Universidad de Oviedo

Tema 3: Espacios vectoriales

Marisa Serrano

Universidad de Oviedo

Octubre de 2020

email: mlserrano@uniovi.es

Índice

Ley de composición externa

Definición 3.1

Sean A y K dos conjuntos, llamaremos operación externa o ley de composición externa en A (de forma abreviada lce) con dominio de operadores en K a cualquier aplicación del producto cartesiano $K \times A$ en A:

$$\begin{array}{rccc} \cdot: & K \times A & \longrightarrow & A \\ & (\alpha, b) & \to & \alpha \cdot b = c \in A \end{array}$$

Conjuntos y leyes

Ejemplo 3.1

¿Cuáles de las siguientes operaciones son lce?

a) *Producto de un número real por un elemento de $\mathbb{R}^2$*
b) *Producto de un número racional por un elemento de $\mathbb{R}^3$*
c) *Producto de un número real por un elemento de $\mathbb{Q}^2$*
d) *Producto de un número natural por un elemento de $\mathbb{R}$*

Espacios vectoriales

Definición 3.2

Un espacio vectorial es un conjunto $V \neq \emptyset$ con una lci $+$ y una lce $\cdot$ con dominio en un cuerpo $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ que verifican:

a) $(V, +)$ *es grupo abeliano*

b) $\forall \alpha \in \mathbb{K}\ \forall \vec{u}, \vec{v} \in V\ \alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}$ *(propiedad distributiva para la suma de vectores)*

c) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}\ \forall \vec{u} \in V\ (\alpha + \beta)\vec{u} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{u}$ *(propiedad distributiva para la suma de escalares)*

d) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}\ \forall \vec{u} \in V\ \alpha(\beta\vec{u}) = (\alpha\beta)\vec{u}$

e) $\forall \vec{u} \in V\ 1\vec{u} = \vec{u}$

Algunos espacios vectoriales

Ejemplo 3.2

Los siguientes conjuntos son espacios vectoriales si se consideran las operaciones adecuadas:

1. *Si* $\mathbb{K}$ *es un cuerpo,* $\mathbb{K}$ *es* $\mathbb{K}-$*espacio vectorial.*
2. *Si* $\mathbb{K}$ *es un cuerpo,* $\mathbb{K}^n$ *es* $\mathbb{K}-$*espacio vectorial.*
3. *Si* $\mathbb{K}$ *es un cuerpo,* $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ *es* $\mathbb{K}-$*espacio vectorial.*
4. *Si* $\mathbb{K}$ *es un cuerpo,* $\mathbb{K}[x]$ *es* $\mathbb{K}-$*espacio vectorial.*
5. $\{f : [a, b] \to \mathbb{R}\ /\ f$ *continua* $\}$ *es un* $\mathbb{R}-$*espacio vectorial.*
6. *El conjunto de soluciones de un sistema homogéneo es un espacio vectorial sobre el cuerpo en el que estén definidos los coeficientes.*

Propiedades

Propiedades 3.2.1

Para cada $\vec{v} \in V$ *y para cada* $\alpha \in \mathbb{K}$ *se cumple:*

a) $0\vec{v} = \vec{0}$

b) $\alpha\vec{0} = \vec{0}$

c) $\alpha\vec{v} = \vec{0} \to \vec{v} = \vec{0}$ *o bien* $\alpha = 0$

d) $\alpha\vec{v} = \alpha\vec{w}$ *y* $\alpha \neq 0$ *entonces* $\vec{v} = \vec{w}$

e) $(-\lambda)\vec{v} = -\lambda\vec{v}$

f) $\alpha\vec{v} = \beta\vec{v}$ *y* $\vec{v} \neq \vec{0}$ *entonces* $\alpha = \beta$

Índice

Subespacios vectoriales

Definición 3.3

Si V es un espacio vectorial y H es un subconjunto de V, diremos que H es un subespacio vectorial de V si, con las leyes suma y producto por un escalar definidas en V y restringidas a H, se tiene que H es un espacio vectorial.
En ocasiones se denota por $H \leq V$.

Caracterización

Sea V un espacio vectorial, y $H \subseteq V$ con $H \neq \emptyset$ entonces H es subespacio vectorial de V sí y sólo sí se cumplen las dos propiedades siguientes:

a) $\forall \vec{u}, \vec{v} \in H, \quad \vec{u} + \vec{v} \in H$

b) $\forall \vec{u} \in H, \forall \alpha \in \mathbb{K}, \quad \alpha\vec{u} \in H$

Nota 3.1

Todo subespacio vectorial contiene al vector nulo

Nota 3.2

$\{\vec{0}\}$ y V son subespacios vectoriales de V.

Ejemplos

Ejemplo 3.3

¿Cuáles de los siguientes conjuntos son subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^2$?

a) $\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x + y = 1\right\}$

b) $\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x + 2y = 0\right\}$

c) $\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x^2 + y = 0\right\}$

d) $\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x - 3y = 0 \text{ con } y \geq 0\right\}$

Índice

Sistemas de vectores

Definición 3.4

Llamaremos sistema de vectores *de un espacio vectorial V a una colección ordenada de vectores de V*

$$\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_p\}$$

en la que no necesariamente son todos distintos.

Combinaciones lineales

Definición 3.5

Dado el sistema de vectores

$$\mathcal{S} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_p\}$$

llamaremos combinación lineal *de $\mathcal{S}$ a cualquier vector de la forma*

$$\vec{u} = \alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \cdots + \alpha_p\vec{v}_p$$

con $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p \in \mathbb{K}$

Ejemplo 3.4

Dado el sistema de vectores de $\mathbb{R}^5$

$$S = \{(1,1,1,1,1), (1,1,2,3,4), (0,0,2,3,5)\}$$

decide cuál de los vectores siguientes es combinación lineal de S. En caso de que alguno lo sea, encuentra una combinación lineal.

$$\vec{u} = (1,2,1,1,1), \quad \vec{v} = (0,0,3,4,7)$$

Subespacio generado por un sistema de vectores

Definición 3.6

Dado el sistema de vectores

$$\mathcal{S} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_p\}$$

llamaremos subespacio generado *o* engendrado *por $\mathcal{S}$ al subespacio vectorial*

$$\langle \mathcal{S} \rangle = \{\alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \cdots + \alpha_p\vec{v}_p \ / \ \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_p \in \mathbb{K}\}$$

Definición 3.7

Sea V un espacio vectorial, y H un subespacio suyo, diremos que un sistema de vectores $\mathcal{S}$ es un sistema generador de H si $H = \langle \mathcal{S} \rangle$

Sistemas ligados y libres

Definición 3.8

Un sistema de vectores $\mathcal{S} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_p\}$ diremos que es ligado*, o también que los vectores de $\mathcal{S}$ son linealmente dependientes, si uno de ellos es combinación de los demás, o, equivalentemente, si $\vec{0}$ se puede expresar como combinación lineal de $\mathcal{S}$ en la que no todos los escalares que intervienen son nulos.*

Definición 3.9

Si el sistema no es ligado diremos que es libre *y que sus vectores son linealmente independientes. Esto es equivalente a que la única combinación lineal nula de $\mathcal{S}$ es aquella en la que todos los escalares son 0.*

Sistemas libres

Ejemplo 3.5

¿Cuáles de los siguientes sistemas de vectores de $\mathbb{R}^3$ son libres?

a) $\{(1,1,1),(1,1,0),(0,1,1),(-1,1,0)\}$

b) $\{(1,0,2),(1,1,2)\}$

c) $\{(0,1,0),(0,0,0)\}$

d) $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$

Propiedades 3.9.2

Sea $\mathcal{V}$ un $\mathbb{K}-$espacio vectorial, y sea $\mathcal{S} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_p\}$ un sistema de vectores de $\mathcal{V}$, se cumple:

a) Si $\vec{0} \in \mathcal{S}$ entonces el sistema es ligado.

b) Si $\mathcal{S}$ contiene dos vectores iguales, el sistema es ligado.

c) Si $\mathcal{T}$ es un sistema de vectores formado por vectores de $\mathcal{S}$ (en cualquier orden) y $\mathcal{S}$ es libre, entonces $\mathcal{T}$ también lo es

d) Si $\mathcal{S}$ es un sistema ligado y $\mathcal{T}$ es un sistema de vectores que contiene todos y cada uno de los vectores de $\mathcal{S}$, entonces $\mathcal{T}$ es un sistema ligado.

Teorema fundamental de la independencia

Teorema 3.1

Si $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots \vec{v}_q\}$ es un sistema generador de V y $S = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots \vec{u}_p\}$ es un sistema libre de V, entonces $p \leq q$.

Bases

Definición 3.10

Si H es un subespacio vectorial de V, diremos que un sistema de vectores de H es una base si es sistema generador de H y es libre.

Bases de subespacios

Ejemplo 3.6

Dado el conjunto

$$H = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x + y + 2z = 0\right\}$$

demuestra que el sistema de vectores

$$\mathcal{B} = \{(2, 0, -1), (1, 1, -1)\}$$

es una base de H.

Espacios de dimensión finita

Definición 3.11

Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial. Si existe $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots \vec{v}_n\}$ base de V, o $V = \left\{\vec{0}\right\}$ diremos que es un espacio de dimensión finita. Si $V \neq \left\{\vec{0}\right\}$ no posee base finita diremos que es de dimensión infinita.

Teorema 3.2

Todas las bases de un espacio vectorial de dimensión finita tienen el mismo número de elementos.

Definición 3.12

Si $V \neq \left\{\vec{0}\right\}$ es un espacio de dimensión finita, llamaremos dimensión del espacio, y lo denotaremos por $\dim(V)$, al número de vectores de una base. Si $V = \left\{\vec{0}\right\}$, diremos que su dimensión es 0.

Dimensión de subespacios

Teorema 3.3

Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión n, si U es un subespacio vectorial de V entonces

a) $\dim U \leq \dim V = n$

b) *Si* $\dim U = \dim V$, *entonces* $U = V$

Coordenadas

Teorema 3.4 (de la representación única)

Sea $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots \vec{v}_n\}$ una base del espacio vectorial V, entonces, para cada $\vec{u} \in V$ existe un único conjunto de escalares $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ tales que

$$\alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \cdots + \alpha_n\vec{v}_n = \vec{u}$$

A α_i le llamaremos coordenada i-ésima del vector $\vec{u}$ en la base $\mathcal{B}$.

Sistemas equivalentes

Definición 3.13

Diremos que dos sistemas, $\mathcal{S}$ y $\mathcal{S}'$, del espacio vectorial V son equivalentes cuando el subespacio generado por ambos coincida, es decir, cuando $\langle \mathcal{S} \rangle = \langle \mathcal{S}' \rangle$

Operaciones elementales

Propiedades 3.13.3

Dado $\mathcal{S} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ un sistema de vectores, los siguientes sistemas son equivalentes a S:

a) $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n, \alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \cdots \alpha_n\vec{v}_n\}$
b) $\{\alpha\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ con $\alpha \neq 0$
c) $\{\vec{v}_2, \vec{v}_1, \vec{v}_3, \ldots, \vec{v}_n\}$
d) $\{\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \cdots \alpha_n\vec{v}_n, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$

¿Cómo observar si un sistema de vectores es libre?

Fijemos una base y expresemos los vectores en coordenadas, como sigue:

$$\begin{array}{c} \vec{u}_1 = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \vec{u}_2 = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ \vdots \\ \vec{u}_m = (e_1, e_2, \ldots, e_n) \end{array}$$

Si la matriz escalonada asociada a la matriz

$$\begin{array}{cccc} (x_1 & x_2 & \ldots & x_n) \\ (y_1 & y_2 & \ldots & y_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (e_1 & e_2 & \ldots & e_n) \end{array}$$

no contiene filas nulas, el sistema es libre.

Sistemas libres y ligados

Ejemplo 3.7

Decide si los sistemas siguientes de $\mathbb{R}^3$ son libres o ligados:

$$\mathcal{S}_1 = \{(1,1,1),(1,0,1),(1,2,1)\}$$
$$\mathcal{S}_2 = \{(1,1,2),(1,2,1),(2,1,1)\}$$

Descripción de un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$

$$\text{Sistema generador} \underset{(6)}{\overset{(1)}{\rightleftarrows}} \text{Base} \underset{(5)}{\overset{(2)}{\rightleftarrows}} \text{Ecuaciones paramétricas} \underset{(4)}{\overset{(3)}{\rightleftarrows}} \text{Ecuaciones implícitas}$$

Método práctico

Ejemplo 3.8

Realizar todos los pasos anteriores para el subespacio de $\mathbb{R}^5$:

$$\mathcal{U} = \langle (1,1,1,1,1),(2,-1,2,-3,1),(3,0,3,-3,1),(1,1,1,0,0)\rangle$$

Construcción de bases a partir de un sistema libre

Teorema 3.5 (Teorema de la base incompleta)

Si $\mathcal{S} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots \vec{v}_p\}$ es un sistema libre del espacio vectorial V de dimensión n, existen $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_{n-p}$ vectores de V tales que el siguiente sistema de vectores es una base:

$$\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots \vec{v}_p, \vec{u}_1, \dots, \vec{u}_{n-p}\}$$

Ejemplo del TBI

Ejemplo 3.9

Sea $V = \mathbb{R}^5$. ¿Es el sistema $S = \{(1,1,1,0,0),(1,1,3,2,1),(1,-2,1,1,-1)\}$ libre?. En caso de serlo, completarlo a una base de $\mathbb{R}^5$.

Bases en espacios de dimensión conocida

Teorema 3.6

Sea V un espacio de dimensión n, y sea $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots \vec{v}_n\}$ un sistema de vectores de V.

a) Si S es libre, entonces es base de V.

b) Si S es sistema generador de V, entonces es base de V.

Rango de subespacios vectoriales

Definición 3.14

Se llama rango de un sistema de vectores a la dimensión del subespacio generado por dicho sistema.

Ejemplo 3.10

Calcúlese el rango del sistema de vectores $S = \{(1,1,1),(1,0,1),(0,1,0),(2,5,2)\}$ y descríbase $\langle S \rangle$ dando sus ecuaciones paramétricas, sus ecuaciones implícitas y una base.

Cambio de base en espacios vectoriales

Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión n y $\mathcal{B} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n\}$ y $\mathcal{B}' = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$ dos bases de V. Si

$$\vec{v} = x_1\vec{u}_1 + x_2\vec{u}_2 + \cdots x_n\vec{u}_n = y_1\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2 + \cdots y_n\vec{e}_n,$$

buscamos una relación entre las coordenadas x_i y las y_i.
Para ello, supondremos que se conocen las coordenadas de $\mathcal{B}'$ respecto de la base $\mathcal{B}$,

$$\left.\begin{array}{l} \vec{e}_1 = a_{11}\vec{u}_1 + a_{21}\vec{u}_2 + \cdots a_{n1}\vec{u}_n \\ \vec{e}_2 = a_{12}\vec{u}_1 + a_{22}\vec{u}_2 + \cdots a_{n2}\vec{u}_n \\ \qquad\vdots \\ \vec{e}_n = a_{1n}\vec{u}_1 + a_{2n}\vec{u}_2 + \cdots a_{nn}\vec{u}_n \end{array}\right\}$$

Relación matricial

La relación entre las coordenadas x_i y las y_i viene dada por

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

A la matriz

$$P = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

la llamaremos **matriz del cambio de la base $\mathcal{B}$ a la base $\mathcal{B}'$**.

Cálculo de la matriz de cambio de base

La matriz de un cambio de base es única y siempre tiene tiene inversa. Además P^{-1} representa el cambio de la base $\mathcal{B}'$ a la base $\mathcal{B}$

Ejemplo 3.11

Calcula la matriz de cambio de base de la base $\{(1,1,1),(0,1,1),(1,0,1)\}$ *de* $\mathbb{R}^3$ *a la base* $\{(1,-1,0),(0,2,1),(0,0,1)\}$

Índice

Suma e intersección de subespacios

Definición 3.15

Dados V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial, y U_1 y U_2 dos subespacios vectoriales suyos, llamaremos subespacio intersección *al conjunto*

$$U_1 \cap U_2 = \{\vec{v} \in V \ / \ \vec{v} \in U_1 \text{ y } \vec{v} \in U_2\}$$

Llamaremos subespacio suma *al conjunto*

$$U_1 + U_2 = \{\vec{v} \in V \ / \ \vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 \text{ tal que } \vec{v}_1 \in U_1 \text{ y } \vec{v}_2 \in U_2\}$$

Propiedades 3.15.4

Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y sean U_1 y U_2 dos subespacios vectoriales suyos, entonces $U_1 \cap U_2$ y $U_1 + U_2$ son subespacios vectoriales de V. Además

$$U_1 \cap U_2 \leq \left\{ \begin{array}{c} U_1 \\ U_2 \end{array} \right\} \leq U_1 + U_2 \leq V$$

Cálculo de la suma de subespacios

Propiedades 3.15.5

Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial, y U_1 y U_2 dos subespacios vectoriales suyos, si S_1 es un sistema generador de U_1 y S_2 es un sistema generador de U_2, entonces $S_1 \bigcup S_2$ es un sistema generador de $U_1 + U_2$.

Ejemplo 3.12

En $\mathbb{R}^4$, calcular una base de la suma del subespacio $U_1 =< (1,0,1,1),(0,1,1,1) >$ y el subespacio $U_2 =< (1,-1,0,0),(1,1,1,1),(1,0,0,0) >$

Teorema de las dimensiones, o Fórmula de Grassmann

Teorema 3.7

Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial, y sean U_1 y U_2 dos subespacios vectoriales suyos, entonces:

$$\dim(U_1 + U_2) = \dim(U_1) + \dim(U_2) - \dim(U_1 \cap U_2)$$

Ejemplo 3.13

Calcúlense una base de la suma y una base de la intersección de los subespacios siguientes:

$$U_1 =< (1,2,1,0),(-1,1,1,1) >$$

$$U_2 =< (2,1,0,-1),(1,-1,3,7) >$$