Ejercicio 1 ***(1 punto)*** *En la Universidad de Oviedo se realizan* 3 *cursos de extensión universitaria: Técnicas de laboratorio (TL), Internet de las cosas (IC) y Seguridad Marítima (SM). Se sabe que:*

- 45 *alumnos se matricularon de TL*
- 16 *se matricularon de TL y de IC*
- 35 *se matricularon de TL y SM*
- 20 *sólo se matricularon de SM*
- 10 *alumnos se matricularon de los tres cursos*
- 48 *alumnos se matricularon de IC*
- 50 *alumnos quedaron en lista de espera*
- 12 *alumnos se matricularon de IC y SM*

(a) *Haz un diagrama adecuado a la situación e indica el número de elementos de cada región.*

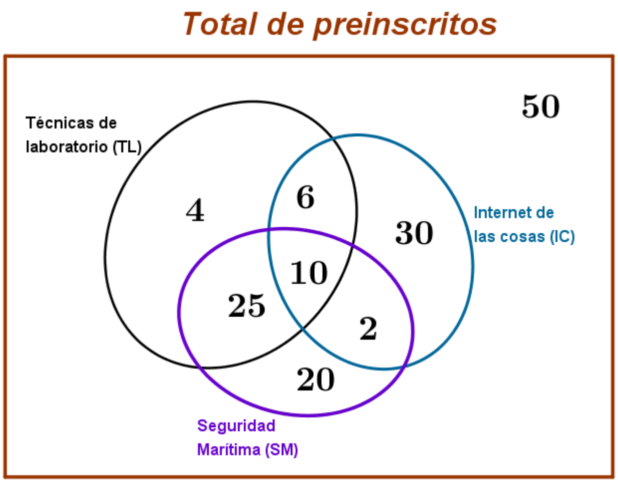
(b) *¿Cuántos alumnos se preinscribieron en los cursos en total?*

(c) *¿Cuántos alumnos se matricularon de un único curso?*

(d) *¿Cuántos alumnos se matricularon sólo de IC?*

Solución:

(a) (0.5)



(b) (0.2) 147.

(c) (0.2) 54.

(d) (0.1) 30.

Ejercicio 2 ***(1.5 puntos)***

(a) *Dados los conjuntos A y B demuestra que $A\cup B=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)\Leftrightarrow A\cap B=\emptyset$.*

(b) *Dada la relación binaria en $\mathbb{Z}$ definida como sigue:*

$$a\mathscr{R}b \Leftrightarrow \textit{existe } n\in\mathbb{Z} \textit{ tal que } a-b=3n.$$

Decide si la relación es reflexiva, simétrica, antisimétrica o transitiva.

Solución:

(a) (0.8)

$\Rightarrow$ Supongamos que $A\cup B=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$ Si existiese $x\in A\cap B$, entonces $x\in A\cup B$, pero por hipótesis $A\cup B=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$, de donde $x\in(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$. Si $x\in A\setminus B$ entonces $x\notin B$, y en consecuencia $x\notin A\cap B$. Si $x\in B\setminus A$, entonces $x\notin A$ por lo que $x\notin A\cap B$., por lo tanto, $A\cap B=\emptyset$.

$\Leftarrow$ Supongamos que $A\cap B=\emptyset$, esto quiere decir que no existe ningún elemento común a ambos subconjuntos. Probemos que $A\cup B=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$

$$x\in A\cup B\Rightarrow\left\{\begin{array}{l} x\in A(\text{si } x\in B\Rightarrow x\in A\cap B)\Rightarrow x\in A\setminus B\\ x\in B(\text{si } x\in A\Rightarrow x\in A\cap B)\Rightarrow x\in B\setminus A\end{array}\right\}\Rightarrow x\in(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$$

Ahora, si $x\in(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$ entonces

$$\left.\begin{array}{l} x\in A\setminus B\subset A\\ x\in B\setminus A\subset B\end{array}\right\}\Rightarrow x\in A\cup B$$

Por lo tanto $A\cup B=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$

(b) (0.7)

Reflexiva Se cumple: $a-a=3\cdot 0$, y $a\mathscr{R}a$ para cada $a\in\mathbb{Z}$

Simétrica Se cumple, ya que si $a\mathscr{R}b$ entonces $a-b=3n$, entonces $b-a=3(-n)$ y $b\mathscr{R}a$.

Antisimétrica No se cumple: $4\mathscr{R}1$ ya que $4-1=3\cdot 1$, $1\mathscr{R}4$ ya que $1-4=3(-1)$ y sin embargo $4\neq 1$

Transitiva Se cumple, ya que si

$$\left.\begin{array}{l} a\mathscr{R}b\Rightarrow a-b=3n\\ b\mathscr{R}c\Rightarrow b-c=3m\end{array}\right\}\Rightarrow a-c=(a-b)+(b-c)=3(n-m)\Rightarrow a\mathscr{R}c$$

Ejercicio 3 ***(1.5 puntos)***

(a) *Demuestra que si $z=a+bi\in\mathbb{C}$ entonces:*

$$\frac{z+i}{z-1-i}\in\mathbb{R}\Rightarrow 2a-b=1.$$

(b) *En $\mathbb{R}$ se considera un número $a<0$. Expresa en las 5 formas estudiadas en clase el complejo $z=a\sqrt{3}+ai$.*

(c) *Obtén todas las soluciones de la ecuación compleja $z^4=-16$.*

Solución:

(a) (0.5) Supongamos que $\frac{z+i}{z-1-i} \in \mathbb{R}$, o lo que es lo mismo, que su parte imaginaria es 0. Vamos a calcularla:

$$\frac{z+i}{z-1-i} = \frac{a+(b+1)i}{(a-1)-(b-1)i} = \frac{a(a-1)+(b+1)(b-1)+(-a(b-1)+(b+1)(a-1))i}{(a-1)^2+(b-1)^2}$$

Por ello

$$Imag\left(\frac{z+i}{z-1-i}\right) = \frac{-a(b-1)+(b+1)(a-1)}{(a-1)^2+(b-1)^2} = 0 \Leftrightarrow -ab+a+ab+a-b-1=0 \Leftrightarrow 2a-b=1$$

Por otro lado, si $2a-b=1$ entonces $z=a+(2a-1)i$ por lo que

$$\frac{z+i}{z-1-i} = \frac{a+(2a-1)i+i}{a+(2a-1)i-1-i} = \frac{a+2ai}{(a-1)+2(a-1)i} = \frac{a}{a-1}\frac{1+2i}{1+2i} = \frac{a}{a-1} \in \mathbb{R}$$

(b) (0.5) $|z| = \sqrt{(a\sqrt{3})^2+a^2} = \sqrt{4a^2} = 2|a| = -2a.$

$$z = a\sqrt{3}+ai = -2a(\cos(\alpha)+i\,\text{sen}(\alpha)) \Rightarrow \left.\begin{array}{r} a\sqrt{3} = -2a\cos(\alpha) \Rightarrow \cos(\alpha) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ a = -2a\,\text{sen}(\alpha) \Rightarrow \sin(\alpha) = -\frac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha = -\pi+\frac{\pi}{6} = -\frac{5\pi}{6}.$$

Por lo tanto las formas son las siguientes:

Binómica $z = a\sqrt{3}+ai$

Vectorial $z = (a\sqrt{3}, a)$

Trigonométrica $z = -2a\left(\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right)+i\,\text{sen}\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right)$

Polar $-2a_{|-5\pi/6}$

Exponencial $-2ae^{-i5\pi/6}$

(c) (0.5) $-16 = 16e^{i\pi}$. Por lo tanto

$$\sqrt[4]{-16} = \begin{cases} \uparrow\ 2e^{i\pi/4} = \sqrt{2}+\sqrt{2}i \\ \nearrow\ 2e^{i3\pi/4} = -\sqrt{2}+\sqrt{2}i \\ \searrow\ 2e^{i5\pi/4} = -\sqrt{2}-\sqrt{2}i \\ \downarrow\ 2e^{i7\pi/4} = \sqrt{2}-\sqrt{2}i \end{cases}$$

Ejercicio 4 ***(3 puntos)***

(a) Define los conceptos de matriz escalonada y matriz escalonada reducida.

(b) Decide de forma razonada, para qué valores de $a \in \mathbb{R}$, es escalonada la matriz

$$M = \begin{pmatrix} a & a-1 & a & 0 & a \\ 0 & a-1 & a & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -a & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a-2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(c) Para $a = 2$, calcula la matriz escalonada reducida asociada a la matriz M del apartado (b), indicando claramente las operaciones elementales que realizas en cada paso.

(d) *Suponiendo que la matriz M del apartado (b) es la matriz ampliada de un sistema de ecuaciones lineal, discute el sistema razonando en términos de pivotes. Resuelve el sistema siempre que sea posible.*

Solución:

(a) (0.5) Diremos que una matriz es escalonada si verifica que cada una de las filas no nulas de la matriz comienza con una sucesión de ceros que tiene al menos un cero más que la fila anterior, ocupando las filas nulas, si las hubiese, las últimas posiciones. Al primer elemento no nulo de cada fila le llamaremos pivote de la fila.

Si una matriz escalonada cumple que en las columnas en las que están ubicados los pivotes, todos los demás elementos son nulos y además, los pivotes son 1, entonces se dice que la matriz es escalonada reducida.

(b) (1)Si $a \neq 0$, entonces el pivote de la primera fila sería a, si además $a \neq 1$ el pivote de la segunda fila sería $a-1$. Cuando además $a \neq 2$ el pivote de la cuarta fila sería $a-2$. En este caso, es decir, cuando $a \neq 0,1,2$, entonces la matriz M es escalonada, ya que la primera fila tiene 0 ceros a la izquierda del pivote, la segunda 1 cero, la tercera 2 ceros y la cuarta 4 ceros, siendo la fila quinta una fila de ceros.

Si $a=0$ entonces

$$M=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

No es escalonada, ya que la primera fila tiene 1 cero a la izquierda del primer elemento no nulo y la segunda también, por lo que no tiene más ceros que la anterior.

Si $a=1$ entonces

$$M=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

No es escalonada, ya que la segunda fila tiene 2 cero a la izquierda del primer elemento no nulo y la tercera también, por lo que no tiene más ceros que la anterior.

Si $a=2$ entonces

$$M=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Sí es escalonada.

(c) (0.75)Para $a=2$ se tiene que

$$M=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_2\to F_2+F_3]{F_1\to F_1+F_3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1\to F_1-F_2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[F_1/2]{F_3/(-2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(d) (0.75) Si $a \neq 0$ la matriz tiene un pivote en la columna de términos independientes, luego el sistema es incompatible.

Para $a = 2$ la matriz escalonada reducida asociada a la matriz ampliada es

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

por lo que el sistema es compatible, dado que no existe ningún pivote en la columna de términos independientes. Como la columna 4 no tiene pivote, y está en la matriz de coeficientes, el sistema es compatible e indeterminado.

Una solución sería

$$\left.\begin{array}{rcl} x & = & -\frac{1}{2} \\ y & = & 2-\alpha \\ z & = & -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\alpha \\ t & = & \alpha \end{array}\right\} \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

Ejercicio 5 ***(2 puntos)***

(a) Sea V un espacio vectorial definido sobre un cuerpo $\mathbb{K}$. Demuestra que si 0 es el neutro de la suma de $\mathbb{K}$ y $\vec{v} \in V$, entonces $0\vec{v} = \vec{0}$, indicando en cada paso las propiedades que estás utilizando.

(b) Decide razonadamente si los conjuntos siguientes son o no subespacio vectorial.

- $U_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;/\; x+3y = 1\right\}$
- $U_2 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;/\; x^2+3y = 0\right\}$
- $U_3 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;/\; x+3y = 0\right\}$

(c) En el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ ¿puede existir un subespacio vectorial que contenga los vectores $(1,1,0)$ y $(0,0,1)$ y no al vector $(1,1,1)$? Razona tu respuesta.

Solución:

(a) (0.5) Como 0 es el neutro para la suma en $\mathbb{K}$, entonces $0 = 0+0$, utilizando la propiedad distributiva para la suma de escalares, se tiene que

$$0\vec{v} = (0+0)\vec{v} = 0\vec{v}+0\vec{v}. \tag{1}$$

Dado que $0\vec{v} \in V$ y $(V,+)$ es un grupo, existe su simétrico, al que llamaremos $-0\vec{v}$, que verifica que $0\vec{v}+(-0\vec{v}) = \vec{0}$, de (1) se deduce que:

$$\vec{0} = 0\vec{v}+(-0\vec{v}) = (0\vec{v}+0\vec{v})+(-0\vec{v}) = 0\vec{v}+(0\vec{v}+(-0\vec{v})) = 0\vec{v}+\vec{0} = 0\vec{v}. \tag{2}$$

(b) (1)

- $U_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;/\; x+3y = 1\right\}$ no es subespacio vectorial, ya que $(0,0) \notin U_1$ puesto que $0+3\cdot 0 \neq 1$
- $U_2 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;/\; x^2+3y = 0\right\}$ no es subespacio vectorial. Un contraejemplo puede ser:

$$\left.\begin{array}{c} (-3,3) \in U_2((-3)^2+3(-3)=0) \\ 2 \in \mathbb{R} \end{array}\right\} \Rightarrow 2(-3,3) = (-6,6) \notin U_2, \text{ pues } (-6)^2+3(-6) = 36-18 \neq 0$$

- $U_3 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x+3y=0\right\}$ es subespacio vectorial.
Veamos en primer lugar que la ley de composición interna restringida a U_3 sigue siendo ley de composición interna.
$$(x_1,y_1),(x_2,y_2) \in U_3 \Rightarrow x_1+3y_1=0,\ x_2+3y_2=0$$
Entonces
$$(x_1,y_1)+(x_2,y_2) = (x_1+x_2,y_1+y_2) \overbrace{\in}^{?} U_3$$
$$(x_1+x_2)+3(y_1+y_2) = (\underbrace{x_1+3y_1}_{0}) + (\underbrace{x_2+3y_2}_{0}) = 0 \Rightarrow (x_1,y_1)+(x_2,y_2) \in U_3$$
Veamos a continuación que la ley de composición externa restringida a U_3 sigue siendo ley de composición externa.
$$\alpha \in \mathbb{R}, (x,y) \in \mathbb{U}_3 \Rightarrow x+3y=0.$$
entonces
$$\alpha(x,y) = (\alpha x, \alpha y) \overbrace{\in}^{?} U_3$$
$$(\alpha x)+3(\alpha y) = \alpha(\underbrace{x+3y}_{0}) = 0$$

(c) (0.5) No, dado que $(1,1,1) = (1,1,0)+(0,0,1)$ y si fuese subespacio vectorial, la suma de dos elementos cualesquiera de dicho conjunto estaría en el conjunto.