Universidad de Oviedo
E. P. de Ingeniería de Gijón
Dpto. Matemáticas

Algebra Lineal
Segundo Parcial
21/01/2020

Apellidos:	Nombre:	UO

Puntuaciones				
Ejercicio 1 **(1)**	Ejercicio 2 **(2.5)**	Ejercicio 3 **(1)**	Ejercicio 4 **(2.5)**	Ejercicio 5 **(3)**

No se tendrá en cuenta ninguna respuesta que no esté debidamente justificada.

Ejercicio 1 ***(1 punto)*** *En el $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathbb{R}^4$, se consideran los subespacios $U = \langle(1,2,3,4),(1,1,1,3),(1,3,5,5)\rangle$ y $V = \langle(0,1,1,3),(1,1,2,1)\rangle$. Calcula una base de $U+V$ y una base de $U\cap V$.*

Solución: Una base de $U+V$ puede ser:

$$\mathscr{B}_{U+V} = \{(1,2,3,4),(0,-1,-2,-1),(0,0,1,-2)\}$$

y una base de la intersección puede ser:

$$\mathscr{B}_{U\cap V} = \{(1,2,3,4)\}$$

Ejercicio 2 ***(2.5 puntos)*** *Se considera la aplicación lineal dada por las ecuaciones siguientes:*

$$\begin{array}{cccc} f: & \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x_1,x_2,x_3,x_4) & \rightsquigarrow & (x_1+x_2+x_4, x_1-x_2, x_3-x_1) \end{array}$$

(2.a) *Calcula la matriz A asociada a la aplicación lineal en las bases canónicas de $\mathbb{R}^4$ y de $\mathbb{R}^3$.*

(2.b) *Calcula la matriz P de cambio de base en $\mathbb{R}^4$ tomando como base antigua la base canónica y como base nueva $\mathscr{B}_1 = \{(1,1,1,1),(0,1,0,1),(1,0,0,0),(0,0,0,1)\}$.*

(2.c) *Calcula la matriz Q de cambio de base en $\mathbb{R}^3$tomando como base antigua la base canónica y como base nueva $\mathscr{B}_2 = \{(1,1,0),(1,0,1),(1,1,1)\}$.*

(2.d) *Utilizando las matrices calculadas en los apartados (2.b) y (2.c) y razonando correctamente el resultado, calcula la matriz M de la aplicación lineal en las bases $\mathscr{B}_1$ de $\mathbb{R}^4$ y $\mathscr{B}_2$ de $\mathbb{R}^3$. (Puedes dejar el resultado como producto de matrices, siempre que estén todas perfectamente identificadas)*

(2.e) *Decide de forma razonada si f es una aplicación inyectiva o suprayectiva.*

Solución:

(2.a)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(2.b)

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(2.c)

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(2.d)

$$M = Q^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 0 & 1 \\ -3 & -3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

(2.e) No es inyectiva, es suprayectiva.

Ejercicio 3 ***(1 punto)*** *Calcula todos los valores propios de la matriz*

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Solución: $\sigma(A) = \{0, 2, -2\}$

Ejercicio 4 ***(2.5 puntos)*** *Se sabe que*

$$(x,y,z)^2 = x^2 + 5y^2 + 4z^2 + 2xy + 2xz + 2yz$$

es un cuadrado escalar en $\mathbb{R}^3$.

(4.a) Calcula la matriz del producto escalar asociado en la base canónica.

(4.b) Calcula la matriz del producto escalar en la base $\mathscr{B}_2 = \{(1,1,0),(1,0,1),(1,1,1)\}$ *(Observa que* $\mathscr{B}_2$ *es la base dada en (2.c))*

(4.c) Partiendo de la base canónica, calcula la base ortogonal que proporciona el método de Gramm-Schmidt.

(4.d) Calcula la proyección ortogonal del vector $(1,1,1)$ *sobre el subespacio* $U = \langle (1,0,0),(0,1,0) \rangle$*, tomando el producto escalar definido en el enunciado.*

Solución:

(4.a)

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

(4.b)

$$\begin{pmatrix} 8 & 4 & 10 \\ 4 & 7 & 9 \\ 10 & 9 & 16 \end{pmatrix}$$

(4.c)

$$\mathscr{B}_{ortog} = \{(1,0,0),(-1,1,0),(-1,0,1)\}$$

(4.d) $proy_U(1,1,1) = (2,1,0)$.

Ejercicio 5 ***(3 puntos)*** *Dado el endomorfismo de* $\mathbb{R}^3$, f, *cuya matriz asociada en la base canónica es*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -4 \\ -8 & -11 & 8 \\ -8 & -8 & 5 \end{pmatrix}$$

y cuyo su polinomio característico es $p(\lambda) = (1-\lambda)(-3-\lambda)^2$*:*

(5.a) Define valor propio, vector propio y subespacio propio y calcula los subespacios propios de f.

(5.b) Diagonaliza el endomorfismo.

(5.c) Encuentra, en caso de que exista, un vector $\vec{v} = (x, y, z)$ *tal que* $A^{4568}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

Solución:

(5.a) $S(1) = \left\langle \left(-\frac{1}{2}, 1, 1\right) \right\rangle$, $S(-3) = \langle(-1, 1, 0), (1, 0, 1)\rangle$.

(5.b) $\mathscr{B}_D = \left\{ \left(-\frac{1}{2}, 1, 1\right), (-1, 1, 0), (1, 0, 1) \right\}$.

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(5.c) $(x, y, z) = \left(-\frac{1}{2}, 1, 1\right)$.
