COMPARACIÓN DE SISTEMAS INFORMÁTICOS (usando mediciones)

Objetivo: Comparar una métrica (de prestaciones) de 2 sistemas

Problema: Las medidas (u observaciones) están distorsionadas por ruido

Se necesitan técnicas para determinar

si las diferencias observadas en las métricas de prestaciones de dos sistemas

- Son debidas al ruido de las medidas
- Son debidas a diferencias significativas entre los sistemas

Las técnicas se basan en la "Prueba de media cero"

Consiste en usar intervalos de confianza para comprobar si la media de un conjunto de observaciones es significativamente diferente de cero

Limitaciones de estas técnicas

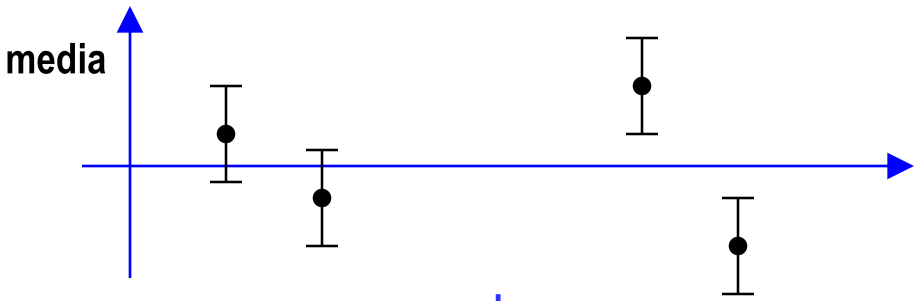
1) Sólo sirven para comparar dos sistemas
2) Las cargas de trabajo deben ser las mismas o muy similares

Ejemplos

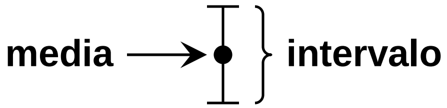
- Comparar las prestaciones de un servidor antes-y-después de ...
- Comparar las prestaciones de dos servidores usando un conjunto de benchmarks

COMPARACIÓN DE SISTEMAS INFORMÁTICOS
Intervalo para comprobar si la media es cero

Consiste en *calcular un intervalo de confianza* para la media de las observaciones y *comprobar si el intervalo incluye al cero* **(diferencias)**



Simbología



El IC incluye al 0 **La media es 0**	**El IC NO incluye al 0** **La media NO es 0**
Los valores medidos **NO SON significativamente** **distintos de 0**	**Los valores medidos** **SON significativamente** **distintos de 0**

Para comprobar si la media de unas observaciones es igual a un valor dado A
Calcular un intervalo de confianza para la media de las observaciones
y *comprobar si el intervalo incluye al valor A*

COMPARACIÓN DE SISTEMAS INFORMÁTICOS
Intervalo para observaciones emparejadas

LAS OBSERVACIONES ESTÁN EMPAREJADAS

Si se realizan n experimentos
- Cada uno de ellos, con 2 sistemas A y B
- Y hay correspondencia uno-a-uno → **Entre la i-ésima prueba del sistema A Y la i-ésima prueba del sistema B**

LAS OBSERVACIONES ESTÁN DESEMPAREJADAS

Si no hay una correspondencia entre las dos muestras

PASOS PARA COMPROBAR MUESTRAS DE OBSERVACIONES EMPAREJADAS

1. Obtener la muestra diferencia de las dos muestras disponibles (calculando las diferencias entre las observaciones de cada pareja)
2. Construir un intervalo de confianza para la muestra diferencia
3. SI el intervalo incluye al 0, ENTONCES las prestaciones de los sistemas NO SON significativamente diferentes

COMPARACIÓN DE SISTEMAS INFORMÁTICOS
Intervalo para observaciones desemparejadas (1)

Se dispone de 2 muestras de
- **Na observaciones del sistema A**
- **Nb observaciones del sistema B**

No hay correspondencia alguna entre las i-ésimas observaciones en las dos muestras

PASOS PARA COMPROBAR MUESTRAS DE OBSERVACIONES DESEMPAREJADAS

1 Calcular las medias de las muestras

$$\bar{x}_a = \frac{1}{n_a}\sum_{i=1}^{n_a} x_{ia} \qquad \bar{x}_b = \frac{1}{n_b}\sum_{i=1}^{n_b} x_{ib}$$

2 Calcular las desviaciones estándar de las muestras

$$s_a = \sqrt{\frac{\left(\sum_{i=1}^{n_a} x_{ia}^2\right) - n_a \bar{x}_a^2}{n_a - 1}} \qquad s_b = \sqrt{\frac{\left(\sum_{i=1}^{n_b} x_{ib}^2\right) - n_b \bar{x}_b^2}{n_b - 1}}$$

3 Calcular la diferencia de las medias

$$\bar{x}_a - \bar{x}_b$$

COMPARACIÓN DE SISTEMAS INFORMÁTICOS
Intervalo para observaciones desemparejadas (2)

PASOS PARA COMPROBAR MUESTRAS DE OBSERVACIONES DESEMPAREJADAS

4 Calcular la desviación estándar de la diferencia de las medias

$$s = \sqrt{\frac{s_a^2}{n_a} + \frac{s_b^2}{n_b}}$$

5 Calcular el número efectivo de grados de libertad

$$\nu = \frac{\left(\frac{s_a^2}{n_a} + \frac{s_b^2}{n_b}\right)^2}{\frac{1}{n_a - 1}\left(\frac{s_a^2}{n_a}\right)^2 + \frac{1}{n_b - 1}\left(\frac{s_b^2}{n_b}\right)^2}$$

6 Calcular el intervalo de confianza de la diferencia de las medias

$$(\bar{x}_a - \bar{x}_b) \pm t_{[1-\alpha/2;\nu]} s$$

$t_{[1-\alpha/2;\nu]}$ Es el cuantil $(1-\alpha/2)$ de una distribución t de Student con ν grados de libertad

Si el intervalo de confianza ...

Incluye al 0, la diferencia no es significativa con un nivel de confianza del 100(1-α)%

NO incluye al 0, el signo de la diferencia de las medias indica el sistema que es mejor

COMPARACIÓN DE SISTEMAS INFORMÁTICOS
Técnica de contraste de hipótesis: introducción

Se parte de una hipótesis
- H_0: Hipótesis nula (que se desea contrastar)
- H_1: Hipótesis alternativa

Contraste de hipótesis: Proceso mediante el que se decide cuál de las hipótesis es correcta y se acepta; la otra se rechaza

Se basa en: Un estadístico E que se calcula a partir de una muestra

Idea en que se fundamenta el contraste de hipótesis

SI se obtiene un valor muy improbable del estadístico E cuando la hipótesis es cierta
ENTONCES La muestra usada es muy rara / La hipótesis nula es falsa

Los rangos de valores del estadístico

Improbables $\xrightarrow{\text{DEFINEN}}$ La región de rechazo o crítica (RR ó RC)
Probables $\longrightarrow$ La región de aceptación (RA)

Prueba
- Rechazar H_0 si $E \in$ RR o RC; Aceptar H_1
- Aceptar H_0 si $E \in$ RA; Rechazar H_1

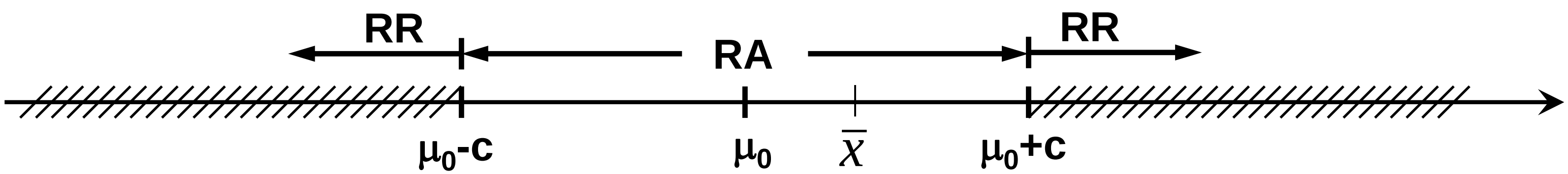
Errores cometidos

	Acepto	Rechazo
H_0 es cierta	Bien	Error Tipo I
H_0 es falsa	Error Tipo II	Bien

α: probabilidad de que ocurra un error tipo I
β: probabilidad de que ocurra un error tipo II

COMPARACIÓN DE SISTEMAS INFORMÁTICOS
Contraste de hipótesis de (=)

Para contrastar la hipótesis $\begin{cases} H_0: \mu=\mu_0 \\ H_1: \mu\neq\mu_0 \end{cases}$ La región de aceptación es un intervalo alrededor de μ_0



Para que el error de tipo I tenga una probabilidad α de producirse cuando H_0 es cierta (cuando realmente $\mu=\mu_0$) debe verificarse que: $\Pr\{\bar{x} \in RR\} = \Pr\{|\bar{x}-\mu_0| > c\} = \alpha$

SI $X \rightarrow N(\mu,\sigma)$ **ENTONCES** $\boxed{\dfrac{\bar{x}-\mu}{s/\sqrt{n}} \rightarrow t_{n-1}}$ **ESTADÍSTICO**

(distribución de la población) **(distribución del estadístico de la media muestral)**

$$\Pr\{|\bar{x}-\mu_0| > c\} = \Pr\{|t_{n-1}| > c\frac{\sqrt{n}}{s}\} = \alpha \longrightarrow c = t_{1-\alpha/2;n-1}\frac{s}{\sqrt{n}}$$

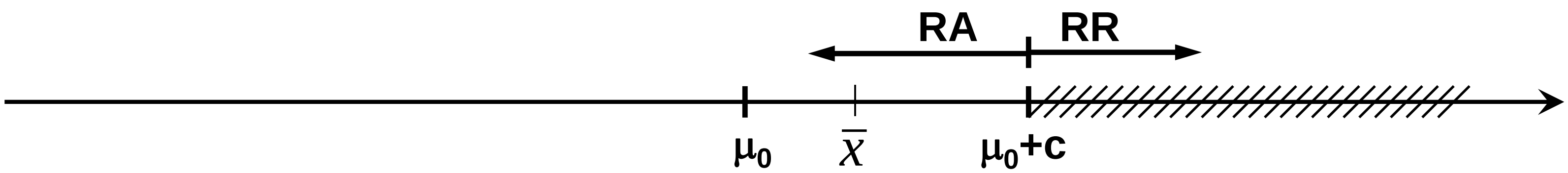
Valor teórico

Prueba $\begin{cases} \text{Aceptar } H_0\ (\mu=\mu_0) \text{ si } & |\bar{x}-\mu_0| \leq \boxed{t_{1-\alpha/2;n-1}}\, s/\sqrt{n} \\ \text{Rechazar } H_0\ (\mu\neq\mu_0) \text{ si } & |\bar{x}-\mu_0| > \boxed{t_{1-\alpha/2;n-1}}\, s/\sqrt{n} \end{cases}$

Se comparan: ESTADÍSTICO y Valor teórico

COMPARACIÓN DE SISTEMAS INFORMÁTICOS
Contraste de hipótesis de (≤)

Para contrastar la hipótesis $\begin{cases} H_0: \mu \le \mu_0 \\ H_1: \mu > \mu_0 \end{cases}$ La región de aceptación y la de rechazo son:



Para que el error de tipo I tenga una probabilidad α de producirse cuando H_0 es cierta (cuando realmente $\mu \le \mu_0$) debe verificarse que: $\Pr\{\bar{x} \in RR\} = \Pr\{\bar{x} - \mu_0 > c\} = \alpha$

SI $X \to N(\mu, \sigma)$ **ENTONCES** $\dfrac{\bar{x} - \mu}{s/\sqrt{n}} \to t_{n-1}$

(distribución de la población) **(distribución del estadístico de la media muestral)**

$$\Pr\{\bar{x} - \mu_0 > c\} = \Pr\{t_{n-1} > c\frac{\sqrt{n}}{s}\} = \alpha \longrightarrow c = t_{1-\alpha;n-1}\frac{s}{\sqrt{n}}$$

Prueba $\begin{cases} \text{Aceptar } H_0\ (\mu=\mu_0) \text{ si } \bar{x} - \mu_0 \le t_{1-\alpha;n-1} s/\sqrt{n} \\ \text{Rechazar } H_0\ (\mu\ne\mu_0) \text{ si } \bar{x} - \mu_0 > t_{1-\alpha;n-1} s/\sqrt{n} \end{cases}$

COMPARACIÓN DE SISTEMAS INFORMÁTICOS
Concepto de p-valor de un contraste de hipótesis

El resultado de una prueba de hipótesis = F(α)

En algunos problemas α está perfectamente definido
En otros problemas NO está claramente definido el valor de α que hay que usar

Solución: Adjuntar a la decisión de rechazar H_0 el riesgo que ello comporta

---

p-valor de una prueba: es el mínimo α con el que puede rechazarse H_0 (para la muestra utilizada)

El contexto del problema permite valorar si el p-valor permite con claridad Aceptar/Rechazar H_0 ... PERO EN GENERAL ...

p-valor

0.10 — **p-valor > 0.1 permite aceptar H_0 con gran confianza**

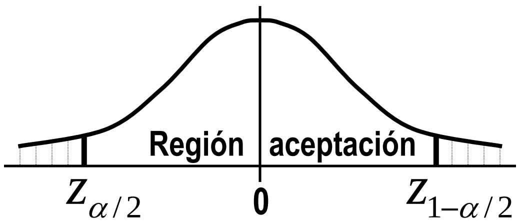
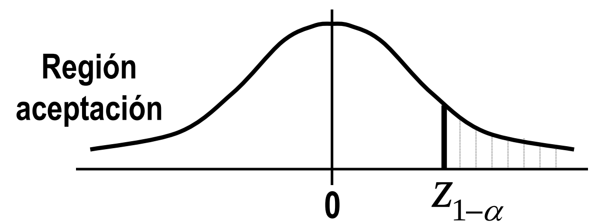
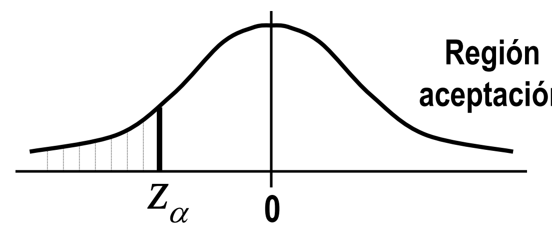
El resultado de la prueba es ambiguo
(conviene repetir la prueba con un tamaño muestral mayor)

0.01 — **p-valor < 0.01 permite rechazar H_0 con gran confianza**

Contraste de hipótesis sobre la media de una población normal

Se aplica a la muestra diferencia de **observaciones emparejadas**

Es la prueba para aceptar / rechazar la hipótesis de que la media de la población μ es $= \geq \leq \mu_0$

	σ conocida	**σ desconocida**	
H_0: $\mu = \mu_0$ si	$\left\lvert \bar{x} - \mu_0 \right\rvert \leq z_{1-\alpha/2} \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$	$\left\lvert \bar{x} - \mu_0 \right\rvert \leq t_{1-\alpha/2;n-1} \dfrac{s}{\sqrt{n}}$	
H_0: $\mu \leq \mu_0$ si	$\bar{x} - \mu_0 \leq z_{1-\alpha} \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$	$\bar{x} - \mu_0 \leq t_{1-\alpha;n-1} \dfrac{s}{\sqrt{n}}$	
H_0: $\mu \geq \mu_0$ si	$\bar{x} - \mu_0 \geq z_{\alpha} \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$	$\bar{x} - \mu_0 \geq t_{\alpha;n-1} \dfrac{s}{\sqrt{n}}$	

Si la muestra es grande (n>30) no hace falta que la distribución de la población sea N(μ,σ)
Para n grande la distribución t → N: Calcular los cuantiles z de todas las pruebas con la N

Contraste de hipótesis sobre la diferencia de medias de dos poblaciones normales independientes

Se aplica a dos muestras de **observaciones DESemparejadas**

Es la prueba para aceptar / rechazar la hipótesis de que la media de la población μ_a es = ≥ ≤ μ_b

	σ_a y σ_b conocidas	σ_a y σ_b desconocidas =	σ_a y σ_b desconocidas ≠
H_0: $\mu_a = \mu_b$ si	$\left\lvert \bar{x}_a - \bar{x}_b \right\rvert \le z_{1-\alpha/2}\sigma_m$	$\left\lvert \bar{x}_a - \bar{x}_b \right\rvert \le t_{1-\alpha/2;n_a+n_b-2} s_{eq}$	$\left\lvert \bar{x}_a - \bar{x}_b \right\rvert \le t_{1-\alpha/2;\nu} s_m$
H_0: $\mu_a \le \mu_b$ si	$\bar{x}_a - \bar{x}_b \le z_{1-\alpha}\sigma_m$	$\bar{x}_a - \bar{x}_b \le t_{1-\alpha;n_a+n_b-2} s_{eq}$	$\bar{x}_a - \bar{x}_b \le t_{1-\alpha;\nu} s_m$
H_0: $\mu_a \ge \mu_b$ si	$\bar{x}_a - \bar{x}_b \ge z_{\alpha}\sigma_m$	$\bar{x}_a - \bar{x}_b \ge t_{\alpha;n_a+n_b-2} s_{eq}$	$\bar{x}_a - \bar{x}_b \ge t_{\alpha;\nu} s_m$

$$\sigma_m = \sqrt{\frac{\sigma_a^2}{n_a} + \frac{\sigma_b^2}{n_b}} \qquad s_{eq} = \sqrt{\frac{(n_a-1)s_a^2 + (n_b-1)s_b^2}{n_a+n_b-2}} \sqrt{\frac{1}{n_a} + \frac{1}{n_b}} \qquad s_m = \sqrt{\frac{s_a^2}{n_a} + \frac{s_b^2}{n_b}}$$

Si ($n_a \approx n_b$) >30 se asegura la normalidad de las medias muestrales
Usar siempre la distribución N para calcular cuantiles z
Si σ_a y σ_b son conocidas usar σ_m
Si σ_a y σ_b son desconocidas usar s_m

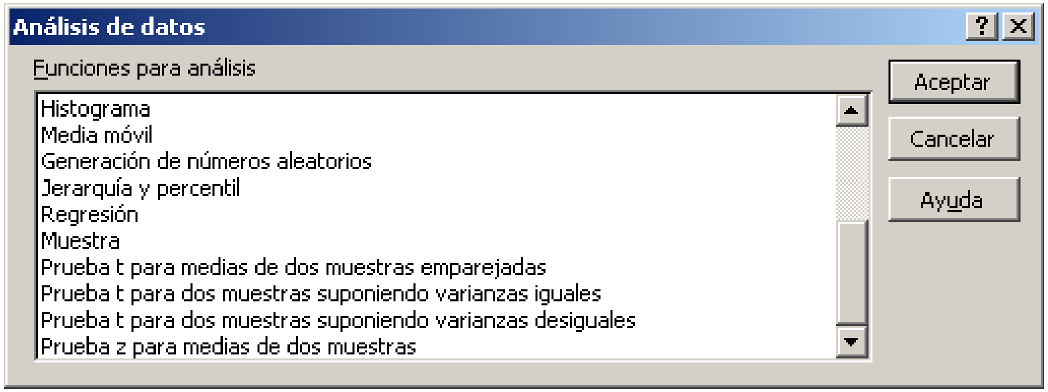
$$\nu = \frac{\left(\frac{s_a^2}{n_a} + \frac{s_b^2}{n_b}\right)^2}{\frac{1}{n_a-1}\left(\frac{s_a^2}{n_a}\right)^2 + \frac{1}{n_b-1}\left(\frac{s_b^2}{n_b}\right)^2}$$

COMPARACIÓN DE SISTEMAS INFORMÁTICOS
Herramientas y funciones Excel para contraste de hipótesis

Las herramientas de Excel trabajan siempre con dos muestras

¿Son grandes (>30 obs)? → Usar Prueba z

¿Son pequeñas (<30 obs)? → Usar Pruebas t para →
- Emparejadas
- Desemparejadas
  - Varianzas =
  - Varianzas ≠



Las funciones de Excel son

PRUEBA.Z(datos;media;desviación)

PRUEBA.T(datosA;datosB;colas;tipo)

Observar los resultados de la prueba:

- Comparar: Estadístico t con Valor crítico de t (dos colas) para aceptar/rechazar la hipótesis
- Evaluar: P(T<=t) dos colas para valorar el riesgo del rechazar la hipótesis

  NOTA: Debería denominarse P(|T|>t) y es el p-valor