Ejercicio 1 *Se considera un espacio vectorial V de dimensión 5, razona cuál o cuáles de las afirmaciones siguientes son ciertas, o demuestra la falsedad dando un contraejemplo:*

I) *Un sistema de vectores de V, $S_1 = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4, \vec{v}_5, \vec{v}_6\}$ es ligado.*

II) *Un sistema $S_2 = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ es libre.*

III) *Si el sistema $S_3 = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ es libre, entonces el sistema $S_4 = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ es libre.*

Solución:

I) Verdadero, por el teorema fundamental de la independencia. Si el espacio vectorial tiene dimensión 5, una base de V tiene 5 vectores, y es un sistema generador, por lo que un sistema libre tiene, a lo sumo, 5 vectores, Por lo tanto, S_1 es ligado.

II) Falso. Contraejemplo: $V = \mathbb{R}^5$ tiene dimensión 5 y el sistema de vectores $S_2 = \{\vec{v}_1 = (0,0,0,0,0), \vec{v}_2 = (1,0,0,0,0)\}$ es ligado porque contiene al vector cero.

III) Falso. Contraejemplo: $V = \mathbb{R}^5$,

$$S_3 = \{\vec{v}_1 = (1,0,0,0,0), \vec{v}_2 = (0,1,0,0,0)\}$$

es libre, y sin embargo

$$S_4 = \{\vec{v}_1 = (1,0,0,0,0), \vec{v}_2 = (0,1,0,0,0), \vec{v}_3 = (0,0,0,0,0)\}$$

es ligado porque contiene al vector cero.

Ejercicio 2 *Decide razonadamente si los subconjuntos siguientes son o no subespacios vectoriales:*

$$U_1 = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \ / \ x+y = z-1\right\},\ U_2 = \{(a,2a,a,0) \ / a \in \mathbb{R}\}$$

Solución:

U_1 no es subespacio, ya que $(0,0,0,0) \notin U_1$. U_2 si lo es. Vamos a probarlo:

Suma Sean $(a_1, 2a_1, a_1, 0), (a_2, 2a_2, a_2, 0) \in U_2$, entonces

$$(a_1,2a_1,a_1,0)+(a_2,2a_2,a_2,0) = (a_1+a_2, 2a_1+2a_2, a_1+a_2, 0) = (a_1+a_2, 2(a_1+a_2), a_1+a_2, 0)$$

Llamando $a = a_1 + a_2$ se observa que la suma es un elemento de U_2

Producto por un escalar Sean $(a_1, 2a_1, a_1, 0) \in U_2$, $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces

$$\alpha(a_1, 2a_1, a_1, 0) = (\alpha a_1, \alpha 2a_1, \alpha a_1, 0)$$

Llamando $a = \alpha a_1$, se observa que el producto por un escalar es un elemento de U_2

Por lo tanto U_2 es subespacio vectorial se $\mathbb{R}^4$.

Ejercicio 3 *En $\mathbb{R}_3[x]$ se consideran los subespacios siguientes:*

$$U_1 = \left\langle 1+x+x^2+x^3, 2x^3-x^2, 1+x-2x^2+7x^3 \right\rangle,\ U_2 = \left\{ a+ax+bx^3 \ /a,b \in \mathbb{R} \right\}$$

Calcula una base de U_1, otra de U_2 y una base de U_1+U_2. Calcula las dimensiones de dichos subespacios. Enuncia la fórmula de Grassmann y aplícala para dar la dimensión de $U_1 \cap U_2$. Calcula una base de $U_1 \cap U_2$, así cómo unas ecuaciones implícitas y unas ecuaciones paramétricas.

Solución:

Vamos a escribir los vectores del sistema generador de U_1 en coordenadas respecto de la base canónica $\mathscr{B}_c = \left\{1, x, x^2, x^3\right\}$.

$$\begin{array}{rcl} 1+x+x^2+x^3 & = & (1,1,1,1)_{\mathscr{B}_c} \\ 2x^3-x^2 & = & (0,0,-1,2)_{\mathscr{B}_c} \\ 1+x-2x^2+7x^3 & = & (1,1,-2,7)_{\mathscr{B}_c} \end{array}$$

Cálculo de una base de U_1:

$$\begin{array}{c} (\ 1,\ 1,\ 1,\ 1\ ) \\ (\ 0,\ 0,\ -1,\ 2\ ) \\ (\ 1,\ 1,\ -2,\ 7\ ) \end{array} \xrightarrow{F_3-F_1} \begin{array}{c} (\ 1,\ 1,\ 1,\ 1\ ) \\ (\ 0,\ 0,\ -1,\ 2\ ) \\ (\ 0,\ 0,\ -3,\ 6\ ) \end{array} \xrightarrow{F_3-3F_2} \begin{array}{c} (\ 1,\ 1,\ 1,\ 1\ ) \\ (\ 0,\ 0,\ -1,\ 2\ ) \\ (\ 0,\ 0,\ 0,\ 0\ ) \end{array}$$

y una base de U_1 sería $\mathscr{B}_{U_1} = \{\vec{v}_1 = (1,1,1,1)_{\mathscr{B}_c}, \vec{v}_2 = (0,0,-1,2)_{\mathscr{B}_c}\} = \left\{1+x+x^2+x^3, -x^2+2x^3\right\}$.

Para calcular una base de U_2 observemos que cualquier vector de U_2 se puede escribir como $(a,a,0,b)_{\mathscr{B}_c} = a(1,1,0,0)_{\mathscr{B}_c} + b(0,0,0,1)_{\mathscr{B}_c}$, por lo que

$$\mathscr{B}_{U_2} = \{\vec{w}_1 = (1,1,0,0)_{\mathscr{B}_c}, \vec{w}_2 = (0,0,0,1)_{\mathscr{B}_c}\} = \left\{1+x, x^3\right\}$$

es un sistema generador de U_2, como además es libre, se trata de una base.

Para calcular una base de U_1+U_2, recordemos que

$$U_1+U_2 = \langle \vec{v}_1 = (1,1,1,1)_{\mathscr{B}_c}, \vec{v}_2 = (0,0,-1,2)_{\mathscr{B}_c}, \vec{w}_1 = (1,1,0,0), \vec{w}_2 = (0,0,0,1)_{\mathscr{B}_c} \rangle$$

Calculemos una base:

$$\begin{array}{r} \vec{v}_1 = (\ 1,\ 1,\ 1,\ 1\ ) \\ \vec{v}_2 = (\ 0,\ 0,\ -1,\ 2\ ) \\ \vec{w}_1 = (\ 1,\ 1,\ 0,\ 0\ ) \\ \vec{w}_2 = (\ 0,\ 0,\ 0,\ 1\ ) \end{array} \xrightarrow{F_3-F_1} \begin{array}{r} \vec{v}_1 = (\ 1,\ 1,\ 1,\ 1\ ) \\ \vec{v}_2 = (\ 0,\ 0,\ -1,\ 2\ ) \\ \vec{w}_1-\vec{v}_1 = (\ 0,\ 0,\ -1,\ -1\ ) \\ \vec{w}_2 = (\ 0,\ 0,\ 0,\ 1\ ) \end{array} \xrightarrow{F_3-F_2}$$

$$\begin{array}{r} \vec{v}_1 = (\ 1,\ 1,\ 1,\ 1\ ) \\ \vec{v}_2 = (\ 0,\ 0,\ -1,\ 2\ ) \\ \vec{w}_1-\vec{v}_1-\vec{v}_2 = (\ 0,\ 0,\ 0,\ -3\ ) \\ \vec{w}_2 = (\ 0,\ 0,\ 0,\ 1\ ) \end{array} \xrightarrow{F_4+F_2/3}$$

$$\begin{array}{rl} \vec{v}_1 = & (\ 1,\ 1,\ 1,\ 1\ ) \\ \vec{v}_2 = & (\ 0,\ 0,\ -1,\ 2\ ) \\ \vec{w}_1 - \vec{v}_1 - \vec{v}_2 = & (\ 0,\ 0,\ 0,\ -3\ ) \\ \vec{w}_2 + (\vec{w}_1 - \vec{v}_1 - \vec{v}_2)/3 = & (\ 0,\ 0,\ 0,\ 0\ ) \end{array} \tag{1}$$

Así que una base de $U_1 + U_2$ sería, por ejemplo,

$$\mathscr{B}_{U_1+U_2} = \{(1,1,1,1)_{\mathscr{B}_c}, (0,0,-1,2)_{\mathscr{B}_c}, (0,0,0,-3)_{\mathscr{B}_c}\} = \left\{1 + x + x^2 + x^3, -x^2 + 2x^3, -3x^3\right\}$$

De esta forma, $dim(U_1) = 2$, $dim(U_2) = 2$, $dim(U_1 + U_2) = 3$.

Fórmula de Grassmann:

Sea V un espacio vectorial, y sean U_1 y U_2 subespacios suyos, entonces

$$dim(U_1 + U_2) = dim(U_1) + dim(U_2) - dim(U_1 \cap U_2)$$

Utilizando dicha fórmula, se tiene que $3 = 2 + 2 - dim(U_1 \cap U_2)$ por lo que $dim(U_1 \cap U_2) = 1$.

Un vector de la intersección se calcula a partir de la combinación lineal obtenida en (1):

$$\vec{0} = \vec{w}_2 + (\vec{w}_1 - \vec{v}_1 - \vec{v}_2)/3 \Rightarrow \underbrace{\vec{w}_1 + 3\vec{w}_2}_{\in U_2} = \underbrace{\vec{v}_1 + \vec{v}_2}_{\in U_1} = (1,1,0,3)$$

y una base de $U_1 \cap U_2$ es $\mathscr{B}_{U_1 \cap U_2} = \{(1,1,0,3)_{\mathscr{B}_c}\} = \left\{1 + x + 3x^3\right\}$.

Unas ecuaciones paramétricas se calcularían a partir de

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \in U_1 \cap U_2 \Leftrightarrow a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 = \alpha 1 + x + 3x^3$$

de donde

$$\left.\begin{array}{rcl} a_0 & = & \alpha \\ a_1 & = & \alpha \\ a_2 & = & 0 \\ a_3 & = & 3\alpha \end{array}\right\} \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

Utilizando la primera ecuación paramétrica se tiene $\alpha = a_0$ y sustituyendo en las otras tres se tienen unas ecuaciones implícitas:

$$\left.\begin{array}{rcl} a_0 - a_1 & = & 0 \\ a_2 & = & 0 \\ 3a_0 - a_3 & = & 0 \end{array}\right\}$$

Ejercicio 4 *Enuncia el teorema de la base incompleta. En $\mathbb{R}^4$ se considera el subespacio vectorial*

$$V = \langle (0,0,1,1), (1,1,2,3), (3,3,4,8) \rangle$$

Calcula una base de V y encuentra una base de $\mathbb{R}^4$ cuyos primeros vectores sean los que has dado en la base de V.

Solución:

Teorema de la base incompleta:

Si $\mathscr{S} = \left\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots \vec{v}_p\right\}$ es un sistema libre del espacio vectorial V de dimensión n, existen $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_{n-p}$ vectores de V tales que el siguiente sistema de vectores es una base:

$$\left\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots \vec{v}_p, \vec{u}_1, \dots, \vec{u}_{n-p}\right\}$$

Cálculo de una base de V:

$$\begin{matrix} (\ 0, & 0, & 1, & 1\ ) \\ (\ 1, & 1, & 2, & 3\ ) \\ (\ 3, & 3, & 4, & 8\ ) \end{matrix} \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_2} \begin{matrix} (\ 1, & 1, & 2, & 3\ ) \\ (\ 0, & 0, & 1, & 1\ ) \\ (\ 3, & 3, & 4, & 8\ ) \end{matrix} \xrightarrow{F_3 - 3F_1} \begin{matrix} (\ 1, & 1, & 2, & 3\ ) \\ (\ 0, & 0, & 1, & 1\ ) \\ (\ 0, & 0, & -2, & -1\ ) \end{matrix}$$

$$\xrightarrow{F_3 + 2F_2} \begin{matrix} (\ 1, & 1, & 2, & 3\ ) \\ (\ 0, & 0, & 1, & 1\ ) \\ (\ 0, & 0, & 0, & 1\ ) \end{matrix}$$

y una base de V es, por ejemplo, $\mathscr{B}_V = \{(1,1,2,3), (0,0,1,1), (0,0,0,1)\}$, Para obtener una base de $\mathbb{R}^4$ podemos añadir el vector $(0,1,0,0)$, y una base como la pedida sería

$$\mathscr{B}_{\mathbb{R}^4} = \{(1,1,2,3), (0,0,1,1), (0,0,0,1), (0,1,0,0)\}$$

Ejercicio 5 *En $\mathbb{R}^5$ se considera el sistema de vectores $S = \{(0,1,-1,-1,1), (1,2,3,4,5), (1,-1,2,3,0)\}$. ¿Son los vectores $\vec{w} = (1,1,0,1,3)$ o $\vec{v} = (1,2,1,2,4)$ combinación lineal de S? En caso afirmativo, indica una combinación adecuada.*

Solución:

Debemos ver si $\exists x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3 \in \mathbb{R}$ tales que

$$\begin{aligned} \vec{w} = (1,1,0,1,3) &= x_1(0,1,-1,-1,1) + x_2(1,2,3,4,5) + x_3(1,-1,2,3,0) \\ \vec{v} = (1,2,1,2,4) &= y_1(0,1,-1,-1,1) + y_2(1,2,3,4,5) + y_3(1,-1,2,3,0) \end{aligned}$$

Es decir, debemos ver si los sistemas:

$$\left.\begin{array}{rrrcl} & x_2 & +x_3 & = & 1 \\ x_1 & +2x_2 & -x_3 & = & 1 \\ -x_1 & +3x_2 & +2x_3 & = & 0 \\ -x_1 & +4x_2 & +3x_3 & = & 1 \\ x_1 & +5x_2 & & = & 3 \end{array}\right\} (I) \qquad \left.\begin{array}{rrrcl} & y_2 & +y_3 & = & 1 \\ y_1 & +2y_2 & -y_3 & = & 2 \\ -y_1 & +3y_2 & +2y_3 & = & 1 \\ -y_1 & +4y_2 & +3y_3 & = & 2 \\ y_1 & +5y_2 & & = & 4 \end{array}\right\} (II)$$

son compatibles. Si alguno es incompatible querrá decir que el vector al que se refiere no es combinación lineal de S. Como ambos sistemas tienen la misma matriz de coeficientes, vamos a resolverlos simultáneamente:

$$\left(\begin{array}{rrr|r|r} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 0 & 3 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_2} \left(\begin{array}{rrr|r|r} 1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 0 & 3 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{F_3 \to F_3 + F_1 \\ F_4 \to F_4 + F_1 \\ F_5 \to F_5 - F_1}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 6 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[F_5 \to F_5 - 3F_2]{\substack{F_3 \to F_3 - 5F_2 \\ F_4 \to F_4 - 6F_2}} \left(\begin{array}{ccc|c|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & -4 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 \to F_3/(-2)}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{F_4 \to F_4 + 2F_3 \\ F_5 \to F_5 + F_2}} \left(\begin{array}{ccc|c|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

La matriz es escalonada, lo que nos permite discutir los dos sistemas. Se observa quenen el sistema (I) aparece un pivote en la columna de términos independientes, por lo que el sistema es incompatible, y en consecuencia se deduce que $\vec{w}$ no es combinación lineal de S. Sin embargo el sistema (II) es compatible determinado, por lo que $\vec{v}$ si es combinación lineal de S. Para calcular la combinación lineal resolveremos el sistema (II) calculando la matriz escalonada reducida:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 \to F_3/2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{F_2 \to F_2 - F_3 \\ F_1 \to F_1 + F_3}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & \frac{5}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 \to F_1 - 2F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Así, la solución es $y_1 = \dfrac{3}{2}$, $y_2 = \dfrac{1}{2}$ y $y_3 = \dfrac{1}{2}$, y la combinación lineal pedida es

$$\vec{v} = (1,2,1,2,4) = \frac{3}{2}(0,1,-1,-1,1) + \frac{1}{2}(1,2,3,4,5) + \frac{1}{2}(1,-1,2,3,0)$$

Ejercicio 6 *En el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ se consideran las bases*

$$\mathscr{B} = \{\vec{e}_1 = (1,0,0), \vec{e}_2 = (0,0,1), \vec{e}_3 = (0,1,0)\},$$
$$\mathscr{B}' = \{\vec{u}_1 = (-1,1,1), \vec{u}_2 = (1,0,-1), \vec{u}_3 = (2,-1,-1)\}.$$

I) *Calcula P, la matriz de cambio de la base $\mathscr{B}$ a la base $\mathscr{B}'$.*

II) *Calcula la base $\mathscr{B}''$ de $\mathbb{R}^3$ tal que $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ es la matriz de cambio de base de $\mathscr{B}'$ a $\mathscr{B}''$, expresando los vectores de $\mathscr{B}''$ a través de sus coordenadas en la base canónica.*

Solución:

I) Debemos escribir los vectores de $\mathscr{B}'$ en coordenadas en la base $\mathscr{B}$:

$$\begin{array}{rcl}
(-1,1,1) & = & -1(1,0,0)+1(0,0,1)+1(0,1,0) \\
(1,0,-1) & = & 1(1,0,0)-1(0,0,1)+0(0,1,0) \\
(2,-1,-1) & = & 2(1,0,0)-1(0,0,1)-1(0,1,0)
\end{array}$$

por lo que la matriz pedida es

$$P=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

II) Las columnas de Q son las coordenadas de $\mathscr{B}''$ en la base $\mathscr{B}'$, por lo tanto:

$$\begin{array}{rclcl}
\vec{e}_1 & = & 1(-1,1,1)+0(1,0,-1)+1(2,-1,-1) & = & (1,-1,0)_{\mathscr{B}_c} \\
\vec{e}_2 & = & 1(-1,1,1)+1(1,0,-1)+0(2,-1,-1) & = & (0,1,0)_{\mathscr{B}_c} \\
\vec{e}_3 & = & 1(-1,1,1)-1(1,0,-1)+1(2,-1,-1) & = & (0,0,1)_{\mathscr{B}_c}
\end{array}$$

Por lo que

$$\mathscr{B}''=\{(1,-1,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$$