



UNIVERSITÉ DE NANTES  
FACULTÉ DES  
SCIENCES ET TECHNIQUES



MASTER MATHÉMATIQUES ANALYSE NUMÉRIQUE CALCUL  
SCIENTIFIQUE

---

# Optimization solver benchmark for 3D topology optimization problems

---

G.O.AGYEKUM

23 juillet 2019

# Optimization solver benchmark for 3D topology optimization problems

G.O.AGYEKUM

23 juillet 2019

Le but du stage est d'évaluer et de comparer les performances de plusieurs solveurs d'optimisation, quand appliqués à divers problèmes d'optimisation topologique de structures mécaniques sous contraintes dans le cadre de l'élasticité linéaire. Une bibliothèque complète et représentative de problèmes de compliance minimale d'une structure élastique et de minimum volume pour différentes tailles E.F est développée pour cette analyse comparative.

La compliance minimale ou le minimum volume est en fait un problème "mal posé", c'est à dire qu'en général il n'existe pas de solution optimale et les solutions calculées par des méthodes numériques classiques sont dépendantes d'un choix initial de contrainte<sup>1</sup> et du maillage...Mais la méthode SIMP<sup>2</sup>, combinée à la méthode "density filter"<sup>3</sup> basée sur la théorie de l'homogénéisation permet de rendre ce problème bien posé.

Plusieurs solveurs classiques y compris MMA,GCMMA,OC<sup>4</sup>, et des solveurs dans IPOPT, NLOPT sont répertoriés dans la bibliothèque et leurs performances sont évaluées et comparées à l'aide d'une courbe de performance.

Quand c'est possible les solveurs sont comparés quand appliqués à des problèmes aux formulations Nested et/ou SAND. Tous les solveurs sont branchés dans le code TopOpt<sup>5</sup> PETSc et les tests numériques sont effectués sur HPC.

## Table des matières

<b>1</b>	<b>INTRODUCTION</b>	<b>3</b>
1.1	Motivations . . . . .	3
1.2	État de l'art . . . . .	3
1.2.1	Optimisation topologique des structures mécaniques . . . . .	3
1.2.2	Les différents problèmes d'optimisation topologique des structures mécaniques	4
1.2.3	La compliance minimale . . . . .	5
1.2.4	Minimum Volume . . . . .	7
1.2.5	La méthode SIMP : approche numérique d'optimisation topologique . . . . .	7
1.2.6	Exemple classique d'optimisation topologique : Top88 et Top3d . . . . .	8
1.2.7	Présentation de quelques d'optimiseurs . . . . .	16
1.2.8	Exemple de Benchmarking en 2D . . . . .	16

---

1. quotient module de Young du matériau  $E_0$  et module de Young artificiel  $E_{min}$  d'éléments structuraux de propriétés caractéristiques proches du vide

2. Méthode d'interpolation du matériau

3. Méthode numérique qui assure l'existence d'une solution optimale

4. Méthodes numériques classiques d'ordre 1 couramment utilisés en optimisation topologique de structures

5. Bibliothèque en C++ développée par N. Aage, E. Andreassen, B. Lazarov

<b>2</b>	<b>Implémentation et benchmarking en 3D sur HPC</b>	<b>16</b>
2.1	Implémentation dans Topopt Petsc . . . . .	16
2.2	Résultats numériques du benchmarking sur HPC . . . . .	16
<b>3</b>	<b>Conclusion et futur travail</b>	<b>16</b>

# 1 INTRODUCTION

## 1.1 Motivations

Le besoin d'optimiser une fonction objectif est fréquent dans les tâches de conception industrielle et de gestion. Dans la phase de conception d'un nouveau produit, par exemple, l'ingénieur veut non seulement minimiser les coûts, mais aussi probablement maximiser les performances, minimiser le poids ou maximiser la durée de vie du produit. En pratique, la fonction objectif n'est souvent pas donnée sous une forme explicite, mais elle est définie de manière implicite, par exemple comme le résultat d'une simulation.

Dans un tel cas, on peut utiliser des méthodes classiques comme la méthode OC, MMA et GCMMA pour résoudre le problème. Cependant, de nombreux algorithmes existants sont disponibles et ce n'est pas simple pour un utilisateur de choisir un algorithme à appliquer à un nouveau problème inconnu.

C'est là que l'analyse des performances des algorithmes rentre en jeu. Si les difficultés observées dans les problèmes pratiques sont couvertes par un ensemble de problèmes test bien compris, les algorithmes peuvent être comparés afin de déterminer quels algorithmes fonctionnent mieux que d'autres. C'est pourquoi, on visera à évaluer des combinaisons de méthodes d'optimisation et de formulations dans les problèmes d'optimisation topologique à l'aide d'une courbe de performances pour déterminer si elles sont efficaces, robustes et fiables pour cette classe de problèmes.

Les solveurs plus généraux dans IPOPT et NLOPT sont comparés aux méthodes d'optimisation topologique plus couramment utilisées (classiques) comme OC, MMA et GCMMA.

## 1.2 État de l'art

### 1.2.1 Optimisation topologique des structures mécaniques

Pour guider le choix des solutions techniques ou dimensionner des sous-ensembles vers une solution moins mauvaise que les autres, les bureaux d'études emploient de plus en plus des méthodes d'optimisation, et en particulier l'optimisation topologique.

Les outils d'optimisation sont utilisés dans de très nombreux domaines dont la gestion de production, la finance, les transports aériens et ferroviaires entre autres ...ET ces méthodes sont utilisés en particulier dans les bureaux d'études mécaniques en génie civil, construction navale, aéronautiques et automobile entre autres...Et certains outils d'optimisation sont spécifiques à un type de problème, par exemple la méthode OC<sup>6</sup> et ont été développés pour répondre à un besoin précis, d'autres sont plus généraux...

Mais les techniques d'optimisation reposent sur un ensemble de définitions d'objets mathématiques importantes et sont souvent difficiles à comprendre et à utiliser... Les routines d'optimisation nécessitent la formulation analytiques du problème et celui-ci doit se tourner vers le calcul numérique.

Grâce à l'avènement de l'ordinateur, l'idée de conception optimale (ou vers une solution meilleure) des structures mécaniques est possible... Sur la base d'une conception initiale définie par un certain nombre de paramètres de valeur variable, appelés variables de conception, l'optimisation des structures vise à déterminer de manière algorithmique (ou automatique) la conception qui est

---

6. Optimal criteria

la meilleure au regard des critères liés à des performances structurales. La conception optimale est trouvée par un procédé itératif alternant analyse structurale et application d'une technique d'optimisation.

Mais la physique de certains problèmes à optimiser est souvent traduite par des équations aux dérivées partielles dont la solution, si elle existe, est très souvent inconnue... Et utiliser diverses techniques numériques comme par exemple méthodes des éléments finis permet d'approcher cette solution. Dans ce cadre on en considèrera la méthode des éléments finis (M.E.F) pour l'analyse structurale afin de déterminer une conception optimale... On ne peut pas faire de l'optimisation sans la maîtrise de la M.E.F, de la modélisation et le maillage.

Le problème d'optimisation topologique est formulé comme étant la recherche de la distribution optimale des propriétés matérielles dans un domaine de conception initiale prescrit... Ce type d'optimisation s'applique aux structures discrétisées par des éléments de barres, de poutres (M.E.F discrets), de membranes, de plaques ou de coques, et de volumes (M.E.F continues).

Le but de l'optimisation topologique, par exemple dans le cas M.E.F discrets c'est de déterminer quelles barres ou poutres vont conserver les propriétés mécaniques du matériau les constituant à la solution, les autres éléments structuraux étant, eux affectés de propriétés mécaniques proches du vide (ou zéro). Le maillage est donc figé, seules les propriétés mécaniques de la conception changent et ne subit aucune évolution au fur et mesure des itérations... Donc la topologie des éléments et le raffinement du maillage ont une influence sur la conception (ou solution) optimale.

On en considèrera la discrétisation par M.E.F continues... Dont chaque élément fini  $e$  est définie une variable de conception, notée  $\rho_e \in \{0, 1\}$ <sup>7</sup> et appelée pseudo-densité... Le problème est de déterminer l'absence de matière ou non dans chaque élément  $e$  à la solution optimale. Mais dans le cas pratique, on travaille en variables continues qui varient dans l'intervalle  $]0,1[$ ... on évite de prendre des valeurs nulles pour éviter la singularité numérique liée à la suppression complète d'un membre structural... Donc la matrice de rigidité (ou de masse) obtenue par M.E.F continues est toujours définie positive.

Sa mise en œuvre est décrite à la figure 1.

### 1.2.2 Les différents problèmes d'optimisation topologique des structures mécaniques

Comme nous l'avons dit précédemment, l'optimisation topologique des structures mécaniques est la recherche de la distribution optimale de la matière dans un domaine de conception prescrit...Dont la fonction objectif et les contraintes correspondent à des réponses structurales représentant le poids de la structure, et sa raideur. Ces variables de conception, appelée pseudo-densité sont comme l'épaisseur de membres structuraux, les contraintes sur les variables définissent la géométrie de la pièce à concevoir...Celles-ci permettent de paramétrer avec plus ou moins de liberté la structure

7. on parle de Black and white

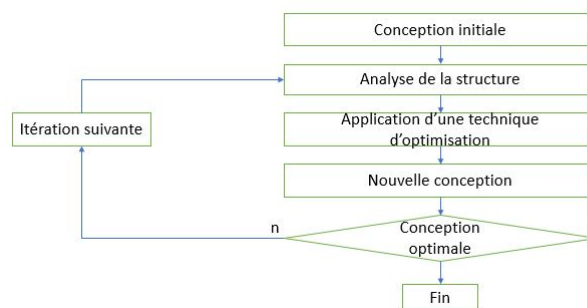


FIGURE 1 – Mise en œuvre de l'optimisation des structures

étudiée... La validité de la solution est fixée par les performances structurales et les restrictions à la conception (ou les contraintes) retenues dans le problème d'optimisation.

En d'autres termes, selon la manière avec laquelle on va paramétrer le problème, on pourra définir différents problèmes d'optimisation... On en considérera deux classes de problèmes d'optimisation topologique des structures mécaniques : la compliance minimale et minimum volume

### 1.2.3 La compliance minimale

La fonction objectif classique en optimisation topologique est la fonction énergie associée à la force appliquée à la structure mécanique... On maximise la raideur de la structure dont on connaît l'encombrement, les conditions limites et les chargements. C'est-à dire qu'on minimise l'énergie associée à la structure... Cette énergie est appelée la compliance. En d'autres termes, on minimise le déplacement sous la charge... La contrainte du problème de minimisation de la compliance est liée au volume de la matière (ou à la masse) à conserver dans le domaine de conception initial... Ainsi le modèle mathématiques du problème continue d'optimisation topologique peut être formulé comme suit :

Etant donné  $\Omega_0$ , domaine de conception initiale... Dans le cadre de l'élasticité linéaire, chercher le tenseur optimale des déformations  $E_{ijkl}(x)$ <sup>8</sup> :  $\Omega_0 \rightarrow \mathbb{R}$  telqu'il minimise :

$$\min_{\tilde{E} \in E_{AD}} l(u(\tilde{E}))$$

,où  $u(E)$  est solution du problème variationnelle (PV) :  $u \in V$  ,  $a(u,v) = l(v) \forall v \in V$ ,

avec :

$$\begin{aligned} a(u,v) &= \int_{\Omega_0} E_{ijkl}(x) \epsilon_{ij}(u) \epsilon_{kl}(v) dx \\ \epsilon_{ij}(u) &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \\ l(v) &= \int_{\Omega_0} \Omega f v dx + \int_{\Omega} \Gamma_N t v dx, \end{aligned}$$

où  $f$  := le chargement,  $t$  := est la traction sur la surface  $\Gamma_N$

L'espace admissible des tenseurs des déformations est définit comme suit :

$$E_{AD} = \{ \tilde{E} : \Omega_0 \rightarrow \mathbb{R} \text{ tq } \exists \Omega \subset \Omega_0 : \tilde{E} = 0 \text{ dans } \Omega_0 \setminus \Omega, \int_{\Omega_{mat}} 1 dx \leq V_f, V_f \text{ est donné} \}$$

Autrement dit, on cherche une conception optimale  $\Omega$  dans un domaine de conception prescrit  $\Omega_0$  dont la contrainte est liée au volume (  $|\Omega|$ ) de la matière (ou masse) à conserver dans le domaine de conception intiale... Et qui minimise la compliance (fonction objectif).

L'approche classique d'optimisation topologique des structures mécaniques est souvent faite à l'aide de la M.E.F... On en considérera parmis les techniques les plus répandues, la méthode d'homogénéisation (Bendsøe et Kikuchi,1988)... Dans cette approche, on associe à chaque élément une densité indiquant la présence ou non de matière. Cette densité,  $\rho(x_e)$  est traduite numériquement par une valeur entre 0 et 1 pouvant évoluer de manière discrète (0-1) ou continue ([0,1])... Autrement dit la densité  $\rho(x)$  est constante par morceaux, ie  $\rho(x) = \chi_{\Omega}(x)$ ,  $\Omega \subset \Omega_0$ ... Dont L'espace admissible des tenseurs des déformations peut s'écrit sous la forme :

$$E_{AD} = \{ E_{ijkl}(x) = E_{ijkl}^0 \chi_{\Omega}(x), |\Omega| \leq V_f \}$$

Cependant cette technique a quelques inconvénients... Tout d'abord, la présence de la densité intermédiaire peut être difficile à interpréter pour la réalisation de la pièce... On peut alors pénaliser les densités intermédiaires en considérant que la raideur évolue selon une loi avec un exposant  $p > 1$

8. c'est un tenseur (ou matrice) symétrique d'ordre 2 servant à décrire l'état de déformation local résultant de contraintes (ou des efforts internes)... Dans le cadre de l'élasticité linéaire le tenseur des déformations est relié au tenseur des contraintes par la loi de Hooke généralisée.

pour la densité...Ainsi l'espace admissible des tenseurs des déformations peut se réécrire sous la forme :

$$E_{AD} = \{E_{ijkl}(x) = E_{ijkl}^0 \rho(x)^p, \int_{\Omega} \rho \leq V_f\}$$

Et il a été prouvé que l'exposant  $p$  est lié au coefficient de Poisson  $\nu^0$  (qui a son tour est lié au tenseur  $E^0$ ) par la relation géométrique :

$$p \geq \max\{15 \frac{1 - \nu^0}{7 - 5\nu^0}, 1.5 \frac{1 - \nu^0}{1 - 2\nu^0}\}$$

Cette approche permet ainsi à une densité intermédiaire de prendre une valeur discrète entre 0-1... Empiriquement, la valeur  $p=3$  est souvent utilisée pour assurer l'existence d'une solution... Mais la solution peut présenter un aspect de damier sur les éléments.

Un filtrage inspiré du traitement d'images fut proposé par Sigmund en 1994 pour éviter l'apparition d'une structure à un aspect de damier (ou plus généralement de trous en dessous d'une certaine échelle)... Cette technique d'homogénéisation, est appelée la méthode SIMP (Solid Isotropic Material with Penalization) combinée à la méthode de filtrage ("density filter")... Et permet de rendre le problème d'optimisation topologique des structures mécaniques bien posé...

En pratique, le problème d'optimisation topologique est formulé comme suit... C'est la formulation équivalente basée sur la M.E.F (ou méthode de Galerkin).

Le système équivalent associé à la formulation,  $a(u,v) = l(v)$  est donné par l'équation d'équilibre d'élasticité linéaire :

$$K(x)U - F = 0,$$

où  $U \in \mathbb{R}^d$  est la variable d'états (ou le vecteur déplacement nodal) et  $x \in \mathbb{R}^n$  est la variable de conception (on dit aussi de design)... La variable  $x$  représente la densité du matériau dans chaque élément  $e$  du maillage... De plus  $F \in \mathbb{R}^d$  est le vecteur de chargement,  $d$  est le nombre de degrés de liberté, et  $n$  le nombre d'éléments dans le maillage... La matrice de raideur (ou rigidité)  $K(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{d \times d}$ , et on suppose  $K(x)$  symétrique, définie positive pour tout variable de conception  $x \in [0, 1]$ ... une petite valeur  $E_{min}$  est incluse dans la définition de la matrice de raideur pour une densité  $\rho(x_e)$  de valeur nulle pour éviter la singularité numérique liée à la suppression complète d'un membre structural.

Il existe différentes manières de modéliser le problème d'optimisation topologique... Dans la première approche la compliance est minimisée sur  $x$  et  $U$ ... Elles sont considérées comme des variables indépendantes.

En outre les équations d'équilibre  $K(x)U - F = 0$  sont explicitement inclus en tant que contraintes d'égalité... La formulation  $(P_S^c)$ , communément appelé SAND (Simultaneous Analysis and Design) et définie sous la forme :

$$\begin{aligned} & \min_{x, U} F^T U \\ \text{sujet à : } & K(x)U - F = 0 \quad (P_S^c) \\ & a^T x \leq V_f; 0 \leq x \leq 1 \end{aligned}$$

est une modélisation du problème de compliance minimale... Le volume relatif (ou élémentaire) à chaque variable de conception  $x_e$  est défini par  $a_e \in \mathbb{R}^n$ , avec  $a_e > 0$ ,  $\forall e=1, \dots, n$ ... Et finalement  $0 < V_f \leq 1$  est la fraction volumique<sup>9</sup>... Le problème  $(P_S^c)$  ainsi défini, est linéaire avec contraintes égalité (non linéaire) et inégalité (linéaire)... De tel problème d'optimisation topologique est généralement caractérisé comme un problème non convexe.

Une autre façon de formuler le problème compliance minimale serait de considérer la fonction objectif comme non linéaire et d'exprimer le chargement  $F$  comme la solution des équations d'équilibre  $K(x)U - F = 0$ ... Et on peut modéliser le problème de compliance minimale par la formulation  $(P_{SNL}^c)$ , qui s'écrit sous la forme :

---

9. C'est la contrainte volume sur  $x$

$$\begin{aligned} \min_{x,U} U^T K(x) U \\ \text{sujet à : } K(x)U - F = 0 \quad (P_{SNL}^c) \\ a^T x \leq V_f; 0 \leq x \leq 1 \end{aligned}$$

En pratique on n'utilise pas cette formulation car la performance des solveurs à la formulation SAND est très similaire à cette formulation....Le nombre de contraintes et de variables peut être réduit dans le problème de compliance minimale si le problème est formulé en utilisant uniquement la variable de conception...Le déplacement provoqué par la force est déterminé par l'équation d'équilibre :

$$U(x) = K(x)^{-1} F$$

Par conséquent l'équation d'états  $U(x) = K(x)^{-1} F$  est ainsi résolu lors de l'évaluation de la fonction objectif....Et la formulation  $(P_N^c)$  communément appelé Nested, permet de modéliser le problème de compliance minimale sous la forme :

$$\begin{aligned} \min_x U(x)^T K(x) U(x) \\ \text{sujet à : } a^T x \leq V_f; 0 \leq x \leq 1 \quad (P_N^c) \end{aligned}$$

C'est la formulation classique en optimisation topologique des structures mécaniques...Cependant l'évaluation de la fonction objectif, du gradient et de la hessienne est plus coûteuse<sup>10</sup>.

On en considèrera la formulation Nested pour modéliser le problème d'optimisation topologique.

#### 1.2.4 Minimum Volume

Les problèmes d'optimisation topologique des structures mécaniques peuvent également être formulés sous la forme d'une minimisation de la structure avec contrainte sur la compliance...Similaire au problème de compliance minimale  $(P_S^c)$ , la formulation SAND au problème de minimum volume  $(P_S^w)$  est formulé sous la forme :

$$\begin{aligned} \min_{x,U} a^T x \\ \text{sujet à : } K(x)U - F = 0; F^T U \leq C; 0 \leq x \leq 1 \quad (P_S^w) \end{aligned}$$

,où  $C > 0$  est une constante donné, c'est la contrainte sur la compliance...Dans la formulation Nested  $(P_N^w)$ , l'équation d'équilibre est satisfaite dans la contrainte d'inégalité non linéaire (ie, contrainte sur la compliance) et il est formulé sous la forme :

$$\begin{aligned} \min_x a^T x \\ \text{sujet à : } U(x)^T K(x) U(x) \leq C; 0 \leq x \leq 1 \quad (P_N^w) \end{aligned}$$

Finalement dans la formulation SANDNL  $(P_{SNL}^w)$ , la contrainte égalité et la contrainte inégalité sont non linéaires :

$$\begin{aligned} \min_{x,U} a^T x \\ \text{sujet à : } K(x)U - F = 0; U^T K(x)U \leq C; 0 \leq x \leq 1 \quad (P_{SNL}^w) \end{aligned}$$

Pour les problèmes de volume minimum, la fonction objectif est linéaire mais la non-linéarité apparaît dans les contraintes.

#### 1.2.5 La méthode SIMP : approche numérique d'optimisation topologique

Les techniques d'optimisation topologique des structures mécanique est actuellement dominé par des méthodes qui utilisent la distribution des propriétés matérielles dans un domaine de conception prescrit...Ces méthodes sont basées sur la théorie de l'homogénéisation.

Le processus d'optimisation topologique a souvent pour objectif de déterminer quels éléments de la structure vont conserver les propriétés mécaniques du matériau les constituant à la solution,

10. notamment le calcul de l'inverse de  $K(x)$

les autres éléments structuraux étants, eux affectés de propriétés mécaniques proches du vide...En d'autres termes on associe à chaque élément une densité  $\rho(x_e)$ , indiquant la présence ou non de matière...Cette densité est traduite numériquement par une valeur entre 0 et 1.

Les modèles d'interpolation du matériau sont très populaires dans le milieu d'optimisation topologique pour convertir le problème 0-1 (problème discret) en un problème continu dans l'intervalle  $[0,1]$ ...Et ces modèles permettent ainsi à une densité intermédiaire de prendre une valeur discrète entre 0-1.

La méthode SIMP est l'une des approches les plus courantes...Dans ce modèle, la densité  $x$  est remplacée par une loi de puissance...Par contre, la solution du problème continu peut présenter un aspect à damier sur les éléments structuraux, que l'approche SIMP ne résout pas...Cependant l'utilisation d'un filtrage inspiré du traitement d'images permet d'éviter l'apparition d'une structure à damier, d'assurer la régularité de la matrice de raideur  $K(x)$  et l'existence d'une solution.

Plus précisément, le filtre de densité (ou le filtrage) est défini de la manière suivante :

Étant donné un élément fini  $e$ , est définie une variable de conception  $\tilde{x}_e$  et appelé densité physique...La variable  $\tilde{x}_e$  dépend d'une moyenne pondérée dans un voisinage de rayon  $r_{min}$  de centre  $e$  :

$$\tilde{x}_e = \frac{1}{\sum_{i \in N_e} \bar{H}_{ei}} \sum_{i \in N_e} \bar{H}_{ei} x_i$$

$$\bar{H}_{ei} = \max(r_{min} - \Delta(e, i))$$

où  $\tilde{x}_e$  est la transformée de la variable de densité  $x_e$  de l'élément  $e$ ,  $N_e$  est l'ensemble des éléments pour lesquelles la distance à l'élément  $e$  (définie par  $\Delta(e, i)$ ) est plus petit que le rayon du filtre  $r_{min}$ ....En pratique cette valeur concrète est tirée de l'équation  $r_{min} = 0.04L_x$ . Où  $L_x$  est la longueur du domaine de conception dans la direction des  $x$  (dans le plan cartésien).

La matrice de raideur modifiée utilisant la méthode SIMP et "density filter" est sous la forme :

$$K(x) = \sum_{e=1}^n (E_v + (E_1 - E_v) \tilde{x}_e^p) K_e$$

Où  $p \geq 1$  et  $E_1$  et  $E_v$  sont les modules de Young du matériau solide et du matériau proche du vide respectivement...Le paramètre  $E_v$  est inclu dans définition de  $K(x)$  pour éviter la singularité numérique liée à la suppression complète d'un membre structural (c'est le cas lorsque la densité  $x$  prends une valeur nulle)...Cette formulation s'est révélée particulièrement efficace dans de nombreux cas.

Empiriquement, la valeur  $p=3$  est souvent utilisée pour assurer l'existence d'une solution...En pratique cette valeur est souvent utilisée (dans les expériences numériques)...Comme illustré à la figure 2, une alternance rapide de valeurs  $\epsilon$  et 1 des pseudo-densités  $\rho(x_e)$  crée une structure à un aspect à damier...Et plus le maillage de la structure est fin, plus l'effet damier est important.

### 1.2.6 Exemple classique d'optimisation topologique : Top88 et Top3d

Top88 est un code en Matlab dont les auteurs sont Erik Andreassen, Anders Clausen, Mattias Schevenels, Boyan S. Lazarov et Ole Sigmund...C'est une version améliorée (en termes de performance de calculs) du code Top99 dont l'auteur est Ole Sigmund.

Le code est implanté à l'aide de 88 lignes de code<sup>11</sup> destiné à résoudre efficacement un problème classique d'optimisation topologique en 2d...Et top3d est version réadapté de Top88 pour 3d...Top88

11. contrairement Top99 qui lui est implanté à l'aide de 99 lignes de code



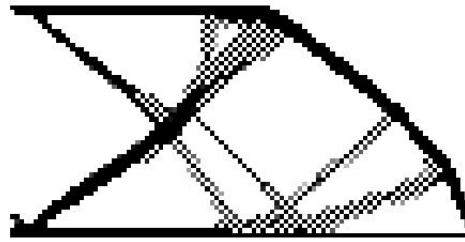


FIGURE 2 – Image de Top88 : Solution avec damier



FIGURE 3 – Image de Top88 : Solution sans damier

génère et résoud des problèmes classique de compliance minimale...On considèrera des exemples d'optimisation de structures de type Michell, "MMB beam"<sup>12</sup> et "Cantilever"<sup>13</sup>

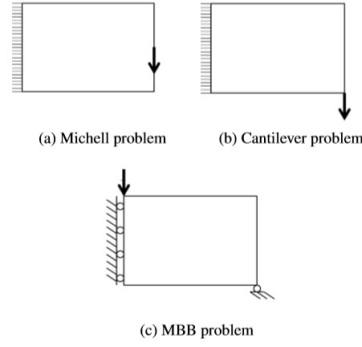
### Problème en 2d : Michell,Cantilever et MBB beam

Le domaine de conception prescrit, les conditions limites et le chargement extérieure de la structure de type Michell, Cantilver et "MMB beam" est montré ci-dessous.

---

12. Problème de Poutre

13. porte-à-faux



## Algorithmes implanter dans top88

### (1) La méthode SIMP modifiée

Le domain de conception est dicrétisé par élément fini carré...A chaque élément  $e$ , est associé une densité  $x_e$  et à chaque  $x_e$  est associée un module de Young  $E_e$  définie comme suit :

$$E_e(x_e) = E_{min} + x_e^p (E_0 - E_{min})$$

Avec  $x_e \in [0, 1]$ ,  $E_0$  la raideur du matériau,  $E_{min}$  une très petite valeur de raideur associé aux éléments dont la propriété physique est proche du vide...on veut éviter une singularité dans la matrice de raideur...Et  $p$  la pénalisation (où la valeur  $p=3$  est souvent utilisée) pour convertir le problème 0-1 en un problème continue.

### (2) Formulation :

$$\begin{aligned} \min_{x, U} c(x) &= U^T K(x) U = \sum_{e=1}^N E_e(x_e) u_e^T k_0 u_e \\ \text{sujet à : } V(x)/V_0 &= f ; K(x) U = F ; 0 \leq x \leq 1 \quad (P_S^c) \end{aligned}$$

Où  $c$  est la compliance,  $U$  et  $F$  sont les vecteurs de déplacement (globale) et de chargement respectivement,  $K(x)$  est la matrice globale de rigidité,  $u_e$  est le vecteur locale de déplacement...  $k_0$  est la matrice élémentaire de raideur avec un module de Young égal à 1 et c'est la même pour tous les éléments,  $x$  est le variable conception (ou densité),  $N$  est le nombre d'éléments dans le maillage par éléments finis du domain de conception initial,  $V(x)$  et  $V_0$  sont respectivement le volume du matériau relatif à la variable de conception  $x$  et le volume du domain de conception initial, et  $f$  est la fraction volumique prescrit.

### (3) Sensibilités $c$ et $V$ par rapport à la densité $x_e$

La sensibilité de la fonction objectif  $c$  et le volume  $V$  par rapport à la densité  $x_e$  sont donnés par :

$$\frac{\partial c}{\partial x_e} = -p x_e^{p-1} (E_0 - E_{min}) u_e^T k_0 u_e \quad (1)$$

$$\frac{\partial V}{\partial x_e} = 1 \quad (2)$$

L'équation (2) repose sur l'hypothèse que chaque élément  $e$  est associé une densité  $x_e$ ...C'est à dire  $V(x) = a^T x$ , avec  $a=(1, \dots, 1)$ .

### (4) Filtrage

Afin de garantir l'existence de solutions au problème d'optimisation topologique et d'éviter l'apparition d'une structure à damier, certaines restrictions sur la conception doivent être imposées...L'une des approches courantes consiste à appliquer un filtre soit aux sensibilités ou soit aux densités.

Le filtrage de sensibilité modifie les sensibilités  $\frac{\partial c}{\partial x_e}$  comme suit :

$$\frac{\hat{\partial} c}{\partial x_e} = \frac{1}{\max(\gamma, x_e) \sum_{i \in N_e} H_{ei}} \sum_{i \in N_e} H_{ei} x_i \frac{\partial c}{\partial x_i} \quad (3)$$

Où  $N_e$  est l'ensemble des éléments pour lesquels  $\Delta(e, i)$  est inférieure au rayon de filtrage  $r_{min}$  et  $H_{ei}$  est un facteur de pondération défini comme :

$$H_{ei} = \max(0, r_{min} - \Delta(e, i)) \quad (4)$$

Le terme  $\gamma$  ( $= 10^{-3}$ ) dans (3) est un petit nombre positif introduit afin d'éviter la division par zéro... Dans l'approche classique de la méthode SIMP la variable de densité  $x_e$  est dans  $(0, 1]$  et donc le terme  $\gamma$  n'est pas requis.

Le filtre de densité transforme les densités  $x_e$  comme suit :

$$\tilde{x}_e = \frac{1}{\sum_{i \in N_e} H_{ei}} \sum_{i \in N_e} H_{ei} x_i \quad (5)$$

Dans ce qui suit, les densités  $x_e$  sont appelées variables de conception... Le filtre de densités  $\tilde{x}_e$  sont appelés densités physiques... On en considérera  $\tilde{x}_e$  plutôt que  $x_e$  comme solution au problème d'optimisation topologique... Dans le cas où un filtre de densité est appliqué, les sensibilités  $\frac{\partial c}{\partial x_e}$  (de la fonction objectif  $c$ ) et  $\frac{\partial V}{\partial x_e}$  (du volume  $V$  du matériau) sont toujours donnés par (1) et (2), à condition que la variable  $x_e$  est remplacée par la variable  $\tilde{x}_e$ .

Les sensibilités vis-à-vis des variables de conception  $x_j$  sont obtenues au moyen de la règle de dérivation en chaîne ou théorème de dérivation des fonctions composées :

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_j} = \sum_{e \in N_j} \frac{\partial \psi}{\partial \tilde{x}_e} \frac{\partial \tilde{x}_e}{\partial x_j} = \sum_{e \in N_j} \frac{1}{\sum_{i \in N_e} H_{ei}} H_{je} \frac{\partial \psi}{\partial \tilde{x}_e} \quad (6)$$

Où  $\psi$  représente soit la fonction objectif  $c$ , soit le volume  $V$  du matériau.

### (5) Implémentation Matlab

Le code est appelé à partir de l'invite MATLAB à l'aide de la ligne suivante :

**top88 (nelx,nely,volfrac,penal,rmin,ft)**

Où  $nelx$  et  $nely$  sont le nombre d'éléments dans les directions horizontale et verticale, respectivement,  $volfrac$  est la fraction volumique  $f$  prescrit,  $penal$  est la puissance de pénalisation  $p$ ,  $rmin$  est le rayon du filtre  $r_{min}$  et  $ft$  spécifie si l'on veut un filtrage de sensibilité ( $ft=1$ ) ou si l'on veut un filtrage de densité ( $ft=2$ ).

Un exemple de problème d'optimisation topologique en 2d : le "MMB beam" peut être reproduit à l'aide de l'appel de fonction : `top88 (60,20,0.5,3,1.5,1)`

La structure "MMB beam" optimisée est montré par la FIGURE 1, le Cantilever par la FIGURE 2, avec  $ft=1,2$ .



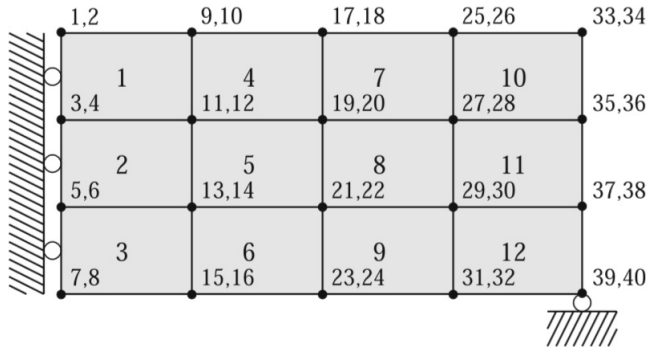
FIGURE 4 – MMB beam problem



FIGURE 5 – Cantilever problem

### (5.1) Méthode d'éléments finis

Le domaine de conception est supposé rectangulaire, discrétisé par éléments carrés...Un exemple de maillage grossier composé de 12 éléments avec quatre nœuds par élément et deux degrés de liberté (DDL) par nœud est présenté à l'aide du tableau suivante :



Les nœuds et les éléments sont numérotés par colonne, de gauche à droite, et les DDL  $2n-1$  et  $2n$  correspondent aux déplacements horizontal et vertical du nœud  $n$ , respectivement.

La partie prétraitement par la M.E.F commence par la définition des propriétés du matériau :  $E_0$  est le module de Young du matériau,  $E_{min}$  est le module de Young 'artificiel' des éléments dont les propriétés caractéristiques du matériau est proche du vide et  $\nu$  est le coefficient de Poisson.

Ensuite, la matrice élémentaire  $k_0$  pour un élément  $e$  avec un module de Young  $E_0=1$  est calculée...Cette matrice est notée  $KE$ ...En raison de la régularité du maillage, cette matrice est identique pour tous les éléments  $e$  du maillage.

Afin de permettre un assemblage efficace de la matrice de raideur globale dans la boucle de l'optimiseur, une matrice  $edofMat$  est construite...La  $i$ -ème ligne de cette matrice contient les huit indices DDL correspondant au  $i$ -ème élément...La matrice  $edofMat$  est construite en trois étapes :

Tout d'abord, une matrice  $(n_{ely} + 1) \times (n_{elx} + 1)$  avec les numéros des nœuds est définie...La fonction MATLAB Reshape est utilisée ; cette fonction retourne une matrice de la taille spécifiée par les deuxième et troisième arguments d'entrée, dont les éléments sont pris à partir du premier argument d'entrée (qui est dans ce cas un vecteur contenant les numéros des nœuds du maillage)...Ensuite, la matrice  $nodenrs$  est utilisée pour déterminer le premier indice DDL pour tous les éléments du maillage par E.F et sont stockés dans un vecteur  $edofVec$ ...Enfin, le vecteur  $edofVec$  est utilisé pour

déterminer les huit indices DDL pour chaque élément e...Pour cela, la fonction MATLAB repmat est appelée deux fois...Cette fonction copie une matrice en un nombre de fois spécifié dans les sens vertical et horizontal.

Le premier appel à la fonction repmat renvoie une matrice à huit colonnes, qui sont toutes des copies du vecteur edofVec... Le deuxième appel à la fonction repmat renvoie une matrice de même taille où toutes les lignes sont identiques; cette matrice relie les indices des huit DDL d'un élément e à l'indice de son premier DDL stocké dans le vecteur edofVec...Les résultats sont additionnés et rassemblés dans la matrice edofMat.

Pour l'exemple de maillage grossier illustré par figure dessus, cette procédure donne le résultat suivant :

$$\text{edofMat} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 11 & 12 & 9 & 10 & 1 & 2 \\ 5 & 6 & 13 & 14 & 11 & 12 & 3 & 4 \\ 7 & 8 & 15 & 16 & 13 & 14 & 5 & 6 \\ 11 & 12 & 19 & 20 & 17 & 18 & 9 & 10 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & & \\ 31 & 32 & 39 & 40 & 37 & 38 & 29 & 30 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \text{Element 1} \\ \leftarrow \text{Element 2} \\ \leftarrow \text{Element 3} \\ \leftarrow \text{Element 4} \\ \\ \\ \leftarrow \text{Element 12} \end{array}$$

A chaque itération de la boucle de l'optimiseur, l'assemblage de la matrice de raideur globale K est effectué à l'aide de la fonction MATLAB sparse... La procédure suivie ici est inspirée de l'approche décrite par Davis (2007)...La fonction sparse prend comme arguments d'entrée trois vecteurs : les premier et second contiennent les indices de ligne et de colonne des entrées de matrice non nulles, qui sont collectés dans le troisième vecteur...Les vecteurs d'indices de ligne et de colonne (iK et jK, respectivement) sont créés à partir de la matrice edofMat..On utilise un produit matriciel (à l'aide de la fonction Matlab Kronecker) avec un vecteur unitaire de taille 8 suivi d'un "reshape" (à l'aide de la fonction Matlab reshape).

Les vecteurs iK et jK sont structurés de sorte que les indices iK (k) et jK (k) correspondent à la (i,j) ème entrée de la matrice de raideur pour l'élément e, où  $k = i + 8(j - 1) + 64(e - 1)$ ...Le troisième vecteur, contenant les entrées de la matrice de raideur (matrice creuse), est calculé dans la boucle de l'optimiseur, car cela dépend des densités physiques  $\tilde{x}_e$ ...Ce vecteur sK, est obtenu via un "reshape" de la matrice d'élémentaire KE pour obtenir un vecteur colonne...Et en multipliant ce vecteur avec le module de Young  $E_e(\tilde{x}_e)$  pour chaque élément e, suivi d'une opération de concaténation des résultats pour tous les éléments...La multiplication et la concaténation sont mises en œuvre sous forme de produit matriciel suivi d'un "reshape" (à l'aide de fonction Matlab reshape)...On fait sorte que la matrice de raideur obtenue soit symétrique via l'opération  $K = (K + K')/2$ , où K' est la transposée de K...Et finalement les conditions aux limites et le vecteur de chargement sont calculés et le système d'équations d'équilibre est enfin résolu par une méthode directe.

## (5.2) Filtrage

L'application d'un filtre de sensibilité selon (3) implique une moyenne pondérée sur différents éléments...C'est une opération linéaire; elle peut donc être mis en œuvre en tant que produit matriciel d'une matrice de coefficients et d'un vecteur contenant les sensibilités  $\frac{\partial c}{\partial x_i}$  (multiplié par les variables de conception  $x_i$ )...Diviser le résultat par un facteur  $\max(\gamma, x_e) \sum_{i \in N_e} H_{ei}$  donne  $\frac{\partial c}{\partial x_e}$ ...La matrice H et le vecteur Hs contiennent les coefficients  $H_{ei}$  et les constantes de normalisation  $\sum_{i \in N_e} H_{ei}$ , respectivement...L'utilisation d'un filtre de densité n'implique pas seulement le filtrage des densités selon (5) mais aussi une modification de la règle de dérivation en chaîne des sensibilités de la fonction objectif et de la contrainte volume selon (6)...Les deux opérations impliquent une moyenne pondérée sur différents éléments du maillage par E.F.

La matrice H et le vecteur Hs restent invariants lors de l'optimisation et sont calculés a priori...La matrice H de taille  $(\text{nelx} \times \text{nely}) \times (\text{nelx} \times \text{nely})$  établit une relation entre tous les éléments...Cependant, comme défini dans (4), le noyau du filtre a un support borné, donc seuls les éléments voisins sont concernés...En conséquence, la majorité des coefficients est nulle et donc H est une matrice creuse...elle



FIGURE 6 – Domain de conception initial

est construite à l'aide de la fonction MATLAB sparse...Les vecteurs d'indices de lignes et de colonnes  $iH$  et  $jH$  ainsi que le vecteur  $SH$  avec des entrées non nulles sont assemblés au moyen de quatre boucles imbriquées.

### (5.3) Boucle de l'optimiseur

La partie principale du code top88 est la boucle de l'optimiseur...La boucle est initialisée, toutes les variables de conception  $x_e$  sont initialement définies égales à la fraction volumique  $f$  prescrite...Les densités physiques  $\tilde{x}_e$  sont identiques aux variables  $x_e$ ...Si un filtrage de sensibilité est utilisé, cette égalité est toujours valable, alors que si un filtrage de densité est utilisé, elle est valable tant que les variables  $x_e$  sont homogénéisés...Chaque itération de la boucle de l'optimiseur commence par l'analyse par E.F décrite dans (5.1)...Ensuite, la fonction objectif  $c$  est calculée, ainsi que les sensibilités  $dc$  et  $dv$  respectivement de  $c$  et  $V$  par rapport à  $\tilde{x}_e$ .

La matrice edofMat est utilisée efficacement pour calculer simultanément la compliance  $c$  de tous les éléments : elle est utilisée sous forme indices pour le vecteur de déplacement...Il en résulte une matrice de taille, taille de edofMat contenant les déplacements correspondant aux DDL énumérés dans edofMat...Les sensibilités sont ensuite filtrées (si le filtrage de sensibilité est utilisé) ou modifiées (si le filtrage de densité est utilisé) comme expliqué dans (4).

### (5.4) L'Optimiseur ou le Solveur

La structure "MMB beam" en exemple a été optimisée par le solveur OC (optimality criteria)...Les images des structures optimisées sont montrés ci-dessous...La méthode OC est utilisée pour mettre à jour les variables de conception...Et enfin, les résultats intermédiaires sont tracés.

## Optimisation topologique des structures en 2d dans Matlab à l'aide de Top88

La boucle de l'optimiseur est terminée lorsque la norme  $L_\infty$  de la différence entre deux conceptions consécutives (en termes de variables de conception :  $x^{k+1}$  et  $x^k$ ) est inférieure à 0.01.

## Optimisation topologique des structures en 3d dans Matlab à l'aide de Top3d

Le domaine de conception est supposé parallélépipède rectangulaire, discrétisé par éléments cubique...Un exemple de maillage grossier composé de 8 éléments avec huit nœuds par élément et trois degrés de liberté (DDL) par nœud est présenté à l'aide de la figure suivante :

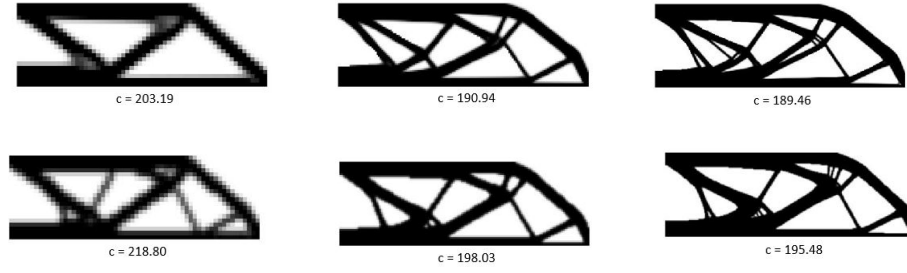


FIGURE 7 – Structure "MBB beam" optimisée et la compliance correspondante  $c$  obtenues avec Top88 utilisant le filtrage de sensibilité (en haut) et le filtrage de densité (en bas). Un maillage avec  $60 \times 20$  éléments (à gauche),  $150 \times 50$  éléments (au centre) et  $300 \times 100$  éléments (à droite) a été utilisé

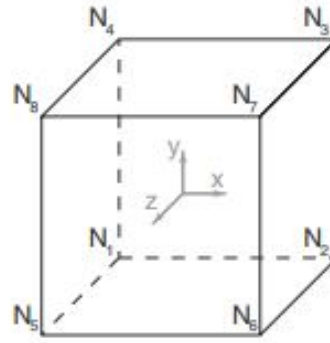
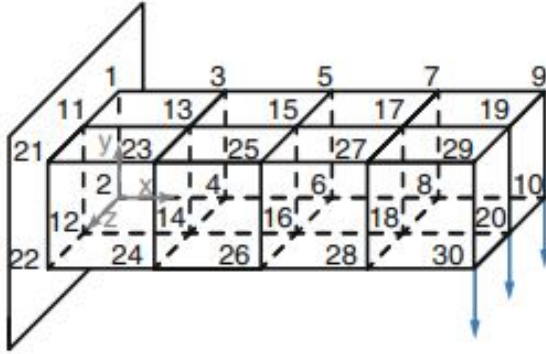


FIGURE 8 – Numérotation local



Les noeuds sont numérotés et ordonné par colonne de haut en bas, de gauche à droite et de bas en haut...La position de chaque noeud est défini par rapport au système de coordonnées cartésiennes avec origine, le coin gauche en bas à l'arrière...Au sein de chaque élément  $e$ , les huit noeuds  $N_1, \dots, N_8$  sont ordonnés dans le sens anti-horaire comme indiqué par la figure 5...Notez que la numérotation "locale" des noeuds ( $N_i$ ) ne suit pas la même règle que la numérotation «globale» des noeuds...Étant donné le volume ( $n_{elx} \times n_{ely} \times n_{elz}$ ) du conception initial et les coordonnées globales du noeud  $N_1$  ( $x_1, y_1, z_1$ ), on peut identifier les coordonnées du noeud global et la numérotation globales des sept autres noeuds dans cet élément par cartographie comme résumé dans le tableau ci-dessous.

Chaque noeud de la structure a trois degrés de liberté correspondant aux déplacements linéaires dans les directions  $x$ - $y$ - $z$  (un élément a 24 DDL)...Les degrés de liberté s'organisent dans le vecteur de déplacement nodal  $U$  de la façon suivante :  $U = [U_{1x}, U_{1y}, U_{1z}, \dots, U_{8 \times nz}]$

Node	$\xi_1$	$\xi_2$	$\xi_3$
1	-1	-1	-1
2	+1	-1	-1
3	+1	+1	-1
4	-1	+1	-1
5	-1	-1	+1
6	+1	-1	+1
7	+1	+1	+1
8	-1	+1	+1

En 3d le système d'équations d'équilibre est résolu par une méthode PCG <sup>14</sup>, appelé le multi-grid CG...C'est méthode classique couramment utilisée en optimisation topologique...Cette méthode efficace sera détaillée par la suite.

### 1.2.7 Présentation de quelques d'optimiseurs

Comme expliqué précédemment, l'analyse de la structure est effectuée par des E.F et le paramétrage s'effectue dans ce cadre...Les différents problèmes d'optimisation des structures y sont liés....Certaines techniques d'optimisation proviennent du domaine des mathématiques pures, où des algorithmes généraux ont été développés (Solveurs dans IPOPT,et NLOPT) sans que le but initial ait été de les appliquer au cas des structures...D'autres méthodes viennent du domaine de la gestion...Nous ne l'utiliserons pas dans ce cas car elles ne sont pas réellement adaptées à l'optimisation des structures...Et enfin la classe de méthodes directement liée aux structures et est mise au point par des ingénieurs spécialisés (Optimiseurs classiques comme OC,MMA,GCMMA)...Cette classe de méthodes dépend fortement du problème d'optimisation traité...Il y a donc clairement un manque de généralité dans cette classe de méthodes.

On en considèrera trois grandes classes d'optimisation : les critères d'optimalité, les méthodes de programmation mathématiques avec gradient, et la classe de méthodes qui dérive des méthodes de programmation mathématiques : la programmation séquentielle convexe.

#### 1.2.7.1 Solveurs d'optimisation topologique classiques

#### 1.2.7.2 Solveurs d'optimisation plus généraux

#### 1.2.8 Exemple de Benchmarking en 2D

## 2 Implémentation et benchmarking en 3D sur HPC

### 2.1 Implémentation dans Topopt Petsc

### 2.2 Résultats numériques du benchmarking sur HPC

## 3 Conclusion et futur travail

<sup>14</sup>. Méthode du gradient conjugué préconditionné