Ejercicio 1 *En* $\mathbb{R}^3$ *se considera la base* $\mathcal{B}_c = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$. *Calcula*

(a) *La matriz* P_1 *de cambio de base tomando como base antigua* $\mathcal{B} = \{(1,-3,4)(2,-5,6),(-1,0,1)\}$ *y como base nueva* $\mathcal{B}_c$.

$$P_1 = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 5 \\ -3 & -5 & -3 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

(b) *Las coordenadas del vector* $\vec{u} = (1,1,-3)$ *en la base* $\mathcal{B}$ *del apartado* (a).

$\vec{u} = (-2,1,-1)_{\mathcal{B}}$.

(c) *La matriz* P_2 *de cambio de base tomando como base antigua* $\mathcal{B}_c$ *y como base nueva* $\mathcal{B} = \{(1,-3,4),(2,-5,6),(-1,0,1)\}$.

$$P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -3 & -5 & 0 \\ 4 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

(d) *Las coordenadas en la base* $\mathcal{B}$ *del apartado* (c) *del vector* $\vec{v} = (-3,1,0)$.

$\vec{v} = (-7,4,4)_{\mathcal{B}}$

(e) *La base* $\mathcal{B}_1$ *tal que la matriz de cambio de base tomando como base antigua* $\mathcal{B} = \{(1,-1,0),(0,0,1),(0,1,-1)\}$ *y como base nueva* $\mathcal{B}_1$ *es*

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$\mathcal{B}_1 = \{(1,-1,0),(1,1,1),(0,0,-1)\}$

(f) *La base* $\mathcal{B}_2$ *tal que la matriz de cambio de base tomando como base antigua* $\mathcal{B}_2$ *y como base nueva* $\mathcal{B} = \{(1,-1,0),(0,0,1),(0,1,-1)\}$ *es*

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$\mathcal{B}_2 = \left\{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right),\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right),(0,0,-1)\right\}$

Ejercicio 2 *Se considera la aplicación lineal* $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}_2[x]$ *definida como sigue:*

$$f(2,1,1,-1) = 1,\ f(-2,-1,0,1) = x,\ f(-2,-2,2,1) = 1-x,\ f(7,1,8,-3) = 1-x^2$$

(a) *Calcula la matriz* M *asociada a* f *en la base* $\widetilde{\mathcal{B}} = \{(2,1,1,-1),(-2,-1,0,1),(-2,-2,2,1),(7,1,8,-3)\}$ *y la base* $\mathcal{B}' = \{1,x,x^2\}$ *de* $\mathbb{R}_2[x]$.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(b) *Calcula la matriz A asociada a f en la base $\mathcal{B}_c$ de $\mathbb{R}^4$ y la base $\mathcal{B} = \{2, 1+x, -1-x-x^2\}$ de $\mathbb{R}_2[x]$.*

$$A = \begin{pmatrix} -6 & 6 & 3 & -5 \\ 4 & 4 & 1 & 13 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(c) *Calcula, en caso de que sea posible, una base, ecuaciones implícitas y paramétricas de $ker(f)$.*

Unas ecuaciones implícitas:

$$\left.\begin{array}{llll} x_1 & & +2x_4 & = 0 \\ & x_2 & +\frac{4}{3}x_4 & = 0 \\ & & x_3 \; -\frac{1}{3}x_4 & = 0 \end{array}\right\}$$

Unas ecuaciones paramétricas:

$$\left.\begin{array}{lcr} x_1 & = & -2\alpha \\ x_2 & = & -\frac{4}{3}\alpha \\ x_3 & = & \frac{1}{3}\alpha \\ x_4 & = & \alpha \end{array}\right\} \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

Una base:

$$\mathcal{B}_{ker(f)} = \left\{ \left(-2, -\frac{4}{3}, \frac{1}{3}, 1\right) \right\}$$

(d) *Calcula, en caso de que sea posible, una base, ecuaciones implícitas y paramétricas de $Im(f)$.*

Base de la Imagen:

$$\mathcal{B}_{Im(f)} = \left\{1, x, x^2\right\}$$

Unas ecuaciones paramétricas:

$$\left.\begin{array}{lcl} a_0 & = & \alpha \\ a_1 & = & \beta \\ a_2 & = & \delta \end{array}\right\}, \; \alpha, \beta, \delta \in \mathbb{R}$$

y no tiene ecuaciones implícitas.

(e) *Calcula $f(1,0,-1,3)$ expresando dicho vector en la base $\mathcal{B}'$.*

$f(1,0,-1,3) = -13 + 35x - 7x^2$

(f) *Calcula todos los vectores $\vec{u} \in \mathbb{R}^4$ tales que $f(\vec{u}) = 1 + x - x^2$.*

$$\{(5-6\alpha, -4\alpha, \alpha+8, 3\alpha+4) \; / \; \alpha \in \mathbb{R}\}$$

Solución con Matlab

```
clear all
clc
% Ejercicio 1
```

Apartado a)

```
P=[1 2 -1; -3 -5 0; 4 6 1]  %Matriz de cambio de ...
    base de la canonica a B
```

```
P = 3x3
     1     2    -1
    -3    -5     0
     4     6     1
```

```
P_1=P^-1 %Matriz de cambio de base de B a la ...
    ócannica
```

```
P_1 = 3x3
     5     8     5
    -3    -5    -3
    -2    -2    -1
```

Apartado b)

```
u=[1;1;-3]
```

```
u = 3x1
     1
     1
    -3
```

```
% Las coordenadas nuevas si tomamos la matriz P_1 ...
    son las coordenadas en la
% base canonica, por lo tanto, tomemos esta matriz ...
    para calcular estas
% coordenadas pedidas
sol=P_1*u
```

```
sol = 3x1
    -2
     1
    -1
```

Apartado c)

```
P_2=[1 2 -1; -3 -5 0; 4 6 1]
```

```
P_2 = 3x3
     1     2    -1
    -3    -5     0
     4     6     1
```

Apartado d)

```
v=[-3;1;0]
```

```
v = 3x1
    -3
     1
     0
```

```
% En este caso la base nueva es B, por lo tanto, ...
    las coordenadas pedidas son
sol=P_2^-1*v
```

```
sol = 3x1
    -7
     4
     4
```

Apartado e)

```
P=[1/2 -1/2 0;0 1 -1; 0 0 1]
```

```
P = 3x3
    0.5000   -0.5000         0
         0    1.0000   -1.0000
         0         0    1.0000
```

```
Q=[1 0 0; -1 0 1; 0 1 -1]
```

```
Q = 3x3
     1     0     0
    -1     0     1
     0     1    -1
```

```
H= [P Q]
```

```
H = 3x6
    0.5000    -0.5000         0    1.0000
0         0
         0    1.0000    -1.0000    -1.0000         0
1.0000
         0         0    1.0000         0    1.0000
-1.0000
```

```
S= rref(H)
```

```
S = 3x6
     1     0     0     1     1     0
     0     1     0    -1     1     0
     0     0     1     0     1    -1
```

```
B1=S(:,4:6)
```

```
B1 = 3x3
     1     1     0
    -1     1     0
     0     1    -1
```

Apartado f)

```
B2=sym(B1)^-1
```

B2 =

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2

Apartado (a)

```
clear all
M= [1 0 0 ;0 1 0; 1 -1 0; 1 0 -1].'
```

```
M  =  3x4
     1     0     1     1
     0     1    -1     0
     0     0     0    -1
```

Apartado (b)

```
P=[2 1 1 -1; - 2 -1 0 1; -2 -2 2 1; 7 1 8 -3].'
```

```
P  =  4x4
     2    -2    -2     7
     1    -1    -2     1
     1     0     2     8
    -1     1     1    -3
```

```
Q=[2 0 0; 1 1 0; -1 -1 -1].'
```

```
Q  =  3x3
     2     1    -1
     0     1    -1
     0     0    -1
```

```
A=Q*M*P^-1
```

```
A  =  3x4
    -6     6     3    -5
     4     4     1    13
     1     0     0     2
```

Apartado (c)

```
KerA=null(sym(A))
```

KerA =

$$\begin{pmatrix} -2 \\ -\frac{4}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$$

```
EcImpl=rref(sym(A))
```

```
EcImpl =
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

```
syms x1 x2 x3 x4 real
s=solve(x1+2*x4==0,x2+4*x4/3==0,x3-x4/3,'ReturnConditions', ...
    true)
```

```
s =
                x1: [1x1 sym]
                x2: [1x1 sym]
                x3: [1x1 sym]
        parameters: [1x0 sym]
        conditions: [1x1 sym]
```

```
sol=[s.x1,s.x2,s.x3,x4]
```

```
sol =
```

$$\begin{pmatrix} -2\,x_4 & -\frac{4\,x_4}{3} & \frac{x_4}{3} & x_4 \end{pmatrix}$$

Apartado (d)

```
Imf=rref(sym(M).')
```

```
Imf =
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Apartado (e)

```
v=[1 0 -1 3].'
```

```
v = 4x1
     1
     0
    -1
     3
```

```
fv=A*v
```

```
fv = 3x1
    -24
     42
      7
```

```
syms x
fvBcan = fv.'*[2;1 + x;-1-x-x^2]
```

```
fvBcan =
```

$$-7\,x^2+35\,x-13$$

Apartado (f)

```

Ab= [M [1;1; -1]]
```

```
Ab = 3x5
     1     0     1     1     1
     0     1    -1     0     1
     0     0     0    -1    -1
```

```
sol = rref(Ab)
```

```
sol = 3x5
     1     0     1     0     0
     0     1    -1     0     1
     0     0     0     1     1
```

```
syms x1 x2 x3 x4 real
SolB = solve(x1 + x3 + 1 == 1,x2-x3 == 1,'ReturnConditions',true)
```

```
SolB =
            x1: [1x1 sym]
            x2: [1x1 sym]
    parameters: [1x0 sym]
    conditions: [1x1 sym]
```

```
S = [SolB.x1,SolB.x2,x3,1]
```

```
S =
```

$$\left(\begin{array}{cccc} -x_3 & x_3+1 & x_3 & 1 \end{array}\right)$$

```
solcanonica = S(1)*[2 1 1 -1] + S(2)*[-2 -1 0 ...
    1] + S(3)*[-2 -2 2 1] + S(4)*[7 1 8 3]
```

solcanonica =

$$\left(5 - 6\,x_3 \quad -4\,x_3 \quad x_3 + 8 \quad 3\,x_3 + 4 \right)$$