Tema 5: Productos escalares. Ortogonalidad

Marisa Serrano

Universidad de Oviedo

15 de noviembre de 2020

email: mlserrano@uniovi.es

Contenido

Definición

Definición 5.1

V, $\mathbb{R}-$espacio vectorial, la aplicación $\cdot : \begin{array}{ccc} V \times V & \to & \mathbb{R} \\ (\vec{v}, \vec{u}) & \to & \vec{v} \cdot \vec{u} \end{array}$ *es un* producto escalar *si cumple:*

a) $\forall \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{u} \in V \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *entonces*

$$\begin{array}{c} (\alpha \vec{v}_1 + \beta \vec{v}_2) \cdot \vec{u} = \alpha \vec{v}_1 \cdot \vec{u} + \beta \vec{v}_2 \cdot \vec{u} \\ \vec{u} \cdot (\alpha \vec{v}_1 + \beta \vec{v}_2) = \alpha \vec{u} \cdot \vec{v}_1 + \beta \vec{u} \cdot \vec{v}_2 \end{array}$$

b) Simetría $\forall \vec{v}, \vec{u} \in V \quad \vec{v} \cdot \vec{u} = \vec{u} \cdot \vec{v}$

c) Positiva $\forall \vec{v} \in V \quad \vec{v} \cdot \vec{v} \geq 0$

d) Definida $\vec{v} \cdot \vec{v} = 0 \to \vec{v} = \vec{0}$

Al par $(V, \cdot)$ se le denomina espacio euclídeo.

Definición

Definición 5.1

V, $\mathbb{R}-$espacio vectorial, la aplicación $\cdot : \begin{array}{ccc} V \times V & \to & \mathbb{R} \\ (\vec{v}, \vec{u}) & \to & \vec{v} \cdot \vec{u} \end{array}$ *es un* producto escalar *si cumple:*

a) $\forall \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{u} \in V \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *entonces*

$$(\alpha \vec{v}_1 + \beta \vec{v}_2) \cdot \vec{u} = \alpha \vec{v}_1 \cdot \vec{u} + \beta \vec{v}_2 \cdot \vec{u}$$
$$\vec{u} \cdot (\alpha \vec{v}_1 + \beta \vec{v}_2) = \alpha \vec{u} \cdot \vec{v}_1 + \beta \vec{u} \cdot \vec{v}_2$$

b) Simetría $\forall \vec{v}, \vec{u} \in V \quad \vec{v} \cdot \vec{u} = \vec{u} \cdot \vec{v}$

c) Positiva $\forall \vec{v} \in V \quad \vec{v} \cdot \vec{v} \geq 0$

d) Definida $\vec{v} \cdot \vec{v} = 0 \to \vec{v} = \vec{0}$

Al par $(V, \cdot)$ se le denomina espacio euclídeo.

Definición

Definición 5.1

V, $\mathbb{R}-$espacio vectorial, la aplicación $\cdot : \begin{array}{ccc} V\times V & \to & \mathbb{R} \\ (\vec{v},\vec{u}) & \to & \vec{v}\cdot\vec{u} \end{array}$ *es un* producto escalar *si cumple:*

a) $\forall \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{u} \in V \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *entonces*

$$\begin{array}{c} (\alpha\vec{v}_1+\beta\vec{v}_2)\cdot\vec{u} = \alpha\vec{v}_1\cdot\vec{u}+\beta\vec{v}_2\cdot\vec{u} \\ \vec{u}\cdot(\alpha\vec{v}_1+\beta\vec{v}_2) = \alpha\vec{u}\cdot\vec{v}_1+\beta\vec{u}\cdot\vec{v}_2 \end{array}$$

b) *Simetría* $\forall \vec{v}, \vec{u} \in V \quad \vec{v}\cdot\vec{u} = \vec{u}\cdot\vec{v}$

c) *Positiva* $\forall \vec{v} \in V \quad \vec{v}\cdot\vec{v} \geq 0$

d) *Definida* $\vec{v}\cdot\vec{v} = 0 \to \vec{v} = \vec{0}$

Al par $(V,\cdot)$ se le denomina espacio euclídeo.

Definición

Definición 5.1

V, $\mathbb{R}-$espacio vectorial, la aplicación $\cdot : \begin{array}{ccc} V \times V & \to & \mathbb{R} \\ (\vec{v}, \vec{u}) & \to & \vec{v} \cdot \vec{u} \end{array}$ *es un* producto escalar *si cumple:*

a) $\forall \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{u} \in V \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *entonces*

$$(\alpha \vec{v}_1 + \beta \vec{v}_2) \cdot \vec{u} = \alpha \vec{v}_1 \cdot \vec{u} + \beta \vec{v}_2 \cdot \vec{u}$$
$$\vec{u} \cdot (\alpha \vec{v}_1 + \beta \vec{v}_2) = \alpha \vec{u} \cdot \vec{v}_1 + \beta \vec{u} \cdot \vec{v}_2$$

b) *Simetría* $\forall \vec{v}, \vec{u} \in V \quad \vec{v} \cdot \vec{u} = \vec{u} \cdot \vec{v}$

c) *Positiva* $\forall \vec{v} \in V \quad \vec{v} \cdot \vec{v} \geq 0$

d) *Definida* $\vec{v} \cdot \vec{v} = 0 \to \vec{v} = \vec{0}$

Al par $(V, \cdot)$ se le denomina espacio euclídeo.

Definición

Definición 5.1

V, $\mathbb{R}-$espacio vectorial, la aplicación $\cdot : \begin{array}{ccc} V \times V & \to & \mathbb{R} \\ (\vec{v}, \vec{u}) & \to & \vec{v} \cdot \vec{u} \end{array}$ *es un* producto escalar *si cumple:*

a) $\forall \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{u} \in V \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *entonces*

$$\begin{array}{c} (\alpha \vec{v}_1 + \beta \vec{v}_2) \cdot \vec{u} = \alpha \vec{v}_1 \cdot \vec{u} + \beta \vec{v}_2 \cdot \vec{u} \\ \vec{u} \cdot (\alpha \vec{v}_1 + \beta \vec{v}_2) = \alpha \vec{u} \cdot \vec{v}_1 + \beta \vec{u} \cdot \vec{v}_2 \end{array}$$

b) Simetría $\forall \vec{v}, \vec{u} \in V \quad \vec{v} \cdot \vec{u} = \vec{u} \cdot \vec{v}$

c) Positiva $\forall \vec{v} \in V \quad \vec{v} \cdot \vec{v} \geq 0$

d) Definida $\vec{v} \cdot \vec{v} = 0 \to \vec{v} = \vec{0}$

Al par $(V, \cdot)$ se le denomina espacio euclídeo.

Ejemplo

Ejemplo 5.1

Probar que la aplicación siguiente es un producto escalar:

$$(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = 2x_1y_1 + x_2y_1 + x_1y_2 + x_2y_2$$

Cuadrado escalar

Definición 5.2

A la aplicación:

$$\begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \vec{v} & \to & \vec{v}^{\,2} = \vec{v} \cdot \vec{v} \end{array}$$

la llamaremos cuadrado escalar.

Ejemplo

Ejemplo 5.2

Calcular el cuadrado escalar asociado al producto:

$$(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = 2x_1y_1 + x_2y_1 + x_1y_2 + x_2y_2$$

Calcula $(1, 0)^2$

Recuperación del producto escalar a partir del cuadrado

Vamos a calcular el cuadrado escalar de una combinación lineal de dos vectores del espacio:

$$(\alpha\vec{u}+\beta\vec{v})^2=(\alpha\vec{u}+\beta\vec{v})\cdot(\alpha\vec{u}+\beta\vec{v})=\alpha^2\vec{u}^{\,2}+2\alpha\beta\vec{u}\cdot\vec{v}+\beta^2\vec{v}^{\,2}$$

Tomando $\alpha=1$ y $\beta=1$ se puede obtener el producto escalar de dos vectores a partir de sus cuadrados escalares:

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{1}{2}\left((\vec{u}+\vec{v})^2-\vec{u}^{\,2}-\vec{v}^{\,2}\right)$$

Representación matricial

Se fija una base $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ y expresamos los vectores $\vec{u}, \vec{w} \in V$, con coordenadas $\vec{u} = x_1\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2 + \cdots + x_n\vec{v}_n$, $\vec{w} = y_1\vec{v}_1 + y_2\vec{v}_2 + \cdots + y_n\vec{v}_n$, entonces el producto escalar se puede escribir como:

$$\vec{u} \cdot \vec{w} = X^t G Y$$

donde

$$G = \begin{pmatrix} \vec{v}_1^2 & \vec{v}_1 . \vec{v}_2 & \ldots & \vec{v}_1 . \vec{v}_n \\ \vec{v}_1 . \vec{v}_2 & \vec{v}_2^2 & \ldots & \vec{v}_2 . \vec{v}_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vec{v}_1 . \vec{v}_n & \vec{v}_2 . \vec{v}_n & \ldots & \vec{v}_n^2 \end{pmatrix}; X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}; Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

A la matriz G se llama **Matriz de Gram**.

Propiedades de la Matriz de Gram

Por la simetría del producto escalar se cumple que $\vec{v}_i \cdot \vec{v}_j = \vec{v}_j \cdot \vec{v}_i$, la matriz G debe ser simétrica.
Como $\vec{v}^2 > 0$, entonces $g_{ii} > 0$.
Además: $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \cdot (y_1, y_2, \ldots, y_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} g_{ij} x_i y_j$, es decir, el elemento i, j de la matriz G es el coeficiente del producto $x_i y_j$.

El cuadrado escalar sería $(x_1, x_2, \ldots, x_n)^2 = \sum_{i=1}^{n} g_{ii} x_i^2 + \sum_{\substack{i=1 \\ j>i}}^{n-1} 2 g_{ij} x_i x_j$

Ejemplos

Ejemplo 5.3

Dado el producto escalar:

$$(x_1, x_2, x_3) \cdot (x_1, y_2, y_3) =$$

$$= x_1y_1 + 6x_2y_2 + 7x_3y_3 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 - 2x_2y_3 - 2x_3y_2$$

Calcula la matriz asociada.

Ejemplo 5.4

Dado el cuadrado escalar:

$$(x, y)^2 = 3x^2 - xy + 2y^2$$

Calcule la matriz asociada al producto escalar correspondiente.

Cambio de base en productos escalares

Sea $\cdot$ un producto escalar, cuya matriz asociada en la base $\mathcal{B}$ es A y en la base $\mathcal{B}'$ es M.

$$\begin{array}{l} P \text{ matriz de cambio de base de } \mathcal{B} \text{ a } \mathcal{B}' \\ \vec{v} \equiv X_{\mathcal{B}} \equiv X'_{\mathcal{B}'} \\ \vec{u} \equiv Y_{\mathcal{B}} \equiv Y'_{\mathcal{B}'} \end{array}$$

entonces: $M = P^t A P$.

Matrices congruentes

Definición 5.3

En el espacio $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ se dice que A y M son congruentes *si $\exists P \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ regular, tal que $M = P^t AP$.*

Ejemplo

Ejemplo 5.5

Calcúlese la matriz del producto escalar:

$$(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = 2x_1y_1 + x_2y_1 + x_1y_2 + x_2y_2$$

en la base canónica. Calcúlese la matriz asociada en la base $\mathcal{B} = \{(1,1), (-1,1)\}$

Una condición sobre la matriz asociada

Teorema 5.1 (Criterio de Sylvester)

Una condición necesaria y suficiente para que una matriz A simétrica esté asociada a un producto escalar es que:

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1i} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{2i} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1i} & a_{2i} & \dots & a_{ii} \end{pmatrix} > 0 \qquad \forall i \in \{1, 2, \dots n\}$$

¿Son productos escalares?

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 8 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Longitud

Definición 5.4

Llamaremos longitud*, norma o módulo de un vector al número real:*
$\|\vec{v}\| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}} = \sqrt{\vec{v}^{\,2}}$

Definición 5.5

Un vector $\vec{v}$ *diremos que es unitario si* $\|\vec{v}\| = 1$

Definición 5.6

Dado un vector $\vec{v} \neq \vec{0}$*, llamaremos vector unitario asociado a* $\vec{v}$ *al vector:*

$$\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$$

Longitud

Definición 5.4

Llamaremos longitud, norma o módulo de un vector al número real:
$\|\vec{v}\| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}} = \sqrt{\vec{v}^{\ 2}}$

Definición 5.5

Un vector $\vec{v}$ diremos que es unitario si $\|\vec{v}\| = 1$

Definición 5.6

Dado un vector $\vec{v} \neq \vec{0}$, llamaremos vector unitario asociado a $\vec{v}$ al vector:

$$\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$$

Longitud

Definición 5.4

Llamaremos longitud*, norma o módulo de un vector al número real:*
$\|\vec{v}\| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}} = \sqrt{\vec{v}^{\ 2}}$

Definición 5.5

Un vector $\vec{v}$ *diremos que es unitario si* $\|\vec{v}\| = 1$

Definición 5.6

Dado un vector $\vec{v} \neq \vec{0}$*, llamaremos vector unitario asociado a* $\vec{v}$ *al vector:*

$$\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$$

Propiedades

Teorema 5.2 (desigualdad de Cauchy-Schwartz)

Dados dos vectores cualesquiera del espacio euclídeo V se cumple:

$$|\vec{v} \cdot \vec{w}| \leq ||\vec{v}|| \; ||\vec{w}||$$

Corolario

Si los vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son linealmente dependientes entonces se verifica la igualdad.

Propiedades

Teorema 5.2 (desigualdad de Cauchy-Schwartz)

Dados dos vectores cualesquiera del espacio euclídeo V se cumple:

$$|\vec{v} \cdot \vec{w}| \leq ||\vec{v}|| \; ||\vec{w}||$$

Corolario

Si los vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son linealmente dependientes entonces se verifica la igualdad.

Ángulo que forman dos vectores

Definición 5.7

Si los dos vectores son no nulos: $-1 \leq \frac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{||\vec{v}||\ ||\vec{w}||} \leq 1$ *y existe un único número real* $\theta \in [0,\pi]$ *tal que*

$$\cos(\theta) = \frac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{||\vec{v}||\ ||\vec{w}||}$$

A $\theta \in \mathbb{R}$ *le llamaremos ángulo que forman los vectores* $\vec{v}$ *y* $\vec{w}$*.*

Nota 5.1

Si multiplicamos la expresión del coseno por las longitudes de los vectores se obtiene la expresión habitual del producto escalar:

$$\vec{v}\cdot\vec{w} = ||\vec{v}||\ ||\vec{w}|| \cos(\theta)$$

Ángulo que forman dos vectores

Definición 5.7

Si los dos vectores son no nulos: $-1 \leq \frac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{||\vec{v}||\ ||\vec{w}||} \leq 1$ *y existe un único número real* $\theta \in [0, \pi]$ *tal que*

$$\cos(\theta) = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{||\vec{v}||\ ||\vec{w}||}$$

A $\theta \in \mathbb{R}$ *le llamaremos ángulo que forman los vectores* $\vec{v}$ *y* $\vec{w}$*.*

Nota 5.1

Si multiplicamos la expresión del coseno por las longitudes de los vectores se obtiene la expresión habitual del producto escalar:

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = ||\vec{v}||\ ||\vec{w}|| \cos(\theta)$$

¿Sorprendente?, no, la métrica depende del producto escalar

Ejemplo 5.6

Con el producto escalar que en la base canónica tiene asociada la matriz

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Calcúlese el coseno del ángulo que forman los vectores $(1, 0, 0)$ *y* $(0, 1, 0)$.

Vectores ortogonales

Definición 5.8

Dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ diremos que son ortogonales y lo denotaremos por $\vec{u} \perp \vec{v}$ si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Teorema 5.3

Sea $(V, \cdot)$ un espacio euclídeo, y sea $\vec{v}$ un vector no nulo de V, entonces, cualquier vector $\vec{u} \in V$ se puede expresar de forma única como suma de un vector proporcional a $\vec{v}$ y uno ortogonal a éste.

Teorema 5.4

En un espacio euclídeo, cualquier sistema de vectores no nulos y ortogonales dos a dos es un sistema libre.

Vectores ortogonales

Definición 5.8

Dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ diremos que son ortogonales y lo denotaremos por $\vec{u} \perp \vec{v}$ si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Teorema 5.3

Sea $(V, \cdot)$ un espacio euclídeo, y sea $\vec{v}$ un vector no nulo de V, entonces, cualquier vector $\vec{u} \in V$ se puede expresar de forma única como suma de un vector proporcional a $\vec{v}$ y uno ortogonal a éste.

Teorema 5.4

En un espacio euclídeo, cualquier sistema de vectores no nulos y ortogonales dos a dos es un sistema libre.

Vectores ortogonales

Definición 5.8

Dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ diremos que son ortogonales y lo denotaremos por $\vec{u} \perp \vec{v}$ si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Teorema 5.3

Sea $(V, \cdot)$ un espacio euclídeo, y sea $\vec{v}$ un vector no nulo de V, entonces, cualquier vector $\vec{u} \in V$ se puede expresar de forma única como suma de un vector proporcional a $\vec{v}$ y uno ortogonal a éste.

Teorema 5.4

En un espacio euclídeo, cualquier sistema de vectores no nulos y ortogonales dos a dos es un sistema libre.

Ejemplo 5.7

En $\mathbb{R}^3$ *con el producto escalar habitual, se considera el vector* $\vec{v} = (2, -3, 1)$*, expresa el vector* $\vec{u} = (1, 3, 5)$ *como suma de dos vectores, uno proporcional a* $\vec{v}$ *y otro ortogonal a éste.*

Introducción

A continuación nos plantearemos el cálculo de una base donde la matriz asociada al producto escalar sea lo más sencilla posible, es decir, siempre que sea posible diagonal, y mejor aún, la identidad. Veamos qué tipo de base sería, si queremos que la matriz asociada sea la identidad. Si

$$B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$$

es la base en la que la matriz asociada es la identidad, debe verificar que

$$\vec{v}_i \cdot \vec{v}_j = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad i = j \\ \\ 0 & \text{si} \quad i \neq j \end{cases}$$

Introducción

A continuación nos plantearemos el cálculo de una base donde la matriz asociada al producto escalar sea lo más sencilla posible, es decir, siempre que sea posible diagonal, y mejor aún, la identidad. Veamos qué tipo de base sería, si queremos que la matriz asociada sea la identidad. Si

$$B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$$

es la base en la que la matriz asociada es la identidad, debe verificar que

$$\vec{v}_i \cdot \vec{v}_j = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad i = j \\ \\ 0 & \text{si} \quad i \neq j \end{cases}$$

Bases ortogonales

Definición 5.9

Diremos que una base

$$B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$$

es una base ortogonal *si sus vectores son ortogonales dos a dos.*

Nota 5.2

Si trabajamos en una base ortogonal, la matriz de Gram es diagonal.

Bases ortogonales

Definición 5.9

Diremos que una base

$$B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$$

es una base ortogonal *si sus vectores son ortogonales dos a dos.*

Nota 5.2

Si trabajamos en una base ortogonal, la matriz de Gram es diagonal.

Bases ortonormales

Definición 5.10

Diremos que una base

$$B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$$

es una base ortonormal *si sus vectores son ortogonales dos a dos y unitarios.*

Nota 5.3

Si trabajamos en una base ortogonal, la matriz de Gram es la identidad.

Bases ortonormales

Definición 5.10

Diremos que una base

$$B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$$

es una base ortonormal *si sus vectores son ortogonales dos a dos y unitarios.*

Nota 5.3

Si trabajamos en una base ortogonal, la matriz de Gram es la identidad.

Método de Ortogonalización de Gram-Schmidt

A partir de una base cualquiera $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$, vamos a obtener una base ortogonal $\mathcal{B}' = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ como sigue:

$$\forall p \in \{1, 2, \ldots, n\} \quad \vec{e}_p = \alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \cdots + \alpha_{p-1} \vec{v}_{p-1} + \vec{v}_p$$

de forma que $\vec{v}_p \perp \vec{v}_i$ entonces $\alpha_i = \dfrac{\vec{e}_p \cdot \vec{v}_i}{\vec{v}_i \cdot \vec{v}_i}$ para todo $i \in \{1, 2, \ldots, p-1\}$. Así, la base

$$\left\{ \frac{\vec{v}_1}{\|\vec{v}_1\|}, \frac{\vec{v}_2}{\|\vec{v}_2\|}, ..., \frac{\vec{v}_n}{\|\vec{v}_n\|} \right\} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n\}$$

es una base ortonormal de E.

Método de Ortogonalización de Gram-Schmidt

A partir de una base cualquiera $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$, vamos a obtener una base ortogonal $\mathcal{B}' = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ como sigue:

$$\forall p \in \{1, 2, \ldots, n\} \quad \vec{e}_p = \alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \cdots + \alpha_{p-1} \vec{v}_{p-1} + \vec{v}_p$$

de forma que $\vec{v}_p \perp \vec{v}_i$ entonces $\alpha_i = \dfrac{\vec{e}_p \cdot \vec{v}_i}{\vec{v}_i \cdot \vec{v}_i}$ para todo $i \in \{1, 2, \ldots, p-1\}$. Así, la base

$$\left\{ \frac{\vec{v}_1}{\|\vec{v}_1\|}, \frac{\vec{v}_2}{\|\vec{v}_2\|}, \ldots, \frac{\vec{v}_n}{\|\vec{v}_n\|} \right\} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n\}$$

es una base ortonormal de E.

Método de Ortogonalización de Gram-Schmidt

A partir de una base cualquiera $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$, vamos a obtener una base ortogonal $\mathcal{B}' = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ como sigue:

$$\forall p \in \{1, 2, \ldots, n\} \quad \vec{e}_p = \alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \cdots + \alpha_{p-1} \vec{v}_{p-1} + \vec{v}_p$$

de forma que $\vec{v}_p \perp \vec{v}_i$ entonces $\alpha_i = \dfrac{\vec{e}_p \cdot \vec{v}_i}{\vec{v}_i \cdot \vec{v}_i}$ para todo $i \in \{1, 2, \ldots, p-1\}$. Así, la base

$$\left\{ \frac{\vec{v}_1}{\|\vec{v}_1\|}, \frac{\vec{v}_2}{\|\vec{v}_2\|}, ..., \frac{\vec{v}_n}{\|\vec{v}_n\|} \right\} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n\}$$

es una base ortonormal de E.

Un ejemplo

Ejemplo 5.8

Utilícese el método anterior para calcular una base ortonormal para el producto escalar definido en la base canónica por la matriz

$$G = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Ortogonalidad de subespacios

Definición 5.11

Se dice que dos subespacios U y V de E son subespacios ortogonales *si $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$ para cada $\vec{v} \in U$ y para cada $\vec{w} \in V$. En este caso, se puede escribir $U \perp V$.*

Definición 5.12

Si U es un subespacio de un espacio euclídeo E, el conjunto de los vectores ortogonales a U se denota por

$$U^{\perp} = \{\vec{w} \in E \;/\; \vec{v} \cdot \vec{w} = 0 \quad \forall \vec{v} \in U\}$$

Teorema 5.5

$U^{\perp}$ es subespacio de E y se le denomina suplemento ortogonal *de U respecto de E.*

Ortogonalidad de subespacios

Definición 5.11

Se dice que dos subespacios U y V de E son subespacios ortogonales *si $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$ para cada $\vec{v} \in U$ y para cada $\vec{w} \in V$. En este caso, se puede escribir $U \perp V$.*

Definición 5.12

Si U es un subespacio de un espacio euclídeo E, el conjunto de los vectores ortogonales a U se denota por

$$U^{\perp} = \{\vec{w} \in E \;/\; \vec{v} \cdot \vec{w} = 0 \quad \forall \vec{v} \in U\}$$

Teorema 5.5

$U^{\perp}$ es subespacio de E y se le denomina suplemento ortogonal *de U respecto de E.*

Ortogonalidad de subespacios

Definición 5.11

Se dice que dos subespacios U y V de E son subespacios ortogonales *si $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$ para cada $\vec{v} \in U$ y para cada $\vec{w} \in V$. En este caso, se puede escribir $U \perp V$.*

Definición 5.12

Si U es un subespacio de un espacio euclídeo E, el conjunto de los vectores ortogonales a U se denota por

$$U^{\perp} = \{\vec{w} \in E \;/\; \vec{v} \cdot \vec{w} = 0 \quad \forall \vec{v} \in U\}$$

Teorema 5.5

$U^{\perp}$ es subespacio de E y se le denomina suplemento ortogonal *de U respecto de E.*

El suplemento ortogonal

Teorema 5.6

$U \cap U^{\perp} = \left\{\vec{0}\right\}$

Teorema 5.7

Para que un vector $\vec{b} \in E$ sea ortogonal al subespacio U es suficiente que sea ortogonal a los vectores de una base cualquiera de U, $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n\}$.

El suplemento ortogonal

Teorema 5.6

$U \cap U^{\perp} = \left\{ \vec{0} \right\}$

Teorema 5.7

Para que un vector $\vec{b} \in E$ sea ortogonal al subespacio U es suficiente que sea ortogonal a los vectores de una base cualquiera de U,
$\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n\}$.

Proyección ortogonal

Consideremos en el espacio euclídeo E de dimensión finita o no, $\mathcal{U}$ un subespacio vectorial de E de dimensión m y un vector $\vec{v} \in E$.
Buscamos un vector $\vec{u} \in U$ tal que $\vec{v} - \vec{u}$ sea ortogonal a $\mathcal{U}$, es decir, $\vec{v} - \vec{u} \in \mathcal{U}^{\perp}$. Al vector $\vec{u}$ se le denomina **proyección ortogonal** de $\vec{v}$ sobre $\mathcal{U}$ y se le denota por $\vec{u} = proy_{\mathcal{U}}(\vec{v})$, o también $\vec{u} = \pi_{\mathcal{U}}(\vec{v})$.

Teorema 5.8

Si $\mathcal{U}$ es un subespacio de dimensión finita de un espacio euclídeo E (no necesariamente de dimensión finita) y $\vec{p} \in \mathcal{U}$ es la proyección ortogonal de $\vec{v} \in E$ sobre $\mathcal{U}$, $\vec{v} \notin \mathcal{U}$.

$$\|\vec{v} - \vec{w}\| > \|\vec{v} - \vec{p}\| \quad \forall \vec{w} \in \mathcal{U} \quad \vec{w} \neq \vec{p}$$

Cálculo de la proyección

Supongamos que conocemos una base del subespacio $\mathcal{U}$:
$\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_m\}$, buscamos $\vec{u} \in \mathcal{U}$ que debe ser de la forma

$$\vec{u} = c_1\vec{e}_1 + c_2\vec{e}_2 + \ldots + c_m\vec{e}_m$$

y que cumple

$$\vec{v} - (c_1\vec{e}_1 + c_2\vec{e}_2 + \ldots + c_m\vec{e}_m) \in \mathcal{U}^{\perp}$$

Para calcular la proyección, descomponemos $\vec{v}$ en suma de un vector de $\mathcal{U}$ y otro de $\mathcal{U}^{\perp}$ y la proyección será el vector de $\mathcal{U}$ obtenido.

Cálculo de la proyección

Supongamos que conocemos una base del subespacio $\mathcal{U}$:
$\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_m\}$, buscamos $\vec{u} \in \mathcal{U}$ que debe ser de la forma

$$\vec{u} = c_1\vec{e}_1 + c_2\vec{e}_2 + ... + c_m\vec{e}_m$$

y que cumple

$$\vec{v} - (c_1\vec{e}_1 + c_2\vec{e}_2 + ... + c_m\vec{e}_m) \in \mathcal{U}^{\perp}$$

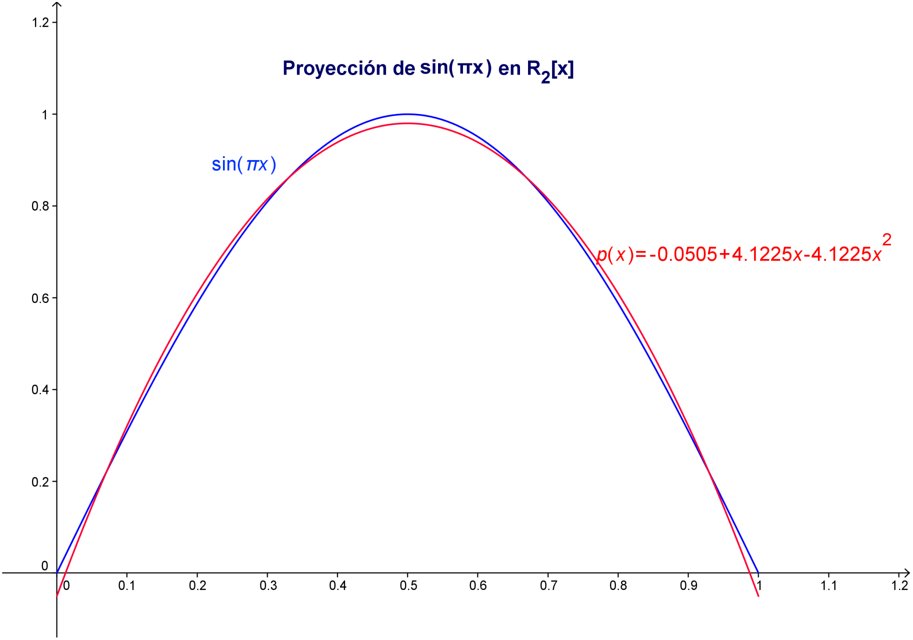
Para calcular la proyección, descomponemos $\vec{v}$ en suma de un vector de $\mathcal{U}$ y otro de $\mathcal{U}^{\perp}$ y la proyección será el vector de $\mathcal{U}$ obtenido.

Cálculo de la proyección de una función

Ejemplo 5.9

Calcula la proyección ortogonal de la función $f(x) = \operatorname{sen}(\pi x)$ *definida para* $x \in [0,1]$*, en el espacio euclídeo* $\mathbb{R}_2[x]$ *con el producto escalar:*

$$\forall p, q \in \mathbb{R}_2[x] \qquad p \cdot q = \int_0^1 p(x)q(x)dx$$


Proyección de sin(πx) en R2[x]
sin(πx)
p(x)=-0.0505+4.1225x-4.1225x2
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
1.1
1.2