Apellidos:	Nombre:	UO

Ejercicio 1 ***(2.5 puntos)*** *Dados los subespacios de* $\mathbb{R}^5$: $U = \langle (1,2,1,3,4),(1,3,1,5,8),(1,2,1,4,4),(1,2,1,5,4) \rangle$ *y* $V = \langle (2,4,2,2,1),(0,0,0,1,2),(1,2,1,0,-1) \rangle$.

(a) Calcula unas ecuaciones paramétricas de U.

(b) Calcula una base de $U+V$.

(c) Calcula las dimensiones de U, V, $U+V$ *y* $U \cap V$.

Solución:

(a) Veamos si el sistema generador de U es base, es decir, si es libre:

$$\begin{matrix}(1, & 2, & 1, & 3, & 4)\\(1, & 3, & 1, & 5, & 8)\\(1, & 2, & 1, & 4, & 4)\\(1, & 2, & 1, & 5, & 4)\end{matrix} \xrightarrow{\substack{F_2\to F_2-F_1\\ F_3\to F_3-F_1\\ F_4\to F_4-F_1}} \begin{matrix}(1, & 2, & 1, & 3, & 4)\\(0, & 1, & 0, & 2, & 4)\\(0, & 0, & 0, & 1, & 0)\\(0, & 0, & 0, & 2, & 0)\end{matrix} \xrightarrow{F_4\to F_4-2F_1} \begin{matrix}(1, & 2, & 1, & 3, & 4)\\(0, & 1, & 0, & 2, & 4)\\(0, & 0, & 0, & 1, & 0)\\(0, & 0, & 0, & 0, & 0)\end{matrix}$$

Por lo tanto, el sistema era ligado. Una base de U puede ser: $\mathscr{B}_U = \{(1,2,1,3,4),(0,1,0,2,4),(0,0,0,1,0)\}$. Así, si $(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) \in U$ entonces:

$$(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) = \alpha(1,2,1,3,4)+\beta(0,1,0,2,4)+\delta(0,0,0,1,0))$$

y unas ecuaciones paramétricas de U son

$$\left.\begin{array}{rcl} x_1 &=& \alpha\\ x_2 &=& 2\alpha+\beta\\ x_3 &=& \alpha\\ x_4 &=& 3\alpha+2\beta+\delta\\ x_5 &=& 4\alpha+4\beta \end{array}\right\} \forall \alpha,\beta,\delta \in \mathbb{R}$$

(b) Calculemos previamente una base de V, a partir del sistema generador que se conoce:

$$\begin{matrix}(2, & 4, & 2, & 2, & 1)\\(0, & 0, & 0, & 1, & 2)\\(1, & 2, & 1, & 0, & -1)\end{matrix} \xrightarrow{F_1\leftrightarrow F_3} \begin{matrix}(1, & 2, & 1, & 0, & -1)\\(0, & 0, & 0, & 1, & 2)\\(2, & 4, & 2, & 2, & 1)\end{matrix} \xrightarrow{F_3\to F_3-2F_1} \begin{matrix}(1, & 2, & 1, & 0, & -1)\\(0, & 0, & 0, & 1, & 2)\\(0, & 0, & 0, & 2, & 1)\end{matrix} \xrightarrow{F_3\to F_3-2F_2}$$

$$\begin{matrix}(1, & 2, & 1, & 0, & -1)\\(0, & 0, & 0, & 1, & 2)\\(0, & 0, & 0, & 0, & -3)\end{matrix} \xrightarrow{F_3/(-3)} \begin{matrix}(1, & 2, & 1, & 0, & -1)\\(0, & 0, & 0, & 1, & 2)\\(0, & 0, & 0, & 0, & 1)\end{matrix}$$

Por lo tanto, el sistema es libre. Vamos a tomar como base $\mathscr{B}_V = \{(1,2,1,0,-1),(0,0,0,1,2),(0,0,0,0,1)\}$.

Para calcular una base de $U+V$ recordemos que

$$U+V = \langle (1,2,1,3,4),(0,1,0,2,4),(0,0,0,1,0),(1,2,1,0,-1),(0,0,0,1,2),(0,0,0,0,1) \rangle$$

Calculemos una base:

$$\begin{matrix}(1, & 2, & 1, & 3, & 4)\\(0, & 1, & 0, & 2, & 4)\\(0, & 0, & 0, & 1, & 0)\\(1, & 2, & 1, & 0, & -1)\\(0, & 0, & 0, & 1, & 2)\\(0, & 0, & 0, & 0, & 1)\end{matrix} \xrightarrow{F_4\to F_4-F_1} \begin{matrix}(1, & 2, & 1, & 3, & 4)\\(0, & 1, & 0, & 2, & 4)\\(0, & 0, & 0, & 1, & 0)\\(0, & 0, & 0, & -3, & -5)\\(0, & 0, & 0, & 1, & 2)\\(0, & 0, & 0, & 0, & 1)\end{matrix} \xrightarrow[F_5\to F_5-F_3]{F_4\to F_4+3F_3} \begin{matrix}(1, & 2, & 1, & 3, & 4)\\(0, & 1, & 0, & 2, & 4)\\(0, & 0, & 0, & 1, & 0)\\(0, & 0, & 0, & 0, & -5)\\(0, & 0, & 0, & 0, & 2)\\(0, & 0, & 0, & 0, & 1)\end{matrix}$$

$$\xrightarrow{F_6\leftrightarrow F_4}\begin{matrix}(1, & 2, & 1, & 3, & 4)\\(0, & 1, & 0, & 2, & 4)\\(0, & 0, & 0, & 1, & 0)\\(0, & 0, & 0, & 0, & 1)\\(0, & 0, & 0, & 0, & 2)\\(0, & 0, & 0, & 0, & -5)\end{matrix}\xrightarrow[F_6\to F_6+5F_4]{F_5\to F_5-2F_3}\begin{matrix}(1, & 2, & 1, & 3, & 4)\\(0, & 1, & 0, & 2, & 4)\\(0, & 0, & 0, & 1, & 0)\\(0, & 0, & 0, & 0, & 1)\\(0, & 0, & 0, & 0, & 0)\\(0, & 0, & 0, & 0, & 0)\end{matrix}$$

y una base de la suma puede ser:

$$\mathscr{B}_{U+V}=\{(1,2,1,3,4),(0,1,0,2,4),(0,0,0,1,0),(0,0,0,0,1)\}$$

(c) Contando el número de vectores de cada base se tiene que $dim(U)=3$, $dim(V)=3$ y $dim(U+V)=4$. Aplicando la fórmula de Grassmann, se obtiene la dimensión de la intersección, sin necesidad de calcular una base:

$$dim(U+V)=dim(U)+dim(V)-dim(U\cap V)\Rightarrow 4=3+3-dim(U\cap V)\Rightarrow dim(U\cap V)=2$$

Ejercicio 2 ***(3 puntos)*** *Se considera la aplicación $f:\mathbb{R}_2[x]\to\mathbb{R}^2$ definida como sigue:*

$$f(a+bx+cx^2)=(a+b-c,a-c).$$

Se pide:

(a) Calcular la matriz asociada a f en las bases $\mathscr{B}=\{1,x,x^2\}$ de $\mathbb{R}_2[x]$ y $\mathscr{B}'=\{(1,0),(0,1)\}$ de $\mathbb{R}^2$.

(b) Calcula la matriz P que realiza el cambio de base en $\mathbb{R}_2[x]$ tomando como base antigua $\mathscr{B}$ y como base nueva $\mathscr{B}_1=\{1,1+x+x^2,1+x\}$.

(c) Calcula la matriz Q que realiza el cambio de base en $\mathbb{R}^2$ tomando como base antigua $\mathscr{B}'$ y como base nueva $\mathscr{B}'_1=\{(1,1),(-1,1)\}$.

(d) Calcular la matriz asociada a f en las bases $\mathscr{B}_1$ de $\mathbb{R}_2[x]$ y $\mathscr{B}'_1$ de $\mathbb{R}^2$, utilizando (de forma razonada) las matrices P y Q calculadas en los apartados (b) y (c). (Puedes dejarlo como producto de matrices, siempre que estén todas perfectamente identificadas).

(e) Calcula los subespacios imagen y núcleo de f.

(f) Deduce del apartado (e) si la aplicación es inyectiva, suprayectiva o biyectiva.

Solución:

(a) Como $f(1)=(1,1)$, $f(x)=(1,0)$ y $f(x^2)=(-1,-1)$, la matriz pedida es:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\1 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

lo que se traduce en que si un vector de $\mathbb{R}_2[x]$ tiene coordenadas $X_{\mathscr{B}}$ en la base $\mathscr{B}$ y su imagen tiene coordenadas $Y_{\mathscr{B}_1}$ en la base $\mathscr{B}_1$, entonces

$$AX_{\mathscr{B}}=Y_{\mathscr{B}_1}. \quad (1)$$

(b) Obsérvese que $1=1\cdot 1+\cdot x+0\cdot x^2=(1,0,0)_{\mathscr{B}}$, $1+x+x^2=1\cdot 1+1\cdot x+1\cdot x^2=(1,1,1)_{\mathscr{B}}$ y $1+x=1\cdot 1+1\cdot x+0\cdot x^2=(1,1,0)_{\mathscr{B}}$ por lo que la matriz pedida es

$$P=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\0 & 1 & 1\\0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

que hace que, si un vector de $\mathbb{R}_2[x]$ tiene coordenadas $X_{\mathscr{B}}$ en la base $\mathscr{B}$ y $X'_{\mathscr{B}_1}$ en la base $\mathscr{B}_1$, entonces

$$PX'_{\mathscr{B}_1}=X_{\mathscr{B}}. \quad (2)$$

(c) Como $(1,1) = 1\cdot(1,0)+1\cdot(0,1) = (1,1)_{\mathscr{B}'}$ y $(-1,1) = -1\cdot(1,0)+1\cdot(0,1) = (-1,1)_{\mathscr{B}'}$ entonces la matriz pedida es

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

que hace que, si un vector de $\mathbb{R}^2$ tiene coordenadas $Y_{\mathscr{B}_1}$ en la base $\mathscr{B}_1$ y $Y'_{\mathscr{B}'_1}$ en la base $\mathscr{B}'_1$, entonces

$$QY'_{\mathscr{B}'_1} = Y_{\mathscr{B}_1}. \tag{3}$$

(d) Partiendo de la relación (1) y utilizando las relaciones (2) y (3) se tiene que

$$AX_{\mathscr{B}} = Y_{\mathscr{B}_1} \Rightarrow APX'_{\mathscr{B}_1} = QY'_{\mathscr{B}'_1} \Rightarrow Q^{-1}APX'_{\mathscr{B}_1} = Y'_{\mathscr{B}'_1}$$

Por lo que la matriz pedida es

$$M = Q^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

(e) Vamos a calcular el núcleo en la base $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}_2[x]$ y para ello utilizaremos la matriz A. Como $ker(f) = \{\vec{v} \in \mathbb{R}_2[x] \ / \ f(\vec{v}) = \vec{0}\}$. Resolveremos el sistema $AX = [0]$:

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2\to F_2-F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1\to F_1+F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$$

Unas ecuaciones paramétricas del núcleo sería

$$\left.\begin{array}{r} a = \alpha \\ b = 0 \\ c = \alpha \end{array}\right\} \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

Una base del núcleo puede ser:

$$\mathscr{B}_{ker(f)} = \{(1,0,1)_{\mathscr{B}}\} = \{1+x^2\}$$

Respecto al subespacio Imagen, recordemos que $Im(f) = \langle f(1), f(x), f(x^2)\rangle = \langle (1,1),(1,0),(-1,-1)\rangle$. Vamos a calcular una base

$$\begin{array}{rr} (1, & 1) \\ (1, & 0) \\ (-1, & -1) \end{array} \xrightarrow[F_3\to F_3+F_1]{F_2\to F_2-F_1} \begin{array}{rr} (1, & 1) \\ (0, & -1) \\ (0, & 0) \end{array}$$

Por lo tanto, una base de $Im(f)$ sería $\{(1,1),(0,-1)\}$.

(f) Como el núcleo tiene vectores no nulos, la aplicación no es inyectiva, y en consecuencia tampoco biyectiva. Como $dim(Im(f)) = 2$ que es la dimensión del espacio final, la aplicación sí es suprayectiva.

Ejercicio 3 ***(0.75 puntos)*** *Calcula la proyección ortogonal de $p(x) = x + x^2$ sobre el subespacio $\mathbb{R}_1[x]$, con el producto escalar $f\cdot g = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$.*

Solución: Una base de $\mathbb{R}_1[x]$ puede ser $\{1,x\}$. Vamos a descomponer $p(x)$ como sigue:

$$x + x^2 = \alpha\cdot 1 + \beta\cdot x + f(x),\ f(x)\perp 1,\ f(x)\perp x \tag{4}$$

Multiplicando escalarmente la ecuacion (4) por 1 se tiene:

$$1\cdot(x+x^2) = \alpha 1\cdot 1 + \beta 1\cdot x + \underbrace{1\cdot f(x)}_{=0}$$

$1\cdot(x+x^2)=\int_{-1}^{1}(x+x^2)dx=\left.\frac{x^2}{2}\right|_{-1}^{1}+\left.\frac{x^3}{3}\right|_{-1}^{1}=\frac{2}{3}$. Además

$$\begin{array}{llll} 1\cdot 1 & =\int_{-1}^{1}dx & =x|_{-1}^{1} & =2 \\ 1\cdot x & =\int_{-1}^{1}xdx & =\left.\frac{x^2}{2}\right|_{-1}^{1} & =0 \end{array}$$

Así obtenemos el valor de α como sigue:

$$\frac{2}{3}=2\alpha+0\beta \Rightarrow \alpha=\frac{1}{3}.$$

Para calcular β multiplicamos escalarmente la ecuacion (4) por x y se tiene:

$$x\cdot(x+x^2)=\alpha x\cdot 1+\beta x\cdot x+\underbrace{x\cdot f(x)}_{=0}$$

Como $x\cdot(x+x^2)=\int_{-1}^{1}(x^2+x^3)dx=\left.\frac{x^3}{3}\right|_{-1}^{1}+\left.\frac{x^4}{4}\right|_{-1}^{1}=\frac{2}{3}$. Además

$$\begin{array}{llll} 1\cdot x & =\int_{-1}^{1}xdx & =\left.\frac{x^2}{2}\right|_{-1}^{1} & =0 \\ x\cdot x & =\int_{-1}^{1}x^2dx & =\left.\frac{x^3}{3}\right|_{-1}^{1} & =\frac{2}{3} \end{array}$$

por lo que el valor de β se calcula como sigue:

$$\frac{2}{3}=0\alpha+\frac{2}{3}\beta \Rightarrow \beta=1$$

y la proyección pedida es $proy_{\mathbb{R}_1[x]}(x+x^2)=\frac{1}{3}+x$.

Ejercicio 4 ***(0.75 puntos)*** *Decide de forma razonada cuál o cuáles de las matrices siguientes puede estar asociada a un producto escalar.*

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ -2 & -3 & 3 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad C=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Solución: A no puede estar asociada a un producto escalar, ya que no es simétrica. Obsérvese que $a_{12}\neq a_{21}$. B tampoco puede estar asociada a un producto escalar. Se le puede aplicar Sylvester, dado que es simétrica, pero

$$\det(1)>0, \qquad \det\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}=-8<0$$

por lo que no cumple el criterio (que es condición necesaria y suficiente).
C si puede estar asociada a un producto esscalar, ya que es simétrica y al aplicar el criterio de Sylvester se cumple que

$$\det(1)=1>0, \quad \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}=1>0, \quad \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}=2>0$$

Ejercicio 5 ***(1 punto)*** *De un endomorfismo T del espacio vectorial $\mathbb{R}_n[x]$ se conoce su polinomio característico $p(\lambda)=(2-\lambda)(-\lambda)(1+\lambda)$. Calcula de forma razonada n, $dimKer(T)$, $dimIm(T)$. ¿Es T diagonalizable?*

Solución: Como el grado del polinomio característico coincide con la dimensión del espacio donde está definido el endomorfismo, $3=\dim(\mathbb{R}_n[x])=n+1$, por lo tanto $n=2$.
$ker(T)=S(0)$, como $1\leq dim(S(0))\leq 1$ entonces $dim(ker(T))=dim(S(0))=1$. Además, $\dim(\mathbb{R}_2[x])=3=dim(ker(T))+dim(Im(T))=1+dim(Im(T))$ por lo tanto $dim(Im(T)=2$.
El endomorfismo es diagonalizable, ya que su polinomio característico se descompone por completo en el cuerpo $\mathbb{R}$ y todos los valores propios son simples.

Ejercicio 6 ***(2 puntos)*** *Se considera el endomorfismo T de $\mathbb{R}^4$ que, en la base canónica, tiene asociada la matriz*

$$A=\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 5 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & -4 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Sabiendo que su polinomio característico es $p(\lambda)=(2-\lambda)^2(4-\lambda)^2$, se pide

(a) *Calcular el espectro del endomorfismo y sus subespacios propios.*

(b) *Calcula una matriz P regular y una matriz D diagonal tales que $A=PDP^{-1}$.*

(c) *Demuestra que 4 es un vector propio asociado a T^2, dando un vector propio asociado.*

Solución:

(a) El espectro es el conjunto de los valores propios, es decir, el conjunto de las raíces del polinomio característico: $\sigma(T)=\{2,4\}$.

Calculemos los subespacios propios:

$$S(2)=\{\vec{v}\ /\ T(\vec{v})=2\vec{v}\}=\{X\ /\ AX=2X\}$$

Debemos resolver el sistema homogéneo con matriz de coeficientes:

$$A-2I=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -4 & -2 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3\to F_3+2F_1]{F_2\to F_2-F_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -2 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3\leftrightarrow F_4} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & -4 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_3\to F_3+F_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2/4} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1\to F_1+F_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, la solución paramétrica es

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{2}\beta \\ x_2 &= -\frac{1}{2}\alpha-\frac{1}{2}\beta \\ x_3 &= \alpha \\ x_4 &= \beta \end{aligned}\right\}$$

por lo que una base de $S(2)$ puede ser:

$$\mathscr{B}_{S(2)}=\left\{\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1,0\right),\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0,1\right)\right\}$$

De la misma forma, para $S(4)$ se tiene que

$$S(4)=\{\vec{v}\ /\ T(\vec{v})=4\vec{v}\}=\{X\ /\ AX=4X\}$$

Debemos resolver el sistema homogéneo con matriz de coeficientes:

$$A-4I=\begin{pmatrix}-1&-1&-1&-1\\1&1&1&1\\-2&2&0&2\\0&-4&-2&-4\end{pmatrix}\xrightarrow[F_3\to F_3-2F_1]{F_2\to F_2+F_1}\begin{pmatrix}-1&-1&-1&-1\\0&0&0&0\\0&4&2&4\\0&-4&-2&-4\end{pmatrix}\xrightarrow{F_4\to F_4+F_3}\begin{pmatrix}-1&-1&-1&-1\\0&0&0&0\\0&4&2&4\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_2\leftrightarrow F_3}\begin{pmatrix}-1&-1&-1&-1\\0&4&2&4\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow[F_2\to F_2/4]{F_1\to -F_1}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&\frac{1}{2}&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{F_1\to F_1-F_2}\begin{pmatrix}1&0&\frac{1}{2}&0\\0&1&\frac{1}{2}&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

Por lo tanto, la solución paramétrica es

$$\left.\begin{aligned}x_1&=-\frac{1}{2}\alpha\\x_2&=-\frac{1}{2}\alpha-\beta\\x_3&=\alpha\\x_4&=\beta\end{aligned}\right\}$$

por lo que una base de $S(2)$ puede ser:

$$\mathscr{B}_{S(4)}=\left\{\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1,0\right),(0,-1,0,1)\right\}$$

(b)

$$P=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&0\\-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&-1\\1&0&1&0\\0&1&0&1\end{pmatrix},\quad D=\begin{pmatrix}2&0&0&0\\0&2&0&0\\0&0&4&0\\0&0&0&4\end{pmatrix}$$

(c) La matriz asociada a T^2 en la base canónica es

$$A^2=(PDP^{-1})(PDP^{-1})=PD^2P^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&0\\-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&-1\\1&0&1&0\\0&1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&0&0&0\\0&4&0&0\\0&0&16&0\\0&0&0&16\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&0\\-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&-1\\1&0&1&0\\0&1&0&1\end{pmatrix}$$

por lo tanto, $\sigma(T^2)=\{4,16\}$ y un vector propio es, por ejemplo, $\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1,0\right)$.