Ejercicio 1 ***(1 punto)*** *En una encuesta sobre preferencias de los canales de T.V., CINE, SERIES y EDUCATIVO se obtuvo la siguiente información*

- 55 *encuestados ven el canal CINE*
- 40 *ven el canal CINE y el canal SERIES*
- 33 *ven el canal CINE y el canal EDUCATIVO*
- 3 *sólo ven el canal EDUCATIVO*
- 25 *ven los tres canales*
- 46 *ven el canal SERIES*
- 7 *no ven T.V*
- 27 *ven el canal EDUCATIVO y el canal SERIES*

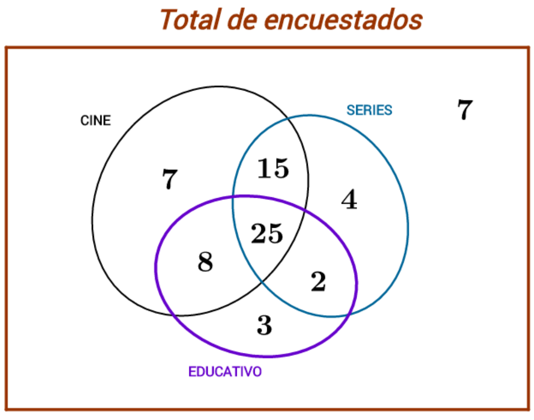
(a) *Haz un diagrama adecuado a la situación e indica el número de elementos de cada región.*

(b) *¿Cuántas encuestas se han hecho en total?*

(c) *¿Cuántas personas ven sólo el canal CINE?*

Solución:

(a) (0.6)



(b) (0.2) 71

(c) (0.2) 7

Ejercicio 2 ***(2 puntos)***

(a) *Dados dos conjuntos A, B y C, demuestra que* $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$.

(b) *Dada la relación binaria en* $\mathbb{Z}$ *definida como sigue:*

$$a\mathscr{R}b \Leftrightarrow \text{existe } n \in \mathbb{Z} \text{ tal que } a - b = 4n.$$

Decide si la relación es reflexiva, simétrica, antisimétrica o transitiva.

(c) *Dadas las aplicaciones*

$$f\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \to & \mathbb{N} \\ n & \to & n^2/2 \end{array} \qquad g\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \to & \dfrac{x}{x^2+1} \end{array} \qquad h\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z} \\ y & \to & y^3 \end{array}$$

Decide si f *es una aplicación. Sabiendo que* g *y* h *sí son aplicaciones, ¿existe* $g \circ h$*? ¿y* $h \circ g$*?. Si existe alguna de las dos, calcúlala. ¿Es* g *inyectiva? ¿y suprayectiva?*

Solución:

(a) Si $x \in (A \cap B) \cup C = (A \cup C)$ entonces $x \in A \cap B$ o $x \in C$. Si $x \in C$ entonces también pertenece a $A \cup C$ y a $B \cup C$, por lo que pertenecería a $(A \cup C) \cap (B \cup C)$. Si por el contrario no pertenece a C, entonces debería pertenecer a $A \cap B$, por lo que pertenece a $A \subset A \cup C$ y a $B \subset B \cap C$, así, también en este caso pertenecería a $(A \cup C) \cap (B \cup C)$. En cualquier caso:

$$x \in (A \cap B) \cup C \Rightarrow x \in (A \cup C) \cap (B \cup C) \qquad (0.3)$$

Recíprocamente, si $x \in (A \cup C) \cap (B \cup C)$ entonces $x \in A \cup C$ y $x \in B \cup C$. Por pertenecer a $A \cup C$, entonces o $x \in A$ o $x \in C$. En caso de que $x \in C$ entonces $x \in (A \cap B) \cup C$. Si $x \notin C$ entonces, como $x \in A \cup C$ necesariamente $x \in A$, de la misma forma, como $x \in B \cup C$ necesariamente $x \in B$ por lo que $x \in A \cap B$ y por ello también en $(A \cap B) \cup C$ de donde

$$x \in (A \cup C) \cap (B \cup C) \Rightarrow x \in (A \cap B) \cup C \qquad (0.3)$$

(b) Es reflexiva (0.2), simétrica (0.2) y transitiva (0.2), pero no antisimétrica. (0.2)

(c) f no es aplicación (0.1). Existe $g \circ f$ (0.1) pero no $f \circ g$ (0.1). Además $g \circ f(x) = \dfrac{x^3}{x^6+1}$ (0.1). h es inyectiva (0.1) pero no suprayectiva (0.1).

Ejercicio 3 ***(3 puntos)***

(a) *Define módulo y argumento de un complejo. Calcula todos los $z \in \mathbb{C}$ tales que $\dfrac{z+2i}{z-3i}$ es un número real.*

(b) *Expresa en las 5 formas estudiadas en clase los complejos $z_1 = 3 - 3\sqrt{3}i$, $z_2 = (1-15\pi)i$, $z_3 = 2e^{-i\pi/6}$ y $z_4 = e^{i\pi/3}$.*

(c) *Encuentra todos los valores de $n \in \mathbb{N}$ para los cuales z_1^n es un número real positivo.*

(d) *Obtén todas las soluciones de la ecuación compleja $z^6 = 1$.*

Solución:

(a) Definición de módulo (0.1), definición de argumento (0.1). Llamando $z = a + bi$ entonces

$$\frac{z+2i}{z-3i} = \frac{a^2+(b+2)(b-3)}{a^2+(b-3)^2} + \frac{5a}{a^2+(b-3)^2} i \ (0.3)$$

Por lo que, para que sea un número real debe cumplir que $imag\left(\dfrac{z+2i}{z-3i}\right) = \dfrac{5a}{a^2+(b-3)^2} = 0 \Leftrightarrow a = 0$(0.1), por lo que $z \in \{bi \;/\; b \in \mathbb{R} \setminus 3\}$(0.1).

(b) (0.1) cada una de las 16 formas que están en azul en la tabla.

Vectorial	Binómica	Trigonométrica	Polar	Exponencial
$(3, -3\sqrt{3})$	$3-3\sqrt{3}i$	$6\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$	$6_{\lfloor -\pi/3}$	$6e^{-i\pi/3}$
$(0, 1-15\pi)$	$(1-15\pi)i$	$(15\pi-1)\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$	$(15\pi-1)_{\lfloor -\pi/2}$	$(15\pi-1)e^{-1\pi/2}$
$(\sqrt{3}, -1)$	$\sqrt{3}-i$	$2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i \operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$	$2_{\lfloor -\pi/6}$	$2e^{-i\pi/6}$
$\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	$\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$	$1\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$	$1_{\lfloor \pi/3}$	$1e^{i\pi/3}$

(c) $z_1^n = 6^n e^{-in\pi/3}$. $z_1^n \in \mathbb{R}^+$ si y sólo si $\dfrac{n\pi}{3} = 2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$ es decir, si $n = 6k$. (0.3) *(d)* $z^6 = 1 \Leftrightarrow z \in \sqrt[6]{1}$. $1 = 1e^{i0}$, por lo tanto (0.4)

$$\sqrt[6]{1} = \begin{cases} 1e^{i0/6} & = & 1 \\ 1e^{i2\pi/6} & = & \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \\ 1e^{i4\pi/6} & = & -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \\ 1e^{i6\pi/6} & = & -1 \\ 1e^{i8\pi/6} & = & -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \\ 1e^{i10\pi/6} & = & \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \end{cases}$$

Ejercicio 4 ***4 puntos***

(a) *Dado $a \in \mathbb{R}$, encuentra una matriz escalonada asociada a*

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -a & 1-2a & a-1 \\ 2 & 3 & a+2 & 2a+1 & 3 \end{pmatrix},$$

especificando en cada paso las operaciones elementales que realices. Usando la matriz obtenida, calcula el rango de M según los valores de a. Para $a = 0$, calcula una matriz escalonada reducida asociada a M ¿Podrías encontrar otra matriz escalonada reducida asociada a M?

(b) *Utiliza la matriz asociada a M calculada en el apartado (a), para discutir el sistema de ecuaciones lineales:*

$$\left.\begin{array}{rrrrl} x & +y & +z & +t & = 1 \\ & y & +z & +t & = 1 \\ x & -y & -az & +(1-2a)t & = a-1 \\ 2x & +3y & +(a+2)z & +(2a+1)t & = 3 \end{array}\right\}$$

según los valores de a.

(c) *Utilizando la matriz escalonada reducida asociada a M calculada en el apartado (a), resuelve el sistema del apartado (b) cuando $a = 0$.*

(d) *Considera el sistema homogéneo cuya matriz de coeficientes es M. ¿Existe algún valor del parámetro a para el que el sistema no tiene ninguna solución no nula? En caso afirmativo, indica cuáles. ¿Existe algún valor de a para el cual el sistema tenga una solución que cumpla $y = 3$? En caso de respuesta positiva, calcúlala.*

Solución:

(a)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -a & 1-2a & a-1 \\ 2 & 3 & a+2 & 2a+1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_4 \to F_4 - 2F_1]{F_3 \to F_3 - F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -a-1 & -2a & a-2 \\ 0 & 1 & a & 2a-1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_4 \to F_4 - F_2]{F_3 \to F_3 + 2F_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1-a & 2-2a & a \\ 0 & 0 & a-1 & 2a-2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_4 \to F_4 + F_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1-a & 2-2a & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix} \text{(0.7)}$$

si $a \neq 0$ y $a \neq 1$ una matriz escalonada es:

$$Esc = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{1-a} & 2-2a & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{a} \end{pmatrix} \quad (0.2)$$

Si $a = 0$ sólo con sustituir en Esc vemos que se trata de una matriz escalonada.

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (0.2)$$

Por último, si $a = 1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y esta matriz no es escalonada, con una operación elemental más:

$$\xrightarrow{F_4 \to F_4 - F_3} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (0.3)$$

se obtiene una matriz escalonada asociada.

Así, se tiene que: (0.3)

- Si $a \neq 0$ y $a \not<= 1$, $rango(A) = 4$.
- Si $a = 0$, $rango(A) = 3$.
- Si $a = 1$, $rango(A) = 3$.

Además, si $a = 0$:

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_1 \to F_1 - F_3]{F_2 \to F_2 - F_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 \to F_1 - F_2} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (0.3)$$

Que es la matriz escalonada reducida asociada a A para $a = 0$. La matriz escalonada reducida es única, por lo que resulta imposible encontrar otra en estas condiciones. (0.1)

(b) Veamos los distintos casos:

- Si $a \neq 0$ y $a \neq 1$, una matriz escalonada asociada a la matriz ampliada sería:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{1-a} & 2-2a & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{a} \end{array}\right) \quad (0.3)$$

  y como $a \neq 0$ tendrá un pivote la columna de términos independientes, de donde se deduce que el sistema es incompatible.

- Si $a=1$, una matriz escalonada asociada a la matriz ampliada sería:

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (0.3)$$

que tiene un pivote la columna de términos independientes, de donde se deduce que el sistema es incompatible.

- Por último, si $a=0$, una matriz escalonada (y además reducida) asociada a la matriz ampliada es:

$$\left(\begin{array}{cccr|c} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad (0.3)$$

de donde se deduce que el sistema es compatible, ya que la columna de términos independientes no tiene pivote y es indeterminado, ya que tenemos 3 pivotes y 4 incógnitas.

(c) Para $a=0$, la columna correspondiente a la variable t es la que no contiene pivotes, tomaré esta incógnita como parámetro, obteniendo la solución paramétrica siguiente:

$$\left.\begin{array}{rcl} x & = & 0 \\ y & = & 1+\alpha \\ z & = & -2\alpha \\ t & = & \alpha \end{array}\right\} \forall \alpha \in \mathbb{R}. \qquad (0.3)$$

El sistema es compatible determinado, en consecuencia no tiene solucción no nula, sí y sólo si las 5 columnas son de pivote, pero dado que la matriz tiene sólo 4 filas, esto no puede ocurrir nunca. (0.2)

(d) La solución paramétrica del sistema, para $a=0$, por ejemplo vendría dada por:

$$\left.\begin{array}{rcl} x & = & 0 \\ y & = & \alpha-\beta \\ z & = & -2\alpha \\ t & = & \alpha \\ u & = & \beta \end{array}\right\} \forall \alpha,\beta \in \mathbb{R}. \qquad (0.3)$$

por lo que $y=3$ puede darse si $\alpha=3$ y $\beta=0$ de donde una solución como la pedida puede ser:

$$\left.\begin{array}{rcl} x & = & 0 \\ y & = & 3 \\ z & = & -6 \\ t & = & 3 \\ u & = & 0 \end{array}\right\} \qquad (0.2)$$