Tema 1: Conjuntos y conjuntos numéricos: operaciones con números complejos

Marisa Serrano

Universidad de Oviedo

Septiembre de 2020

email: mlserrano@uniovi.es

Índice

Conjuntos de Cantor

Definición 1.1

Un **conjunto** *es la reunión en un todo de determinados objetos bien definidos y diferenciables entre sí.* [a] *A cada uno de los objetos que componen el conjunto lo llamaremos* **elemento**. *Si a es un elemento del conjunto A, se escribe* $a \in A$ *y se lee 'a pertenece a A'. Al símbolo* $\in$ *se le llama* **signo de pertenencia**.

[a] Definición dada por George Cantor (1845-1918)

Definición 1.2

Dos conjuntos **iguales** *son aquellos que tienen los mismos elementos.*

El conjunto vacío

Definición 1.3

Se admite que existe un conjunto, $\emptyset$, *al que llamaremos* **conjunto vacío** *y que carece de elementos.*

Subconjuntos

Definición 1.4

Se dice que un conjunto A está **contenido** *en otro conjunto B o también que A es* **subconjunto** *de B siempre que todos los elementos de A lo sean también de B, y se denotará como sigue:*

$$A \subset B$$

Obsérvese que $\emptyset \subset A$ para todo conjunto A

Ejemplo 1.1

Llamando $A = \{2, \pi, e\}$ y $B = \{2, 3, \pi, e, e^2\}$ entonces se verifica que $A \subset B$.

Complementario

Definición 1.5

Si A es un subconjunto de U llamaremos **complementario de A en U** *al conjunto formado por todos los elementos de U que no están en A y lo denotaremos por $\mathcal{C}_U A$.*
Si A no es subconjunto de U se define diferencia $U \setminus A$ como

$$U \setminus A = \{x \in U \ / \ x \notin A\}$$

Ejemplo 1.2

Se consideran los conjuntos $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$, $B = \{a, e, i, o, u\}$, $C = \{a, e, i\}$. ¿$A \subset B$?, $C \subset A$?, ¿$C \subset B$?. Calcula $A \setminus C$, $B \setminus C$ y $A \setminus B$.

Unión e intersección

Definición 1.6

Se llama **unión** *de dos conjuntos A y B al conjunto formado por todos los elementos que pertenecen a uno al menos de los dos conjuntos. A dicho conjunto se le denota por $A \cup B$.*
Se llama **intersección** *de dos conjuntos A y B al conjunto de los elementos que pertenecen a los dos conjuntos. A dicho conjunto se le denota por $A \cap B$*

Pincha aquí para ver una interpretación geométrica de las distintas operaciones con conjuntos.

Ejemplo 1.3

Sean A y B dos conjuntos, compruebe que:

1. $A \cup B = A \leftrightarrow B \subset A$
2. $A \cap B = A \leftrightarrow A \subset B$

Producto cartesiano

Definición 1.7

Dados dos conjuntos A y B, se llama conjunto **producto cartesiano** *de A y B al conjunto siguiente:*

$$A \times B = \{(a, b) \;/\; a \in A,\; b \in B\}$$

Ejemplos

Ejemplo 1.4

Se consideran los conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b\}$, $C = \{\triangle, \nabla\}$. Calcula $A \times B$ y $A \times B \times C$.

Índice

Correspondencias

Definición 1.8

Dados dos conjuntos A y B, se llama **correspondencia** *a cualquier subconjunto del producto cartesiano $A \times B$. Habitualmente, si (a, b) es un elemento de la correspondencia f, se suele escribir $f(a) = b$, y se dice que la correspondencia f asocia al elemento a el elemento b.*

Aplicaciones

Definición 1.9

Una correspondencia de A en B se llama **aplicación** *si a cada elemento del conjunto A le asocia un elemento y sólo uno del conjunto B, es decir, f es aplicación si y sólo si*

a) $\forall x \in A, \exists f(x) \in B$

b) Si $x, y \in A$ *verifican* $x = y$ *entonces* $f(x) = f(y)$

Habitualmente se suele escribir:

$$\begin{array}{llll} f: & A & \longrightarrow & B \\ & a & \rightarrow & f(a) = b \end{array}$$

Llamaremos conjunto imagen mediante la aplicación f, y lo denotaremos por $f(A)$ o bien $\mathrm{Im} f$ al conjunto

$$f(A) = \mathrm{Im} f = \{y \in B \ / \ \exists x \in A, \ f(x) = y\}$$

Ejemplos

Ejemplo 1.5

Dada la correspondencia $f : A \longrightarrow B$ definida como sigue: $f(x) = \sin x$ $\forall x \in A$, decídase en cual de los siguientes casos la correspondencia es una aplicación:

1. $A = \mathbb{R}^+$, $B = \mathbb{R}^+$
2. $A = \mathbb{R}$, $B = \mathbb{R}^+$
3. $A = \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, $B = \mathbb{R}^+$
4. $A = \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$, $B = [-1, 1]$
5. $A = [0, \pi]$, $B = [-1, 1]$
6. $A = \left[\pi, \dfrac{3\pi}{2}\right]$, $B = [0, 1]$

Grafo

Definición 1.10

Dada una aplicación $f : A \longrightarrow B$, $\forall a \in A$ existe un único $f(a) \in B$. Al conjunto formado por todos los pares $(a, f(a))$ le llamaremos **grafo** *de la aplicación f, o también* **gráfica** *de f, y se denotará por*

$$\mathrm{gr} f = \{(a, f(a)) \ / \ a \in A \ \}$$

Clasificación de las aplicaciones

Definición 1.11

Sea $f : A \rightarrow B$ una aplicación. Diremos que f es **inyectiva** *si dos elementos distintos no pueden tener la misma imagen, es decir*

$$x \neq y \rightarrow f(x) \neq f(y)$$

o, equivalentemente

$$f(x) = f(y) \rightarrow x = y$$

diremos que es **suprayectiva**, *sobreyectiva o exhaustiva si todos los elementos del conjunto B son imágenes de algún elemento de A, es decir, si*

$$\forall b \in B \quad \exists a \in A \ / \ f(a) = b$$

y diremos que la aplicación f es **biyectiva** *cuando sea a la vez inyectiva y suprayectiva.*

Ejemplo

Ejemplo 1.6

Dada la correspondencia $f: A \longrightarrow B$ *definida como sigue:* $f(x) = \operatorname{sen} x$ $\forall x \in A$, *decídase en cual de los siguientes casos la correspondencia es una aplicación y en caso de serlo, clasifíquese:*

1. $A = \mathbb{R}^+$, $B = \mathbb{R}^+$
2. $A = \mathbb{R}$, $B = \mathbb{R}$
3. $A = \mathbb{R}$, $B = [-1, 1]$
4. $A = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $B = [-1, 1]$
5. $A = [0, \pi]$, $B = [-1, 1]$
6. $A = [0, \pi]$, $B = [0, 1]$

Composición

Definición 1.12

Dadas dos aplicaciones $f: A \to B$ *y* $g: C \to D$ *tales que* $f(A) \subset C$ *se puede definir una nueva aplicación a la que llamaremos* **aplicación composición** *de* f *y* g *y la denotaremos por* $g \circ f$ *definida como sigue:*

$$\begin{array}{rccl} g \circ f: & A & \longrightarrow & D \\ & a & \to & g \circ f(a) = g(f(a)) \end{array}$$

Ejemplo

Ejemplo 1.7

Dadas las aplicaciones $f(x) = 3x + 2$, $g(x) = x - 5$, *calcula* $f \circ g$ *y* $g \circ f$.

Aplicación identidad

Definición 1.13

Sea A *un conjunto, a la aplicación* $I_A: A \to A$ *definida como sigue:* $I_A(x) = x$ $\forall x \in A$ *la llamaremos* **aplicación identidad**. *Si no existe duda sobre el conjunto sobre el que está definida, se la suele denotar por* I.

Inversa

Definición 1.14

Sea $f: A \to B$ una aplicación biyectiva. Se llama **inversa** *de f a la aplicación*

$$\begin{array}{rccl} f^{-1}: & B & \longrightarrow & A \\ & b & \to & a \in A \;/\; f(a) = b \end{array}$$

Teorema 1.15

Si $f: A \to B$ es biyectiva, entonces $f \circ f^{-1} = I_B$ y $f^{-1} \circ f = I_A$.

Índice

Relación binaria

Definición 1.16

Dado un conjunto A y dado $\mathcal{R}$ un subconjunto del producto cartesiano $A \times A$, se dice que un elemento $x \in A$ está relacionado con otro elemento $y \in A$ por $\mathcal{R}$ si $(x, y) \in \mathcal{R}$, lo que se indica poniendo $x\mathcal{R}y$. A la función proposicional $r(x, y) = x\mathcal{R}y$ se le llama **relación binaria***.*

Propiedades

Definición 1.17

Una relación binaria entre elementos del conjunto A, $\mathcal{R}$ se dice que es **reflexiva**, **simétrica**, **antisimétrica** *o* **transitiva** *si se verifica, respectivamente:*

- **Reflexiva**: $x\mathcal{R}x \quad \forall x \in A$
- **Simétrica**: $x\mathcal{R}y \;\rightarrow\; y\mathcal{R}x$ *con* $x, y \in A$
- **Antisimétrica**: *Si* $x\mathcal{R}y$ *y además* $y\mathcal{R}x \rightarrow x = y$ *siendo* $x, y \in A$
- **Transitiva**: *Si* $x\mathcal{R}y$ *y además* $y\mathcal{R}z \rightarrow x\mathcal{R}z$ *siendo* $x, y, z \in A$

Ejemplo

Ejemplo 1.8

Dada la relación binaria en el conjunto de los números naturales: $x\mathcal{R}y$ *si y sólo si* $x + y$ *es múltiplo de* 6*. Estudia cuáles de las propiedades anteriores cumple y cuáles no.*

Relación binaria de equivalencia

Definición 1.18

Una relación binaria entre elementos del conjunto A se dice que es una **relación binaria de equivalencia**, *o de forma abreviada RBE, si verifica las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva.*
Si $\mathcal{R}$ es una RBE y $a \in A$, al conjunto de todos los elementos de A que están relacionados con a

$$[a] = \{ b \in A \;/\; a\mathcal{R}b \}$$

le llamaremos **clase de equivalencia** *de representante a.*

Ejemplo

Ejemplo 1.9

Si $\mathcal{R}$ es una RBE en A, y $a, b \in A$, entonces:

1. $[a] = [b] \leftrightarrow a\mathcal{R}b$
2. $a \not\mathcal{R} b \rightarrow [a] \cap [b] = \emptyset$

Conjunto cociente

Definición 1.19

Si $\mathcal{R}$ es una RBE definida en A, se llama **conjunto cociente** *al conjunto de las clases de equivalencia definidas en A por $\mathcal{R}$, es decir:*

$$A/\mathcal{R} = \{[a] \ / \ a \in A\}$$

Ejemplo

Ejemplo 1.10

Comprobar que la relación definida en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ por

$$(a,b)\mathcal{R}(c,d) \leftrightarrow a^2 + b^2 = c^2 + d^2$$

es una RBE. Obtener y representar gráficamente el conjunto cociente $\mathbb{R} \times \mathbb{R}/\mathcal{R}$.

Relación de orden

Definición 1.20

Una relación binaria $\mathcal{R}$ definida en un conjunto A diremos que es una **relación de orden** *si cumple las propiedades reflexiva, antisimétrica y transitiva.*
Cuando para todo par de elementos $a, b \in A$ se puede decir que $a\mathcal{R}b$ o bien $b\mathcal{R}a$ diremos que la relación es de orden total, en otro caso, es decir, cuando existan $a, b \in A$ tales que $a \not\mathcal{R} b$ y $b \not\mathcal{R} a$ diremos que se trata de una **relación de orden parcial**.

Ejemplo

Ejemplo 1.11

En el conjunto de los números naturales se define la siguiente relación binaria:

$$a\mathcal{R}b \leftrightarrow a|b$$

($a|b$ se lee 'a divide a b'). Demostrar que $\mathcal{R}$ es una relación de orden. ¿Es total o parcial?

Conjunto de las clases residuales

Recordemos el algoritmo de la división en $\mathbb{Z}$:

$$\textit{Dados} \quad D, d \in \mathbb{Z} \to \exists q, r \in \mathbb{Z} \quad / \quad D = dq + r, \; 0 \leq r < d.$$

donde, los valores de q y de r son únicos.
Sea $p \in \mathbb{N}$ y $p > 1$, se define la relación binaria de 'congruencia módulo p' como sigue:

$$m \equiv n \;\leftrightarrow\; m - n = \dot{p}$$

donde $\dot{p}$ se lee 'múltiplo de p'. Esta relación es una RBE.
Llamaremos **conjunto de las clases residuales módulo** p al conjunto cociente asociado a la relación de congruencia, es decir, al conjunto $\mathbb{Z}/_{\equiv}$ que denotaremos habitualmente por

$$\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = \{[0], [1], [2], \ldots, [p-1]\}$$

que es el conjunto de las clases de los posibles restos que se obtienen al dividir un entero por p.

Ejemplo

Ejemplo 1.12

Describe el conjunto $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. ¿A qué clase de equivalencia pertenecen 5 y 6?

Índice

Ley de composición interna

Definición 1.21

Dado un conjunto $A \neq \emptyset$ llamaremos operación interna en A, **ley de composición interna** *en A o, de forma abreviada, lci, a cualquier aplicación del producto cartesiano $A \times A$ en A:*

$$\begin{array}{rccc} *: & A \times A & \longrightarrow & A \\ & (a, b) & \to & a * b = c \in A \end{array}$$

Conjuntos y leyes

Ejemplo 1.13

¿Cuáles de las siguientes operaciones son lci?

a) *Suma de números naturales.* ✔
b) *Resta de números naturales.* ✘
c) *Producto de números racionales.* ✔
d) *Producto de números irracionales.* ✘
e) *Producto de números reales.* ✔
f) *División de números reales.* ✘

Grupo

Definición 1.22

Un **grupo** *es una estructura algebraica formada por un conjunto G y una l.c.i. $*$, $(G, *)$ que verifica:*

a) *Asociativa:* $a * (b * c) = (a * b) * c$, $\forall a, b, c \in G$
b) *Elemento neutro:* $\exists e \in G$ *tal que* $a * e = e * a = a$, $\forall a \in G$
c) *Elemento simétrico:* $\forall a \in G$, $\exists a' \in G$ *tal que* $a * a' = a' * a = e$

Si $*$ es conmutativa, ($\forall a, b \in G$ se verifica que $a * b = b * a$), entonces diremos que se trata de un **grupo conmutativo** *o abeliano.*

Algunos grupos

Ejemplo 1.14

¿Cuáles de los siguientes pares son grupos?

a) $(\mathbb{N}, +)$. ✘
b) $(\mathbb{N}, \cdot)$. ✘
c) $(\mathbb{Z}, +)$. ✔
d) $(\mathbb{Z}, \cdot)$. ✘
e) $(\mathbb{Q}, +)$. ✔
f) $(\mathbb{Q}, \cdot)$. ✘
g) $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$. ✔
h) $(\mathbb{R}, +)$. ✔
i) $(\mathbb{R}, \cdot)$. ✘
j) $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$. ✔

Cuerpo

Definición 1.23

Una estructura algebraica formada por un conjunto y dos lci $(\mathbb{K}, +, \circ)$ diremos que es un **cuerpo** *cuando $(\mathbb{K}, +)$ es grupo conmutativo cuyo neutro llamaremos 0, $(\mathbb{K} \setminus \{0\}, \circ)$ es un grupo, a cuyo neutro llamaremos 1 y además las leyes cumplen la propiedad distributiva:*

$$\forall a, b, c \in \mathbb{K}, \qquad (a + b) \circ c = a \circ c + b \circ c$$

Cuando la segunda ley es conmutativa diremos que $(\mathbb{K}, +, \circ)$ es un **cuerpo conmutativo**.

Algunos cuerpos

Ejemplo 1.15

¿Cuáles de las siguientes ternas son cuerpos?

a) $(\mathbb{N}, +, \cdot)$. ✘

b) $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$. ✘

c) $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$. ✔

d) $(\mathbb{R}, +, \cdot)$. ✔

e) $(\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}), +, \cdot)$. ✘

El cuerpo de los números complejos

Definición 1.24

Se considera el conjunto $\mathbb{R}^2$ y en él se definen dos leyes de composición interna suma y producto como sigue

- $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$
- $(a, b) \cdot (c, d) = (a \cdot c - b \cdot d, a \cdot d + b \cdot c)$

Se denota por $\mathbb{C}$ a la estructura $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$.

Estructura en $\mathbb{C}$

Teorema 1.25

El conjunto $\mathbb{C}$ con las operaciones anteriores verifica las propiedades siguientes:

1. $(\mathbb{C}, +)$ *es un grupo conmutativo.*
2. $(\mathbb{C} - \{(0, 0)\}, \cdot)$ *es un grupo conmutativo.*
3. *Distributiva:* $\forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$, $(z_1 + z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot z_3 + z_2 \cdot z_3$.

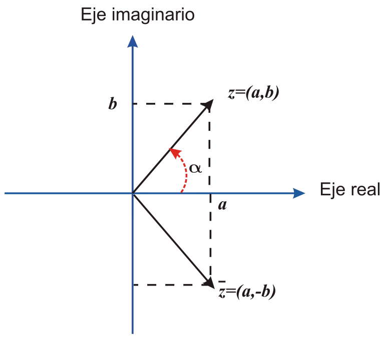
Por lo tanto $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ es un cuerpo conmutativo.

¿$\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$?

Existe una **biyección** entre el cuerpo $\mathbb{R}$ y el subconjunto de $\mathbb{C}$ formado por los complejos de la forma $(a, 0)$.
Dado que $(a, b) = (a, 0) + (b, 0)(0, 1)$, llamando $i = (0, 1)$, se suele escribir $(a, b) = a + bi$. Esta otra forma de representar los números complejos se denomina forma binómica.
Al complejo $i = (0, 1)$ se le denomina unidad imaginaria. Obsérvese que $i^2 = i \cdot i = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0)$, que en forma binómica sería $i^2 = -1 + 0i = -1$. Esta propiedad (que su cuadrado sea -1) no la satisface ningún número real y gracias a ella en $\mathbb{C}$ se pueden calcular raíces cuadradas de números negativos.

Definiciones

Dado $z = a + bi \in \mathbb{C}$, se llama **parte real** de z a $Real(z) = a$ y **parte imaginaria** de z a $Imag(z) = b$.
El eje de abscisas se llama **eje real** y el de ordenadas **eje imaginario**.
Se llama **conjugado** de z a $\bar{z} = a - bi$, y es el simétrico de z respecto del eje real.



Propiedades de la conjugación

Teorema 1.26

Para cualesquiera z, z_1 y z_2 elementos de $\mathbb{C}$ se verifica que:

1. $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$
2. $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$
3. $\overline{\overline{z}} = z$
4. $z = \overline{z} \iff z \in \mathbb{R}$
5. $\mathrm{Real}(z) = \dfrac{z + \overline{z}}{2}$; $\mathrm{Imag}(z) = \dfrac{z - \overline{z}}{2i}$

Ejemplo 1.16

Halle la parte real y la parte imaginaria de $(1 - 2i)(1 - i)$.

Ejemplo 1.17

Encuentra a, $b \in \mathbb{R}$ tales que $\dfrac{5 - i}{1 - i} = a + bi$

Módulo

Dado $z = a + bi \in \mathbb{C}$, se llama **módulo** de z a $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Teorema 1.27

Sean z_1 y z_2 elementos de $\mathbb{C}$, se verifica que:

1. $|z_1| = |\overline{z_1}|$
2. $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$
3. $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$ *si* $z_2 \neq 0$
4. $z_1 \cdot \overline{z_1} = |z_1|^2$
5. $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ *(desigualdad triangular)*
6. $|z_1| \geq 0$. *Además,* $|z_1| = 0$ *si, y sólo si,* $z_1 = 0$

Ejemplo 1.18

Expresa en forma binómica el complejo: $\dfrac{5-i}{1-i}$ *utilizando la propiedad de que* $z_1 \cdot \overline{z_1} = |z_1|^2$.

Ejemplos

Ejemplo 1.19

Represente gráficamente y halle el módulo de:

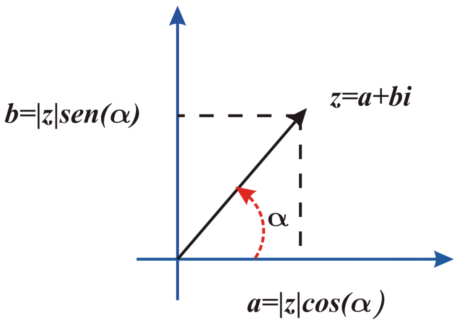
a) $2+i$

b) 2

c) $3i$

Argumento

Dado $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$ es un **argumento** de z si $z = |z| \cdot (\cos(\alpha) + i\,\text{sen}(\alpha))$.



Al único argumento de z que está en el intervalo $(-\pi, \pi]$ le llamaremos **argumento principal**.

Forma polar

Forma polar $z = r \cdot (cos(\alpha) + i\,\text{sen}(\alpha)) = r_{\lfloor \alpha}$

Ejemplo 1.20

Exprese en forma polar y represente en el plano los números complejos

a) $1-i$, b) -1 , c) $-i$, d) $1+\sqrt{3}i$

La función exponencial compleja

Definición 1.28

Sea $z = x + iy \in \mathbb{C}$ llamaremos **exponencial compleja**, *y la denotamos por $e^z = e^{x+iy}$ al número complejo*

$$e^z = exp(z) = e^x(cos(y) + isen(y)) = e^x_{\underline{|y}}$$

Nota 1.29

Si $z = 0 + iy$, con $y \in \mathbb{R}$, entonces $e^{iy} = \cos(y) + i\,\mathrm{sen}(y)$, y $|e^{iy}| = 1$.

Nota 1.30

Extiende a la exponencial real: si $z = x + 0i$, entonces $e^z = e^x$.

Ejemplo 1.21

Exprese en forma binómica $e^{i\pi}$, $e^{2+i\pi/2}$ y $e^{i\pi/4}$.

Forma exponencial de un complejo

Sea $z \in \mathbb{C}$, con $|z| = r$ y θ un argumento de z, entonces

$$z = r \cdot e^{i\theta}$$

A esta forma de expresar el complejo se le llama **forma exponencial** de representación del complejo.

Ejemplo 1.22

Exprese en forma exponencial los números complejos

a) $1 - i$, *b)* -1 , *c)* $-i$, *d)* $1 + \sqrt{3}i$

Operaciones con complejos en forma exponencial

Teorema 1.31

Sean $z_1 = r_1 \cdot e^{i\theta_1}$ y $z_2 = r_2 \cdot e^{i\theta_2}$ dos números complejos. Se verifica entonces que $z_1 \cdot z_2 = (r_1 \cdot r_2) \cdot e^{i(\theta_1+\theta_2)}$. Si además $z_2 \neq 0$, $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2} \cdot e^{i(\theta_1-\theta_2)}$

Como consecuencia se tiene que si $z = r \cdot e^{i\theta} \neq 0$, entonces $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{r} \cdot e^{-i\theta}$

Ejemplos

Ejemplo 1.23

Usando la forma exponencial calcule:

a) $(1+i)^2$ *b)* $\dfrac{\sqrt{3}+i}{1+i}$

Ejemplo 1.24

Usando la forma exponencial calcule:

a) $(\sqrt{3}+i)(1+\sqrt{3}i)$,
b) $(1-i)^2$,
c) $\dfrac{-\sqrt{3}+i}{2+2\sqrt{3}i}$.

Potencias

Teorema 1.32

Sea $z = r \cdot e^{i\theta} \neq 0$ *y* $m \in \mathbb{Z}$, *se verifica entonces que* $z^m = r^m \cdot e^{im\theta}$.

Fórmula de Moivre:

$$(\cos(\theta) + i\,\mathrm{sen}(\theta))^n = \cos(n\theta) + i\,\mathrm{sen}(n\theta)$$

Ejemplos de potencias

Ejemplo 1.25

Calcule:

(a) $(1+i)^9$
(b) $(-1+i)^{17}$
(c) $(1-\sqrt{3}i)^{15}$
(d) i^{1023}

Raíces n-ésimas de un complejo

Teorema 1.33

Sean $z = r \cdot e^{i\theta} \neq 0$ *y* $n \in \mathbb{N}$; *se verifica que* z *tiene exactamente* n *raíces n-ésimas distintas que son*

$$w_k = \sqrt[n]{r} \cdot e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}} \quad \textit{para } k \in \{0, \dots, n-1\}$$

Ejemplos

Ejemplo 1.26

Halle y represente gráficamente las raíces siguientes: (a) $\sqrt[4]{i}$, *(b)* $\sqrt[3]{-1}$, *(c)* $\sqrt[3]{2i}$, *(d)* $\sqrt[4]{-16}$