Ejercicio 1 ***(1 punto)*** *Se realiza una encuesta a* 300 *personas sobre el consumo de tres bebidas, Aguaro, Koska-Sola y Miau, obteniendo los siguientes datos:*

1. 150 *beben Koska-Sola.*
2. 9 *personas beben las tres bebidas.*
3. 201 *personas beben Koska-Sola o Aguaro.*
4. 39 *personas beben Koska-Sola y Aguaro.*
5. 177 *personas beben Aguaro o Miau.*
6. 33 *personas beben Aguaro y Miau.*
7. 45 *beben Koska-Sola y Miau.*
8. 48 *no beben ninguna de esas bebidas.*

(a) Haz un diagrama adecuado a la situación e indica el número de elementos de cada región.

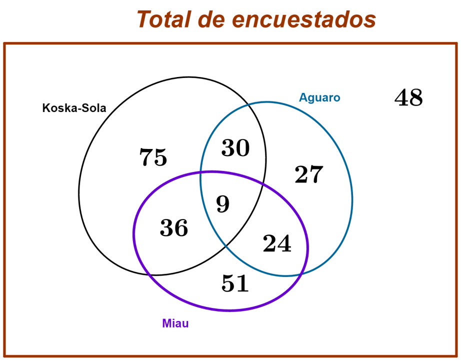
(b) ¿Cuántos entrevistados beben sólo Miau?:

(c) ¿Cuántos entrevistados beben sólo una de las bebidas?

(d) ¿Cuántos entrevistados beben Aguaro?

Solución:

(a)



(b) 51

(c) $75(Koska-Sola)+27(Aguaro)+51(Miau)=153$

(d) $30+27+9+24=90$

Ejercicio 2 ***(3 puntos)***

(2.a) *Dados tres conjuntos A, B y C, demuestra o niega dando un contraejemplo la afirmación siguiente:* $(A\cap B)\setminus C=(A\setminus C)\cup(B\setminus C)$.

(2.b) *Dada la relación binaria en* $\mathbb{Z}$ *definida como sigue:*

$$a\mathscr{R}b \Leftrightarrow \exists n\in\mathbb{Z} \text{ tal que } a-b=3n.$$

Decide si la relación es reflexiva, simétrica, antisimétrica o transitiva.

(2.c) *Calcula los valores de* $z\in\mathbb{C}$ *para los cuales* $w=\dfrac{z+\bar{z}}{z+i}$ *es un número real.*

(2.d) *Sea* $a\in\mathbb{R}$ *se considera* $a>0$. *Expresa, según los valores de a, la forma exponencial del complejo* $z_a=(a-1)i$.

Solución:

(2.a) Es falso. Contraejemplo:

$$A=\{1,2,3,4\},\ B=\{2,4,6\},\ C=\{3,4,5\}$$

Entonces:

$$\left.\begin{array}{rcl} A\cap B=\{2,4\} & \Rightarrow & (A\cap B)\setminus C=\{2\} \\ A\setminus C=\{1,2\},\ B\setminus C=\{2,6\} & \Rightarrow & (A\setminus C)\cup(B\setminus C)=\{1,2,6\} \end{array}\right\} \Rightarrow (A\cap B)\setminus C\neq(A\setminus C)\cup(B\setminus C)$$

(2.b) **Reflexiva** Se cumple: $a-a=3\cdot 0$, y $a\mathscr{R}a$ para cada $a\in\mathbb{Z}$

Simétrica Se cumple, ya que si $a\mathscr{R}b$ entonces $a-b=3n$, entonces $b-a=3(-n)$ y $b\mathscr{R}a$.

Antisimétrica No se cumple: $4\mathscr{R}1$ ya que $4-1=3\cdot 1$, $1\mathscr{R}4$ ya que $1-4=3(-1)$ y sin embargo $4\neq 1$

Transitiva Se cumple, ya que si

$$\left.\begin{array}{l} a\mathscr{R}b\Rightarrow a-b=3n \\ b\mathscr{R}c\Rightarrow b-c=3m \end{array}\right\}\Rightarrow a-c=(a-b)+(b-c)=3(n-m)\Rightarrow a\mathscr{R}c$$

(2.c) $z=a+bi$, con $a,b\in\mathbb{R}$, entonces

$$w=\frac{z+\bar{z}}{z+i}=\frac{a+bi+a-bi}{a+bi+i}=\frac{2a}{a+(b+1)i}=\frac{2a(a-(b+1)i)}{(a+(b+1)i)(a-(b+1)i)}=\frac{2a^2-2a(b+1)i}{a^2+(b+1)^2}$$

Para que w sea un número real debe verificar $Imag(w)=0$, es decir,

$$\frac{-2a(b+1)}{a^2+(b+1)^2}=0\Rightarrow a=0,\ o\ bien\ b=-1.$$

Obsérvese que si $a=0$ y $b=-1$ entonces $z+i=0$ y no tendría sentido el cociente que define w, por lo tanto el conjunto de las soluciones es $\{bi\ /\ b\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}\}\bigcup\{a-i\ /\ a\in\mathbb{R}\setminus\{0\}\}$.

(2.d) z_a es un imaginario puro, es decir, según $a-1$ sea positivo o negativo, tendría argumento $\dfrac{\pi}{2}$ ó $-\dfrac{\pi}{2}$. Así:

$$|z_a|=\sqrt{0^2+(a-1)^2}=|a-1|=\begin{cases} a-1 & si\quad a>1, \\ 0 & si\quad a=1, \\ 1-a & si\quad a<1. \end{cases}\Rightarrow z_a=\begin{cases} (a-1)e^{i\pi/2} & si\quad a>1, \\ 0 & si\quad a=1, \\ (1-a)e^{-i\pi/2} & si\quad 0<a<1. \end{cases}$$

Ejercicio 3 ***(3 puntos)***

(3.a) Decide de forma razonada, para qué valores de $\alpha\in\mathbb{R}$, es escalonada la matriz

$$M=\begin{pmatrix} \alpha-1 & \alpha^2-1 & 0 & \alpha-1 & 2 \\ 0 & \alpha-1 & \alpha^2-1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha^2-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha^2-\alpha & 0 \end{pmatrix}$$

(3.b) Para $\alpha=-1$, calcula la matriz escalonada reducida asociada a la matriz M del apartado (3.a), indicando claramente las operaciones elementales que realizas en cada paso.

(3.c) Suponiendo que la matriz M del apartado (3.a) es la matriz ampliada de un sistema de ecuaciones lineal, discute el sistema razonando en términos de pivotes. Resuelve el sistema siempre que sea posible.

Solución:

(3.a) Si $\alpha = 1$ entonces

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

que no es escalonada, ya que la fila 1 tiene 4 ceros, los mismos que la fila 2.

Si $\alpha^2 - 1 = 0$, entonces $\alpha = 1$ ó $\alpha = -1$. El primer caso ya lo estudiamos. Vamos al segundo caso, es decir, al caso en el que $\alpha = -1$.

$$M = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

no es escalonada ya que la fila de ceros tiene una fila no nula por debajo de ella.

Si $\alpha^2 - \alpha = 0$ entonces $\alpha = 0$ ó $\alpha = 1$, este último caso ya está estudiado, estudiemos el caso de $\alpha = 0$.

$$M = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Esta matriz es escalonada, ya que la única fila que sólo tiene ceros es la última, y a la izquierda del primer elemento no nulo de cada fila hay al menos un cero más que en la anterior.

En el resto de los casos la matriz no es escalonada, ya que las filas 3 y 4 tienen el mismo número de ceros. En resumen, M es escalonada sólo para $\alpha = 0$.

(3.b) Para $\alpha = -1$,

$$M = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 \leftrightarrow F_4} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{F_1 \to F_1/(-2) \\ F_2 \to F_2/(-2) \\ F_3 \to F_3/2}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 \to F_1 - F_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(3.c) Estudiemos los distintos cassos:

$\alpha = 1$

$$M = \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

En este caso, vemos que la matriz de coeficientes es nula, sin embargo, no todos los términos independientes lo son, por lo tanto el sistema sería incompatible.

$\alpha = -1$ Se hizo la matriz escalonada reducida asociada en el apartado *(3.b)*, por lo que un sistema equivalente sería el que tiene como matriz ampliada

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

el sistema es compatible e indeterminado. La tercera columna no tiene pivote, por lo que $x_3 = \beta$. Una solución sería:

$$\left.\begin{array}{rcl} x_1 & = & -1 \\ x_2 & = & -2 \\ x_3 & = & \beta \\ x_4 & = & 0 \end{array}\right\} \forall \beta \in \mathbb{R}$$

$\alpha = 0$

$$M = \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & -1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

El sistema es también compatible e indeterminado. Haciendo, por ejemplo, sustitución regresiva tras seleccionar x_3 como parámetro, ya que corresponde a la única columna sin pivote, se obtiene:

$$\left.\begin{array}{rcl} x_1 & = & 2+\beta \\ x_2 & = & -4-\beta \\ x_3 & = & \beta \\ x_4 & = & 0 \end{array}\right\} \forall \beta \in \mathbb{R}$$

$\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1, -1\}$

$$M = \left(\begin{array}{cccc|c} \alpha-1 & \alpha^2-1 & 0 & \alpha-1 & 2 \\ 0 & \alpha-1 & \alpha^2-1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha^2-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha^2-\alpha & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_4 \to F_4 - \dfrac{\alpha}{\alpha+1} F_3} \left(\begin{array}{cccc|c} \alpha-1 & \alpha^2-1 & 0 & \alpha-1 & 2 \\ 0 & \alpha-1 & \alpha^2-1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha^2-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Haciendo, por ejemplo, sustitución regresiva tras seleccionar x_3 como parámetro, ya que correspondería a la única columna sin pivote, se obtiene:

$$\left.\begin{array}{rcl} x_1 & = & \dfrac{2}{\alpha-1} - \dfrac{4(\alpha+1)}{\alpha-1} - \beta\dfrac{\alpha+1}{\alpha-1} \\ x_2 & = & \dfrac{4}{\alpha-1} - \beta(\alpha+1) \\ x_3 & = & \beta \\ x_4 & = & 0 \end{array}\right\} \forall \beta \in \mathbb{R}$$

Ejercicio 4 ***(3 puntos)***

(4.a) *Enuncia el teorema fundamental de la independencia.*

(4.b) *Utiliza dicho teorema para probar que todas las bases de un espacio vectorial de dimensión finita tienen el mismo número de vectores.*

(4.c) *Indica cuál es la denominada base canónica de $\mathbb{R}^3$. Calcula la matriz de cambio de base tomando como base antigua la base $\mathscr{B} = \{(1,1,1),(1,0,1),(0,0,1)\}$ y como base nueva la canónica.*

(4.d) *Demuestra que el sistema $\mathscr{B} = \{(2,1,1),(1,0,-1)\}$ forma una base de $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x-3y+z=0\}$.*

(4.e) *Calcula unas ecuaciones paramétricas del subespacio U definido en el apartado (4.d).*

Solución:

(4.a) Sea V un espacio vectorial tal que $\mathscr{B} = \left\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots \vec{v}_q\right\}$ es un sistema generador de V y $S = \left\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots \vec{u}_p\right\}$ es un sistema libre de V, entonces $p \leq q$.

(4.b) Sea V un espacio vectorial y sean $\mathscr{B}_1 = \{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_m\}$, $\mathscr{B}_2 = \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$ bases de V.

Como ambos sistemas son bases de V, los dos son libres y generadores de V. Como $\mathscr{B}_1$ es libre y $\mathscr{B}_2$ es generador, por *(4.a)* $m \leqslant n$. De la misma forma y dado que $\mathscr{B}_2$ es libre y $\mathscr{B}_1$ es generador, por *(4.a)* $n \leqslant m$.

Como $m \leqslant n$ y $n \leqslant m$, necesariamente $m = n$.

(4.c) Llamamos base canónica de $\mathbb{R}^3$ al sistema de vectores $\mathscr{B}_c = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$.

Dado que

$$\left.\begin{array}{rcl} (1,1,1) & = & 1(1,0,0)+1(0,1,0)+1(0,0,1) = (1,1,1)_{\mathscr{B}_c} \\ (1,0,1) & = & 1(1,0,0)+0(0,1,0)+1(0,0,1) = (1,0,1)_{\mathscr{B}_c} \\ (0,0,1) & = & 0(1,0,0)+0(0,1,0)+1(0,0,1) = (0,0,1)_{\mathscr{B}_c} \end{array}\right\} \to P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

La matriz obtenida hace el cambio de base de $\mathscr{B}_c$ a $\mathscr{B}$, por lo tanto buscamos su inversa.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F3 \to F_3 - F_1]{F_2 \to F_2 - F_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 \to (-1)F_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 \to F_1 - F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Por lo que la matriz de cambio de base pedida es

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(4.d) En primer lugar debemos probar que los elementos de $\mathscr{B}$ están en U:

$$(2,1,1) \in U \quad \text{ya que } 2-3+1=0 \tag{1}$$
$$(1,0,-1) \in U \quad \text{ya que } 1-1=0 \tag{2}$$

Vamos a comprobar que se trata de un sistema libre:

$$\begin{array}{c} (\ 2,\ 1,\ 1\ ) \\ (\ 1,\ 0,\ -1\ ) \end{array} \xrightarrow{F_2 \to F_2 - F_1 \frac{1}{2}} \begin{array}{c} (\ 2,\ 1,\ 1\ ) \\ (\ 0,\ -1/2,\ -3/2\ ) \end{array}$$

Como no obtenemos ninguna fila nula, el sistema es libre.

A continuación, veamos que $\langle \mathscr{B} \rangle = U$. Como se trata de una igualdad entre conjuntos debemos comprobar que cada elemento de uno está en el otro.

Las combinaciones lineales de elementos de $\mathscr{B}$ siempre están en U por ser un subespacio vectorial, así que es suficiente con probar que todo elemento de U es combinación lineal de los elementos de $\mathscr{B}$. Veamos entonces si, dado un $(x,y,z) \in U$ siempre podemos encontrar α_1, $\alpha_2 \in \mathbb{R}$ tales que:

$$(x,y,z) = \alpha_1(2,1,1) + \alpha_2(1,0,-1) = (2\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1, \alpha_1 - \alpha_2) \tag{3}$$

es decir, que se cumple el sistema

$$\left.\begin{array}{rcl} 2\alpha_1 + \alpha_2 & = & x \\ \alpha_1 & = & y \\ \alpha_1 - \alpha_2 & = & z \end{array}\right\} \xrightarrow[\textit{asociada}]{\textit{Matriz}} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & x \\ 1 & 0 & y \\ 1 & -1 & z \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & y \\ 2 & 1 & x \\ 1 & -1 & z \end{array}\right) \xrightarrow[F_3 \to F_3 - F_1]{F_2 \to F_2 - 2F_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & y \\ 0 & 1 & x-2y \\ 0 & -1 & z-y \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_3 \to F_3+F_2} \left(\begin{array}{cc|l} 1 & 0 & y \\ 0 & 1 & x-2y \\ 0 & 0 & z-3y+x \end{array}\right)$$

Como $x-3y+z=0$ si $(x,y,z)\in U$, entonces el sistema es compatible, ya que no hay pivotes en la columna de términos independientes, y en consecuencia siempre existen α_1 y α_2 que cumplan (3), y en consecuencia el sistema es generador.

Como es un sistema de U libre y generador, $\mathscr{B}$ es una base de U.

(4.e) Unas ecuaciones paramétricas se pueden obtener como sigue:

$$(x,y,z)=\alpha_1(2,1,1)+\alpha_2(1,0,-1)=(2\alpha_1+\alpha_2,\alpha_1,\alpha_1-\alpha_2)$$

por lo que

$$\left.\begin{array}{rcl} 2\alpha_1+\alpha_2 & = & x \\ \alpha_1 & = & y \\ \alpha_1-\alpha_2 & = & z \end{array}\right\},\ \forall \alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{R}.$$