

Tema 6: Diagonalización

Marisa Serrano

Universidad de Oviedo

2 de diciembre de 2020

email: mlserrano@uniovi.es

Endomorfismos

En este tema se trabajará siempre con endomorfismos. Recordemos que si V es un \mathbb{K} -espacio vectorial, se llama **endomorfismo** de V a cualquier aplicación lineal $T: V \rightarrow V$. Si un endomorfismo es biyectivo se dice que es un automorfismo.

Contenido

- 1 Introducción
- 2 Diagonalización de matrices y endomorfismos
- 3 Condiciones de diagonalización
- 4 Diagonalización ortogonal

Particularidades de los endomorfismos

Puesto que los endomorfismos son aplicaciones lineales de V en si mismo, para su estudio en este tema tomaremos la misma base en V como espacio inicial y como espacio final.

Otra particularidad importante es que los subespacios $\ker(T)$ e $\operatorname{Im}(T)$ están en el mismo espacio vectorial, lo que hace que tenga sentido su suma y su intersección.

Como el espacio inicial y el final coinciden, la matriz A asociada al endomorfismo en una base B de V es cuadrada por lo que tiene sentido hablar de A^p .

Diagonalización de endomorfismos

Definición 6.1

Sea V un \mathbb{K} -espacio vectorial de dimensión finita, y $T: V \rightarrow V$ un endomorfismo. Diremos que T es diagonalizable si existe una base de V tal que la matriz asociada a T en dicha base es diagonal.

Nota 6.1

No todos los endomorfismos son diagonalizables.

Valores y vectores propios de un endomorfismo

Definición 6.2

Sea $T: V \rightarrow V$ un endomorfismo del espacio vectorial V . Diremos que un vector $\vec{v} \neq \vec{0}$ es un vector propio de T si existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tal que $T(\vec{v}) = \lambda \vec{v}$. Al escalar λ le llamaremos valor propio del endomorfismo asociado a \vec{v} .

Al conjunto de todos los valores propios de un endomorfismo T se le llama espectro del endomorfismo y se denota por:

$$\sigma(T) = \left\{ \lambda \in \mathbb{K} \mid \exists \vec{v} \neq \vec{0}, T(\vec{v}) = \lambda \vec{v} \right\}$$

¿Qué tipo de base buscamos?

Buscamos una base $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ respecto de la cual la matriz asociada al endomorfismo es de la forma

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{pmatrix}$$

es decir, la base debe cumplir

$$T(\vec{e}_1) = d_1 \vec{e}_1, T(\vec{e}_2) = d_2 \vec{e}_2, \dots, T(\vec{e}_n) = d_n \vec{e}_n$$

Ejemplo

Ejemplo 6.1

Demuestra que $(1, 1, 1)$ es un vector propio del endomorfismo:

$$\begin{aligned} T: \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\rightsquigarrow (x + y, x + z, y + z) \end{aligned}$$

¿a qué valor propio está asociado?

Subespacios propios

Teorema 6.1

Si $T: V \rightarrow V$ es un endomorfismo de V , y $\lambda \in \mathbb{K}$ es un valor propio, el conjunto

$$S_T(\lambda) = \{\vec{v} \in V \mid T(\vec{v}) = \lambda \vec{v}\} = \ker(T - \lambda I)$$

es un subespacio vectorial de V al que llamaremos subespacio propio. También suele denotarse a este subespacio por S_λ y por $S(\lambda)$.

Ejemplo

Ejemplo 6.2

Sabiendo que $\lambda = 2$ es un valor propio del endomorfismo:

$$\begin{aligned} T: \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\rightsquigarrow (x + y, x + z, y + z) \end{aligned}$$

calcula el subespacio propio $S(2)$

¿Cómo diagonalizamos un endomorfismo diagonalizable?

Se calcula la matriz A asociada al endomorfismo en una base \mathcal{B} y a continuación se calcula:

- El polinomio característico:

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1} \text{tr}(A) \lambda^{n-1} + \dots + \det(A)$$

- Valores propios: se resuelve $p(\lambda) = 0$
- Subespacios propios: Para cada λ se resuelve el sistema de ecuaciones: $(A - \lambda I)X = [0]$, el subespacio solución es el subespacio propio asociado a λ
- La base formada por la unión de las bases de los subespacios propios es la base buscada.

Ejemplo

Ejemplo 6.3

Diagonaliza el endomorfismo definido por:

$$\begin{aligned} T: \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\rightsquigarrow (x + y, x + z, y + z) \end{aligned}$$

Diagonalización de matrices

Se dice que una matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ es diagonalizable si lo es cualquier endomorfismo cuya matriz asociada en una base cualquiera es A , por ejemplo, se suele pensar un endomorfismo $f: \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$. De hecho, si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ es habitual seleccionar la base canónica.

En la práctica no es necesario construir dicho endomorfismo.

Ejemplos

Ejemplo 6.4

En $\mathbb{R}_3[x]$ se define el endomorfismo T por
 $T(ax^3 + bx^2 + cx + d) = dx^3 + cx^2 + bx + a$.

- Determinar la matriz de T en la base $\{1, x, x^2, x^3\}$.
- Hallar una base donde la matriz asociada a T sea diagonal, y calcular dicha matriz.

Ejemplo 6.5

Calcular la potencia n -ésima de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

¿Cómo diagonalizamos una matriz diagonalizable?

- Cálculo del polinomio característico:

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1} \text{tr}(A) \lambda^{n-1} + \dots + \det(A)$$

- Resolución de la ecuación característica: $p(\lambda) = 0$
- Cálculo de los subespacios propios: Para cada λ se resuelve el sistema lineal $(A - \lambda I)X = [0]$
- Se construyen n matrices columna X_i soluciones de los sistemas del apartado anterior, y linealmente independientes, y se toma $P = [X_1 X_2 \dots X_n]$ y $A = PDP^{-1}$ donde D es la matriz diagonal tal que $d_{ii} = \lambda_i$, el valor propio asociado a X_i .

Condiciones necesarias y suficientes de diagonalización

Teorema 6.2

Sea $T: V \rightarrow V$ un endomorfismo de V , sea $\lambda_0 \in \sigma(T)$ tal que λ_0 es raíz con multiplicidad m del polinomio característico de T , entonces:

$$1 \leq \dim S_T(\lambda_0) \leq m$$

Teorema 6.3

Sea $T: V \rightarrow V$ un endomorfismo de V , con $\dim(V) = n$, entonces T es diagonalizable en \mathbb{K} si y sólo si se verifican las dos condiciones siguientes:

- 1 $p(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{n_1} (\lambda_2 - \lambda)^{n_2} \dots (\lambda_p - \lambda)^{n_p}$ con $n_1 + n_2 + \dots + n_p = n$
- 2 $\dim S(\lambda_i) = n_i \quad \forall i$

Ejemplo

Ejemplo 6.6

Dado el endomorfismo $T_\alpha: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ cuya matriz asociada en la base canónica es:

$$A = \begin{pmatrix} 2\alpha - 1 & 0 & 2\alpha - 2 \\ 1 & \alpha & 2 \\ 1 - \alpha & 0 & 2 - \alpha \end{pmatrix}$$

¿Para qué valores de α es T_α diagonalizable en \mathbb{R} ?

Ejemplo 6.7

Sea (\mathbb{R}^3, \cdot) , el espacio euclídeo cuyo producto escalar tiene asociada en la base canónica la matriz

$$G = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Se considera el endomorfismo cuya matriz asociada en la base canónica es:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & c & a \\ 2 & 1 & b \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Calcúlense los valores de $a, b, c \in \mathbb{R}$ que hacen que el operador sea simétrico.

Operadores simétricos

Definición 6.3

Sea (E, \cdot) un espacio euclídeo, y sea $T: E \rightarrow E$ un endomorfismo, se dice que es un operador simétrico si verifica la condición siguiente:

$$\forall \vec{u}, \vec{v} \in V \quad \vec{u} \cdot T(\vec{v}) = T(\vec{u}) \cdot \vec{v}$$

Sean G y A las matrices asociadas a \cdot y T en una cierta base \mathcal{B} , entonces

$$GA = A^t G = (GA)^t$$

Si $G = I$, entonces A es simétrica.

Propiedades de los operadores simétricos

Teorema 6.4

Si $T: V \rightarrow V$ es un operador simétrico, y $\alpha \neq \beta$ son valores propios de T , $S(\alpha) \perp S(\beta)$

Teorema 6.5

El polinomio característico de un operador simétrico es de la forma:

$$p(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{n_1} (\lambda_2 - \lambda)^{n_2} \cdots (\lambda_p - \lambda)^{n_p} \quad \lambda_i \in \mathbb{R}$$

Teorema 6.6

Todo operador simétrico es diagonalizable en una base ortonormal.

Ejemplo

Ejemplo 6.8

Se considera en \mathbb{R}^3 el producto escalar $\cdot : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ cuya matriz asociada en la base canónica es:

$$G = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

y el operador T cuya matriz asociada en la base canónica es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 - \alpha & 2 - \alpha & -\alpha \\ 2\alpha - 1 & 2\alpha - 1 & 1 + \alpha \end{pmatrix}$$

- a) Calcula los valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ para los que el operador es simétrico.
- b) En dichos casos, diagonalizar T en una base ortonormal.