Tema 2

Cálculo de probabilidades

Cálculo de Probabilidades

- Sucesos. Operaciones entre sucesos.
- Probabilidad. Propiedades.
- Probabilidad condicionada.
- Independencia.
- Teorema de Bayes y Totales.

Objetivo de la probabilidad

- El objetivo final de la Inferencia Estadística es obtener **conclusiones** sobre **toda la población**, a partir de los datos que obtenemos de **una muestra**.

- **La herramienta que nos va a permitir conseguir dar el salto de la Estadística Descriptiva a la Inferencia Estadística es el Cálculo de Probabilidades.**

Experimento aleatorio

- Un experimento aleatorio (e.a.) es aquel en el que resultado no se puede predecir de antemano.
- En un e.a. se verifica que:
  - Todos los posibles resultados se conocen de antemano.
  - Antes de la realización no se sabe que resultado se va a obtener.
  - Se puede repetir indefinidamente en las mismas condiciones.

Ejemplos e.a.

- "Resultado al tirar un dado".
- "Longitud de una pieza producida en una máquina".
- "Peso real de un paquete con peso nominal de 1 kg".
- "Duración de un elemento electrónico".

Espacio muestral

- **Espacio muestral** (o suceso seguro) es el conjunto de todos los resultados posibles de una experiencia aleatoria.
- Se representa por Ω.
- Cada uno de los posibles resultados se denota por ω.

Ejemplos espacio muestral

- Si lanzo un dado, $\Omega = \{1, 2, \ldots, 6\}$.
- Si se elaboran lotes de 20 cilindros de hormigón bajo condiciones idénticas de manufactura, y se cuentan la cantidad de cilindros cuya resistencia a la compresión es mayor de 200 kg/cm^2

  $$\Omega = \{0, 1, 2, \ldots, 20\}.$$
- Si se elige una varilla de acero de determinado proceso de producción (con pesos entre 15 y 25 grs.) y se mide su peso

  $$\Omega = [15, 25].$$

$\varnothing$

Sucesos

- Cualquier subconjunto A del espacio muestral es un ***suceso*** $(A \in P(\Omega))$.
- Ω es el ***suceso seguro***.
- $\varnothing$ es el ***suceso imposible***.
- ω es un ***suceso elemental***.
- El conjunto de todos los sucesos es $\mathcal{A} = P(\Omega)$.

Ejemplos de sucesos

- Si el experimento es lanzar un dado, {2, 4, 6} es el suceso *"salir par al lanzar un dado"*.
- En los cilindros de hormigón, {10, 11, 12,…, 20} es el suceso *"al menos la mitad de los cilindros del lote tienen una resistencia mayor que 200 kg/cm^2"*.
- En las varillas, el intervalo (17, 21) es el suceso *"peso de las varillas que tienen un peso mayor que 17 grs e inferior a 21 grs"*.

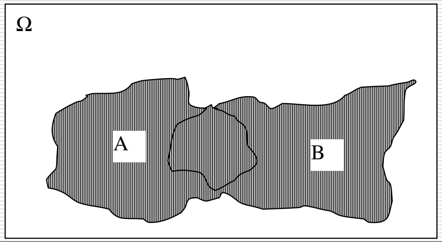
Operaciones entre sucesos

Entre los sucesos se pueden definir operaciones de:

- Unión
- Intersección
- Complementación

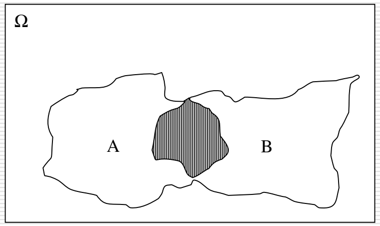
Unión de sucesos

Al unir sucesos se consigue (en general) un suceso mayor que los iniciales formado por los elementos comunes o no comunes de ambos sucesos: $A \cup B = \{\omega \in \Omega / \omega \in A \quad \text{o} \quad \omega \in B\}$



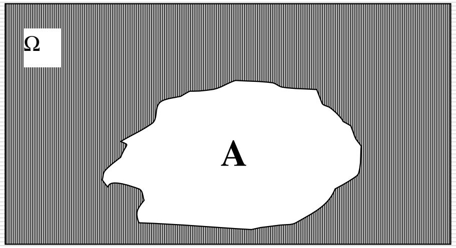
Intersección de sucesos

Al intersecar sucesos se consigue (en general) un suceso más pequeño que los iniciales formado por los elementos comunes a ambos sucesos: $A \cap B = \{\omega \in \Omega / \omega \in A \quad \text{y} \quad \omega \in B\}$



Suceso contrario

El suceso contrario se forma con los elementos del espacio muestral que no están en el suceso original: $\overline{A} = \{\omega \in \Omega \,/\, \omega \notin A\}$



Propiedades operaciones

- Propiedad **distributiva**:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C),$$
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

- Leyes de **De Morgan**:

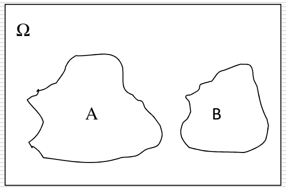
$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B},$$
$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

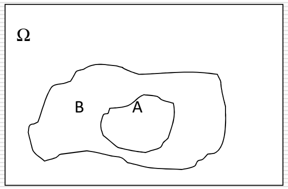
Definiciones

- Dos ***sucesos son incompatibles*** si

$$A \cap B = \emptyset .$$

- *El suceso **A implica a B*** si $A \subseteq B$.





Ejemplos de las operaciones

- El suceso contrario de A = {2, 4} *"salir 2 ó 4"* es el suceso *"salir 1, 3, 5 ó 6" ("salir impar ó 6").*
- El complementario de B = {2, 4, 6} *"salir par"* es *"salir impar"* ({1, 3, 5}): los sucesos *"salir par"* y *"salir impar"* son **incompatibles**.
- Si A = {2, 4} y B = "salir par", se tiene que **A implica B**: *si ocurre A (sale 2 ó 4) esto implica que ocurre B (sale par).*

Probabilidad

- De forma intuitiva se entiende la probabilidad como una medida de la confianza, certeza o seguridad en la ocurrencia de un suceso.

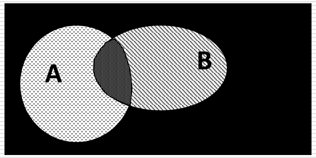
- A cada suceso A se le asigna el valor P(A), que se denomina probabilidad de ocurrencia del suceso A.

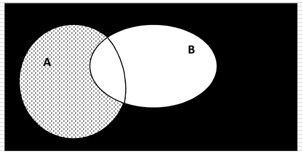
Propiedades probabilidad

1. $0 \leq P(A) \leq 1$ ($P(\varnothing) = 0$ y $P(\Omega)=1$).
2. Probabilidad del suceso contrario:
$$P(\overline{A}) = 1 - P(A).$$
3. $A \subseteq B \quad \Rightarrow \quad P(A) \leq P(B)$.
4. Probabilidad de la unión de sucesos:
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$
5. $P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B)$.

Propiedades gráficamente

- Para recordar las propiedades de la probabilidad de un forma gráfica se podría asociar **área a probabilidad**, así las propiedades 4 y 5 anteriores serían muy intuitivas:





Escuelas de Probabilidad

Históricamente la visión de la probabilidad (y por tanto las formas de asignar probabilidades) no ha sido única; las principales "escuelas" son:

- **Frecuentista.**
- **Clásica o de Laplace.**
- **Subjetiva o Bayesiana.**

Interpretación frecuentista

- La probabilidad de un suceso A es la proporción de veces que ocurre el suceso A (frecuencia relativa) cuando se ha repetido el experimento "muchas veces".
- **Limitación:** el nº de experiencias tiene que poder repetirse "muchas veces".
- **La probabilidad es el modelo teórico de la frecuencia relativa**.

Ejemplo frecuentista

- Si B es el suceso "salir múltiplo de 3" al lanzar un dado, entonces P(B)=1/3. Esto se interpreta como que **"si lanzamos el dado un número suficientemente grande de veces, un 33.33% de las ocasiones obtendremos como resultado un múltiplo de 3".**

Regla de Laplace

- **Paso 1.-** Definir el espacio muestral, comprobar que es finito y que los resultados son equiprobables.
- **Paso 2.-** Definir el suceso que estamos estudiando.
- **Paso 3.-** Calcular:

$$P(A) = \frac{\text{n° de casos favorables a A}}{\text{n° de casos posibles}}.$$

Limitaciones Laplace

Para poder aplicar la regla de Laplace con garantías suficientes se tienen las siguientes limitaciones:

- El **espacio muestral tiene que ser finito**.
- Todos los casos deben ser igualmente verosímiles o "equiprobables".

Ejemplo con Laplace

- **Paso 1.-** En el ejemplo del dado: Ω= {1, 2,…, 6} es finito y, con un dado no trucado cualquier resultado es igual de posible que los demás.
- **Paso 2.-** Suceso A = "salir impar" = {1, 3, 5}, suceso B = "ser múltiplo de 3" = {3, 6}.
- **Paso 3.-** $$P(A)=\frac{\text{nº de casos favorables a A}}{\text{nº de casos posibles}}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}.$$
$$P(B)=\frac{\text{nº de casos favorables a B}}{\text{nº de casos posibles}}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}.$$

Escuela Bayesiana

- La visión "subjetiva" o Bayesiana de la probabilidad establece la probabilidad de un suceso A como el grado de creencia, confianza o seguridad en la ocurrencia del suceso A, asignada por un experto.
- **Limitación:** Expertos distintos pueden asignar distintos valores.

Probabilidad condicionada

- **Si se sabe que se ha producido un determinado suceso B,** ¿se modifican las probabilidades de otros sucesos? En general, sí.
- Se llama probabilidad de un suceso A condicionada por otro suceso B, a la probabilidad de que ocurra A si sabemos que ocurrió el suceso B, se denota por:
$$P\left(A/B\right).$$

Definición de condicionada

- La probabilidad de A condicionada a B se calcula como:
$$P\left(A/B\right)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}.$$
- Gráficamente, asociando áreas a probabilidades:
$$P\left(A/B\right)=\frac{\text{Área favorable}}{\text{Área posible}}=\frac{\text{Área de }(A\cap B)}{\text{Área de }(B)}=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}.$$

Ejemplo condicionada

- Utilizando la definición de probabilidad condicionada:
  - Si A = "salir par"={2, 4, 6} y B= {1, 2, 3}, entonces:
  $$P\left(A/B\right)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{P(\{2\})}{P(\{1,2,3\})}=\frac{1/6}{3/6}=\frac{1}{3}.$$
  - **Si jugamos un número grande de veces, sabiendo que salió un número menor que 4, el 33.33% de las veces saldrá un nº par.**

Regla del producto

- Despejando en la definición de probabilidad condicionada se tiene que:
$$P\left(A/B\right)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}\Rightarrow P(A\cap B)=P(B)\times P(A/B).$$
- O también:
$$P\left(B/A\right)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}\Rightarrow P(A\cap B)=P(A)\times P(B/A).$$
- Es decir, $P(A\cap B)=P(A)\times P\left(B/A\right)=P(B)\times P\left(A/B\right)$, que se llama **regla del producto.**

Probabilidad compuesta

- Dado un conjunto de sucesos cualesquiera $\{A_i\}_{i=1}^{n}$ se verifica:
$$P(A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_n)=$$
$$P(A_1)\times P\left(A_2/A_1\right)\times\ldots\times P\left(A_n/A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_{n-1}\right),$$
expresión que generaliza la regla del producto a n sucesos cualesquiera.

Propiedades condicionada

- Todas las **propiedades** vistas para la probabilidad en general también se verifican para las **probabilidades condicionadas**.
- Por ejemplo,
$$P\left(A\cup C/B\right)=P\left(A/B\right)+P\left(C/B\right)-P\left(A\cap C/B\right).$$

Sucesos independientes

- A veces el condicionamiento a un suceso B **no** supone modificación en la probabilidad de A:

$$P\left(A/B\right)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=P(A),\ \text{con } P(B)>0,$$

se dice entonces que **A es B independiente de B** (probabilísticamente).

- Si A es independiente de B, el suceso B también es independiente de A, por lo que se habla de **sucesos A y B independientes entre sí.**

Caracterización de independencia

- Dos sucesos son independientes si se verifica alguna de las condiciones equivalentes:
  - $P\left(A/B\right)=P(A),\quad \text{con}\quad P(B)>0.$
  - $P\left(B/A\right)=P(B),\quad \text{con}\quad P(A)>0.$
  - Por la regla del producto:

$$P(A\cap B)=P(A)\times P(B).$$

Independencia e incompatibilidad

- Entre las propiedades de los pares de sucesos independientes destacaremos que si A y B son independientes también lo son:

$$A \text{ y } \overline{B},\ \overline{A} \text{ y } B,\ \overline{A} \text{ y } \overline{B}.$$

- **¡OJO! Es importante no confundir los conceptos de sucesos <u>incompatibles</u>**

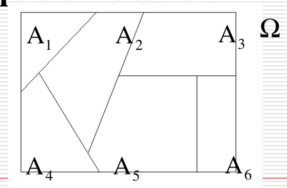
$$A\cap B=\varnothing$$

y sucesos <u>independientes</u>; son cosas muy distintas.

Sistema completo

- Se denomina **<u>sistema completo o partición</u>** de sucesos a una colección de sucesos $\{A_i\}_{i=1}^{n}$ que verifica:
  - $A_i\cap A_j=\varnothing,\quad \forall\, i\neq j,$
  - $A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_n=\Omega,$

esto es, que son **incompatibles** dos a dos y tales que su **unión es el espacio muestral.**



Probabilidad total

- Dado un sistema completo de sucesos $\{A_i\}_{i=1}^n$, para cualquier suceso B se verifica:

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)\, P\left(B/A_i \right),$$

expresión conocida como **<u>fórmula de la probabilidad total</u>** del suceso B.

Teorema de Bayes

- Dado un sistema completo de sucesos $\{A_i\}_{i=1}^n$ se verifica para cualquier suceso B que:

$$P\left(A_k/B \right) = \frac{P(A_k)\, P\left(B/A_k \right)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)\, P\left(B/A_i \right)},$$

expresión conocida como **<u>fórmula de Bayes</u>**.