Tema 2: Sistemas de ecuaciones lineales y matrices

Marisa Serrano

Universidad de Oviedo

Octubre de 2020

email: mlserrano@uniovi.es

Índice

Concepto de matriz

Definición 2.1

Se llama **matriz de orden** $m \times n$ *con coeficientes en un cuerpo* $(\mathbb{K}, +, \cdot)$*, a una tabla formada por* $m \cdot n$ *elementos de* $\mathbb{K}$*, dispuestos en* m *filas y* n *columnas:*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{1}$$

Definición 2.2

Al conjunto de todas las matrices de orden $m \times n$ *con coeficientes en* $\mathbb{K}$ *le denotaremos por:* $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$.
Si $m = n$ *se suele escribir* $\mathcal{M}_m(\mathbb{K})$.

Operaciones con matrices

- Suma de matrices
- Producto de matrices
- Producto de un elemento de $\mathbb{K}$ por una matriz
- Potencia de una matriz
- Transpuesta de una matriz

Tipos de matrices

1. Matriz fila
2. Matriz columna
3. Matriz nula
4. Matriz cuadrada
5. Matriz diagonal
6. Matriz triangular superior
7. Matriz triangular inferior
8. Matriz unidad o identidad
9. Matriz simétrica
10. Matriz antisimétrica
11. Matriz escalonada
12. Matriz escalonada reducida
13. Matriz inversible

Matriz escalonada

Definición 2.3

Diremos que una matriz es **escalonada** *si verifica que cada una de las filas no nulas de la matriz comienza con una sucesión de ceros que tiene al menos un cero más que la fila anterior, ocupando las filas nulas, si las hubiese, las últimas posiciones. Al primer elemento no nulo de cada fila le llamaremos* **pivote** *de la fila.*

Ejemplo de matriz escalonada

$$\begin{pmatrix} \boxed{-1} & 2 & 1 & 5 & 5 & 2 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} & 1 & 4 & -5 & -2 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{-3} & 0 & 12 & 6 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matriz escalonada reducida

Definición 2.4

Si una matriz escalonada cumple la siguiente propiedad:
En las columnas en las que están ubicadas los pivotes de las filas, todos los demás elementos son nulos y además, los pivotes son 1
se dice que la matriz es **escalonada reducida**.

Ejemplo de matriz escalonada reducida

$$\text{Escalonada reducida} = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 0 & 0 & 0 & 15 & 0 & 90 & 4 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 7 & 0 & -38 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Operaciones elementales

Definición 2.5

Llamamos **operaciones elementales** *realizadas sobre las filas de una matriz a las siguientes:*

1. *Intercambiar la posición de dos filas.*
2. *Multiplicar todos los elementos de una fila por un escalar no nulo.*
3. *Sumar a una fila otra multiplicada por un escalar.*

Matriz escalonada asociada a una dada

Definición 2.6

Dada una matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$*, diremos que una matriz* B *escalonada está asociada a* A *si* $B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ *y podemos llegar a ella tras realizar operaciones elementales en* A*.*

Teorema 2.7

1. *Toda matriz puede llegar a transformarse, mediante operaciones elementales, en una matriz escalonada.*
2. *Todas las matrices escalonadas obtenidas a partir de una dada tienen el mismo número de filas no nulas.*
3. *Cada matriz puede llegar a transformarse, mediante operaciones elementales, en una única matriz escalonada reducida.*

Algoritmo de cálculo de la matriz escalonada

```
Require: A = (a_ij) con 1 ≤ i ≤ n, 1 ≤ i ≤ m
for i = n − 1, . . . , 1 do
  if La fila i es nula then
    Pasa la fila i a la última posición
  end if
end for
loop
  if a_11 ≠ 0 then
    for i = 2 : n do
      F_i = F_i − a_i1/a_11 F_1
    end for
    A = A(2 : n, 2 : m)
  else
    if a_i1 = 0 para i = 2, . . . , n then
      A = A(2 : n, 1 : m)
    end if
  end if
end loop
```


Aplicación

Ejemplo 2.8

Calcula una matriz escalonada asociada a:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Utiliza esta matriz para calcular la matriz escalonada reducida asociada.

Rango de una matriz

Definición 2.9

Se llama **rango de una matriz** *A, y se denota $rg(A)$, al número de filas no nulas que tiene una matriz escalonada obtenida a partir de A mediante operaciones elementales.*

Ejemplo 2.10

Calcula el rango de la matriz

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & 2 \\ 6 & 4 & 6 & 1 \\ 3 & 2 & 6 & 6 \end{pmatrix}$$

Teorema 2.11

El rango de una matriz coincide con el de su traspuesta.

Índice

Definición

Sea $A = (a_{11}) \in \mathcal{M}_1(\mathbb{K})$, llamaremos **determinante** de A al valor:

$$\det(A) = a_{11}$$

Sea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$, llamaremos **determinante** de A al valor:

$$\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Definición

Sea

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

Llamaremos **determinante** de A al escalar

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} \det(M_{1j})$$

donde M_{1j} es la matriz obtenida eliminando en A la fila 1 y la columna j

Ejem

Ejemplo 2.12

$$\det \begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= 5 \det \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} - (-3) \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + 2 \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= 5 \times 2 - (-3) \times (3-4) + 2 \times (-1) = 10 - 3 - 2 = 5$$

Propiedades

1. $\det(A) = \det(A^t)$
2. Si intercambiamos dos filas de A el determinante cambia de signo.
3. Si multiplicamos los elementos de una fila de A por un escalar k, su determinante queda multiplicado por k. En particular si A tiene una fila de ceros entonces $det(A) = 0$.
4. Si a una fila de A se le suma otra multiplicada por un escalar, su determinante no varía.
5. Si una fila de A, es suma de otras filas de la matriz multiplicadas por escalares entonces $det(A) = 0$. En particular si A tiene dos filas iguales entonces su determinante es cero.
6. $\det(AB) = \det(A)\det(B)$
7. $\exists A^{-1} \leftrightarrow \det(A) \neq 0$. Además $\det(A^{-1}) = [\det(A)]^{-1}$

Determinante de una matriz triangular

Teorema 2.13

El determinante de una matriz triangular $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ es:

$$\det(A) = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}$$

Un método de cálculo de un determinante de orden n

Para calcular un determinante de orden n se busca una matriz triangular cuyo determinante coincida con el de la matriz dada.

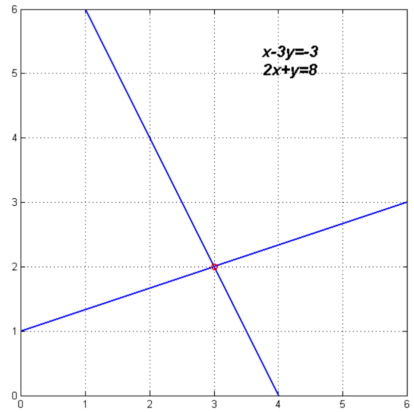
Ejemplo 2.14

Calcula el determinante de la matriz siguiente:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & -6 & -12 \\ -3 & -6 & -10 \end{pmatrix}$$

Índice

Resolución gráfica



$2x + y = 8$

x	y
0	8
1	6
2	4

$x - 3y = -3$

x	y
-3	0
0	1
3	2

Distintas soluciones

Los métodos habituales de resolución de sistemas que se han utilizado hasta ahora son los siguientes:

- Método de sustitución

$$x = 2-y \;\rightarrow\; 3(2-y)-y = 2 \;\rightarrow\; -4y = -4 \;\rightarrow\; y = 1, x = 2-1 = 1$$

- Método de Cramer
  Llamando $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, como $\det(A) = -4 \neq 0$ entonces

$$x = \frac{\det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}}{\det(A)} = 1, \;\; y = \frac{\det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}}{\det(A)} = 1$$

- Eliminación

¿Qué método es mejor?

El método más eficaz es el método de eliminación, consistente en realizar operaciones con las ecuaciones que transformen el sistema en otro con las mismas soluciones que el original, pero más sencillo. Estas operaciones son:

- Multiplicar una ecuación por un número real no nulo.
- Reordenar las ecuaciones.
- Sumar o restar un múltiplo de una ecuación a otra.

Ejemplo utilizando eliminación

Ejemplo 2.15

Resuelva por el método de eliminación el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\left.\begin{array}{rcl} 3x+y+z & = & 3 \\ x+3y+z & = & 1 \\ x+y+3z & = & 1 \end{array}\right\}$$

Definición de sistema lineal

Llamaremos **sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas**, a todo conjunto de relaciones del tipo siguiente:

$$\left.\begin{array}{lc} \textit{Ec. } 1^a & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \textit{Ec. } 2^a & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots & \vdots \\ \textit{Ec. } m^a & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right\} \qquad (2)$$

donde a_{ij} son los coeficientes del sistema, b_i son los términos independientes, todos elementos de un mismo cuerpo $\mathbb{K}$, (habitualmente $\mathbb{R}$) y x_j son las incógnitas del sistema.

Solución

$(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$ es **solución** de (2) si

$$\left.\begin{array}{c} a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \cdots + a_{1n}\alpha_n = b_1 \\ a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \cdots + a_{2n}\alpha_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}\alpha_1 + a_{m2}\alpha_2 + \cdots + a_{mn}\alpha_n = b_m \end{array}\right\}$$

Clasificación de los sistemas

Definición 2.16

Diremos que hemos resuelto el sistema (2) cuando conozcamos todas y cada una de sus soluciones.
Diremos que el sistema es **compatible** *siempre que tenga alguna solución y que es incompatible si carece de ellas. Un sistema compatible se dice* **determinado** *cuando tiene una única solución e* **indeterminado** *si tiene más de una.*

Definición 2.17

Se dice que dos sistemas son **equivalentes** *si admiten exactamente las mismas soluciones.*

Matrices asociadas a un sistema lineal

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{coeficientes}$$

$$Ab = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right) \quad \text{ampliada}$$

Método de Gauss: forma matricial

Obsérvese que realizar las operaciones elementales con las ecuaciones del sistema es lo mismo que realizarlas con las filas de la matriz ampliada. De esta forma, el método de Gauss se puede realizar trabajando sobre la matriz ampliada, y el objetivo es conseguir, haciendo operaciones elementales con las filas de la matriz ampliada, un sistema equivalente cuya matriz ampliada sea *escalonada*

Teorema 2.18

Consideremos un sistema de matriz ampliada Ab y supongamos que sobre las filas de Ab se realizan operaciones elementales obteniendo una nueva matriz $\widetilde{Ab}$. Entonces, el sistema que tiene por matriz ampliada $\widetilde{Ab}$ es equivalente al inicial.

Discusión de sistemas

Teorema 2.19

Sea un sistema con matriz de coeficientes escalonada $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ con exactamente r filas no nulas. El sistema verifica:

1. *es compatible si y sólo si los $m - r$ últimos términos independientes del sistema son ceros.*
2. *en el caso de ser compatible, el sistema es compatible determinado si y sólo si $n = r$ y es compatible indeterminado si y sólo si $r < n$.*

Nota 2.20

Para discutir un sistema cuya matriz asociada no es escalonada, se puede utilizar el método de Gauss y aplicar el teorema anterior.

Discusión de sistemas (Teorema de Rouche-Frobenius)

En términos de los rangos de las matrices, la discusión del sistema se resume en el siguiente teorema

Teorema 2.21

Dada una matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ y $b \in \mathcal{M}_{m\times 1}(\mathbb{R})$. Consideremos el sistema de matriz de coeficientes A y término independiente b y sea Ab su matriz ampliada. Entonces

1. *el sistema es compatible si y sólo si $rg(A) = rg(Ab)$*
2. *en el caso de ser compatible, el sistema es compatible determinado si y sólo si $rg(A) = n$ y es compatible indeterminado si y sólo si $rg(A) < n$.*

Ejemplos de resolución y discusión de sistemas

Ejemplo 2.22

$$\left.\begin{array}{rcr} x_1 + 3x_2 + x_3 &=& -3 \\ 3x_1 + 9x_2 + 4x_3 &=& -7 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 &=& 6 \end{array}\right\}$$

Ejemplo 2.23

$$\left.\begin{array}{rcr} x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 &=& 1 \\ -2x_1 + x_2 + 2x_3 &=& 7 \\ x_2 - x_4 &=& 0 \end{array}\right\}$$

Ejemplos de resolución y discusión de sistemas

Ejemplo 2.24

Discute y resuelve, utilizando el método de Gauss, el sistema siguiente:

$$\left.\begin{array}{rcr} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &=& 9 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 &=& 24 \\ 2x_1 + 7x_2 + 12x_3 &=& 40 \end{array}\right\}$$

Resolución simultánea de sistemas

Consideremos dos sistemas con la misma matriz de coeficientes asociada:

$$\begin{cases} x+y-2z=1 \\ 3x-2y-6z=-2 \\ 2x-y-4z=-1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y-2z=7 \\ 3x-2y-6z=-14 \\ 2x-y-4z=-7 \end{cases}$$

Podemos resolverlos de forma simultánea calculando una escalonada de la matriz:

$$(A|B) = \left(\begin{array}{rrr|r|r} 1 & 1 & -2 & 1 & 7 \\ 3 & -2 & -6 & -2 & -14 \\ 2 & -1 & -4 & -1 & -7 \end{array}\right)$$

En particular, calculando la escalonada reducida:

$$\left(\begin{array}{rrr|r|r} 1 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

y los sistemas se convierten respectivamente en:

$$\begin{cases} x-2z=0 \\ y=1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x=2z \\ y=1 \end{cases} \text{ de soluciones } \begin{cases} x=2\alpha \\ y=1 \\ z=\alpha \end{cases} \quad \forall\, \alpha\in\mathbb{R}$$

$$\begin{cases} x-2z=0 \\ y=7 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x=2z \\ y=7 \end{cases} \text{ de soluciones } \begin{cases} x=2\alpha \\ y=7 \\ z=\alpha \end{cases} \quad \forall\, \alpha\in\mathbb{R}$$

Cálculo de la inversa

Si A es una matriz inversible $A\cdot A^{-1}=I_n$. Vamos a analizar un caso de orden 3.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \text{ y } A^{-1}=\begin{pmatrix} x & u & r \\ y & v & s \\ z & w & t \end{pmatrix}$$

$$AA^{-1}=I_3 \Longrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & u & r \\ y & v & s \\ z & w & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r \\ s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

que podemos resolver simultáneamente calculando la escalonada reducida de la matriz:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 1 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{Esc.\ Red.} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & x & u & r \\ 0 & 1 & 0 & y & v & s \\ 0 & 0 & 1 & z & w & t \end{array}\right)$$

Ejemplo de cálculo de la inversa

Calcúlese la inversa de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

$$(A|I_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{Esc.\ Red.} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) = (I_3|A^{-1})$$

Sistemas homogéneos.

Definición 2.25

Diremos que el sistema de ecuaciones (2) es un **sistema homogéneo** *si $b_i = 0$ para todo valor del índice i.*

Nota 2.26

Obsérvese que, al realizar operaciones elementales sobre las filas de la matriz ampliada de un sistema homogéneo, los coeficientes de la columna correspondiente a los términos independientes no se modifican, es decir, la última columna siempre es nula. Según el Teorema 1.19, este tipo de sistemas siempre son compatibles.

Ejemplo 2.27

$$\left.\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 + x_3 & = & 0 \\ x_1 - x_2 & = & 0 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 & = & 0 \end{array}\right\}$$