Tema 4: Aplicaciones Lineales

Marisa Serrano

Universidad de Oviedo

6 de Noviembre de 2020

email: mlserrano@uniovi.es

Contenido

Contenido

Definición

Definición 4.1

Sean U y V dos espacios vectoriales definidos sobre el mismo cuerpo $\mathbb{K}$, una aplicación $f: U \to V$ diremos que es una aplicación lineal *si verifica:*

- *A1* $\forall \vec{u}_1, \vec{u}_2 \in U$ *se cumple* $f(\vec{u}_1 + \vec{u}_2) = f(\vec{u}_1) + f(\vec{u}_2)$.
- *A2* $\forall \vec{u} \in U$ *y* $\forall \alpha \in \mathbb{K}$ *se cumple* $f(\alpha \vec{u}) = \alpha f(\vec{u})$

Los axiomas $A1$ y $A2$ de la definición anterior son equivalentes a

$$\forall \vec{u}_1, \vec{u}_2 \in U \quad \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K} \quad f(\alpha_1 \vec{u}_1 + \alpha_2 \vec{u}_2) = \alpha_1 f(\vec{u}_1) + \alpha_2 f(\vec{u}_2)$$

Si $U = V$ la aplicación lineal se llama **endomorfismo**.

Propiedades 4.1.1

Si $f : U \to V$ es una aplicación lineal, entonces

a) $f(\vec{0}_U) = \vec{0}_V$

b) $f(-\vec{v}) = -f(\vec{v})$

Ejemplos

Ejemplo 4.1

Comprobar que $f(x, y, z) = (2x, x + y, 0)$ es aplicación lineal

Ejemplo 4.2

Comprobar que $f(x, y) = (x + y^2, y)$ no es aplicación lineal

Ejemplo 4.3

¿Es $f(x, y) = (x + y + 1, y)$ una aplicación lineal?

Imagen de un sistema de vectores

Definición 4.2

Sea $f : U \to V$ una aplicación lineal, y $S = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n\}$ un sistema de vectores de U, se llama sistema imagen de S al sistema de vectores de V $f(S) = \{f(\vec{u}_1), f(\vec{u}_2), \ldots, f(\vec{u}_n)\}$

Propiedades 4.2.2

Sea $f : U \to V$ una aplicación lineal, y S un sistema de vectores de U

1. *Si S es ligado, entonces $f(S)$ es ligado.*
2. *Si $f(S)$ es libre, entonces S es libre.*

Nota 4.1

Puede ocurrir que un sistema de vectores S sea libre y $f(S)$ sea ligado.

Contenido

Determinación de una aplicación lineal

Teorema 4.1

Sean U y V dos espacios vectoriales de dimensión finita definidos sobre el mismo cuerpo conmutativo $\mathbb{K}$. Sea $B_U = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n\}$ una base de U y $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ una familia de vectores de V. Entonces existe una única aplicación lineal $f: U \to V$ tal que $f(\vec{u}_i) = \vec{v}_i \ \forall i = 1, 2, \ldots, n$.

Además, se tiene que si $\vec{u} = a_1\vec{u}_1 + a_2\vec{u}_2 + \cdots + a_n\vec{u}_n$, entonces se verifica que

$$f(\vec{u}) = a_1 f(\vec{u}_1) + a_2 f(\vec{u}_2) + \cdots + a_n f(\vec{u}_n) = a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + \cdots + a_n\vec{v}_n$$

Este resultado indica que la aplicación queda completamente determinada si conocemos las imágenes de los vectores de una base de U.

Matriz asociada a una aplicación lineal

Definición 4.3

Sean $f: U \to V$ una aplicación lineal, $B_U = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \cdots, \vec{u}_n\}$ una base de U y $B_V = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \cdots, \vec{v}_m\}$ una base de V. Supongamos que

$$\begin{aligned} f(\vec{u}_1) &= a_{11}\vec{v}_1 + a_{21}\vec{v}_2 + \cdots + a_{m1}\vec{v}_m \\ f(\vec{u}_2) &= a_{12}\vec{v}_1 + a_{22}\vec{v}_2 + \cdots + a_{m2}\vec{v}_m \\ &\vdots \\ f(\vec{u}_n) &= a_{1n}\vec{v}_1 + a_{2n}\vec{v}_2 + \cdots + a_{mn}\vec{v}_m \end{aligned}$$

Se denomina matriz asociada a la aplicación lineal f en función de las bases B_U de U y B_V de V a la matriz

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Expresión matricial de las ecuaciones de una aplicación lineal

En las condiciones de la transparencia anterior consideremos un vector cualquiera $\vec{u} \in U$. Denotemos por $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ a las coordenadas de $\vec{u}$ en la base B_U y por $(y_1, y_2, \ldots, y_m)$ a las coordenadas de $f(\vec{u})$ en la base B_V, es decir, $\vec{u} = x_1\vec{u}_1 + x_2\vec{u}_2 + \cdots + x_n\vec{u}_n$ y $f(\vec{u}) = y_1\vec{v}_1 + y_2\vec{v}_2 + \cdots + y_m\vec{v}_m$. Entonces la relación matricial entre las coordenadas de ambos vectores viene dada por:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}}_{Y} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{X} \iff Y = AX$$

Ejemplo 4.4

Dada la aplicación lineal $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida como sigue: $f(x, y, z) = (2x - z, x + y)$, calcula la matriz asociada a la aplicación lineal en las bases $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^3} = \{(1, 1, 1), (0, 1, 2), (0, 0, 1)\}$ de $\mathbb{R}^3$ y la canónica de $\mathbb{R}^2$.

Matriz de la aplicación en distintas bases

Nota 4.2

B_U y B'_U bases de U y P la matriz de cambio de base tomando como base antigua B_U y como base nueva B'_U, se cumple que P es la matriz de la aplicación identidad en las bases B'_U y B_U.

Sea $f: U \to V$ una aplicación lineal. Sean B_U y B'_U bases de U y B_V y B'_V bases de V. Sea A la matriz de f en las bases B_U y B_V, P la matriz de cambio de base tomando como base antigua B_U y como base nueva B'_U y Q la matriz de cambio tomando como base antigua B_V y como base nueva B'_V. Entonces, M, matriz de f en las bases B'_U y B'_V viene dada por

$$M = Q^{-1}AP.$$

Ejemplo 4.5

Sea $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ una aplicación lineal, cuya matriz asociada respecto de las bases $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ y $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ de $\mathbb{R}^2$ es: $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}$

a) *Conservando la base $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ de $\mathbb{R}^2$, tomamos en $\mathbb{R}^3$ una nueva base formada por: $\vec{e}'_1 = \vec{e}_2 + \vec{e}_3$; $\vec{e}'_2 = \vec{e}_3 + \vec{e}_1$; $\vec{e}'_3 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$. Hállese la nueva matriz asociada a f.*

b) *Conservando en $\mathbb{R}^3$ la base $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, y tomando en $\mathbb{R}^2$ la base formada por*
$\vec{v}'_1 = \frac{1}{2}(\vec{v}_1 + \vec{v}_2)$; $\quad \vec{v}'_2 = \frac{1}{2}(\vec{v}_1 - \vec{v}_2)$, *hállese la nueva matriz asociada a f.*

c) *Hallar la matriz asociada a f al tomar $\{\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3\}$ y $\{\vec{v}'_1, \vec{v}'_2\}$ como bases de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^2$, respectivamente.*

Contenido

El núcleo de una aplicación lineal

Definición 4.4

Sean U y V dos $\mathbb{K}-$espacios vectoriales y $f: U \to V$ una aplicación lineal. Se define el núcleo de la aplicación lineal *como el conjunto*

$$\ker f = \left\{ \vec{u} \in U \ / \ f(\vec{u}) = \vec{0} \right\}$$

$\ker f$ *es un subespacio vectorial de U*

La imagen de una aplicación lineal

Definición 4.5

Sean U y V dos $\mathbb{K}-$espacios vectoriales y $f : U \to V$ una aplicación lineal. Se define la imagen de la aplicación lineal *como el subespacio vectorial*

$$Imf = \{\vec{v} \in V \ / \ \exists \vec{u} \in U \quad f(\vec{u}) = \vec{v}\}$$

Llamaremos rango de una aplicación lineal *a $rgf = \dim Imf \leq \dim V$*
Sea $W \leq U$, llamaremos conjunto imagen de W a

$$f(W) = \{f(\vec{w}) \in V \ / \ \vec{w} \in W\}$$

Nota 4.3

Dada una aplicación lineal f, se cumple que la imagen de un sistema generador es sistema generador de la imagen, es decir, si $W =< \vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_p >$ entonces $f(W) =< f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), \ldots, f(\vec{e}_p) >$.

Determinación del núcleo y la imagen de una aplicación lineal

Ejemplo 4.6

Se considera la aplicación lineal de $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}_2[x]$ definida por

$$f(1,0,0) = 1 - x, \ f(0,1,0) = -2 + x - x^2, \ f(0,0,1) = -x - x^2.$$

Calcúlese, si es posible, una base del núcleo y una base de la imagen.

Caracterizaciones

Teorema 4.2

Dados U y V $\mathbb{K}-$espacios vectoriales, y dada $f : U \to V$ aplicación lineal, se verifica:

a) f inyectiva $\iff \ker f = \{\vec{0}\}$,

b) f suprayectiva $\iff Imgf = V$,

c) $\dim(U) = \dim(\ker(f)) + \dim(Img(f))$,

d) si f es biyectiva, entonces $\dim(U) = \dim(V)$,

e) si $\dim(U) = \dim(V)$ entonces:

$$f \text{ es inyectiva } \iff f \text{ es suprayectiva } \iff f \text{ es biyectiva}$$

Nota 4.4

La matriz asociada a cualquier biyección siempre es cuadrada e inversible.

Ejemplo 4.7

Se considera la aplicación lineal $T : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}^3$ dada por $T(1+x) = (1,0,0)$, $T(x+x^2) = (1,1,0)$ y $T(-1-x+x^2) = (0,0,0)$. Determinar el núcleo y la imagen de f y analizar si f es inyectiva, si es suprayectiva y si es biyectiva.

Ejemplo 4.8

Se considera la aplicación lineal $f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}_3[x]$ *definida por*

$$f(a,b,c,d) = (b-c+2d) + (d-b)x + 2cx^2 + (d-c)x^3.$$

Se pide:

a) *Determinar la matriz de la aplicación* f *en las bases canónicas.*

b) *Obtener, cuando sea posible, una base, unas ecuaciones paramétricas y unas ecuaciones implícitas de* $Ker(f)$.

c) *Obtener, cuando sea posible, una base, unas ecuaciones paramétricas y unas ecuaciones implícitas de* $Im(f)$.