \text{Seguimos operando: } V_B = (-H V_I + V_L) \cdot \frac{1}{S + \frac{1}{Q}}$$

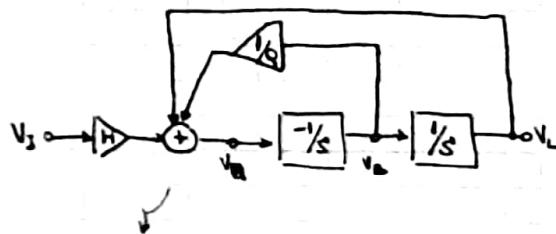
$$\rightarrow V_B \cdot S = -\left(H V_I + V_L + \frac{V_L}{Q}\right)$$

llamamos V_H , de forma que: $\rightarrow V_B = V_H \frac{1}{S}$

Entonces:

$$\begin{cases} V_H = V_I \cdot H + V_L + \frac{V_L}{Q} \\ V_B = V_H \cdot \frac{1}{S} \\ V_L = V_B \cdot \frac{1}{S} \end{cases}$$

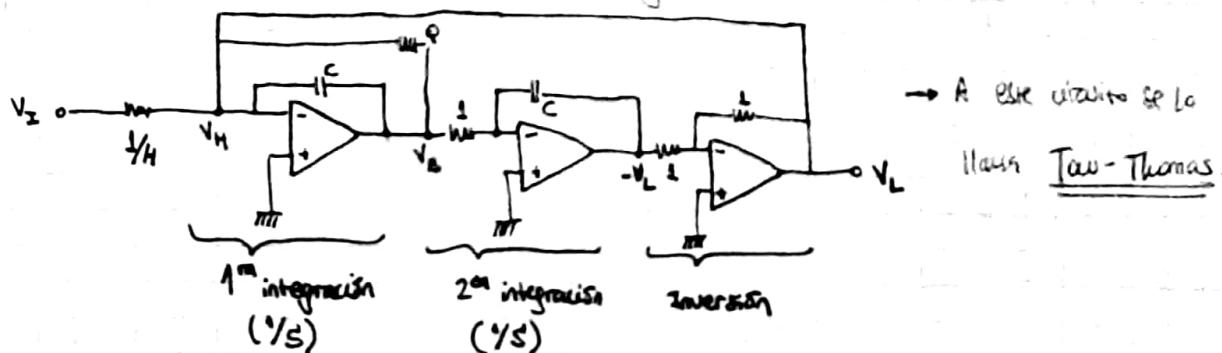
→ En bloques,
esto es:



Este es el esquema conceptual del

circuito Tau-Thomas.

→ La implementación circuital del diagrama será:



• Si normalizamos los capacitores ($C=1$), la frecuencia también estará normalizada $\omega_0=1$.

• Transferencia normalizada:

$$T_B(S) = \frac{-S K}{S^2 + S \frac{1}{Q} + 1}$$

(normalizada)

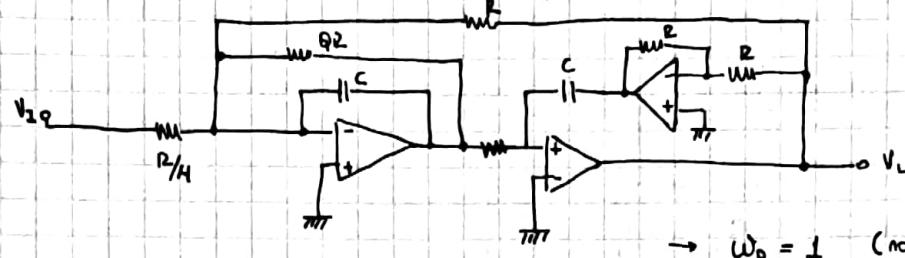
$$\text{donde } K = H \frac{\omega_0}{R} = \frac{H}{Q}$$

• En video 3 - clase 2
esta el desarrollo

Transferencia polinómica:

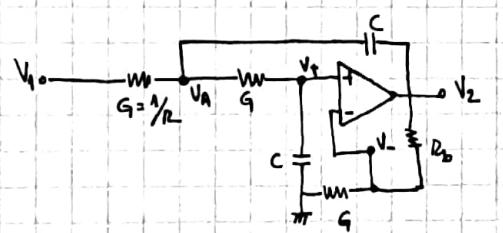
$$T_H(s) = \frac{s^2 \cdot H}{s^2 + s \frac{1}{Q} + 1}$$

- Topología Ackerman-Masberg: es otra topología para implementar transferencias de 2º orden que incluye realimentación para mitigar la dispersión debida a los procesos de fabricación.



- Es otra forma de implementar la estructura de Tow-Thomson con K bandas desplazadas más arriba.

- Topología Sallen-Key: otra forma de implementar un pasa bajos:



$$\begin{cases} V_A(G + G + SC) - V_2 SC - V_+ G = 0 \\ V_+ (G + SC) - V_A(G) = 0 \\ V_- (G + G_b) - V_2 (G_b) = 0 \\ V_+ = V_- \end{cases}$$

→ desarrollando, llegamos a que:

$$\begin{cases} \omega_0^2 = \frac{1}{(RC)^2} \\ H = 1 + \frac{R_b}{R} \\ Q = \frac{1}{3-H} \end{cases}$$

Sensibilidad

- Es el estudio de las dependencias directas de una variable dependiente de sus variables independientes.
- La sensibilidad define el cambio relativo en la variable dependiente (una transferencia, por ejemplo) en función a un cambio relativo en una variable que considéremos independiente (una resistencia, por ejemplo).

- Como la dependencia puede ser ^{mucho} más compleja, tomaremos únicamente el primer término (lineal), correspondiente a la derivada primera.

- Por ejemplo, en una topología Sallen-Key podemos estudiar la sensibilidad de G respecto de k :

- $Q = \frac{1}{3-k}$.

- $S_k^Q = \frac{k}{q} \cdot \frac{\partial Q}{\partial k} = \frac{k}{q} \cdot \frac{1}{(3-k)^2} = k \cdot \frac{1}{(3-k)} \cdot \frac{1}{(3-k)^2} = \frac{k}{3-k} = \frac{k \cdot q}{q}$

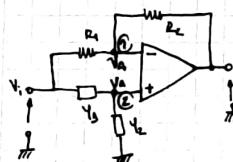
→ Esto nos indica que un cambio en k se ve amplificado en Q k veces.

- Definición matemática de sensibilidad:

$$S_x^y = \frac{x}{y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x}$$

Ajuntas de clase (doña):

- Vamos a analizar el circuito de la tarea semanal pero genérico:



→ Con esta topología, llegamos a una transferencia del tipo:

$$T_{AV}(s) = k \cdot \frac{s-a}{s+a}$$

⊗ Tips: no conviene nunca (o casi) analizar nodos de entrada ni de salida.

- Analizando el nodo ① tenemos: $V_A(G_1+G_2) - V_1 G_3 - V_2 G_2 = 0$ (1) (por nodos)
- Analizando el nodo ② tenemos: $V_A(G_1+G_2) - V_1 Y_1 = 0$ (2)

⊗ Por ejemplo:

P. Todo 1er orden:

$$\begin{cases} Y_1 = sC \\ Y_2 = G_3 \end{cases} \quad \begin{cases} V_A = G_3 \\ V_2 = sC \end{cases}$$

P. Todo 2do orden:

$$\begin{cases} Y_1 \Rightarrow \frac{G}{s^2 C} \\ Y_2 \Rightarrow \frac{G}{s C} \end{cases}$$

- En un filtro pasando donde no hayas frecuencias de corte porque el resultado sería que sea constante, la ato estará en la base. En particular, en la mitad del recorrido de fase ($\pi/2$) en el caso de la TS).

- Otra cosa que vale a ver más adelante para sus resultados interesantes:

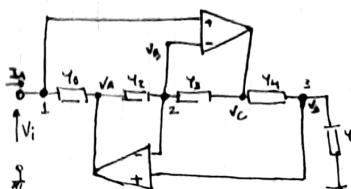
$$T_x = (1 + T_{AB}^2)/2 \rightarrow \text{¿Qué tipo de transferencia es?}$$

$$\rightarrow T_x = \frac{s}{s^2 + s\omega_0 + \omega_0^2} \rightarrow \text{Paso Bajo}$$

$$T_y = (1 - T_{AB}^2)/2 \rightarrow \text{misma pregunta}$$

$$\rightarrow T_y = \frac{s^2 + \omega_0^2}{s^2 + s\omega_0 + \omega_0^2} \rightarrow \text{elimina banda Notch}$$

- GIC (generalized impedance converter) o anillo de Antoniou



• Nos interesa hallar las admittancias de

$$\text{entradas: } Y_i = \frac{I_i}{V_i}$$

• Primero, identificamos los nodos que vale a usar (en verde).

$$\text{En } \textcircled{1} \text{ tenemos: } V_i Y_1 - V_1 Y_2 = I_1 \quad (1)$$

$$\text{Siguiendo a la derecha, tenemos: } V_2 = A(\omega) \cdot (V_0 - V_B) \quad (2)$$

expresión genérica del
operador cuando no
sabemos si dada la
realimentación negativa

$$\text{En } \textcircled{2} \text{ tenemos: } V_3 (Y_2 + Y_3) - V_2 Y_2 - V_0 Y_3 = 0 \quad (3)$$

$$\text{• } V_0 = A(\omega)(V_i - V_B) \quad (4)$$

$$\text{• En } \textcircled{3}, \quad V_0 (Y_4 + Y_5) - V_0 Y_4 = 0 \quad (5)$$

• Como sabes no vale a tener realimentación negativa, podemos tomar $A(\omega) \rightarrow \infty$

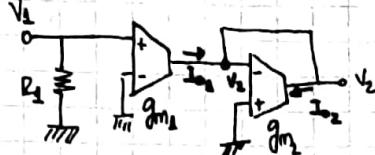
$$\text{y por lo tanto } V_i = V_B \text{ y } V_0 = V_B$$

• En SymPy, podemos comprobar la realimentación negativa haciendo tender a $A(\omega)$

a ∞ y comprobando que la transferencia No diverja.

Guía de Ejercicios

1) OTA



- Cuando el OTA esté $\boxed{\rightarrow}$, la corriente es saliente. Cuando esté al revés, es entrante.

Pide hallar transferencia e impedancia de entrada. Diseñar para $\frac{V_2}{V_1} = -70\text{dB}$ y $Z_{in} = 47\text{k}\Omega$

$$\bullet I_{out1} = V_1 \cdot g_{m1}$$

$$\bullet I_{out1} = I_{out2}$$

$$\bullet I_{out2} = V_2 \cdot g_{m2}$$



$$V_1 g_{m1} = V_2 g_{m2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{V_2}{V_1} = \frac{g_{m1}}{g_{m2}}}$$

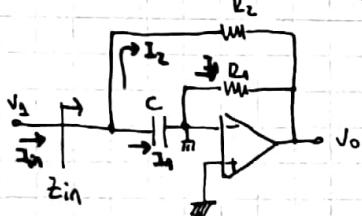
$$\Rightarrow \underline{g_{m1} = 10^4 \cdot g_{m2}}$$

En SPICE, el valor del OTA se configura el GM (valor que queremos dinámicamente)

$$\boxed{Z_{in} = R_1} \quad (\text{se ve simplemente}) \rightarrow \underline{R_1 = 47\text{k}\Omega}$$

$$\text{y } \underline{V_{bias} = -1}$$

3) 1.



$$\bullet I_1 = V_1 SC = -\frac{V_0}{R_1}$$

$$\bullet Z_{in} = \frac{V_1}{I_1}$$

$$\bullet I_2 = \frac{(V_1 - V_0)}{R_2}$$

$$\bullet V_0 = -V_1 SC R_2$$

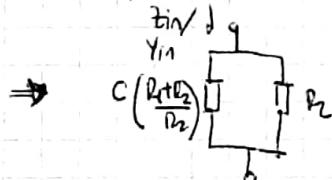
$$\bullet I_n = I_1 + I_2 = V_1 SC + \frac{V_1}{R_2} - \frac{V_0}{R_2} = V_1 \left(SC + \frac{1}{R_2} + \frac{SC R_2}{R_2} \right)$$

$$= V_1 \left(SC \frac{(R_1+R_2)+1}{R_2} \right) \Rightarrow Z_{in} = \frac{V_1}{I_1} = \frac{R_2}{SC(R_1+R_2)+1} = \frac{1}{SC \left(\frac{R_1+R_2}{R_2} \right) + \frac{1}{R_2}}$$

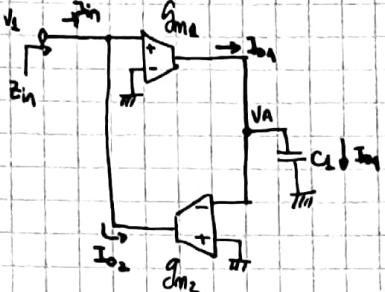
• Está bien pensado como admittancias:

$$Y_{in} = \frac{1}{Z_{in}} = SC \left(\underbrace{\frac{R_1+R_2}{R_2}}_{\text{capacitor}} + \underbrace{\frac{1}{R_2}}_{\text{resistor}} \right)$$

\Rightarrow en paralelo



¿Qué número de g_m es?



$$\circ I_{o2} = V_A \cdot g_{m2} = I_{in}$$

$$\circ V_A = I_{o1} \cdot \frac{1}{sC_1}$$

$$\circ I_{o1} = V_1 \cdot g_{m1}$$

$$\Rightarrow I_{in} = V_1 g_{m2} = \frac{I_{o1}}{sC_1} g_{m2} = \frac{V_1 g_{m1} g_{m2}}{sC_1}$$

$$\Rightarrow \frac{V_1}{Z_{in}} = Z_{in} = \frac{sC_1}{g_{m1} g_{m2}}$$

(matemáticamente)

- Notar que Z_{in} se comporta como un inductor de valor $L = \frac{a}{g_{m1} g_{m2}}$.

A reemplazar un componente pasivo por una red activa que se comporta igual se lo denominó activar el circuito.

- Como el "inductor" activo está definido respecto a tierra, podemos reemplazar un inductor real por esta red siempre que uno de los terminales del mismo esté a tierra.

butterworth

- Biblio → Cap. 6 Schumann

- Videos

- Una transferencia de Butterworth es una función de aproximación que busca una máxima planicie en la banda de paso. Para lograr esto, recurriremos a aproximar mediante cambios de pendiente (derivadas) tendientes a 0.

- Partimos de: $|T_{Bw}|^2 = \frac{A(\omega^2)}{B(\omega^2)}$

Recordarás también que $|T_{Bw}|^2 = T_{Bw} \cdot T_{Bw}^*$

$$|T_{Bw}| \cdot e^{j\omega t} \quad |T_{Bw}| e^{-j\omega t}$$

Buscamos una T de este tipo (pasabajos)

La transferencia va a ser una función de tipo: $|T_{Bw}|^2 = \frac{1}{1 + |k(\omega^2)|^2} = \frac{A(\omega^2)}{B(\omega^2)}$

$$\rightarrow A(\omega^2) + A(\omega^2) |k(\omega^2)|^2 = B(\omega^2)$$

$$\rightarrow |k(\omega^2)|^2 = \frac{B(\omega^2) - A(\omega^2)}{A(\omega^2)}$$

- Para que la transferencia se corresponda con la de un pasabajos,

$$\begin{cases} A(\omega^2) = 1 \\ B(\omega^2) = B_0 + B_1 \omega^2 + \dots + B_n \omega^{2n} \end{cases}$$

donde $B_0 = 1$

- Para que $|k(\omega^2)|^2$ sea una función suave: $\left. \frac{\partial |k(\omega^2)|^2}{\partial \omega^2} \right|_{\omega=0} = 0$

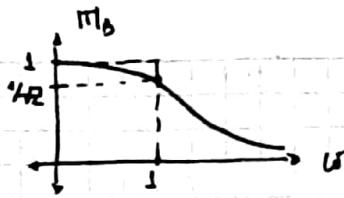
$$\rightarrow \left. \frac{\partial |k(\omega^2)|^2}{\partial \omega^2} \right|_{\omega=0} = B_2 + 2B_1 \omega^2 + \dots = 0 \Rightarrow B_2 = 0$$

Resumen: Si continuas analizando, llegarás a que todas las derivadas deben ser 0, excepto la de orden n , ya que si no $B(\omega^2)$ sería una constante.

Entonces: $B(\omega^2) = 1 + B_n \omega^{2n} = 1 + \varepsilon^2 \omega^{2n}$ cuando $B_n = \varepsilon^2$

$B(\omega^2)$ es una función de variosa planicie. En particular, cuando $B_n = 1$, es una transferencia de butterworth.

$$\Rightarrow |T(j\omega)|^2_{\text{Butterworth}} = \frac{1}{1 + \omega^{2n}}$$



- Notar que, independientemente del orden n , siempre $|T(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{2}}$
- A medida que aumenta n , la transferencia se acerca a la ideal.
- Sin embargo, también obtendremos transferencias más difíciles de implementar.
- ¿Dónde estarán las singularidades de una transferencia tipo butterworth?

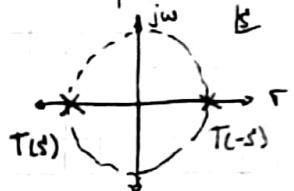
• Tomemos como ejemplo el caso de orden 3: $|T_3(j\omega)|^2 = \frac{1}{1+\omega^6}$

$$\rightarrow |T_3(j\omega)|^2 = \frac{1}{1+(\frac{\omega}{j})^2} = \frac{1}{1-\omega^2} \rightarrow |T_3(s)|^2 = \frac{1}{1-s^2}$$

\rightarrow No habrá ceros
 Los polos serán reales; tendremos uno en $\bar{s}=1$ y otro en $\bar{s}=-1$

$$\rightarrow |T_3(s)|^2 = \frac{1}{(s+1)(s-1)} ; \text{ Sabemos que } |T_3(s)|^2 = |T_3(s)||T_3(-s)|$$

\rightarrow ¿Cuál polo corresponde a cuál función? \Rightarrow Para que la función sea estable, el polo debe caer en el semiplano izquierdo $\Rightarrow T(s) = \frac{1}{s+1}$



• Si repetimos el análisis para un orden 2, obtendremos: $|T(s)|^2 = \frac{1}{1+s^4}$

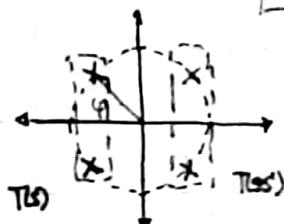
$$\rightarrow s^4 = -1$$

\hookrightarrow Los polos estarán en la circunferencia unitaria en ángulos

$$\theta_k = \frac{\pi + 2k\pi}{4}$$

\rightarrow Tendremos 4 polos

$$\begin{cases} \theta_1 = \frac{\pi}{4} \\ \theta_2 = \frac{3\pi}{4} \\ \theta_3 = \frac{5\pi}{4} \\ \theta_4 = \frac{7\pi}{4} \end{cases}$$



$$k = 0, 1, 2, 3, \dots$$

$$\rightarrow \psi = \frac{\pi}{4} \rightarrow \theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\rightarrow T_2(s) = \frac{1}{s^2 + s\sqrt{2} + 1}$$

• Recapitulando: para hallar la transferencia de un polímero de orden n , debemos hallar la posición de los polos de $|T(s)|^2$, quedarnos con los del semiplano izquierdo para que la función sea estable, hallar φ y con él, q , y finalmente hallar la transferencia.

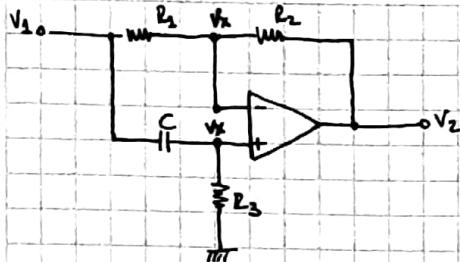
los polos estarán siempre sobre la circunferencia unitaria, separados entre sí π/n rad, y dando la primera a $\pi/2n$ rad del eje $-r$.

Además, si el orden es impar, tendremos un polo en el eje $-r$.

Tarea Semanal 1

HOJA N° 1

FECHA



$$1. \frac{V_A - V_x}{R_1} = \frac{V_x - V_2}{R_2} \rightarrow V_x = V_1 \frac{R_1}{R_1 + R_2} + V_2 \frac{R_1}{R_1 + R_2} \quad (1)$$

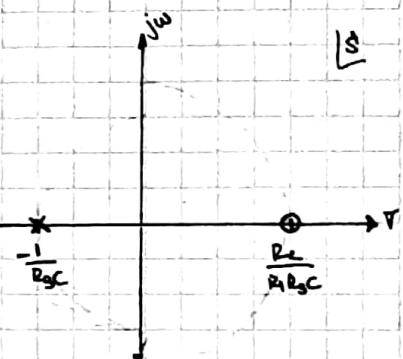
$$\circ V_x = V_1 \frac{\frac{R_1}{R_1 + R_2}}{1 + \frac{1}{sC}} = V_1 \frac{sCR_1}{sCR_1 + 1} = V_x \quad (2)$$

$$(1) \text{ y } (2) \Rightarrow V_1 \frac{R_1}{R_1 + R_2} + V_2 \frac{R_1}{R_1 + R_2} = V_1 \frac{sCR_1}{sCR_1 + 1}$$

$$\Rightarrow V_1 \frac{R_1}{R_1 + R_2} - \frac{sCR_1}{sCR_1 + 1} = -V_2 \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

$$V_1 \frac{1}{R_1} \cdot \frac{sCR_1 - R_2}{sCR_1 + 1} = V_2 \Rightarrow$$

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{1}{R_1} \frac{sCR_1 - R_2}{sCR_1 + 1} = \frac{s - \frac{R_2}{R_1 R_C}}{s + \frac{1}{R_1 R_C}}$$



2. Es un filtro pasatodo. Ref.: Schumann, Tabla 3.1 (fig. 77). (T_f)

$$3. \omega_L = R_3, \omega_H = \frac{1}{CR_3} \Rightarrow$$

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{s - \frac{R_2}{R_1}}{s + 1}$$

$$\begin{cases} R_{2n} = 1 & R_{2n} = \frac{R_2}{R_3} \\ C_n = 1 & R_{1n} = \frac{R_1}{R_3} \end{cases}$$

○ Circuitariamente, la frecuencia $\frac{1}{CR_3}$ representa

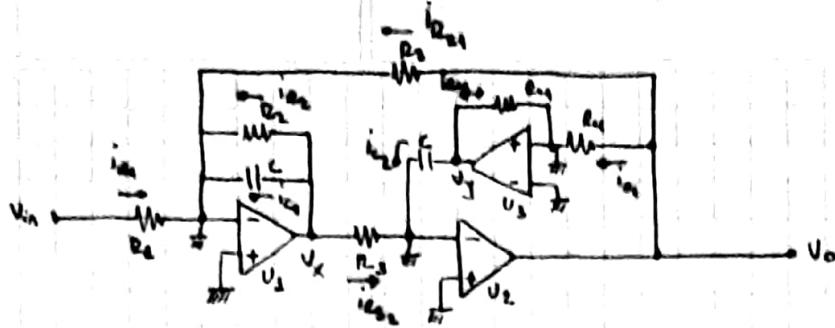
4. Incluir gráfico de Spyder. Consideración: se toma $R_{2n} = 1$ y $C_n = 1$ ($R_1 = R_2 = R_3$).

5. Incluir gráfico de Spyder.

6. Se observa en la respuesta en frecuencia que el circuito cambia la fase de la señal de entrada sin modificar su módulo. Si se quisiera generar un cambio de fase determinado a una frecuencia dada sin alterar el módulo a ninguna frecuencia, se podrían diseñar los valores de este circuito con ese fin.

NOTA

Tarea Semanal 2



• Transferencia

• Por conveniencia, se usó la conductancia

$$\left\{ \begin{array}{l} G_1 = 1/R_1 \\ G_2 = 1/R_2 \\ G_3 = 1/R_3 \\ G_4 = 1/R_4 \end{array} \right.$$

$$• i_{R_1} = i_{R_4} \rightarrow V_o \cdot G_4 = -V_y \cdot G_4 \Rightarrow V_o = -V_y \quad (1)$$

$$• i_{R_2} = -i_{R_3} \rightarrow V_y \cdot S_C = -V_x \cdot G_3 \Rightarrow V_x = 2V_y \frac{S_C}{G_3} \quad (2)$$

$$• i_{R_1} = -(i_{R_3} + i_{R_2} + i_{C_S}) \rightarrow V_x \cdot G_1 = -(V_o \cdot G_3 + V_x \cdot G_2 + V_x \cdot S_C) \quad (3)$$

• Aplicando (1) en (2), y luego (2) en (3), se obtiene:

$$V_{in} \cdot G_0 = -V_o \cdot (G_3 + G_2 \cdot S_C + \frac{(S_C)^2}{G_3})$$

$$\rightarrow \frac{V_o}{V_{in}} = -G_3 \cdot \frac{1}{(\frac{S_C^2}{G_3} + S_C \frac{G_2}{G_3} + G_3)} = -\frac{G_1 G_3}{C^2} \cdot \frac{1}{S^2 + S \frac{G_2}{C} + (\frac{G_3}{C})^2} = -\frac{G_1}{G_3} \cdot \frac{\left(\frac{G_3}{C}\right)^2}{S^2 + S \frac{G_2}{C} + \left(\frac{G_3}{C}\right)^2}$$

$$\rightarrow \boxed{\frac{V_o}{V_{in}} = -\frac{R_3}{R_1} \cdot \frac{\left(\frac{1}{R_3 C}\right)^2}{S^2 + S \frac{1}{2_2 C} + \left(\frac{1}{R_3 C}\right)^2}}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_0 = \frac{1}{R_3 C} \\ Q = \frac{R_2}{R_3} \cdot \frac{1}{R_3 C} = \frac{R_2}{R_3^2 C} \\ |H| = \frac{R_3}{R_1} \quad (H = T_{(s=0)}) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_0 = 10^2 \text{ rad/s} \\ Q = 3 \end{array} \right.$$

$$\rightarrow \omega_0 = \frac{1}{R_3 C} = 3 \Rightarrow C = \frac{1}{3 R_3} \quad \text{Defino } R_3 = 10 \text{ k}\Omega \rightarrow C = 100 \mu\text{F}$$

$$\rightarrow Q = \frac{R_2}{R_3} = 3 \Rightarrow R_2 = 30 \text{ k}\Omega$$

$$• H = 20 \text{ dB} = 10 \rightarrow \frac{R_3}{R_1} = 30 \Rightarrow R_1 = 1 \text{ k}\Omega$$

• Como R_4 no influye en la transferencia, se le da un valor arbitrario para la simulación $\Rightarrow R_4 = 100 \text{ k}\Omega$

• Normalización: Defino $\left\{ \begin{array}{l} R_2 = R_3 = 10k\Omega \\ L_{\text{m}} = \frac{1}{R_3 C} = 1 \text{ rad/s} \end{array} \right.$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} R_1 = 0,1 \\ R_2 = 3 \\ R_3 = 1 \\ R_4 = 1 \\ C = 1 \end{array} \right.$$

• Sensibilidad: $S_x^y = \sum_j \frac{\partial y}{\partial x}$

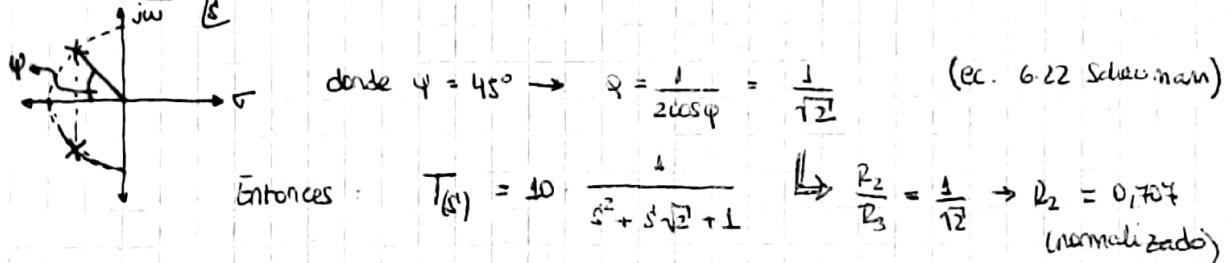
1. $S_{C_0}^{w_0} = \frac{C}{w_0} \cdot \frac{\partial w_0}{\partial C}; \quad w_0 = \frac{1}{R_3 C} \rightarrow \frac{\partial w_0}{\partial C} = -\frac{1}{R_3 C^2} \Rightarrow S_{C_0}^{w_0} = \frac{C}{(R_3 C)^2} = -1$

$$P = \frac{R_2}{R_3}$$

2. $\frac{\partial Q}{\partial R_2} = \frac{1}{R_3} \rightarrow S_{R_2}^Q = \frac{R_2}{P} \cdot \frac{1}{R_3} = \frac{R_2}{\frac{R_2}{R_3}} \cdot \frac{1}{R_3} = 1$ ④ Agregar conclusión en Jupyter

3. $\frac{\partial Q}{\partial R_3} = -\frac{R_2}{R_3^2} \rightarrow S_{R_3}^Q = \frac{R_3}{P} \cdot -\frac{R_2}{R_3^2} = \frac{R_3}{\frac{R_2}{R_3}} \cdot -\frac{R_2}{R_3} = -1$

- Butterworth: Los polos para una transferencia tipo Butterworth deben ser:



Entonces: $T(s) = 10 \frac{1}{s^2 + s\sqrt{2} + 1} \Rightarrow \frac{R_2}{R_3} = \frac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow R_2 = 0,707$
(normalizado)

- Pasabanda: hay que obtener la salida V_o a la salida de U_1 .