

Computação Evolucionária

Colônia de Formigas - Ant Colony

Prof. Dr. André Luiz Paganotti¹

¹CEFET-MG / Campus V Divinópolis — Brasil

paganotti@cefetmg.br

Graduação em Engenharia Mecatrônica CEFET-MG / UFSJ - 2025

Programa de Pós Graduação em Engenharia Elétrica CEFET-MG / UFSJ

Ant Colony - Colônia de Formigas:

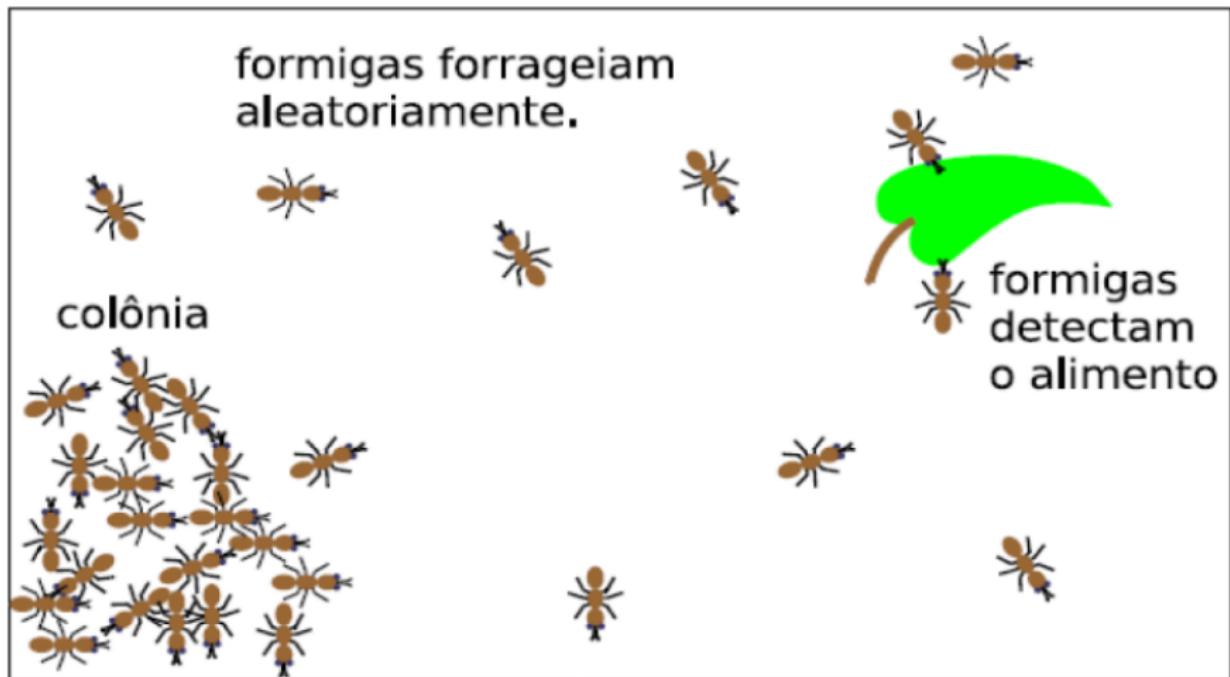
- O que é a otimização por colônia de Formigas ?
- Colônia de Formigas é uma meta heurística baseada em populações e inspirada no comportamento forrageiro das formigas:



Colônia de Formigas: Inspiração biológica

- Muitas espécies são quase cegas;
- A comunicação entre as formigas é realizada por meio de uma substância química denominada feromônio;
- Em algumas espécies, o feromônio é usado para criar caminhos (trilhas);

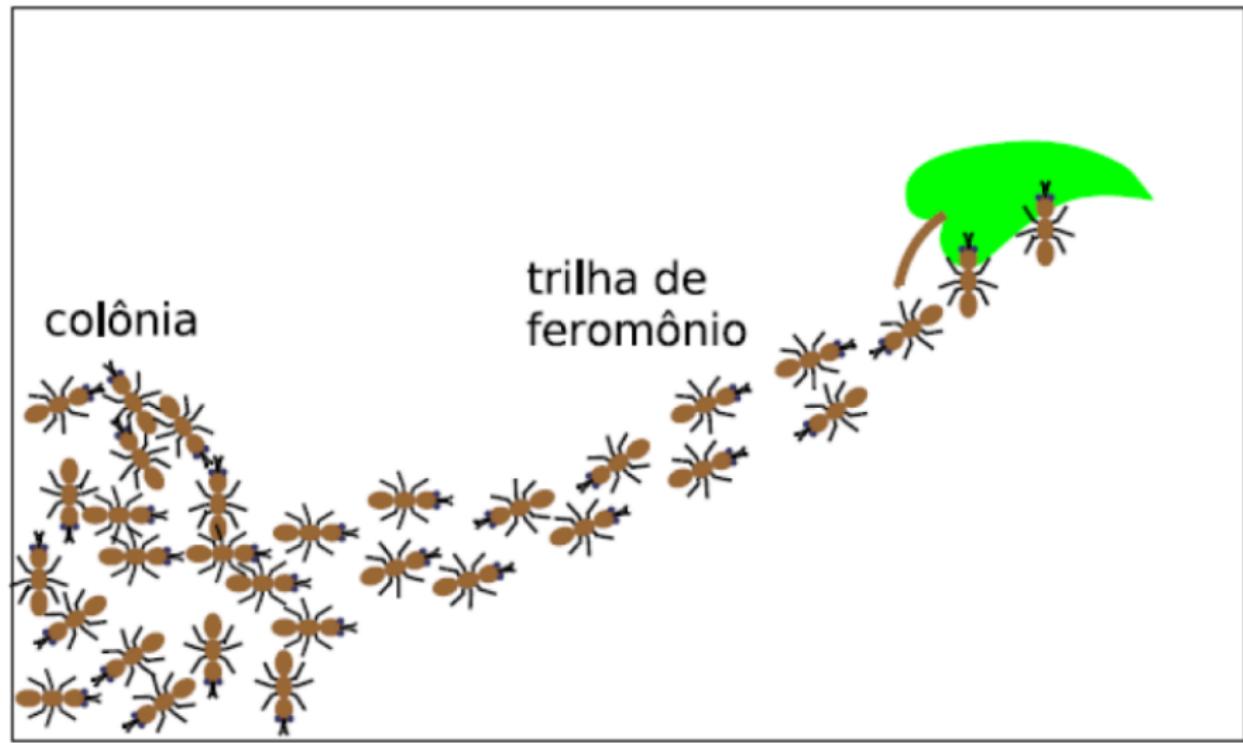
Colônia de Formigas: Inspiração biológica



Colônia de Formigas: Inspiração biológica



Colônia de Formigas: Inspiração biológica

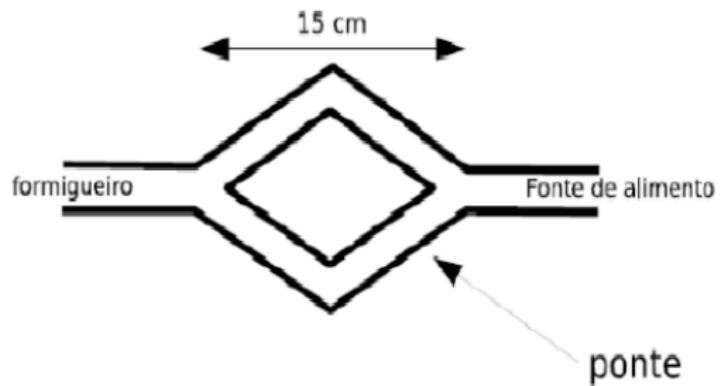


Colônia de Formigas: Inspiração biológica

- Ao caminhar, as formigas depositam no chão o feromônio formando, deste modo, uma trilha de feromônios;
- Elas sentem o cheiro do feromônio, e quando elas têm de escolher um caminho, escolhem com maior probabilidade o caminho com maior quantidade de feromônio (cheiro mais forte);
- A trilha ajuda a formiga a encontrar o caminho de volta e também as outras formigas a encontrar a fonte de alimento;

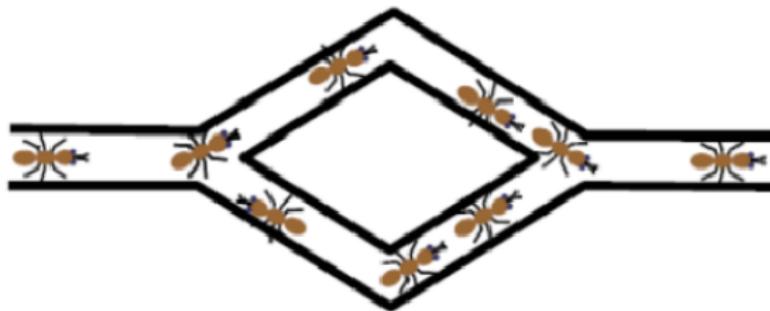
Colônia de Formigas: Inspiração biológica

- Experimento Realizado por Deneuborg (1990), para se estudar o comportamento forrageiro das formigas:



Colônia de Formigas: Inspiração biológica

- Experimento da Ponte Binária: ⇒ Inicialmente tem-se:



- As formigas são deixadas livres para escolher o caminho;
- Não há feromônio ainda.

Colônia de Formigas: Inspiração biológica

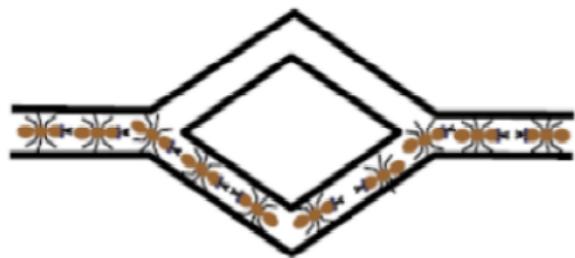
- Experimento da Ponte Binária:

⇒ No final:

- As formigas convergem para um dos caminhos com igual probabilidade;

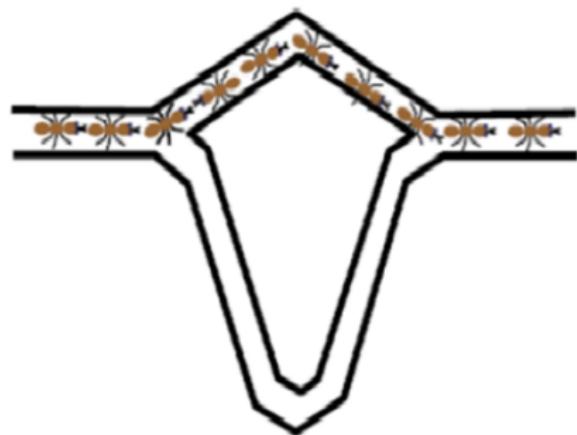
ou

- Devido a flutuações aleatórias uma das pontes terá mais feromônio e atrairá formigas com maior probabilidade;



Colônia de Formigas: Inspiração biológica

- Experimento da Ponte Binária:
- Usando Pontes de tamanhos diferentes, as formigas convergem para a ponte mais curta;
- A ponte curta é percorrida em menos tempo, fazendo com que mais formigas a atravessem;
- Logo, mais feromônio é depositado;
- As formigas escolhem, com maior probabilidade, a ponte curta (com mais feromônio);



Colônia de Formigas: Formigas Artificiais

- Formigas artificiais são heurísticas construtivas;
- As formigas constroem soluções de forma probabilística utilizando-se duas informações:
 - ① a trilha do feromônio (artificial) que muda dinamicamente durante a execução do programa de modo a refletir a experiência já adquirida durante a busca;
 - ② a informação heurística (particularidade) específica do problema a ser resolvido;

Colônia de Formigas: Ant System

- Vídeos interessantes:

⇒ <https://www.youtube.com/watch?v=vG-QZOTc5Q>

⇒ <https://www.youtube.com/watch?v=4gVEoOpvps>

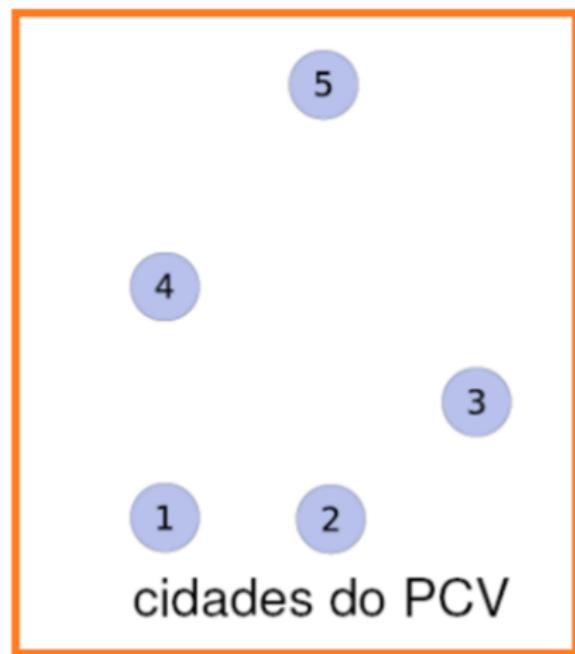
Colônia de Formigas: Ant System

- Proposto por Marco Dorigo e colaboradores (1991);
- Ant System é o primeiro algoritmo que surgiu inspirado em colônia de formigas;
- Algumas peculiaridades do ambiente das formigas utilizadas:
 - ① Ao tomar um caminho a formiga deixa no mesmo uma certa quantidade de feromônio (calculado nos algoritmos matematicamente e de maneira estocástica);
 - ② Uma formiga escolhe determinado caminho de acordo com uma função probabilística envolvendo a distância deste caminho ($d_{i,j}$) e a quantidade de feromônio presente neste ($\tau_{i,j}$);
 - ③ As formigas lembram os pontos por onde já passaram e não retornam a estes pontos até que tenham chegado à fonte de alimento.

Colônia de Formigas: Ant System Aplicado ao Problema do Caixeiro Viajante (PCV)

- Considera-se que Um Viajante deseja visitar 4 cidades diferentes e retornar para a cidade de origem percorrendo o menor caminho possível:
 - Matriz de distâncias das cidades do PCV:

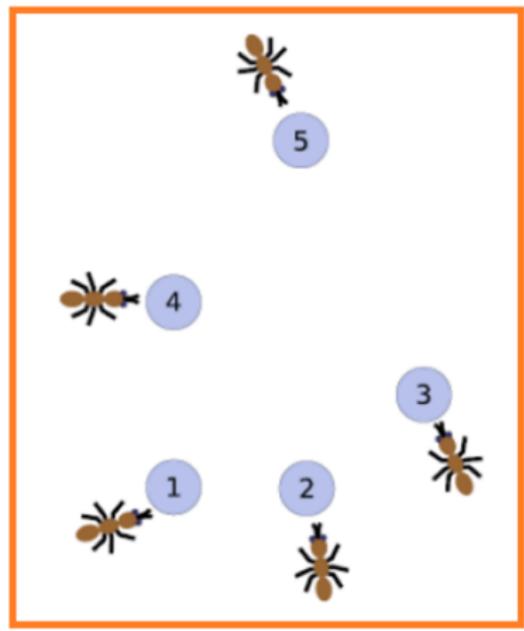
	1	2	3	4	5
1	0,0	1,0	2,2	2,0	4,1
2	1,0	0,0	1,4	2,2	4,0
3	2,2	1,4	0,0	2,2	3,2
4	2,0	2,2	2,2	0,0	2,2
5	4,1	4,0	3,2	2,2	0,0



Colônia de Formigas: Ant System Aplicado ao Problema do Caixeiro Viajante (PCV)

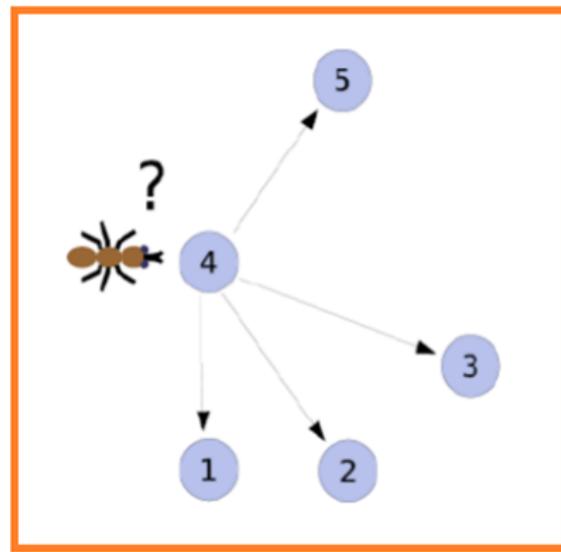
- Considera-se que Um Viajante deseja visitar 4 cidades diferentes e retornar para a cidade de origem percorrendo o menor caminho possível:

- Cada formiga irá construir uma solução movendo-se de uma cidade para outra;
- No início cada formiga é colocada em uma cidade diferente (ou colocada aleatoriamente);



Colônia de Formigas: Ant System Aplicado ao Problema do Caixeiro Viajante (PCV)

- Começando em uma cidade i a formiga move-se escolhendo-se probabilisticamente para qual cidade vizinha J ela deve seguir (entre os vizinhos factíveis);



Colônia de Formigas: Probabilidade de Transição

- A probabilidade da formiga k que está na cidade i de escolher a cidade j é dada pela regra:

$$p_{i,j}^k = \frac{(\tau_{i,j})^\alpha (\eta_{i,j})^\beta}{\sum_{l \in \eta_i^k} (\tau_{i,l})^\alpha (\eta_{i,l})^\beta} \quad \text{se } j \in \eta_i^k \quad (1)$$

- $\tau_{i,j}$ é o feromônio relacionado a aresta (i,j) percorrida pela formiga;
- α e β são parâmetros para determinar a influência do feromônio e da informação heurística;
- η_i^k é a vizinhança factível da formiga k (ou seja, o conjunto das cidades ainda não visitadas pela formiga k);

Colônia de Formigas: Informação Heurística do PCV:

- Associado à aresta (i, j) existe um valor heurístico dado por $\eta_{i,j}$:

$$\eta_{i,j} = \frac{1}{d_{i,j}} \quad (2)$$

- sendo:

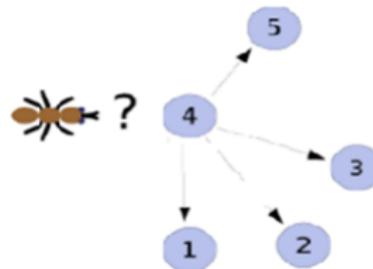
⇒ $d_{i,j}$ a distância entre as cidades i e j ;

⇒ $\eta_{i,j}$ representa a atratividade da formiga visitar a cidade J após visitar a cidade i ;

⇒ $\eta_{i,j}$ insere o efeito da distância entre as cidades para aumentar ou diminuir a probabilidade de seleção da rota utilizando a aresta (i, j) considerada.

Colônia de Formigas: PCV - construção das rotas - passo 01:

- A escolha do candidato é feita de acordo com a probabilidade de transição;
 - Adota-se um procedimento de roleta similar ao realizado no algoritmo genético;
- ⇒ Ou seja: quanto maior a distância entre as cidades ($d_{i,j}$) menor a probabilidade ($p_{i,j}$) dela ser escolhida pelo método de seleção adotado;



Colônia de Formigas: PCV - construção das rotas - passo 01:

- Vamos calcular a probabilidade da formiga 1 se deslocar para uma das outras 4 cidades do percurso:

Formiga	Candidato - Prob Transição	Solução Parcial
1		1-
2	1(41%), 3 (30 %), 4 (19%), 5 (10 %)	2-1
3	1(23,5%), 2 (37 %), 4 (23,5%), 5 (16 %)	3-4
4	1(27%), 2 (24,3 %), 3 (24,3%), 5 (24,3 %)	4-5
5	1(19%), 2 (20 %), 3 (25%), 4 (36 %)	5-2

Tabela: Construção das rotas passo 1

Sendo:

$$p_{i,j}^k = \frac{(\tau_{i,j})^\alpha (\eta_{i,j})^\beta}{\sum_{l \in \eta_i^k} (\tau_{i,l})^\alpha (\eta_{i,l})^\beta} \quad \text{se } j \in \eta_i^k \quad (3)$$

Considera-se: $\beta = 1$, $\tau = 1$, $\alpha = 1$

Colônia de Formigas: PCV - construção das rotas - passo 01:

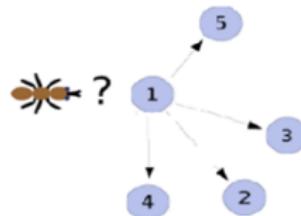
- Vamos calcular a probabilidade da formiga 1 se deslocar para uma das outras 4 cidades do percurso:

	1	2	3	4	5
1	0,0	1,0	2,2	2,0	4,1
2	1,0	0,0	1,4	2,2	4,0
3	2,2	1,4	0,0	2,2	3,2
4	2,0	2,2	2,2	0,0	2,2
5	4,1	4,0	3,2	2,2	0,0

Sendo:

$$p_{i,j}^k = \frac{(\tau_{i,j})^\alpha (\eta_{i,j})^\beta}{\sum_{l \in \eta_i^k} (\tau_{i,l})^\alpha (\eta_{i,l})^\beta} \quad (4)$$

Considera-se: $\beta = 1$, $\tau = 1$, $\alpha = 1$



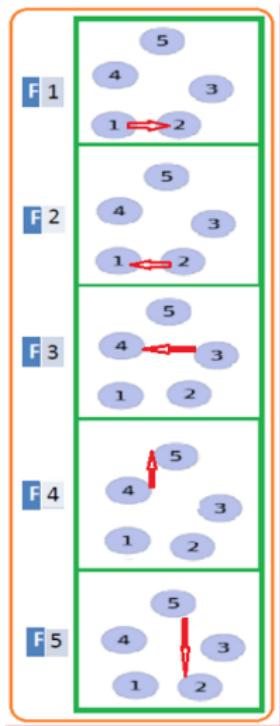
$$\eta_{i,j} = \frac{1}{d_{i,j}} \quad (5)$$

Colônia de Formigas: PCV - construção das rotas - passo 01:

Formiga	Candidato - Prob Transição	Solução Parcial
1		1-
2	1(41%), 3 (30 %), 4 (19%), 5 (10 %)	2-1
3	1(23,5%), 2 (37 %), 4 (23,5%), 5 (16 %)	3-4
4	1(27%), 2 (24,3 %), 3 (24,3%), 5 (24,3 %)	4-5
5	1(19%), 2 (20 %), 3 (25%), 4 (36 %)	5-2

	1	2	3	4	5
1	0,0	1,0	2,2	2,0	4,1
2	1,0	0,0	1,4	2,2	4,0
3	2,2	1,4	0,0	2,2	3,2
4	2,0	2,2	2,2	0,0	2,2
5	4,1	4,0	3,2	2,2	0,0

Colônia de Formigas: PCV - construção das rotas - passo 01:



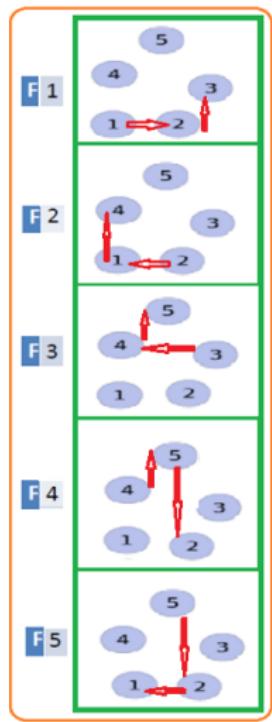
Colônia de Formigas: PCV - construção das rotas - passo 02:

Formiga	Candidato - Prob Transição	Solução Parcial
1		1-2-
2	3(38%), 4 (42 %), 5 (20 %)	2-1-4
3	1(35%), 2 (32 %), 5 (32%)	3-4-5
4	1(30%), 2 (31 %), 3 (39 %)	4-5-2
5	1(46%), 3 (33 %), 4 (21%)	5-2-1

Tabela: Construção das rotas passo 2

Colônia de Formigas: PCV - construção das rotas - passo 02:

- Obtenção das probabilidades da formiga 1 ir para as cidades ainda não visitadas: 3, 4 e 5:



Colônia de Formigas: PCV - construção das rotas - passo 03:

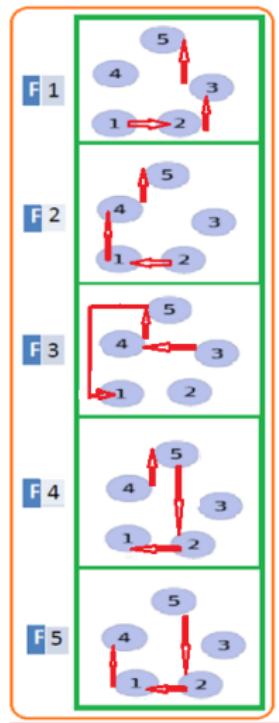
- Obtenção das probabilidades da formiga 1 ir para as cidades ainda não visitadas: 4 e 5:

Formiga	Candidato - Prob Transição	Solução Parcial
1		1-2-3-
2	3(50%), 5 (50 %)	2-1-4-5
3	1(49%), 2 (51 %)	3-4-5-1
4	1(58%), 3 (42 %)	4-5-2-1
5	3 (48 %), 4 (52%)	5-2-1-4

Tabela: Construção das rotas passo 3

Colônia de Formigas: PCV - construção das rotas - passo 03:

- Obtenção das probabilidades da formiga 1 ir para as cidades ainda não visitadas: 4 e 5:



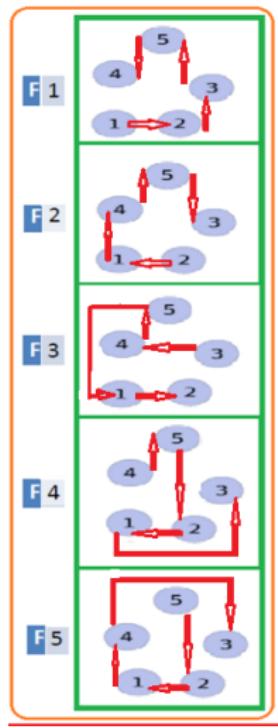
Colônia de Formigas: PCV - construção das rotas - passo 04:

- Obtenção das probabilidades da formiga 1 ir para a cidade ainda não visitada: 4 :

Formiga	Candidato - Prob Transição	Solução Parcial
1	4 (100%)	1-2-3-5-4
2	3 (100%)	2-1-4-5-3
3	2 (100 %)	3-4-5-1-2
4	3 (100%)	4-5-2-1-3
5	3 (100%)	5-2-1-4-3

Tabela: Construção das rotas passo 4

Colônia de Formigas: PCV - construção das rotas - passo 04:



Colônia de Formigas: PCV - construção das rotas -final da primeira iteração:

- Uma vez determinada as rotas, calcula-se agora o custo de cada rota (distância total percorrida por cada formiga):

Formiga	Solução Completa	Comprimento da Viagem (L_k)
1	1-2-3-5-4	
2	2-1-4-5-3	9,8
3	3-4-5-1-2	10,9
4	4-5-2-1-3	11,60
5	5-2-1-4-3	

	1	2	3	4	5
1	0,0	1,0	2,2	2,0	4,1
2	1,0	0,0	1,4	2,2	4,0
3	2,2	1,4	0,0	2,2	3,2
4	2,0	2,2	2,2	0,0	2,2
5	4,1	4,0	3,2	2,2	0,0

Colônia de Formigas: atualização do feromônio:

- No feromônio $\tau_{i,j}$ associado (depositado) a aresta (i,j) há 2 eventos:
 - ① a evaporação:
 - ⇒ evita que o feromônio acumulado cresça indefinidamente (evita a perda de diversidade de soluções);
 - ⇒ permite esquecer decisões ruins do passado da busca.
 - ② o depósito do feromônio de todas as formigas que passaram sobre a aresta (i,j) (efeito forrageiro modelado computacionalmente);

Colônia de Formigas: atualização do feromônio:

- Depois que todas as formigas construíram suas rotas, o feromônio é atualizado;
- $\Delta\tau_{i,j}^k$ é a quantidade de feromônio que a formiga K deposita sobre a aresta (i,j) e é dado por:

$$\Delta\tau_{i,j}^k = \begin{cases} \frac{Q}{L_k}, & \text{se a aresta } (i,j) \text{ pertence a rota } S_k \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (6)$$

onde:

⇒ Q é a quantidade de feromônio excretada por uma formiga a cada iteração; ⇒ L_k é o comprimento da viagem (rota) de cada formiga;

Colônia de Formigas: atualização do feromônio:

- O feromônio $\tau_{i,j}$ associado a aresta (i,j) é atualizado pela fórmula:

$$\tau_{i,j}(t+1) = (1 - \rho)\tau_{i,j}(t) + \sum_{k=1}^m \Delta\tau_{i,j}^k(t) \quad (7)$$

- sendo:

- ⇒ $(1 - \rho)\tau_{i,j}(t)$ é o termo responsável pela evaporação;
- ⇒ $\sum_{k=1}^m \Delta\tau_{i,j}^k(t)$ termo responsável pelo depósito de feromônio;

onde:

- ⇒ $0 < \rho \leq 1$, é a taxa de evaporação do feromônio;
- ⇒ m é o número de formigas considerado.

Colônia de Formigas: atualização do feromônio: exemplo de atualização - aresta (3, 5):

- Seleciona-se as formigas que possuem a aresta (3, 5) nas rotas obtidas anteriormente;
- Apenas as formigas 1, 2 e 5 depositam feromônio nesta aresta, considere $Q = 1, 0$;

Formiga	Solução Completa	Comprimento da Viagem (L_k)
1	1-2-3-5-4	9,8
2	2-1-4-5-3	9,8
3	3-4-5-1-2	10,9
4	4-5-2-1-3	11,60
5	5-2-1-4-3	12,40

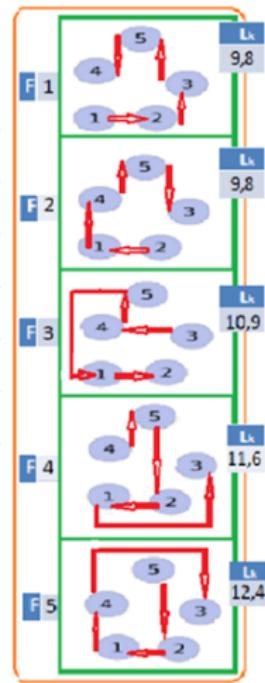
$$\Delta \tau_{i,j}^k = \frac{Q}{L_k} \quad (8)$$

Colônia de Formigas: atualização do feromônio: exemplo de atualização - aresta (3,5):

- Apenas as formigas 1, 2 e 5 depositam feromônio nesta aresta, considere $Q = 1,0$, $\tau = 1,0$ e $\rho = 0,50$;

Formiga	Solução Completa	Comp. da Viagem (L_k)
1	1-2-3-5-4	9,8
2	2-1-4-5-3	9,8
3	3-4-5-1-2	10,9
4	4-5-2-1-3	11,60
5	5-2-1-4-3	12,40

$$\tau_{3,5} = (1 - \rho)\tau_{i,j} + \Delta\tau_{3,5}^1 + \Delta\tau_{3,5}^2 + \Delta\tau_{3,5}^5 \quad (9)$$



Colônia de Formigas: algoritmo:

Algoritmo Ant System

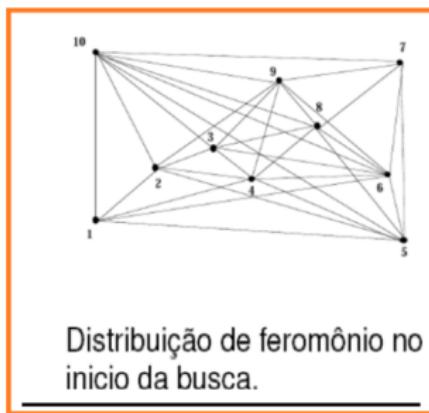
- 1: Seja Q e τ_0 constantes;
Faça $f(s^*) \leftarrow \infty$;
- 2: Faça $\Delta\tau_{ij} \leftarrow 0$ e $\tau_{ij} \leftarrow \tau_0$ para todo arco (i, j) ;
- 3: **Para** (cada formiga $k = 1, \dots, m$) **faça**
 - (a) Selecione a cidade inicial para a k -ésima formiga;
 - (b) Obtenha uma rota R^k para cada formiga k de acordo com o procedimento seguido por cada formiga;
 - (c) Seja L^k o comprimento da rota R^k ;
 - (d) **Se** ($L^k < f(s^*)$) **então** $s^* \leftarrow R^k$;
 - (e) Calcule a quantidade de rastro deixado pela formiga k :
se (arco (i, j) pertence à rota R^k)
então $\Delta\tau_{ij} \leftarrow Q / L^k$;
senão $\Delta\tau_{ij} \leftarrow 0$;
 - (f) Faça $\Delta\tau_{ij} \leftarrow \Delta\tau_{ij} + \Delta\tau_{ij}(k)$;
- 4: Faça $\tau_{ij} \leftarrow (1 - \rho) \times \tau_{ij} + \Delta\tau_{ij}$;
- 5: **se** (a melhor rota s^* não foi alterada nas últimas k_{\max} iterações)
então PARE: s^* é a melhor solução;
senão retorne ao Passo 3;

Colônia de Formigas: critérios de parada:

- Número máximo de iterações;
- Estagnação.

Colônia de Formigas: Estagnação

- É a situação na qual todas as formigas seguem sempre o mesmo percurso;
- A estagnação é causada pelo excessivo crescimento de feromônio nas arestas de uma rota sub-ótima
- Apesar na natureza estocástica do algoritmo, a forte concentração de feromônio nas arestas força a formiga a fazer sempre o mesmo percurso;



Colônia de Formigas: EAS - Elitist Ant System

- Utiliza a melhor solução encontrada até o momento para atualizar o feromônio;
- Favorece a exploração ao invés da exploração;
- Novas soluções tendem a ter poucas variações da melhor solução, dependendo da qualidade dessa.

- Consiste no primeiro melhoramento do Ant System, introduzido por Dorigo (1992);
- Ideia do método: consiste em fornecer um reforço adicional nas arestas pertencentes ao melhor percurso achado desde o início do algoritmo;
- Este percurso é chamado de T_{bs} (best so far tour);
- Ideia similar a estratégia do elitismo nos algoritmos genéticos.

Colônia de Formigas: EAS - Elitist Ant System

- Atualização do feromônio;

$$\tau_{i,j} = (1 - \rho)\tau_{i,j} + \sum_{k=1}^m \Delta\tau_{i,j} + e\tau_{i,j}^{bs} \quad (10)$$

- Onde $\Delta\tau_{i,j}^k$ é definido como:

$$\Delta\tau_{i,j}^{bs} = \begin{cases} \frac{Q}{L_{bs}}, & \text{se a aresta } (i,j) \text{ pertence ao percurso } T_{bs} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (11)$$

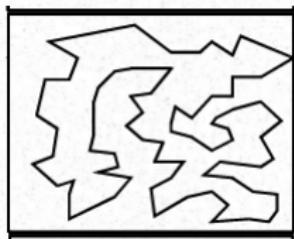
- e é um parâmetro definido pelo usuário (> 1).

Colônia de Formigas: Aplicações do método

- O ACO e suas variações foram aplicados a diversos problemas discretos;
- Algumas das aplicações exigem algumas adaptações por parte do algoritmo;
- Seguindo o mesmo framework do ACO, também é possível resolver problemas de natureza contínua.

Colônia de Formigas: Aplicações do método

- Problemas de Ordenamento Sequencial (Sequential Ordering problems)

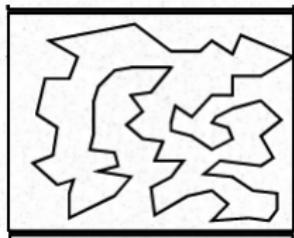


- Similar ao problema do caixeiro viajante, mas com restrição de precedência (deve-se visitar um certo vértice k antes de passar pelo vértice l).

⇒ Gambardella L. M. and M. Dorigo (1997). HAS-SOP: An Hybrid Ant System for the Sequential Ordering Problem. Tech. Rep. No. IDSIA 97-11, IDSIA, Lugano, Switzerland

Colônia de Formigas: Aplicações do método

- Problemas de Ordenamento Sequencial (Sequential Ordering problems)

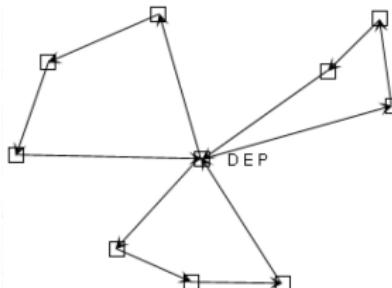


- Similar ao problema do caixeiro viajante, mas com restrição de precedência (deve-se visitar um certo vértice k antes de passar pelo vértice l).

⇒ Gambardella L. M. and M. Dorigo (1997). HAS-SOP: An Hybrid Ant System for the Sequential Ordering Problem. Tech. Rep. No. IDSIA 97-11, IDSIA, Lugano, Switzerland

Colônia de Formigas: Aplicações do método

- Roteamento de Veículos (Vehicle Routing)



- Dado um depósito central, n clientes e m caminhões de transporte, distribuir a mercadoria nos n clientes atendendo suas demandas utilizando-se dos m caminhões respeitando sua capacidade e sempre partindo do depósito central.

⇒ Bullnheimer B., R.F. Hartl and C. Strauss (1999). Applying the Ant System to the Vehicle Routing Problem. In: Voss S., Martello S., Osman I.H., Roucairol C. (eds.), Meta-Heuristics: Advances and Trends in Local Search Paradigms for Optimization, Kluwer:Boston.

Colônia de Formigas: algumas referências

Dorigo M., V. Maniezzo A. Colomi (1996). Ant System: Optimization by a colony of cooperating agents. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics-Part B, 26(1):29-41

Colomi A., M.Dorigo, F.Maffioli, V. Maniezzo, G. Righini, M. Trubian (1996). Heuristics from Nature for Hard Combinatorial Problems. International Transactions in Operational Research, 3(1):1-21.

Dorigo M. L.M. Gambardella (1997). Ant Colony System: A Cooperative Learning Approach to the Traveling Salesman Problem. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 1(1):53-66.

Dorigo M. L.M. Gambardella (1997). Ant Colonies for the Traveling Salesman Problem. BioSystems, 43:73-81. Also Technical Report TR/IRIDIA/1996-3, IRIDIA, Université Libre de Bruxelles: