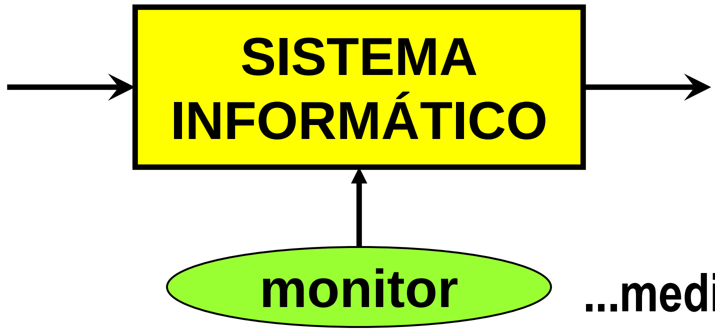
ANÁLISIS DE LA PRECISIÓN DE MEDICIONES

Exactitud, Precisión y Resolución de mediciones

Escenario de evaluación



...mediciones... para evaluar prestaciones se suelen medir tiempos

Las condiciones experimentales introducen incertidumbre en las mediciones
Se dice que las mediciones contienen errores o ruido

El nivel de incertidumbre de las mediciones
AFECTA A:
La fiabilidad de las conclusiones que se pueden extraer de ellas

... Se usan técnicas estadísticas para cuantificar los errores

ANÁLISIS DE LA PRECISIÓN DE MEDICIONES

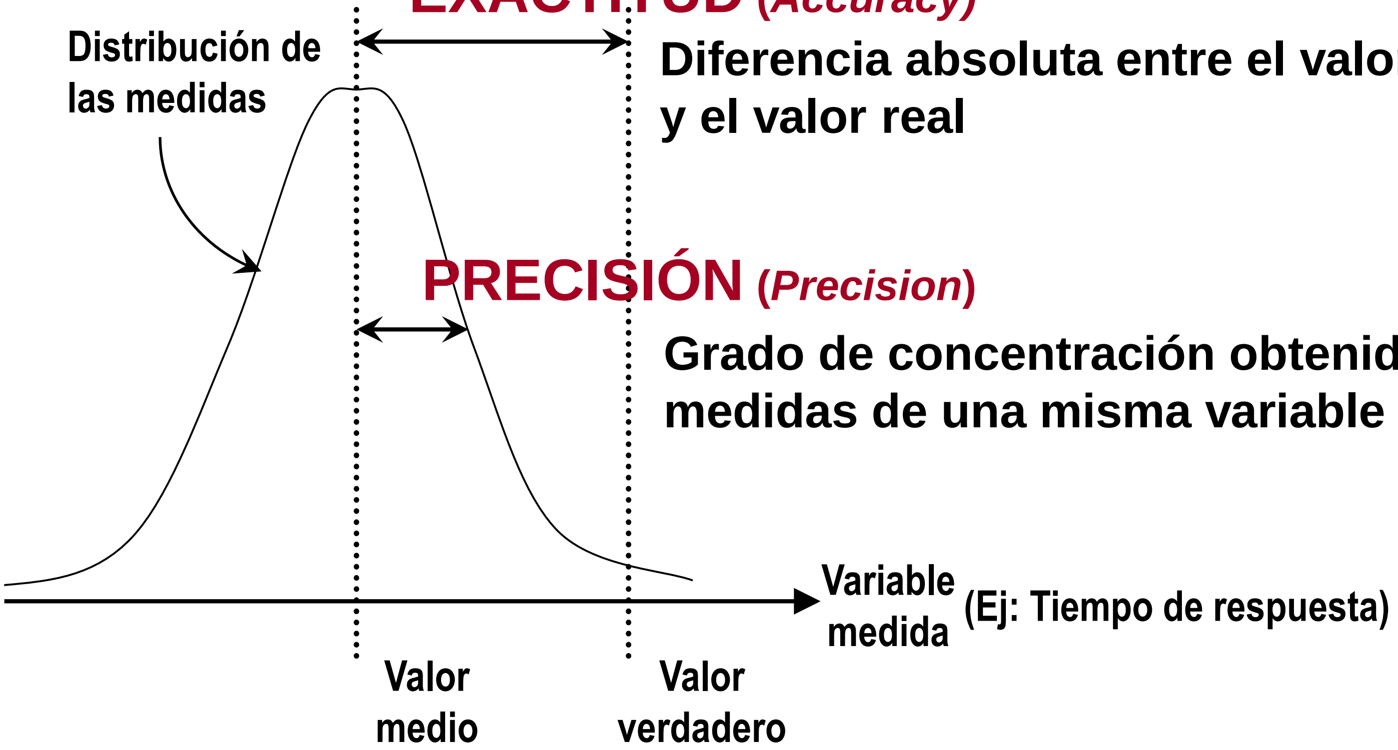
Características que definen la calidad de una muestra

EXACTITUD *(Accuracy)*

Diferencia absoluta entre el valor medio medido y el valor real

PRECISIÓN *(Precision)*

Grado de concentración obtenido al hacer múltiples medidas de una misma variable de un sistema



RESOLUCIÓN *(Resolution)*

Es el menor incremento que puede ser detectado o medido

ANÁLISIS DE LA PRECISIÓN DE MEDICIONES

Tipos de errores y su cuantificación

Errores SISTEMÁTICOS	Errores ALEATORIOS
Introducen SESGO en las mediciones	NO introducen SESGO en las mediciones
Son ctes. en todas las mediciones (o varían lentamente - derivas)	Son completamente NO deterministas (impredecibles e incontrolables)
Debidos a fallos de experimentación - Cambios en las condiciones - Procedimientos incorrectos	Debidos a múltiples causas - El monitor y el usuario - Fenómenos aleatorios en el sistema
Afectan a la EXACTITUD de las med	Afectan a la PRECISIÓN de las med (Determinan la repetibilidad de resultados)
Para cuantificar la EXACTITUD Calibrar los monitores y controlar el procedimiento experimental	**Para cuantificar la PRECISIÓN** Usar técnicas estadísticas (Intervalos de confianza)

INTERVALO DE CONFIANZA PARA LA MEDIA

Concepto de Intervalo de Confianza para la media

Características de	Se denominan	Representación
La población	Parámetros - Son fijos	(griegas) $\mu\ \sigma$
Cada muestra	Estadísticos - Son Var Aleatorias	(latinas) $\bar{x}\ s^2$

Está demostrado que la media y varianza muestrales
SON estimadores puntuales insesgados de la media y varianza poblacionales

$$\left.\begin{array}{l} E[\bar{x}] = \mu \\ E[s^2] = \sigma^2 \end{array}\right\} \xrightarrow{SI\ n \to \infty} \left\{\begin{array}{l} (\bar{x} - \mu) \to 0 \\ (s^2 - \sigma^2) \to 0 \end{array}\right.$$

Además de calcular una estimación de la media poblacional ... Se calcula un intervalo de confianza para la media poblacional tal que la probabilidad de que la media poblacional esté contenida en el intervalo sea (1-α)

$$\Pr(x_1 \le \mu \le x_2) = 1 - \alpha$$

x_1, x_2	Es el intervalo de confianza
α	Es el nivel de significación (0.1, 0.05)
1- α	Es el coeficiente de confianza (0.9, 0.95)
100(1- α)	Es el nivel de confianza (90%, 95%)

INTERVALO DE CONFIANZA PARA LA MEDIA

Para un número de observaciones grande (n≥30)

El teorema central del límite establece que:

$$\bar{x} \approx N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$$

SI las observaciones de una muestra
SON independientes y PROVIENEN de la misma población
ENTONCES
La media muestral se aproxima a una Normal

Error estándar = Desviación estándar de la media muestral = $\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$

Definición del intervalo de confianza:

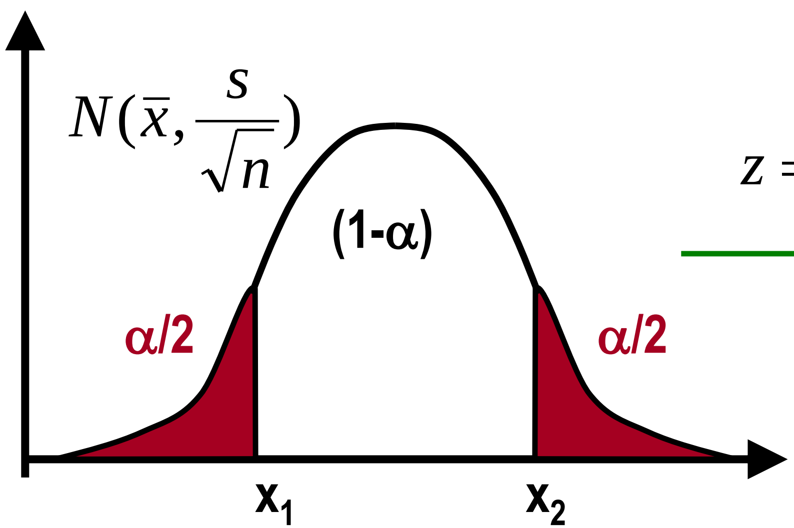
Dos valores x_1, x_2 tales que la Pr de que la media esté entre ellos es 1-α

$$\Pr(x_1 \leq \bar{x} \leq x_2) = 1 - \alpha$$

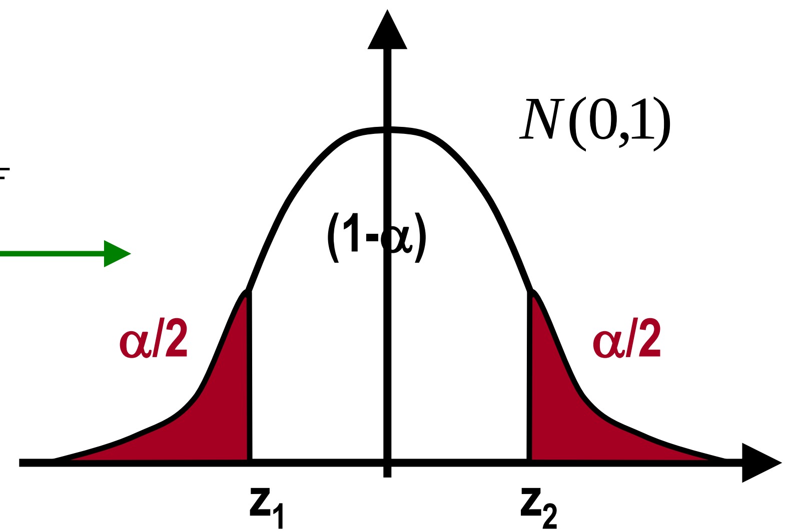
Además se eligen de modo que formen un intervalo simétrico

$$\Pr(\bar{x} < x_1) = \Pr(\bar{x} > x_2) = \alpha / 2$$

INTERVALO DE CONFIANZA PARA LA MEDIA



$$z = \frac{x - \bar{x}}{s / \sqrt{n}}$$



$-z_{1-\alpha/2}$ $+z_{1-\alpha/2}$

$$x = \bar{x} + z \frac{s}{\sqrt{n}}$$

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \bar{x} - z_{1-\alpha/2} \frac{s}{\sqrt{n}} \\ x_2 &= \bar{x} + z_{1-\alpha/2} \frac{s}{\sqrt{n}} \end{aligned}\right\}$$

INTERVALO DE CONFIANZA PARA LA MEDIA

Para un número de observaciones pequeño (n<30)

En este caso la media muestral se aproxima bien a una distribución t de *Student* con n-1 grados de libertad

Siguiendo un proceso similar se obtiene el intervalo:

$$x_1 = \bar{x} - t_{1-\alpha/2;n-1} \frac{s}{\sqrt{n}}$$

$$x_2 = \bar{x} + t_{1-\alpha/2;n-1} \frac{s}{\sqrt{n}}$$

La distribución t como la N(μ,σ) es acampanada y simétrica respecto a 0
Pero su varianza es ≥ 1 siempre: es más dispersa que la N(0,1)
Para n=1 la dispersión es máxima
Para n=∞ la dispersión es mínima = N(0,1)

INTERPRETACIÓN DEL INTERVALO DE CONFIANZA

Interpretación del intervalo de confianza

Si se calcula un intervalo (x_1,x_2) usando un nivel de confianza de 100(1-α)% la media poblacional está en el intervalo con una probabilidad de 100(1-α)%

Ejemplo de interpretación

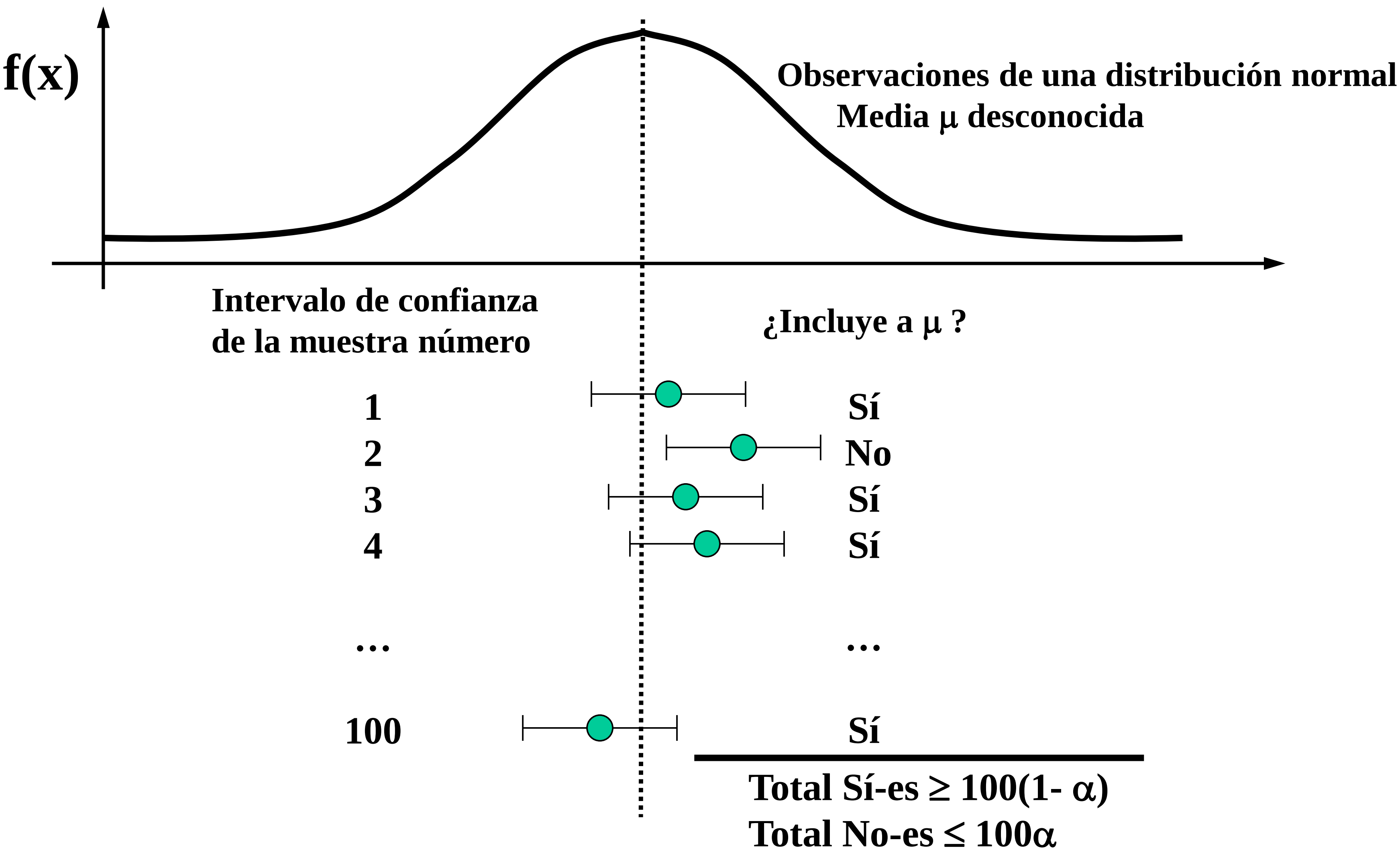
Si se tomasen 100 muestras de n observaciones cada una y se construyese un intervalo usando un nivel de confianza del 90%para cada muestra ...

En 90 muestras el intervalo contendría a la media de la población
En 10 muestras el intervalo NO contendría a la media de la población

Se verifica:

Nivel de confianza $\uparrow$
Nº observaciones $\downarrow$ $\longrightarrow$ **Anchura del intervalo $\uparrow$ = Precisión $\downarrow$**

INTERPRETACIÓN DEL INTERVALO DE CONFIANZA



Cálculo de número de observaciones necesarias

La confianza de las conclusiones que se pueden extraer de una muestra = **f**(Nº observaciones)

Nº observaciones $\uparrow$ $\longrightarrow$ Confianza $\uparrow$

Capturar muchas observaciones conlleva un coste (tiempo) ... Interesa conocer el Nº mínimo de observaciones para alcanzar la confianza deseada

Para estimar el valor medio de una variable $\begin{cases} \text{con un error (precisión) del } \pm e\% \\ \text{un nivel de confianza de } 100(1-\alpha)\% \end{cases}$

$$x_{1ó2} = (1 \pm e/100)\bar{x}$$

$$x_{1ó2} = \bar{x} \pm z_{1-\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}}$$

ó

$$x_{1ó2} = \bar{x} \pm t_{1-\alpha/2;n-1}\frac{s}{\sqrt{n}}$$

Igualando

$$n = \left(\frac{100\, z_{1-\alpha/2}\, s}{\bar{x}e}\right)^2$$

$$n = \left(\frac{100\, t_{1-\alpha/2;n-1}\, s}{\bar{x}e}\right)^2$$

Depende del nº muestras

Estimación de la precisión de medias obtenidas de observaciones CORRELADAS con intervalos de confianza

Método de las réplicas independientes

Las réplicas se obtienen repitiendo las secuencias de mediciones
Cada secuencia de mediciones debe usar números aleatorios distintos

Realizar m réplicas de tamaño n_0+n y calcular:

Media de cada réplica

$$\bar{x}_i = \frac{1}{n} \sum_{j=n_0+1}^{n_0+n} x_{ij} \quad i = 1, \ldots, m$$

Media global

$$\bar{\bar{x}} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} \bar{x}_i$$

Var de las medias de las réplicas

$$Var(\bar{x}) = \frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^{m} (\bar{x}_i - \bar{\bar{x}})^2$$

El intervalo de confianza es:

$$\bar{\bar{x}} \pm z_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{Var(\bar{x})}{m}}$$

Estimación de la precisión de medias obtenidas de observaciones CORRELADAS con intervalos de confianza

Método de las medias por lotes

Obtener una muestra muy larga de n_0+N observaciones

Descartar las n_0 observaciones del intervalo transitorio inicial

Dividir las N observaciones restantes en m=N/n lotes de n obs cada uno

Comenzando por un valor pequeño de n (ej n=1) calcular:

Media de cada lote

$$\bar{x}_i = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \quad i = 1,\dots, m$$

Media global

$$\bar{\bar{x}} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} \bar{x}_i$$

Var de las medias de los lotes

$$Var(\bar{x}) = \frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m} (\bar{x}_i - \bar{\bar{x}})^2$$

El intervalo de confianza es:

$$\bar{\bar{x}} \pm z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{Var(\bar{x})}{m}}$$

$$Cov(\bar{x}_i, \bar{x}_{i+1}) = \frac{1}{m-2}\sum_{i=1}^{m-1} (\bar{x}_i - \bar{\bar{x}})(\bar{x}_{i+1} - \bar{\bar{x}})$$

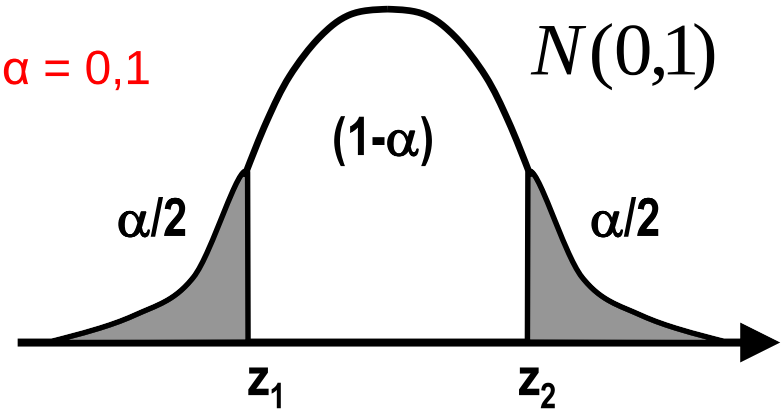
Cálculo de Intervalos de Confianza con Excel

Función Excel: INTERVALO.CONFIANZA.NORM(alfa; desv_estandar; tamaño)

Función Excel: INTERVALO.CONFIANZA(alfa; desv_estandar; tamaño)

$$x_i = \bar{x} \pm \overbrace{z_{1-\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

α = 0,1



alfa = nivel de significación   Si 1-α = 0,9 → α = 0,1

desv_estandar = usar la desviación estándar de la muestra

Calcularla con la función Excel DESVEST

tamaño = número de elementos de la muestra

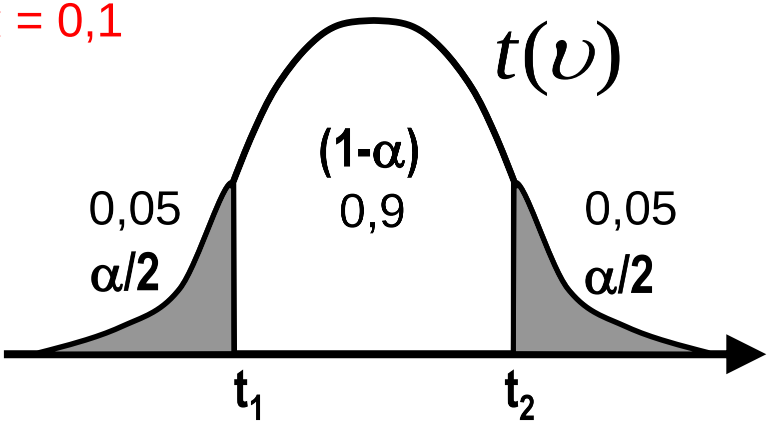
Calcularlo con la función Excel CONTAR

Cálculo de Intervalos de Confianza con Excel

Función Excel: INTERVALO.CONFIANZA.T(alfa; desv_estandar; tamaño)

$$x_i = \bar{x} \pm t_{1-\alpha/2;n-1} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

α = 0,1



alfa = nivel de significación   Si 1-α = 0,9 → α = 0,1

desv_estandar = usar la desviación estándar de la muestra
Calcularla con la función Excel DESVEST

tamaño = número de elementos de la muestra
Calcularlo con la función Excel CONTAR

Cálculo de Intervalos de Confianza con Excel

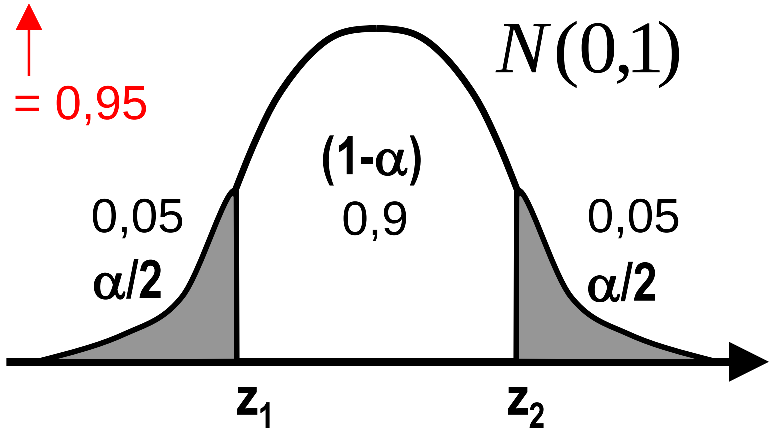
Función Excel: DISTR.NORM.ESTAND.INV(probabilidad)

$$z_{1-\alpha/2}$$

1-α/2 = 0,95

Si 1-α = 0,9 → α = 0,1

$z_1 = z_{0,05}$
$z_2 = z_{0,95}$



Función Excel: DISTR.T.INV(probabilidad; grados_libertad)

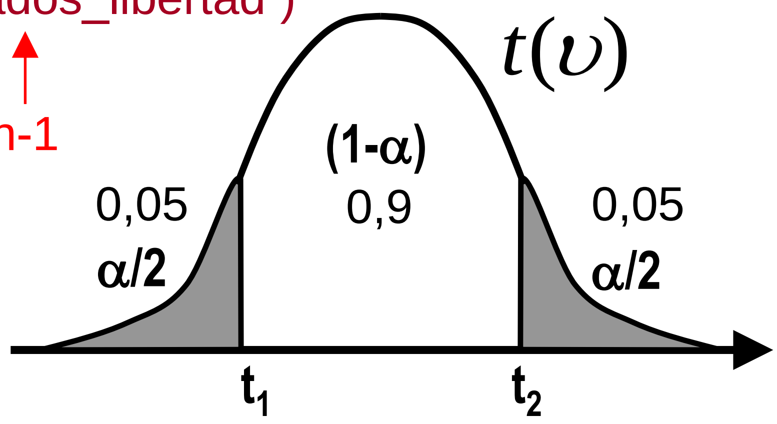
$$t_{1-\alpha/2;n-1}$$

α = 0,1

n-1

Si 1-α = 0,9 → α = 0,1

$t_1 = t_{0,05}$
$t_2 = t_{0,95}$



Cálculo de Intervalos de Confianza con Excel

Ejemplo de intervalos de confianza para α = 0,1:

Para los valores: 0,53, 0,85, 0,74, 0,78, 0,42, 0,61 y 0,48 (n = 7)

Tipo distribución	X1	X2
Normal	0,52847743	0,73152257
T de Student	0,51006430	0,74993569

Para los valores: 0,53, 0,85, 0,74, 0,78, 0,42, 0,61, 0,48, 0,51, 0,43, 0,64, 0,78, 0,75, 0,67, 0,8, 0,51, 0,56, 0,47, 0,63, 0,68, 0,74, 0,81, 0,74, 0,69, 0,56, 0,49, 0,67, 0,77, 0,82, 0,65, 0,46, 0,52, 0,55, 0,61, 0,72, 0,78 y 0,63 (n = 36)

Tipo distribución	X1	X2
Normal	0,606028101	0,674527455
T de Student	0,605096951	0,675458605