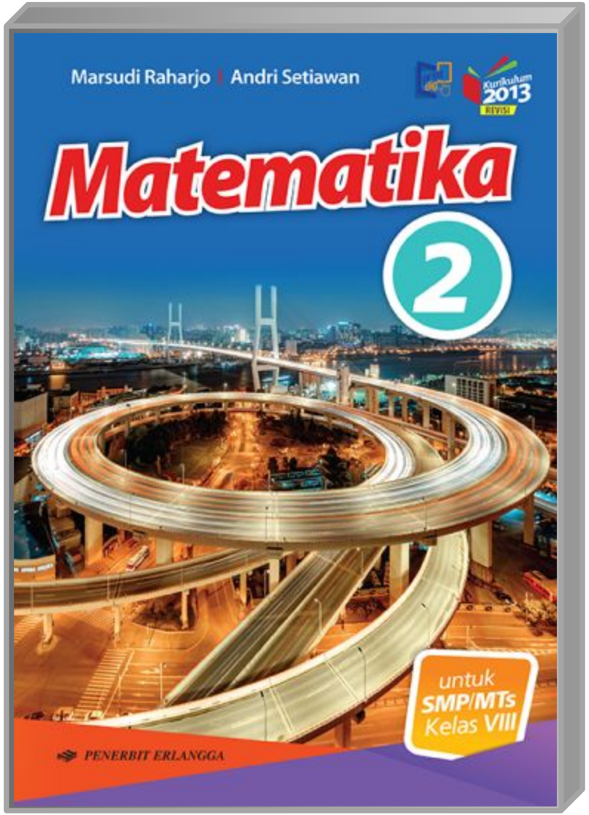


Media Pembelajaran

MATEMATIKA

Untuk SMP/MTs Kelas VIII

TEOREMA PYTHAGORAS

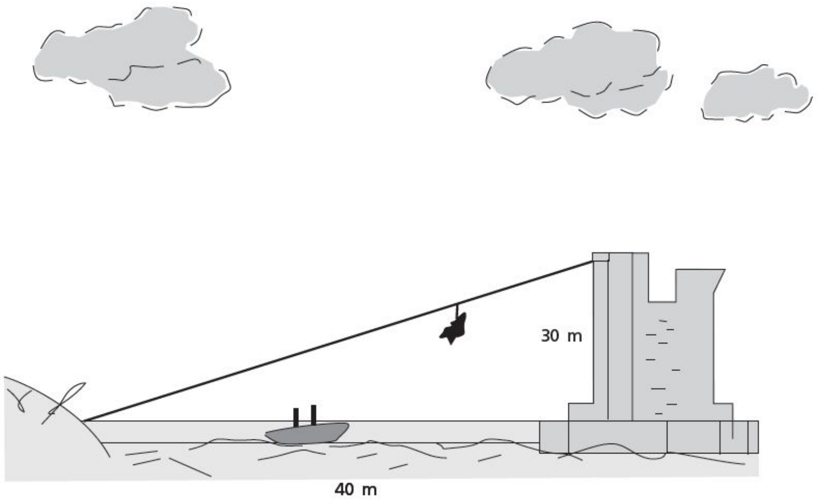
Sumber: *shutterstock.com*

PETA KONSEP

Teorema Pythagoras

- Definisi
- Pembuktian
- Kebalikan dari Teorema Pythagoras
- Sifat-Sifat Sudut Istimewa
- Pemecahan Masalah

Observasi



Sumber: *dokumen penerbit*

Seorang tentara sedang dalam misi penyelamatan wisatawan yang terjebak di atas sebuah menara pengawas yang berada di lepas pantai.

6.1 MENEMUKAN DAN MEMBUKTIKAN TEOREMA PYTHAGORAS

A. Menemukan Teorema Pythagoras pada Segitiga Siku-siku

Kita akan mempelajari masalah-masalah khusus tentang hubungan antara ketiga sisi segitiga siku-siku. Perhatikan gambar berikut.

Kini amati secara saksama bahwa:

(1) Luas persegi *BCGH*

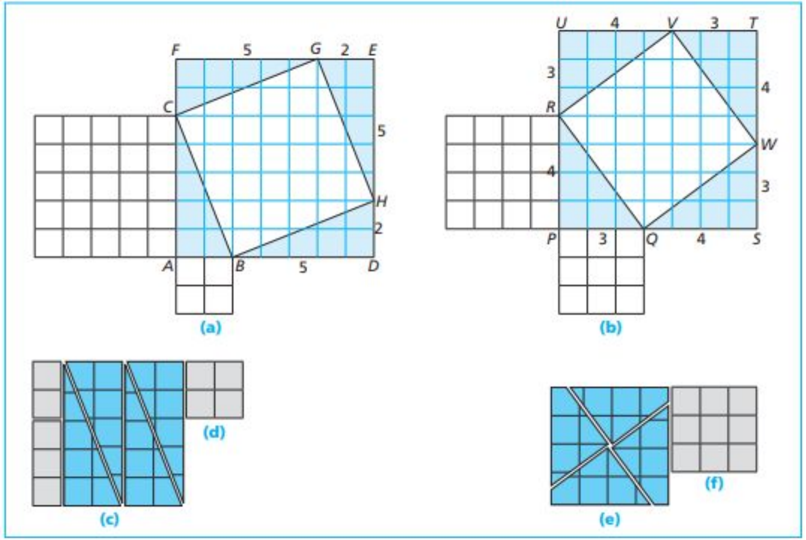
$= \text{Luas persegi } ADEF - \text{Luas } (\Delta ABC + \Delta CFG + \Delta GEH + \Delta BDH)$

$= 29$ satuan

(2) Luas persegi *QRVW*

$= \text{Luas persegi } PSTU - \text{Luas } (\Delta PQR + \Delta UVR + \Delta TVW + \Delta SWQ)$

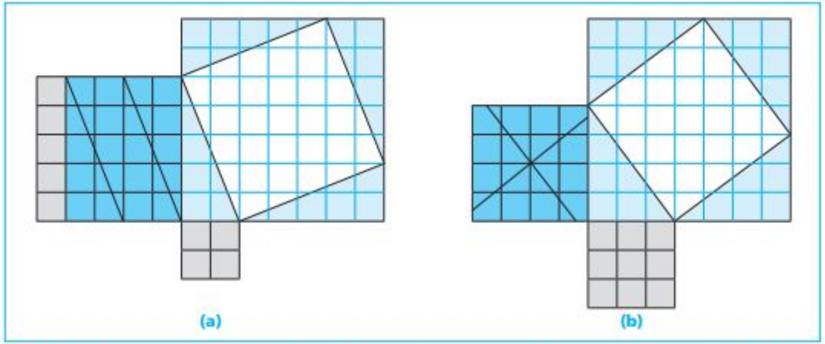
$= 29$ satuan



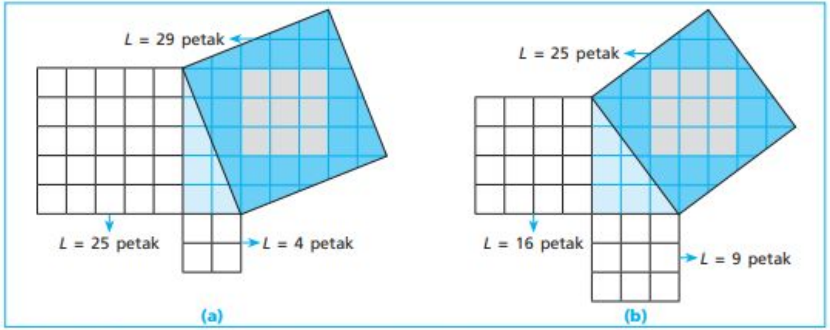
Gambar 6.2 Menyelidiki luas daerah persegi panjang

Jika kumpulan potongan (c) dan (d) serta (e) dan (f) masing-masing dimasukkan ke bangun-bangun persegi yang ada di bagian atasnya, maka hasilnya akan seperti Gambar 6.3 berikut.

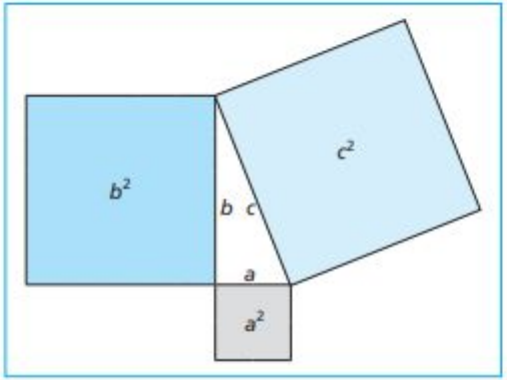
Selanjutnya, pindahkan potongan-potongan yang berada pada persegi-persegi yang ada di bagian kiri dan persegi yang ada di bagian bawah Gambar 6.3 (a) dan (b) ke persegi kosong yang terdapat pada bagian kanan atas, hingga diperoleh hasil seperti yang ditunjukkan pada Gambar 6.5 berikut. Amati khususnya untuk daerah-daerah persegi pada bagian-bagian sisi tegak dan sisi miringnya.



Gambar 6.3 Peragaan menempelkan potongan (c) dan (d) dan potongan (e) dan (f) masing-masing ke persegi di atasnya



Gambar 6.5 Peragaan menentukan luas masing-masing persegi yang terbentuk



Gambar 6.6 Hasil peragaan hubungan antara luas persegi sisi siku-siku dengan luas persegi sisi miringnya

Jika kedua bentuk peragaan pada Gambar 6.5 kita nyatakan secara umum, maka hasilnya adalah seperti gambar berikut (Gambar 6.6).

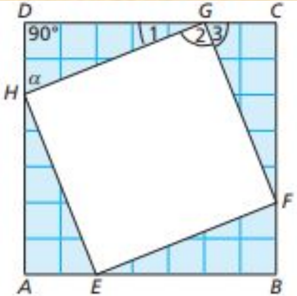
Jumlah luas persegi sisi tegak, "$a^2 + b^2$" sama dengan luas persegi sisi miring c^2 ?" Secara aljabar berarti:

"$a^2 + b^2 = c^2$"

Untuk memastikan kebenaran atau ketidakbenaran dugaan "jumlah luas persegi sisi siku-sikunya sama dengan luas persegi sisi miring", secara formal matematika pengujiannya harus dilakukan secara deduktif. Kesimpulan tersebut dikenal sebagai teorema Pythagoras pada segitiga siku-siku.

B. Membuktikan Teorema Pythagoras secara Deduktif

1. Pembuktian bahwa Segi Empat yang Ada di Sisi Miringnya (*EFGH*) Berbentuk Persegi



Gambar 6.7 Pembuktian bahwa ΔDGH siku-siku

Perhatikan penalaran berikut. Segi empat *ABCD* berbentuk persegi. Keempat segitiga siku-siku yang berada di bagian-bagian pojoknya kongruen (bentuk dan ukurannya sama).

Kesimpulan

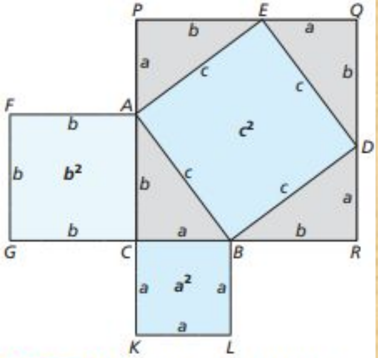
Karena $\angle G_2 = 90°$, terbukti bahwa $\angle G_2$ siku-siku. Dengan cara yang sama, akan terbukti pula bahwa $\angle E_2$, $\angle F_2$, dan $\angle H_2$ juga sudut siku-siku. Jadi, *EFGH* merupakan segi empat yang berbentuk persegi.

2. Pembuktian Kebenaran Teorema Pythagoras secara Deduktif

Perhatikan Gambar 6.8. Segitiga *ABC* siku-siku. Panjang sisi ΔABC di depan sudut *A*, *B*, dan *C* berturut-turut adalah *a*, *b*, dan *c* sehingga panjang sisi persegi *ACGF*, *BCKL*, dan *ABDE* berturut-turut adalah *b*, *a*, dan *c*.

(i) Jumlah luas persegi yang dibentuk oleh sisi-sisi tegaknya
$\longrightarrow$ Luas *BCKL* + luas *ACGF* = $a^2 + b^2$… (1)

(ii) Jumlah luas persegi yang dibentuk oleh sisi-sisi miringnya
$\longrightarrow$ Luas *ABDE* = c^2 … (2)
$\longrightarrow$ Luas *ABDE* = $a^2 + b^2$… (3)



Gambar 6.8 Peragaan pembuktian kebenaran teorema Pythagoras

Perhatikan bahwa: (1) = (2) = (3) atau $\boxed{a^2 + b^2 = c^2}$

Pada segitiga siku-siku, jumlah luas persegi yang dibentuk oleh masing-masing sisi siku-sikunya sama dengan luas persegi yang dibentuk oleh sisi miringnya.

Rumus yang ditandai dengan tanda petak di atas dikenal sebagai rumus/teorema Pythagoras.

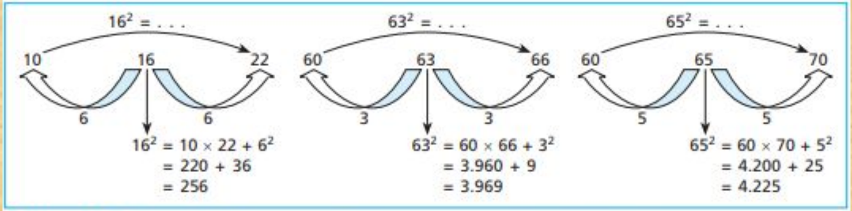
3. Teknik Penarikan Akar Kuadrat menurut Rudolff

Dengan teknik perhitungan Rudolff, bilangan yang ditarik akarnya dipisahkan dua angka-dua angka dari belakang. Pengerjaan penarikan akar dimulai dari angka terdepan.

Selain cara penarikan akar dengan teknik Rudolff tersebut, masih ada satu teknik lagi. Teknik yang dimaksud adalah teknik menguadratkan dengan cara cepat. Teknik tersebut diperoleh dari identitas/kesamaan aljabar berbentuk:

$$a^2 = (a + b)(a - b) + b^2$$

Dengan menggunakan identitas aljabar tersebut, pengkuadratan suatu bilangan dapat dilakukan secara lebih cepat dan lebih mudah. Misalkan kita akan menghitung kuadrat dari bilangan 16 dan 65. Gambaran teknik perhitungannya adalah sebagai berikut.

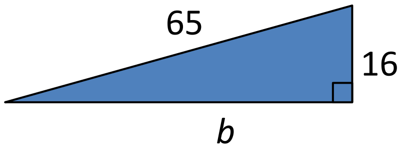


Gambar 6.9 Skema teknik pengkuadratan menggunakan identitas aljabar

Teknik Menguadratkan

1. Letakkan di bagian tengah bilangan yang akan dikuadratkan, misalkan 16.
2. Naikkan atau turunkan bilangan 16 tersebut ke bilangan yang perkaliannya mudah dicongak. Misalnya, bilangan yang perkaliannya mudah dicongak adalah 10 atau 20.
3. Jika 16 kita turunkan ke bilangan 10, berarti turun 6. Karena diturunkan 6, maka bilangan di sebelah kanannya harus dinaikkan 6 sehingga menjadi 22. Sebaliknya, jika kita memilih 16 dinaikkan ke bilangan 20, yakni naik 4, maka bilangan di sebelah kirinya harus diturunkan 4 menjadi 12.
4. Perhatikan kedua cara menguadratkan bilangan 16 tersebut. Diperoleh keduanya memberikan hasil akhir sama, yakni 256.
5. Dengan cara yang sama akan kita dapatkan bahwa $16^2 = 256$.

Contoh Soal



Hitunglah panjang sisi tegak segitiga di samping yang belum diketahui jika panjang sisi miring dan salah satu sisi tegaknya pada suatu segitiga siku-siku masing-masing adalah 16 dan 65 satuan.

Jawab:

Misalkan panjang sisi tegak lainnya b. Dengan menggunakan teorema Pythagoras $a^2 + b^2 = c^2$, didapat:

$b^2 = c^2 - a^2$

$$b = \sqrt{c - a}$$

$$b = \sqrt{65^2 - 16^2}$$

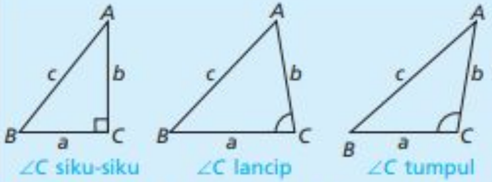
$b = 63 \longrightarrow$ Jadi, panjang sisi tegak lainnya adalah $b = 63$ satuan.

Kerjakan Latihan 1 halaman 156 – 157

6.2 KEBALIKAN (KONVERS) DARI TEOREMA PYTHAGORAS

A. Pembuktian secara Kontekstual

Secara umum (generalisasi), untuk setiap ΔABC berlaku:



Gambar 6.12 Berbagai bentuk segitiga ABC

ΔABC dengan c sisi terpanjang.

1. Jika ΔABC siku-siku $\Rightarrow c^2 = a^2 + b^2$
2. Jika ΔABC lancip $\Rightarrow c^2 < a^2 + b^2$
3. Jika ΔABC tumpul $\Rightarrow c^2 > a^2 + b^2$.

Mengacu pada generalisasi tersebut, untuk selanjutnya yang dimaksud sebagai teorema kebalikan (konvers) dari teorema Pythagoras adalah sebagai berikut.

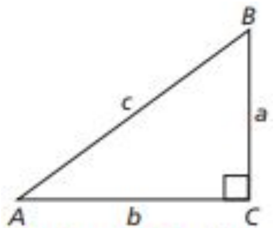
Teorema kebalikan (*konvers*) dari teorema Pythagoras

Jika a, b, dan c adalah panjang sisi-sisi ΔABC dengan c sisi terpanjang dan berlaku bahwa $c^2 = a^2 + b^2$, maka ΔABC adalah segitiga siku-siku.

B. Pembuktian secara Formal (Deduktif)

Masalah

Perhatikan Gambar 6.13. Diketahui ΔABC dengan sisi-sisi di hadapan masingmasing sudutnya adalah a, b, dan c. Jika sisi terpanjang adalah c dan berlaku: $c^2 = a^2 + b^2$, dapatkah kamu buktikan bahwa ΔABC adalah segitiga siku-siku?



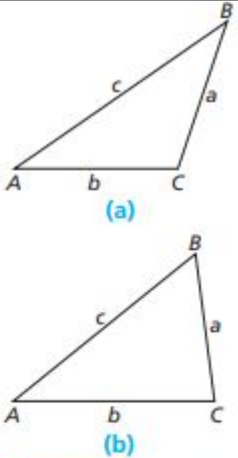
Gambar 6.13 Segitiga siku-siku ABC

Bukti

Bukti teorema ini hanya dapat dilakukan menggunakan pembuktian tak langsung, yakni pembuktian dengan pengandaian bahwa ΔABC yang diketahui bukan segitiga siku-siku. Jika dalam penyelidikannya dijumpai adanya kontradiksi, konsekuensinya pernyataan yang diandaikan tersebut dinyatakan salah. Agar menjadi pernyataan yang benar, pengandaian itu harus diingkar.

Tabel 6.3 Proses pembuktian segitiga ABC adalah segitiga siku-siku

Pernyataan	Alasan
1. Andaikan ΔABC dengan c sisi terpanjang memenuhi $c^2 = a^2 + b^2$ *bukan* segitiga siku-siku.	1. Diandaikan
2. Jika ΔABC segitiga lancip dan c sisi terpanjangnya, maka $c^2 < a^2 + b^2$.	2. Sisi c adalah sisi terpanjang segitiga lancip
3. Jika ΔABC segitiga tumpul dan c sisi terpanjang, maka $c^2 > a^2 + b^2$	3. Sisi c adalah sisi terpanjang segitiga tumpul
4. Dari pernyataan (2) dan (3) berarti: $c^2 \neq a^2 + b^2$.	4. Kesimpulan dari pernyataan 2 dan 3
5. $c^2 \neq a^2 + b^2$ kontradiksi (bertentangan) dengan pengandaian bahwa ΔABC bukan segitiga siku-siku, sehingga benar yaitu ΔABC dengan $c^2 = a^2 + b^2$ adalah segitiga siku-siku.	5. Terjadi kontradiksi dengan pengandaian sehingga konsekuensinya pengandaian itu harus diingkar.
Terbukti (*QED*)	

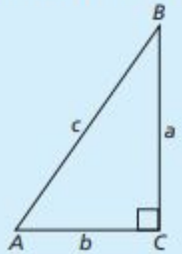


Gambar 6.14 Segitiga *ABC* bukan segitiga siku-siku

Pada pembuktian secara kontekstual, sudah terbukti jika pada ΔABC dengan sisi terpanjang c dipenuhi syarat $c^2 = a^2 + b^2$, maka ΔABC adalah segitiga siku-siku dan sebaliknya juga terbukti c sisi terpanjang ΔABC dipenuhi $c^2 = a^2 + b^2$. Diperoleh ΔABC adalah segitiga siku-siku sehingga pembuktian teorema Pythagoras terbukti.

Kesimpulan

Untuk setiap ΔABC siku-siku, berlaku teorema Pythagoras:



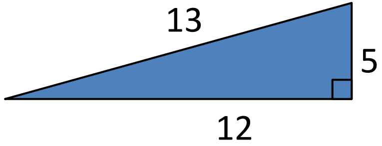
ΔABC dengan sisi terpanjang c adalah segitiga siku-siku $\Leftrightarrow c^2 = a^2 + b^2$.
Dibaca: "Segitiga ABC dengan sisi terpanjang c adalah segitiga siku-siku jika dan hanya jika $c^2 = a^2 + b^2$".

Contoh Soal

Selidiki apakah tripel bilangan 12, 5, dan 13 merupakan ukuran panjang sisi-sisi dari sebuah segitiga siku-siku?

Jawab:

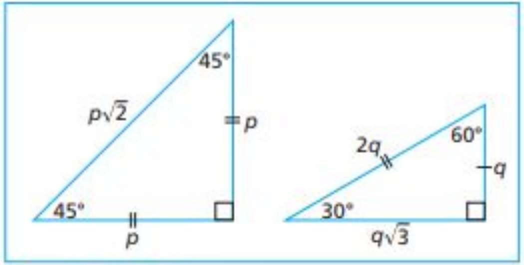
Bilangan terbesar pada tripel (12, 5, 13) adalah 13. Pada segitiga tersebut, 13 adalah ukuran sisi yang terpanjang dan panjang sisi siku-sikunya adalah 12 satuan dan 5 satuan.



Karena benar bahwa $13^2 = 12^2 + 5^2$, maka terbukti bahwa segitiga dengan panjang sisi-sisinya 12, 5, dan 13 adalah segitiga siku-siku. Sudut siku-sikunya adalah sudut yang menghadap sisi terpanjang

Kerjakan Latihan 2 halaman 161 – 162

6.3 SIFAT PERBANDINGAN SISI SEGITIGA SIKU-SIKU BERSUDUT ISTIMEWA



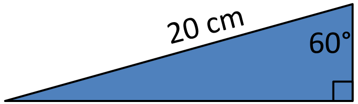
Gambar 6.20 Panjang masing-masing sisi segitiga yang terbentuk dari pemotongan persegi dan segitiga sama sisi

Sudut-sudut yang memiliki besar 30°, 45°, dan 60° dikenal sebagai sudut istimewa. Mengapa? Sebab sudut-sudut yang besarnya 30°, 45°, dan 60° dapat dilukis menggunakan jangka dan penggaris. Sudut-sudut istimewa selengkapnya adalah seperti berikut.

0°, 30°, 45°, 60°, dan 90°

Perhitungan-perhitungan yang melibatkan sudut-sudut istimewa akan sering kamu jumpai pada ilmu-ilmu lainnya seperti fisika, ekonomi, dan teknik konstruksi. Sebab, untuk mendapatkan apa sebenarnya yang diketahui dan apa saja yang harus dihitung tidak harus melihat tabel dan tidak harus menggunakan kalkulator.

Contoh Soal



Diketahui sisi terpanjang dari sebuah segitiga sikusiku yang salah satu sudutnya 60° adalah 20 cm seperti gambar di samping. Tentukan besar sudut dan panjang sisi-sisi lainnya.

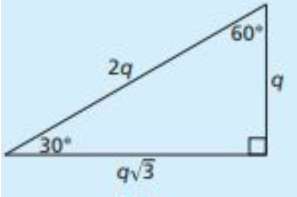
Jawab:

Misalkan panjang sisi terpendeknya q. Dari segitiga siku-siku yang diketahui, salah satu sudutnya 60° yang merupakan sudut istimewa, maka ada kekhususan yang harus kita cermati, yaitu sudut lainnya pasti 30° dan perbandingan sisi-sisinya mengacu pada sifat 2 segitiga siku-siku seperti pada Gambar (a).

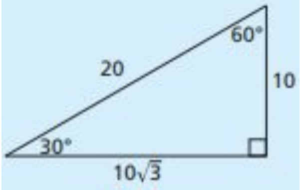
Dengan membandingkan unsur-unsur antara kedua gambar yang bersesuaian itu, maka akan kita peroleh

$$2q = 20 \Leftrightarrow q = 10$$

Jadi, besar sudut lainnya 30° dan panjang sisi yang ketiga adalah $q\sqrt{3} = 10\sqrt{3}$ sehingga panjang sisi dan besar sudut selengkapnya ditunjukkan pada Gambar (b).



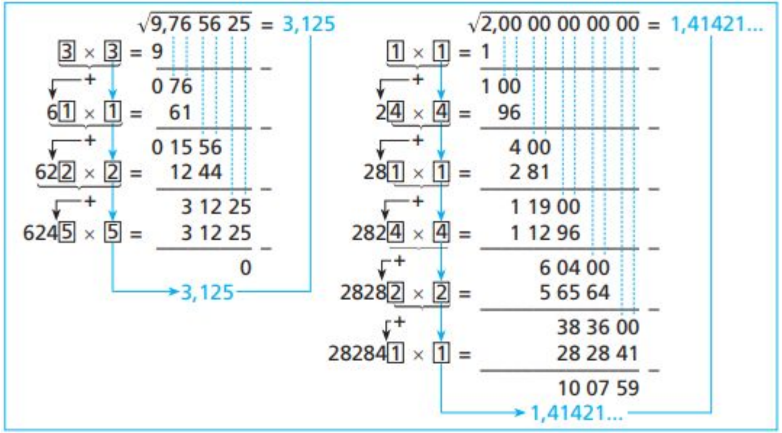
(a)



(b)

6.4 TEKNIK PENARIKAN AKAR DAN PENYEDERHANAAN BENTUK AKAR

Teknik menarik akar kuadrat baru ditemukan di abad ke-16 Masehi oleh Rudolff seorang matematikawan Swiss di tahun 1530 M. Teknik yang dimaksud adalah seperti berikut.



Gambar 6.21 Skema teknik penarikan akar

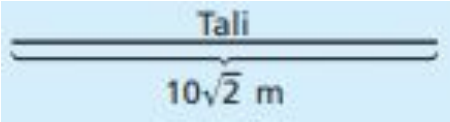
Perhatikan bahwa:

❖ Bilangan $\sqrt{9,765625}$ adalah bilangan rasional karena $\sqrt{9,765625}$ hasilnya tepat sama dengan 3,125.

❖ Bilangan $\sqrt{2}$ adalah bilangan bentuk akar yang bukan bilangan rasional karena $\sqrt{2}$ hasilnya 1,41421... , yakni berupa bilangan pecahan desimal dengan angka-angka di belakang koma tak pernah berakhir. Artinya, $\sqrt{2}$ adalah bilangan bentuk akar yang bukan bilangan rasional.

Contoh Soal

Tentukan panjang sebenarnya dari sebuah tali sepanjang $10\sqrt{2}$ meter.



Jawab:

Panjang tali = $10\sqrt{2}$ m

= (10 × 1,41421) m

= 14,1421 m

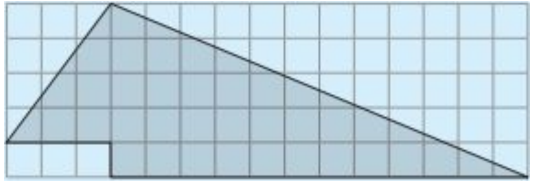
= 14,14 m

= 1414 cm

Teknik **menarik akar** (khusus penarikan akar kuadrat/pangkat dua) cukup dengan istilah ”**menarik akar**” saja yang maknanya adalah **menarik akar kuadrat**. Saat ini, teknik menarik akar dengan cara ini sudah jarang dilakukan dalam kehidupan sehari-hari karena lebih rumit daripada perkalian dasar atau pembagian dasar susun ke bawah. Akan tetapi, sebagai peserta didik, kamu perlu mengetahuinya.

6.5 PENGGUNAAN RUMUS PYTHAGORAS DALAM PEMECAHAN MASALAH

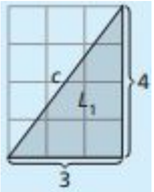
Contoh Soal

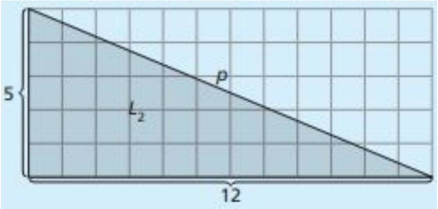


Tentukan keliling bangun datar yang diarsir berikut.

Jawab:

Menentukan keliling suatu bangun datar berarti menghitung jumlah panjang sisi-sisi bagian luar yang membatasi bangun datar tersebut. Perhatikan gambar berikut.





Lanjut

Contoh Soal

Gunakan teorema Pythagoras untuk menghitung panjang sisi miringnya. Perhatikan teknik perhitungannya.

$$
\begin{aligned}
c &= \sqrt{3^2 + 4^2} \\
&= \sqrt{9 + 16} \\
&= \sqrt{25} = 5 \text{ satuan}
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
p &= \sqrt{12^2 + 5^2} \\
&= \sqrt{144 + 16} \\
&= \sqrt{169} = 13 \text{ satuan}
\end{aligned}
$$

Dengan demikian, gambaran tentang ukuran masing-masing sisi dari bangun tersebut selengkapnya adalah seperti gambar di samping. Keliling bangun = 5 + 13 + 12 + 1 + 3 = 34 satuan.

Jadi, keliling bangun tersebut adalah 34 satuan.

Kerjakan Latihan 3 halaman 170 – 172

Kerjakan Latihan Ulangan Bab 6 halaman 174 – 178