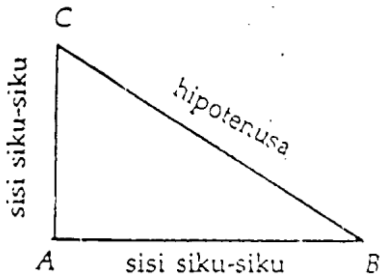
BAB VII
TEOREMA PYTHAGORAS

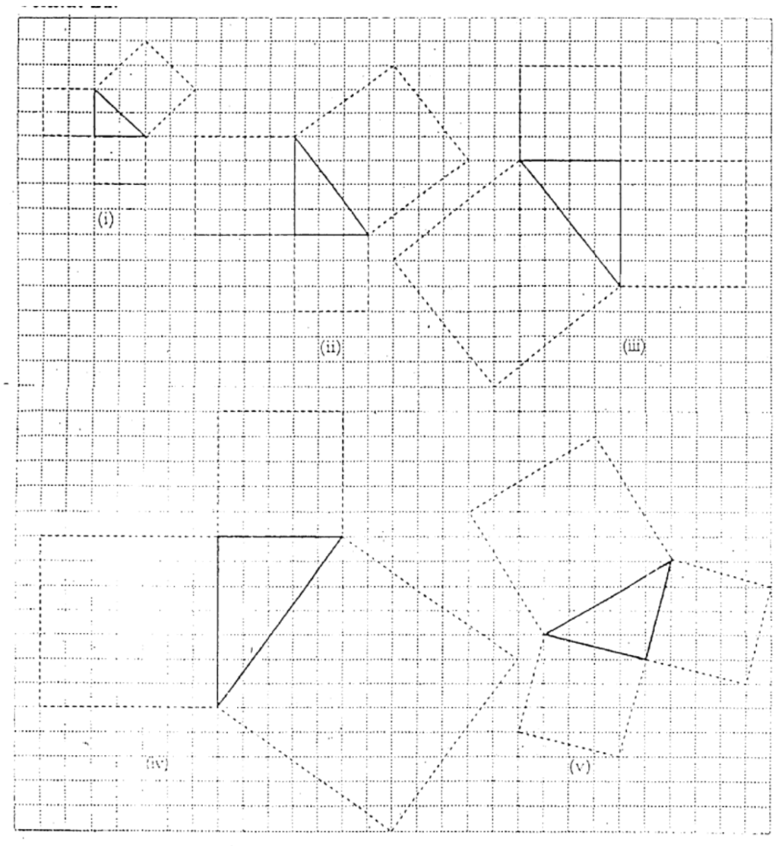
1. Pembuktian Teorema Pythagoras

Dalam segitiga siku-siku, sisi-sisinya terdiri dari sisi siku-siku dan sisi miring (hipotenusa).



Gambar di samping adalah ∆ABC yang siku-siku di A. Sisi yang membentuk sudut siku-siku disebut sisi siku-siku, yaitu AB dari AC. Sisi di hadapan sudut siku-siku disebut sisi miring atau hipotenusa, yaitu BC.

Selanjutnya untuk mendapatkan teorema Pythagoras, perhatikan gambar-gambar berikut ini.

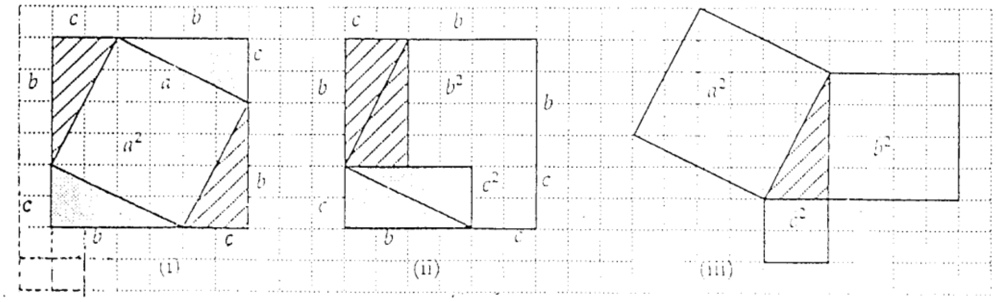


Berdasarkan gambar di atas hitunglah luas persegi-persegi pada setiap sisi segitiga, kemudian isilah tabel berikut ini:

Gambar	Luas Persegi pada Hipotenusa	Luas Persegi pada salah satu sisi siku	Luas persegi pada sisi siku-siku yang lain	Jumlah luas persegi pada kedua sisi siku-siku
i	8	4	4	8
ii		9	16	25
iii				
iv				
v				

Dan tabel di atas ternyata luas persegi pada hipotenusa sama dengan jumlah luas persegi pada sisi siku-sikunya (kedua sisi lainnya).

Cara lain untuk mendapatkan teorema Pythagoras, ditunjukkan berikut ini:



Gambar (i) dan (ii) merupakan persegi yang mempunyai panjang sisi sama yaitu (b + c). Karena panjang sisinya sama, maka luasnya juga sama. Perhatikan luas daerah yang diarsir pada Gambar (i) dan (ii). Ternyata luasnva sama. Hal ini berarti luas yang tidak diarsir dari kedua persegi tersebut juga sama. Jadi, $a^2 = b^2 + c^2$

Pada Gambar (iii) a^2 adalah luas persegi pada hipotenusa dan $b^2 + c^2$ adalah jumlah luas persegi pada sisi siku-siku.

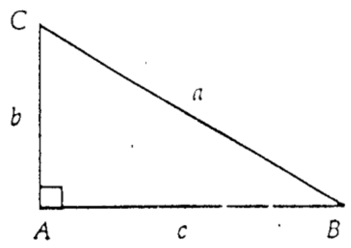
Dari kedua cara di atas dapat disimpulkan bahwa:

Untuk setiap segitiga siku-siku berlaku: Luas persegi pada hipotenusa sama dengan jumlahj luas persegi pada sisi yang lain (sisi siku-sikunya)

Teori tersebut di atas disebut teorema Pythagoras, karena teori ini pertarna kali ditemukan oleh Pythagoras yaitu seorang ahli matematika bangsa Yunani yang hidup dalam abad keenam Masehi.

2. Rumus Teorema Pythagoras

Pembuktian teorema Pythagoras dilakukan dengan cara mempelajari luas. Namun demikian teorema ini dapat digunakan untuk menghitung panjang suatu sisi, sehingga dari teorema Pythagoras dapat diturunkan hal berikut ini.



Bila ΔABC siku-siku di titik A, maka berlaku:

$BC^2 = AC^2 + AB^2$

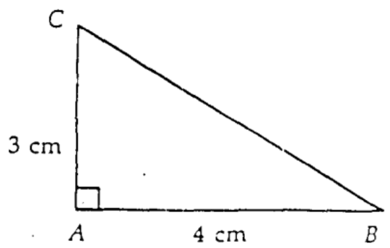
Atau

$a^2 = b^2 + c^2$ atau

$b^2 = a^2 - c^2$ atau

$c^2 = a^2 - b^2$

Contoh:



Misalkan ΔABC siku-siku di titik A.

AB = 4 cm dan AC = 3 cm.

Hitunglah panjang BC.

Jawab:

$BC^2 = AB^2 + AC^2$

$BC^2 = (4^2 + 3^2)\ cm^2$

$BC^2 = (16 + 9)\ cm^2$

$BC^2 = 25\ cm^2$

$BC = \sqrt{25}\ cm$

$BC = 5\ cm$

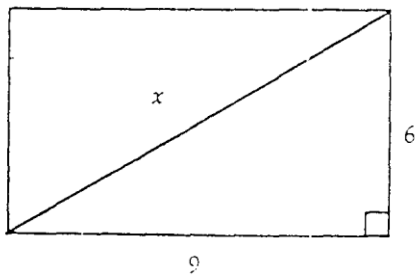
Jadi, panjang BC = 5 cm

3. **Menggunakan Teorema Pythagoras pada Bangun Datar dan Bangun Ruang**

Contoh;

Sebuah persegi panjang berukuran panjang 9 cm dan lebar 6 cm. Hitunglah panjang salah satu diagonalnya.

Jawab



Misal panjang diagonal x cm, maka:

$x^2 = 9^2 + 6^2$

$x^2 = 81 + 36$

$x^2 = 117$

$x = \sqrt{1{,}17 \times 100}$

$x = \sqrt{1{,}17} \times \sqrt{100}$

(gunakan tabel akar kuadrat)

$x = 1{,}08 \times 10$

$x = 10{,}8$

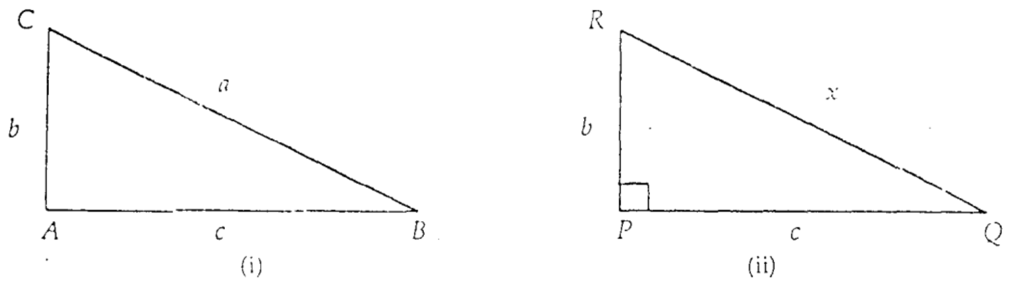
Jadi panjang salah satu diagonalnya = 10,8 cm.

4. **Kebalikan Teorema Pythagoras dan Tigaan Pythagoras (Tripel Pythagoras)**

   a. **Kebalikan Teorema Pythagoras**

Dalam teorema pythagoras dapat dibuat pernyataan yang merupakan kebalikannya. Teorema pythagoras menyatakan: *dalam ΔABC jika $\angle A$ siku-siku, maka $a^2 = b^2 + c^2$*. Kita dapat membuat pernyataan yang merupakan kebalikan dari teorema pythagoras, yaitu *Dalam ΔABC jika $a^2 = b^2 + c^2$, maka $\angle A$ siku-siku*. Untuk selanjutnya kita akan menyelidiki apakah pernyataan kebalikan teorema Pythagoras ini benar atau salah.

Perhatikan gambar berikut:



Pada gambar (i) diketahui bahwa $a^2 = b^2 + c^2$, apakah $\angle CAB$ siku-siku?

Pada gambar (ii) PQ = c, PR = b, QR = x, dan $\angle QPR$ siku-siku, maka $a^2 = b^2 + c^2$.

Pada gambar (i) $a^2 = b^2 + c^2$ (diketahui)

Dari gambar (ii) $x^2 = b^2 + c^2$ (berdasarkan teorema Pythagoras)

Karena ruas kanannya sama, maka $a^2 = x^2$, berarti a = x

Jadi, ketiga sisi ΔABC berturut-turut tepat sama dengan sisi ΔPQR. Maka ΔABC dan ΔPQR kongruen, sehingga $\angle CAB = \angle RPQ$. Karena $\angle RPQ$ siku-siku, maka $\angle CAB$ siku-siku. Hal ini menunjukkan bahwa kebalikan teorema Pythagoras benar. Dari kebalikan teorema Pythagoras, kita dapat mengetahui apakah suatu segitiga siku-siku atau bukan siku-siku jika diketahui ketiga sisinya.

Contoh:

1) Tunjukkan bahwa segitiga yang berukuran 4 cm, 3 cm, dan 5 cm adalah siku-siku.

   Jawab:

   a = 5, b = 4, dan c = 3

   $a^2 = 5^2$

   $a^2 = 25$

   $b^2 + c^2 = 4^2 + 3^2$

   $= 16 + 9$

   $= 25$

   Karena $a^2 = b^2 + c^2$, maka segitiga itu siku-siku.

2) Suatu segitiga berukuran 4 cm, 6 cm, dan 5 cm. Apakah segitiga itu siku-siku?

   Jawab:

   a = 6, b = 4, dan c = 5

   $a^2 = 6^2$

   $a^2 = 36$

   $b^2 + c^2 \quad = 4^2 + 5^2$

   $= 36 + 25$

   $= 61$

   Karena $a^2 \neq b^2 + c^2$ maka segitiga tersebut bukan segitiga siku-siku.

   Dan contoh tersebut didapat bahwa jika $a^2 < b^2 + c^2$, maka segitiga tersebut lancip.

3) Suatu segitiga berukuran 9 cm, 6 cm, dan 5 cm. Apakah seghitiga tersebut siku-siku?

   Jawab

   a = 9, b = 6, dan c = 5

   $a^2 = 9^2$

   $a^2 = 81$

   $b^2 + c^2 \quad = 6^2 + 5^2$

   $= 36 + 25$

   $= 61$

   Karena $a^2 \neq b^2 + c^2$ maka segitiga tersebut bukan segitiga siku-siku.

   Dari contoh didapat bahwa jika $a^2 > b^2 + c^2$ maka segitiga tersebut tumpul.

4) Sebuah segitiga berukuran 2,5 cm, 6,5 cm, dan 6 cm. Apakah segitiga itu siku-siku?

   Jawab:

   Sisi terpanjang = 6,5 cm

   Kedua sisi lainnya 6 cm dan 2,5 cm

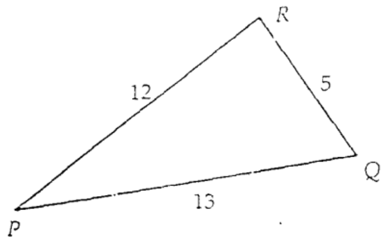
   $6{,}5^2 \qquad = 42{,}25$

$6^2 - 2{,}5^2 \quad = 36 + 6{,}25$

$\quad\quad\quad\quad = 42{,}25$

Jadi, $6{,}5^2 = 6^2 + 2{,}5^2$ sehingga segitiga itu siku-siku.

5)



Pada ΔPQR gambar di samping, panjang PQ= 13 cm, QR = 5 cm, dan PR 12 cm.

a) Tunjukkan bahwa ΔPQR adalah segitiga siku-siku.

b) Sudut manakah yang siku-siku?

Jawab:

a) PQ = 13 cm, QR = 5 cm, PR = 12 cm

Sisi terpanjang PQ = 13 cm

$PQ^2 \quad = 13^2$

$\quad\quad = 169$

$QR^2 + PR^2 \quad = 5^2 + 12^2$

$\quad\quad = 25 + 144$

$\quad\quad = 169$

Jadi $PQ^2 = QR^2 + PR^2$

Maka ΔPQR siku-siku

b) Dari jawaban a) ΔPQR siku-siku dengan PQ merupakan sisi terpanjangnya, maka PQ merupakan sisi miring (hipotenusa), $\angle R$ menghadap PQ (hipotenusa), maka $\angle R$ siku-siku

b. Tigaan Pythagoras (Tripel Pythagoras)

Dalam ukuran sisi-sisi segitiga siku-siku sering kita jumpai 3 bilangan asli yang tepat untuk menyatakan ukuran panjang dan hipotenusa dan sisi-sisi yang mengapit sudut siku-siku. Tiga bilangan seperti itu disebut tigaan Pythagoras (Tripel Pythagoras).

Contoh:

1) Suatu segitiga siku-siku panjang sisinya 3, 4, dan 5 satuan. 3, 4, 5 disebut tigaan Pythagoras, sebab $5^2 = 3^2 + 4^2$
2) Suatu segitiga siku-siku panjang sisinya 5, 12, dan 13 satuan. 5, 12, dan 13 disebut tigaan Pythagoras, sebab $13^2 = 5^2 + 12^2$.

a	b	$a^2 + b^2$	$a^2 - b^2$	2ab	Tigaan Pythagoras
2	1	$2^2 + 1^2 = 5$	$2^2 - 1^2 = 3$	2 x 2 x 1 = 4	5, 3, 4
3	1	$3^2 + 1^2 = 10$	$3^2 - 1^2 = 8$	2 x 3 x 1 = 6	10, 8, 6
3	2	$3^2 + 2^2 = 13$	$3^2 - 2^2 = 5$	2 x 3 x 2=12	13, 5, 12
4	1				
4	2				
4	3				
5	1				
5	2				
5	3				
5	4				

Untuk mendapatkan 3 bilangan yang merupakan tigaan Pythagoras, isilah tabel di atas dengan cara memilih dua bilangan asli sembarang, misalnya a dan b dengan a > b.

Tabel di atas dapat dilanjutkan lagi, misalnva: a = 6 dan b =1, a = 6 dan b = 2, a = 6 dan b = 3, dan seterusnya.

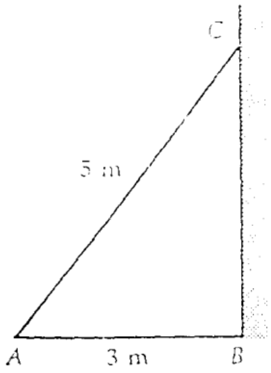
5. Menyelesaikan Soal-soal Cerita dengan Menggunakan Teorema Pythagoras

Soal-soal dalam bentuk cerita dapat diselesaikan dengan bantuan gamhar (sketsa).

Contoh:

Sebuah tangga yang panjangnya 5 m bersandar pada tembok. Jarak ujung bawah tangga terhadap tembok 3 m. berapakah tinggi ujung atas tangga dari lantai?

Jawab:



AB = 3 m, AC = 5 m

$AC^2 = AB^2 + BC^2$

$5^2 = 3^2 + BC^2$

$25 = 9 + BC^2$

$25 - 9 = BC^2$

$16 = BC^2$

$BC = \sqrt{16}$

$BC = 4$

Jadi tinggi ujung atas tangga dari lantai = 4 m

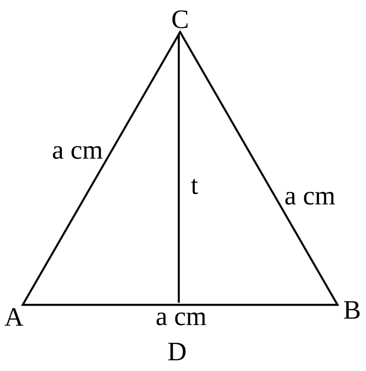
6. Aplikasi Teorema Pythagoras

a. Menentukan Tinggi Segitiga Sama Sisi

Contoh 1

Diketahui sebuah segitiga sama sisi dengan panjang sisi-sisinya a cm, seperti gambar di bawah ini. Tentukan tinggi dan luas segitga sama sisi tersebut!

Penyelesaian:



t atau panjang CD

$t^2 = a^2 - \frac{1}{2}\ a^2$

$t^2 = a^2 - (\frac{1}{4}\ a^2)$

$t^2 = \frac{3}{4}\ a^2$

$t = \sqrt{\frac{3}{4}a^2}$

$t = \frac{1}{2}a\sqrt{3}$

Luas $\Delta = \frac{1}{2}a \times t$, karena $t = \frac{1}{2}a\sqrt{3}$

Maka luas Δ tersebut adalah $\frac{1}{2}a \times \frac{1}{2}a\sqrt{3}$

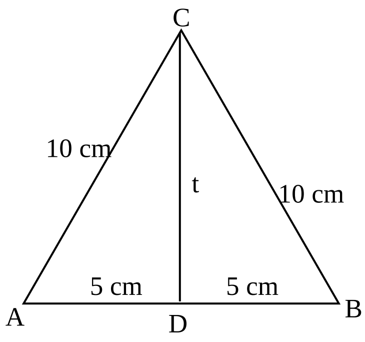
$$L = \frac{1}{4}a^2\sqrt{3}$$

Contoh 2

Contoh dengan bilangan konkrit

Diketahui sebuah segitiga sama sisi dengan panjang sisi-sisinya 10 cm, tentukan tinggi segitiga tersebut dan hitung berapa luasnya.

Penyelesaian:



Panjang CD atau tinggi segitiga adalah:

$CD^2 = BC^2 – BD^2$

$CD^2 = 10^2 - 5^2$

$CD^2 = 100 – 25$

$= 75$

$CD = \sqrt{75}$

$= 5\sqrt{3}$

$$\text{Luas } \Delta ABC = \frac{1}{2} a \times t$$

$$= \frac{1}{2} \text{ x } 10 \text{ x } 5\sqrt{3}$$

$$= 25\sqrt{3} \text{ cm}^3$$

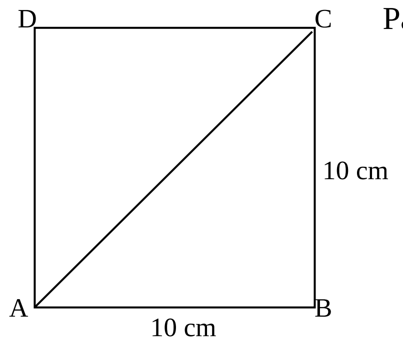
Jika luas seitiga sama sisi bisa dicari, selanjutnya dapat juga untuk menghitung luas segi enam beraturan.

b. Menentukan Panjang Diagonal Persegi, Persegi panjang, belah ketupat, diagonal balok, kubus, garis pelukis kerucut, dll

Contoh 3

Sebuah persegi dengan panjang sisinya 10 cm, seperti ditunjukkan pada gambar di bawah ini. Tentukan panjang diagonalnya.

Jawab:



Panjang $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2}$

$AC = \sqrt{10^2 + 10^2}$

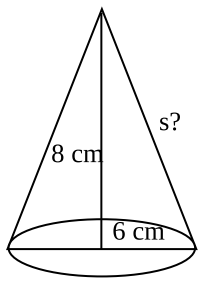
$AC = \sqrt{200}$

$AC = 10\sqrt{2}$

Contoh 4

Tentukan tinggi garis pelukis pada kerucut di bawah ini, jika diketahui jari-jarinya 6 cm dan tinggi kerucut 8 cm!

Jawab:



$s^2 = r^2 + t^2$

$s^2 = 6^2 + 8^2$

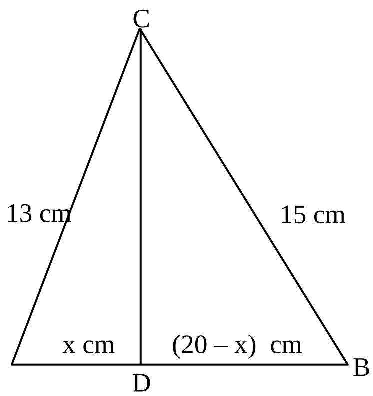
$s^2 = 100$

$s = \sqrt{100}$

$s = 10$

c. Menentukan luas segitiga sembarang jika diketahui panjang sisi-sisinya

Contoh:



Diketahui ΔABC, dengan AB = 20 cm, BC = 15 cm dan AC = 13 cm seperti gambar di samping. Hitunglah garis tinggi CD dan tentukan luasnya.

Penyelesaian:

Ada dua persamaan

Persamaan I $CD^2 = AC^2 - AD^2$

Prsamaan II $CD^2 = BC^2 - BD^2$

Persamaan I $CD^2 = 13^2 - x^2$

$CD^2 = 169 - x^2$

Persamaan II $CD^2 = BC^2 - BD^2$

$CD^2 = 15^2 - (20 - x)^2$

$CD^2 = 225 - (400 - 40x + x^2)$

$CD^2 = 225 - 400 - 40x - x^2$

Karena $CD^2 = 169 - x^2$, maka

$169 - x^2 = 225 - 400 + 40\ x - x^2$

$= 225 - 400 + 40\ x - x^2 - 169 + x^2$

$-40x = 225 - 400 - 169$

$- 40x = -334$

$= \dfrac{-334}{-40}$

$x = 8{,}6$

$x = AD$

Maka panjang $CD^2 = 169 - (8{,}6)^2$

$CD^2 = 169 - 73{,}96$

$CD^2 = 85{,}04$

$CD = \sqrt{85{,}04}$

$CD = 9{,}22$

Jadi tinggi segitiga ABC tersebut adalah 9,22 cm.

Sedangkan luas ΔABC tersebut adalah:

$= \dfrac{1}{2}$ x 20 x 9,22

= 10 x 9,22

= 92,2 cm^2

7. Rumus Heron

Luas suatu segitiga yang diketahui panjang ketiga sisinya dapat dihitung dengan rumus Heron (seorang ahli teknik dan matematikawan Mesir kuno), yang diturunkan dari rumus tersebut di atas. Pada modul ini kita hanya memakai rumus tersebut. Bentuk rumusnya adalah sebagai berikut:

$$L = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

dengan $s = \dfrac{a+b+c}{2}$ (setengah keliling segitiga)

L = luas segitiga dengan panjang sisinya masing-masing a, b, dan c.

Contoh:

1. Pada ΔABC diketahui $\angle A = 27{,}1^{O}$, $b = 16{,}4$ $c = 2{,}33$. Tentukan luas daerah segitiga tersebut!

   Penyelesaian:

   $$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}\ bc \sin A \\ &= \frac{1}{2}\ (16{,}4)\ (2{,}33)\ (0{,}4555) \\ &= 8{,}7 \end{aligned}$$

2. Tentukan luas segitiga ABC, jika diketahui a = 6, b = 3, c = 5

   Penyelesaian:

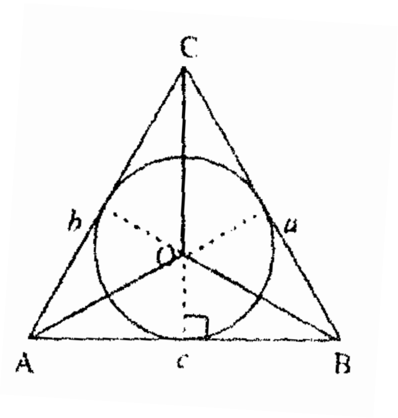
   $$\begin{aligned} s &= \frac{a+b+c}{2} \\ &= \frac{1}{2}\ (6 + 3 + 5) \\ &= 7 \end{aligned}$$

   $$\begin{aligned} L &= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \\ &= \sqrt{7(7-6)(7-3)(7-5)} \\ &= 2\sqrt{14} \end{aligned}$$

Rumus Heron dapat dikembangkan untuk mencari panjang jari-jari lingkungan dalam dan lingkungan luar suatu segitiga.

Menentukan jari-jari lingkaran dalam suatu segitiga

Perhatikan gambar berikut:



Luas ΔABC = Luas ΔAOB + Luas ΔOAC + Luas ΔOBC

$$\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \frac{1}{2}\text{ cr} + \frac{1}{2}\text{br} + \frac{1}{2}\text{ar}$$

$$= \frac{1}{2}\text{(r (a + b+ c)}$$

$$= \text{rs}$$

Maka

$$r = \frac{\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{\sqrt{s^2}}$$

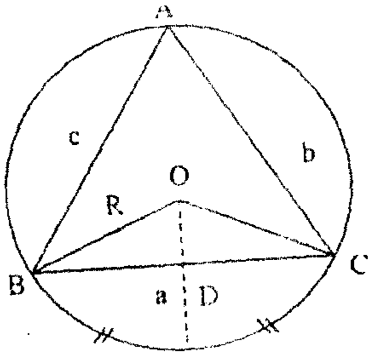
$$= \frac{\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{s}$$

$$= \sqrt{\frac{s(s-a)(s-b)(s-c)}{s^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$$

Menentukan Jari-jari Lingkaran Luar suatu Segitiga

Perhatikan gambar berikut:



Besar sudut A = $\frac{1}{2}$ panjang busur BC, dan besar sudut BOD = $\frac{1}{2}$ panjang busur BC sehingga sin A = sin (BOD) = $\frac{\frac{1}{2}a}{R}$. Sedangkan luas ABC = $\frac{1}{2}$ bc sin A maka

Luas segitiga ABC = $\frac{1}{2}bc \frac{\frac{1}{2}a}{R}$ = $\frac{abc}{4R}$ …………………………………………...(1)

Menurut rumus Heron luas segitiga ABC = $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ ……………..(2)

Dari (1) dan (2) didapat $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ = $\frac{abc}{4R}$

Jadi R = $\frac{abc}{\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}$

Contoh:

Tentukan jari-jari lingkaran luar dan jari-jari lingkaran dalam segitiga ABC, jika diketahui a = 6, b = 3, c = 5.

Penyelesaian:

s = 7

Jari-jari lingkaran luar R $= \dfrac{(6)(3)(5)}{4\sqrt{(7)(1)(4)(2)}}$

$= \dfrac{90}{8\sqrt{14}}$

$= \dfrac{45}{56}\sqrt{14}$

≈ 3

Jari-jari lingkaran dalam r $= \sqrt{\dfrac{(1)(4)(2)}{7}}$

$= \sqrt{\dfrac{8}{7}}$

$= \dfrac{1}{7}\sqrt{56}$

$\approx 1{,}07$