Tema 1. Conjuntos y conjuntos numéricos: operaciones con números complejos

Ejercicio 1 *Escribe simbólicamente las afirmaciones siguientes:*

(a) *a es un elemento del conjunto A.*

(b) *El conjunto A contiene al conjunto B.*

(c) *Para cada x elemento de A existe al menos un elemento y de B que cumple que x e y son iguales.*

(d) *La intersección de A con B no contiene al elemento b.*

Ejercicio 2 *Se consideran los conjuntos siguientes:*

$$A = \{3k \in \mathbb{N} \;/\; k \in \mathbb{N}\}, \; B = \{15k \in \mathbb{N} \;/\; k \in \mathbb{N}\}, \; C = \{7k \in \mathbb{N} \;/\; k \in \mathbb{N}\},$$

decide de forma razonada, cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas:

I) $12 \subset A$

II) $A \cap C = \emptyset$

III) $A \in B$

IV) $(45, 35) \in (A \cap B) \times C$

Ejercicio 3 *Se consideran los conjuntos siguientes:*

$A = \{r, s, t, u, v, w\}$, $B = \{u, v, w, x, y, z\}$, $C = \{s, u, y, z\}$, $D = \{u, v\}$, $E = \{s, u\}$, $F = \{s\}$.

Determina en cada caso, con las informaciones siguientes (puedes utilizar un diagrama de Venn) cuál de los conjuntos es X:

(a) $X \subset A$ *y* $X \subset B$;

(b) $X \not\subset B$ *y* $X \subset C$;

(c) $X \not\subset A$ *y* $X \not\subset B$;

(d) $X \subset A$ *y* $X \subset C$.

Ejercicio 4 *Sea* $U = \{a, b, c, d, e\}$ *el conjunto universal y los subconjuntos* $A = \{a, b, d\}$, $B = \{b, d, e\}$, $C = \{a, b, e\}$. *Calcula:*

(a) $A \bigcup B$,

(b) $A \bigcup C$,

(c) $A \bigcap A$,

(d) $A \setminus B$,

(e) $U \setminus (A \bigcap B)$,

(f) $(U \setminus A) \bigcup (U \setminus B)$,

(g) $U \setminus (A \bigcup C)$,

(h) $A \bigcap U \setminus A$,

(i) $U \setminus (A \bigcup B \bigcup C)$,

(j) $B \setminus A$,

(k) $U \setminus (A \setminus B)$,

(l) $U \bigcup B$,

(m) $U \bigcap B$,

Ejercicio 5 *Sean A, B y C conjuntos que cumplen* $A \subset B \subset C$. *Se sabe que* $a \in A$, $b \in B$, $c \in C$, $d \notin A$, $e \notin B$ *y* $f \notin C$. *¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas?*

(a) $a \in C$, *(c)* $c \notin A$, *(e)* $e \notin A$,

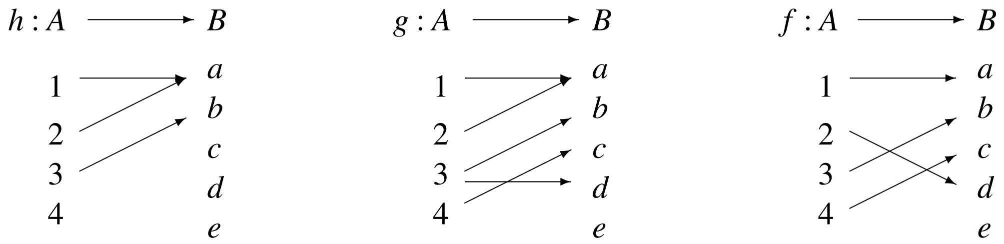
(b) $b \in A$, *(d)* $d \in B$, *(f)* $f \notin A$.

Ejercicio 6 *Se preguntó a* 50 *alumnos sobre los deportes que practicaban, obteniéndose los siguientes resultados: 20 practican sólo fútbol, 12 practican fútbol y natación y 10 no practican ninguno de estos deportes. Con estos datos averigua el número de alumnos que practican natación, el número de ellos que sólo practican natación y el de los que practican alguno de dichos deportes.*

Ejercicio 7 *Se consideran los conjuntos*

$$A = \{1,2,3,4\}, \quad B = \{a,b,c,d,e\}$$

¿Cuáles de las correspondencias siguientes son aplicaciones?



Ejercicio 8 *Se consideran las aplicaciones siguientes:* $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ *definida por* $f(n) = 1 - n$, *y* $g\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ *definida por* $g(z) = \dfrac{z}{z^2+1}$. *Decide si existen las aplicaciones* $g \circ f$ *ó* $f \circ g$. *En caso de que existan, calcula la composición.*

Ejercicio 9 *Se consideran las aplicaciones* $p\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$, *con* $p(n) = \dfrac{n^2}{n+1}$, *y* $q\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$, *con* $q(z) = z^2$, *señale qué aplicaciones se pueden definir:* $p \circ q$, $q \circ p$, $q \circ (p \circ q)$, $p \circ (p \circ q)$.

Ejercicio 10 *Se consideran las aplicaciones siguientes:* $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *definida por* $f(x,y) = x - y$, $g\colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}^2$ *definida por* $g(x+iy) = (y,x)$. *Decide si son inyectivas, suprayectivas o biyectivas.*

Ejercicio 11 *En el conjunto* $\mathbb{Z}$ *se define la relación binaria:*

$$a\mathscr{R}b \Leftrightarrow b = ma, \text{ con } m \in \mathbb{Z}$$

¿Es de orden? Razona tu respuesta.

Ejercicio 12 *Demuestra las siguientes propiedades relativas al producto cartesiano:*

(a) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

(b) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

Ejercicio 13 *Sobre el conjunto de los números enteros se define la relación siguietne:*

$$x \mathscr{R} y \Leftrightarrow x - y = 2n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Probar que es una relación binaria de equivalencia y calcula el conjunto $\mathbb{Z}/\mathscr{R}$.

Ejercicio 14 *En* $\mathbb{N}$ *se considera la relación binaria siguiente:*

$$n \prec m \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N} \ / \ m = kn.$$

Demuestra que $\prec$ *una relación binaria de orden pero no es de orden total. Da ejemplos de elementos comparables y otros de elementos no comparables.*

Ejercicio 15 *Encontrar todos los* $x \in \mathbb{R}$ *que cumplen:*

a) $|x-3| < 1$ *b)* $|x+1| + |x-4| > 7$ *c)* $x^2 - |x-1| = 1$

Ejercicio 16 *Hallar dos números reales* x *e* y, *tales que*

$$43 + yi = (4+3i)(x-5i)$$

Ejercicio 17 *Hallar el valor de* $\alpha \in \mathbb{R}$ *para que la expresión* $\dfrac{3-2\alpha i}{4-3i}$ *sea real. Para el valor obtenido calcular el valor del cociente.*

Ejercicio 18 *Hallar dos números complejos* z *y* w, *tales que su suma sea* $(1+4i)$, *su cociente sea imaginario puro y la parte real de uno de ellos sea* -1.

Ejercicio 19 *Determinar dos números complejos* w_1 *y* w_2 *tales que para* $z_1 = 2 - i$ *y* $z_2 = 3 - 4i$, *se verifica*

a) $w_1 z_1 = 32 - i$ *b)* $\dfrac{w_2}{z_2} = -\dfrac{1}{25} + \dfrac{2}{25} i$

Ejercicio 20 *Representar en el plano complejo los siguientes conjuntos:*

a) $A = \{ z \in \mathbb{C} \quad / \quad |z - 1 + i| = 2 \}$

b) $B = \{ z \in \mathbb{C} \quad / \quad |z| \leq |2z+1| \}$

c) $C = \left\{ z \in \mathbb{C} \quad \Big/ \quad \text{Real}\left(\dfrac{z+1}{z-1} \right) > 1 \right\}$

Ejercicio 21 *Expresar en forma binómica los siguientes números complejos:*

a) $\dfrac{1-e^{\pi i/2}}{1+e^{\pi i/2}}$ *b)* $e^{\pi i}\left(1-e^{-\pi i/3}\right)$ *c)* $\dfrac{1-i^3}{(1+i)^3}$

Ejercicio 22 *Dado los complejos:* $z=1+i$ *y* $w=1-\sqrt{3}\,i$*, se pide:*

a) Escribir z *y* w *en forma módulo-argumento.*

b) Calcular z^4w^2*, en forma exponencial.*

c) Escribe el resultado en forma binómica

Ejercicio 23 *Sea* $z\in\mathbb{C}\backslash\{(1,0)\}$*. Probar que* $\dfrac{1+z}{1-z}$ *es imaginario puro si, y sólo si,* $|z|=1$*.*

Ejercicio 24 *¿Qué representa, geométricamente, multiplicar un número complejo* z *por* i*?*
¿ y multiplicar por $2i$*?*

Calcular el resultado de girar el número complejo $3+i$ *un ángulo de* $\dfrac{\pi}{4}$ *en sentido antihorario.*

Ejercicio 25 *Determinar y representar gráficamente las soluciones de las ecuaciones siguientes:*

a) $z^4-16=0$ *b)* $z^2-i=0$

Ejercicio 26 *a) Calcular los números complejos* z *tales que* $\overline{z}=z^2$*.*

b) Hallar las raíces cúbicas de $z=-8$*.*

c) Hallar las raíces quintas de $z=-1+\sqrt{3}\,i$*.*