Sieci Neuronowe, projekt II - Sieci Hopfielda

Filip Mieszkowski, Stanisław Kurzątkowski

November 2024

1 Wstęp

Celem tego projektu jest zaimplementowanie sieci Hopfielda, której zadaniem jest rozpoznawanie wzorców. Sieć Hopfielda jest jedną z najstarszych sieci neuronowych, została zaproponowana przez Johna Hopfielda w 1982 roku.

1.1 Budowa sieci

Sieć składa się z n neuronów, każdy z tych neuronów jest połączony z każdym innym neuonem wagą. Stan każdego neuronu może przyjmować tylko dwie wartości, -1 lub 1. Wagę pomiędzy neuronami i i j będziemy oznaczali jako w_{ij}. Wagi te są symetryczne, co oznacza, że $w_{ij} = w_{ji}$. Dodatkowo, waga w_{ii} jest równa 0, co oznacza, że neuron nie jest połączony z samym sobą. Wagi sieci będziemy przechowywać w macierzy wag W, gdzie $W = [w_{ij}]$. Z wymienionych powyżej własności wynika, że macierz wag jest symetryczna oraz posiada na przekątnej same zera.

1.2 Cel sieci

Sieć Hopfielda jest siecią asocjacyjną, co oznacza, że jest w stanie zapamiętać wiele wzorców i potrafi je rozpoznać, nawet jeśli są one zaszumione. Wzorce te są przechowywane w macierzy wag, która jest obliczana na podstawie wzorców uczących.

2 Działanie sieci

Działanie sieci Hopfielda można podzielić na dwa etapy: uczenie oraz rozpoznawanie wzorców.

2.1 Rozpoznawanie wzorców

Rozpoznawanie wzorców polega na prezentowaniu sieci wzorca, a następnie obserwacji zmian w stanie neuronów. Załóżmy, że wagi pomiędzy neuronami są ustalone. Pokazujemy sieci wzorzec, który chcemy rozpoznać, tzn ustalamy

wartości neuronów na wartości z wzorca. Następnie, obserwujemy zmiany w stanie neuronów, aż do momentu, gdy sieć osiągnie stan stabilny. Dzieje się to w następujący sposób: wybieramy i-ty neuron, a następnie obliczamy sumę ważoną wejść do tego neuronu, czyli:

$$h_i = \sum_{j=1}^{n} w_{ij} x_j$$

gdzie x_j to stan j-tego neuronu (ponownie przyjmujemy $w_{ii} = 0$). W zależności od wartości h_i neuron przyjmuje wartość 1 lub -1, tzn jeżeli $h_i > b_i$ to $x_i = 1$, w przeciwnym wypadku $x_i = -1$, gdzie b_i to próg aktywacji neuronu i. Proces ten powtarzamy dla wszystkich neuronów, aż do momentu, gdy stan sieci się ustabilizuje. Możemy tutaj skorzystać z dwóch rozwiązań: asynchronicznego oraz synchronicznego. W rozwiązaniu asynchronicznym przeprowadzamy opsiany wyżej proces dla każdego neuronu osobno, natomiast w rozwiązaniu synchronicznym dla wszystkich neuronów naraz.

2.2 Uczenie Hebbowskie

Uczenie sieci Hopfielda polega na obliczeniu macierzy wag W oraz progów aktywacji $B = [b_i]$ na podstawie wzorców uczących. Załóżmy, że mamy p wzorców uczących, które będziemy oznaczać jako $X = [x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(p)}]$. Wówczas wagi ustalamy zgodnie ze wzorem:

$$w_{ij} = \frac{1}{p} \sum_{\mu=1}^{p} x_i^{(\mu)} x_j^{(\mu)}$$

zaś progi aktywacji ustalamy zgodnie ze wzorem:

$$b_i = \frac{1}{p} \sum_{\mu=1}^{p} x_i^{(\mu)}$$

gdzie $x_i^{(\mu)}$ oznacza i-ty neuron mu-tego wzorca uczącego. Warto zauważyć, że wagi są symetryczne, a progi aktywacji są ustalane na podstawie średniej wartości neuronów w danym wzorcu.

2.3 Dlaczego uczenie Hebbowskie działa?

Zdefiniujmy funckję energii sieci Hopfielda jako:

$$E = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} w_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^{n} b_i x_i$$

gdzie x_i to stan i-tego neuronu. Możemy zauważyć, że funkcja ta jest zdefiniowana w taki sposób, że dla każdego wzorca uczącego $x^{(\mu)}$ jest minimum lokalne.

Dodatkowo zauważmy, że pochodna funkcji energii po x_i jest równa:

$$\frac{\partial E}{\partial x_i} = -\sum_{j=1}^{n} w_{ij} x_j + b_i$$

Zatem zmieniając wartość neuronu i-tego w kierunku $-\frac{\partial E}{\partial x_i}$ powinna zmniejszać się energia sieci. Nie zawsze musi się tak dziać, bowiem zmiana nawet w dobrym kierunku nie następuje w sposób ciągły, a od razu o dwie jednostki, co może okazać się "zbyt dużym krokiem". Oczekujemy jednak, że po wielu iteracjach energia sieci będzie maleć, co w końcu doprowadzi do osiągnięcia stanu stabilnego, który jest minimum lokalnym funkcji energii.

2.4 Fałszywe minima lokalne: uczenie Oja

Załóżmy, że sieć Hopfielda dotrze po pewnym czasie do minimum funkcji energii. Niestety nie mamy żadnej pewności, że jest to minimum związane z jednym z wzorców uczących. Jeżeli wzorców uczących było więcej niż 1, to oprócz minimów związanych ze wzorcami uczącymi mogą istnieć również inne minima lokalne, które nie są związane z żadnym z wzorców uczących. W takim przypadku sieć może nie rozpoznać żadnego z wzorców uczących, a zamiast tego zbiegnie do jednego z fałszywych minimów lokalnych. Aby temu zapobiec, można skorzystać z uczenia Oja, które polega na dodaniu do reguły uczenia Hebbowskiego czynnika korygującego. Po zastosowaniu uczenia Hebbowskiego, wagi sieci są modyfikowane zgodnie ze wzorem:

$$\Delta w_{ij} = \frac{\eta}{n} \sum_{s=1}^{n} y_i^{(s)} (x_j^{(s)} - y_i^{(s)} w_{ij})$$

gdzie $y_i = \sum_{j=1}^{n} w_{ij} x_j$. Oczywiście nie aktualizujemy wagi w_{ii}, gdyż chcemy, żeby została ona równa 0. Taka korekta jest dokonywana kilka razy, dla pewnego ustalonego η. W praktyce pomaga to uniknąć fałszywych minimów lokalnych, co zwiększa skuteczność sieci.

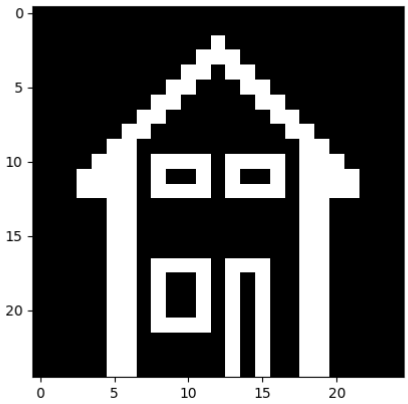
3 Eksperymenty

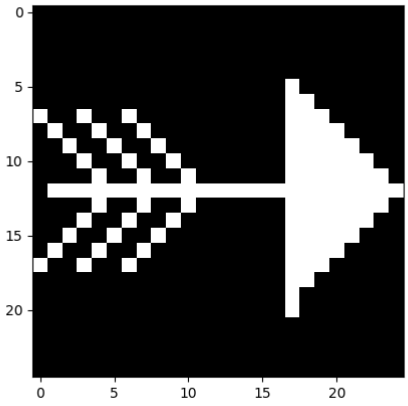
W ramach projektu przeprowadziliśmy kilka eksperymentów, które miały na celu zbadanie skuteczności sieci Hopfielda. Kod źródłowy eksperymentów 1 oraz 2 znajduje się w pliku *eksperyment12.ipynb*. W zależności od dobranego ziarna losowości, wyniki mogą się nieznacznie różnić.

3.1 Eksperyment 1: rozpoznawanie wzorców zaszumionych

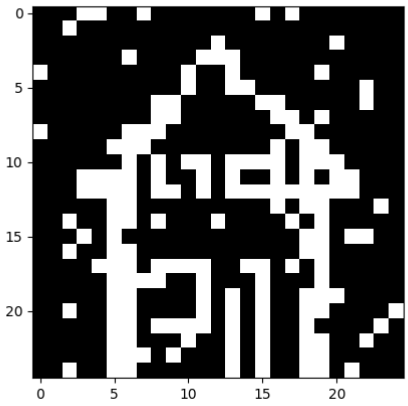
W pierwszym eksperymencie sprawdziliśmy, jak uczenie Oja wpływa na skuteczność sieci. W tym celu stworzyliśmy sieć Hopfielda, która miała za zadanie rozpoznawać wzorce zaszumione. Sieć o 625 neuronach została wyszkolona na 6 wzorcach, a następnie testowana na wzorcach zaszumionych. Zaszumienie polegało na zmianie 10% losowo wybranych pikseli na przeciwną wartość. Zbiorem

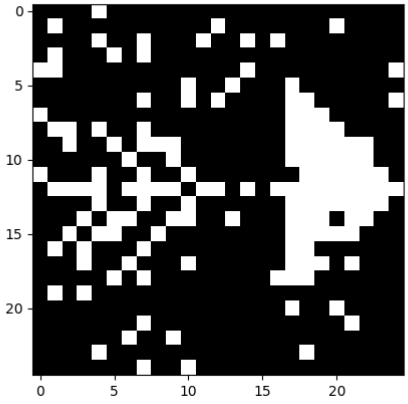
uczącym był zbiór $large - 25x25$. Zwykłe uczenie Hebbowskie nie pozwalało na rozpoznanie wsztystkich wzorców zaszumionych, dwa zbiegły do minimów lokalnych, które nie były związane z żadnym z wzorców uczących. Poniżej prezentujemy te dwa źle rozpoznane wzorce uczące:



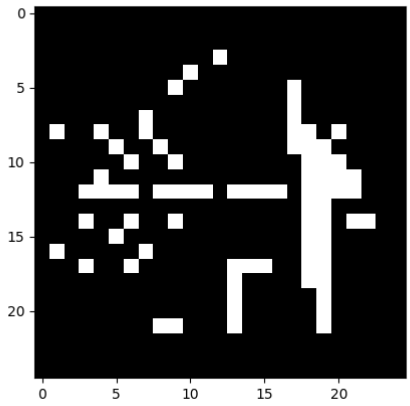


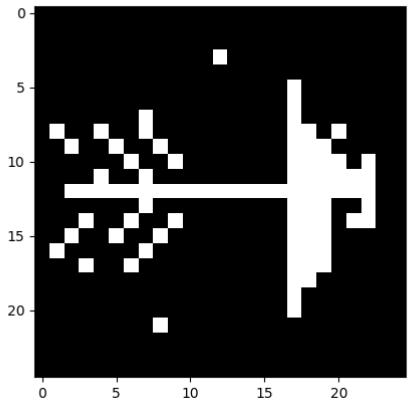
Po zaszumieniu wzorce te wyglądały następująco:





Po zaprezentowaniu sieci zaszumionych wzorców, sieć nie była w stanie ich rozpoznać, zbiegła do następujących minimów lokalnych:





Szczególnie przy pierwszym z tych minimów lokalnych, można zauważyć, że jest on swgo rodzaju "połączeniem" obydwu wzorców uczących.

3.2 Eksperyment 2: rozpoznawanie wzorców zaszumionych z uczeniem Oja

W tym eksperymnecie będziemy rozpoznawali dokładnie te same wzorce co w poprzednim eksperymencie, ale z użyciem uczenia Oja. Ustalmy liczbę iteracji uczenia Oja na 30. Zaś $\eta = 0.00001$. Jest to bardzo mała wartość, jednakże biorąc większą wartość η proces uczenia szybko rozbiegał do nieskończoności. Po zastosowaniu uczenia Oja, sieć była w stanie rozpoznać wszystkie wzorce zaszumione. Co również interesujące, po zastosowaniu uczenia Oja sieć zbiegała do do minimów lokalnych już w pierwszej iteracji (czyli po jednokrotnym zaktualizowaniu każdego neuronu), zaś w przypadku zwykłego uczenia Hebbowskiego

wzorzec, który zbiegł do niepoprawnego minimum lokalnego zbiegł do niego po trzech iteracjach.