

# Лабораторная работа №4. Проектирование и применение цифровых КИХ-фильтров

## 1. Теоретические сведения

### 1.1 Основные термины и определения

#### 1.2 Классификация цифровых фильтров

#### 1.3 Методы расчета цифровых фильтров

#### 1.4 Оконный метод

#### 1.5 Частотно-избирательные фильтры

#### 1.6 Дифференцирующий фильтр

#### 1.7 Фильтр Гильберта

## 2. Основное задание

### 2.1 Синтез частотно-избирательных КИХ-фильтров оконным методом

### 2.2 Применение фильтра к сигналу

## 3. Дополнительные задания

## 4. Контрольные вопросы

## 1. Теоретические сведения

### 1.1 Основные термины и определения

Цифровые фильтры являются ключевыми компонентами в области цифровой обработки сигналов и используются для выполнения различных задач, таких как выделение сигналов определенной полосы частот, подавление шума и многого другого. Принципы работы цифровых фильтров основаны на математической обработке входных цифровых данных (сигналов) для получения желаемого выходного сигнала.

**Цифровые фильтры** являются *дискретными системами* и реализуются в программном или аппаратном обеспечении. Программная реализация может быть выполнена на процессорах общего назначения, цифровых сигнальных процессорах (DSP, Digital Signal Processors) или даже на FPGA (Field-Programmable Gate Arrays). Аппаратная реализация обеспечивает более высокую производительность за счет специализированного оборудования.

**Дискретная система** - это устройство или программа преобразования одного дискретного сигнала в другой по некоторому закону. У системы есть *вход* и *выход* (рисунок 1). На вход поступает одна последовательность отсчетов (например,  $x(k)$ ), в результате обработки сигнала системой на ее выходе формируется другая последовательность отсчетов (например,  $y(k)$ ).

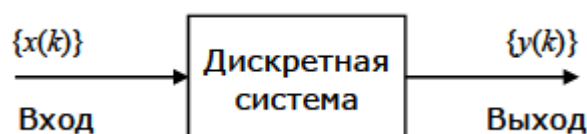


Рисунок 1 - Дискретная система

Принцип применения цифровых фильтров ко входному сигналу описывается **разностным уравнением**:

$$y(k) = b_0x(k) + b_1x(k-1) + \dots + b_mx(k-m) - a_1y(k-1) - a_2y(k-2) - \dots - a_ny(k-n),$$

где  $b_i$  и  $a_j$  - коэффициенты дискретного фильтра. Формула (1) также называется алгоритмом дискретной фильтрации.

**Порядок фильтра** - это максимальная используемая при расчетах задержка, то есть  $\max(m, n)$ .

На рисунке 2 приведен пример цифрового фильтра "скользящего" среднего. Для него коэффициенты  $b_0, \dots, b_3$  равны  $1/4$ . Остальные коэффициенты равны нулю. Порядок фильтра равен 3.

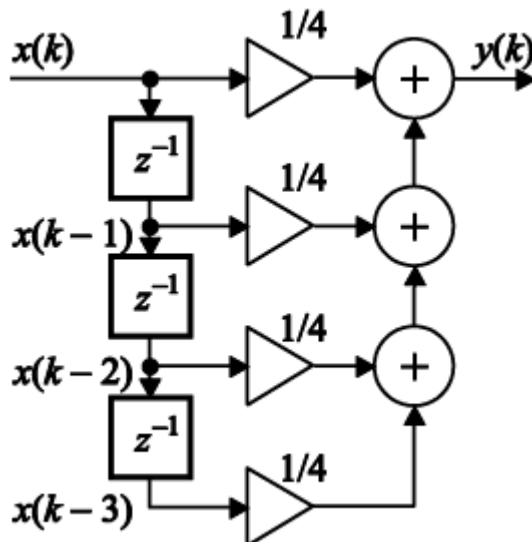


Рисунок 2 - Фильтр скользящего среднего

**Импульсная характеристика фильтра** — это ответ фильтра на входной сигнал, представляющий собой идеальный импульс *дельта-функции*. Дельта-функция (или единичный импульс) характеризуется значением ноль во всех точках, кроме начала координат, где её значение бесконечно, при этом интеграл от дельта-функции по всей области определения равен единице. В контексте дискретных сигналов дельта-функция представляется как последовательность, где первый элемент равен единице, а все последующие — нулю. Ниже приведен пример, в котором в качестве входного сигнала используется дельта-функция. Таким образом, продемонстрировано, что коэффициенты фильтра соответствуют его импульсной характеристике.

```
In [1]: import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.signal import lfilter, firwin

# Параметры фильтра
numtaps = 29 # Количество коэффициентов (тапов)
cutoff = 0.2 # Частота среза (доля от частоты Найквиста)

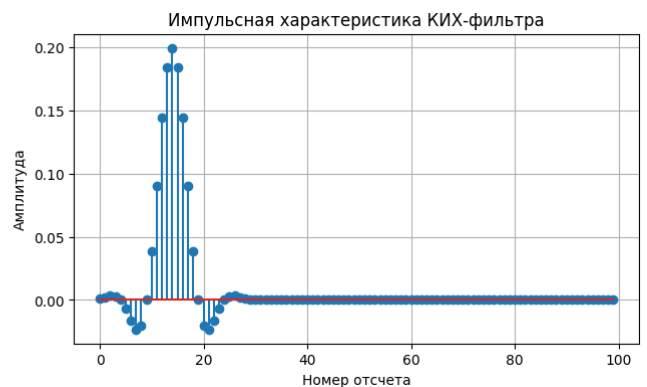
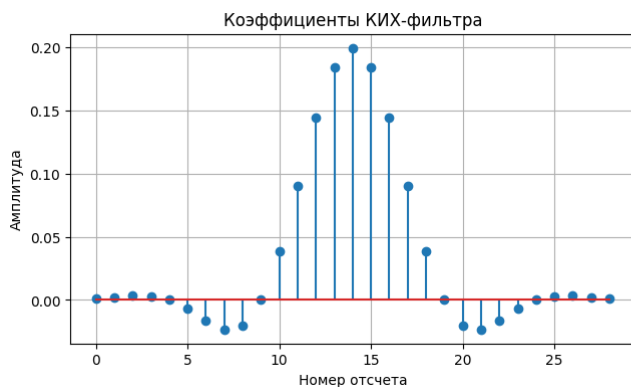
# Создание коэффициентов КИХ-фильтра
coeffs = firwin(numtaps, cutoff)

# Создание дельта-функции (единичного импульса)
impulse = np.zeros(100) # Длина вектора больше, чтобы увидеть всю реакцию
impulse[0] = 1 # Первый элемент равен 1, остальные - нули

# Применение фильтра к дельта-функции
response = lfilter(coeffs, 1.0, impulse)
```

```
# Визуализация
plt.figure(figsize=(16, 4))
plt.subplot(1,2,1)
plt.stem(coeffs)
plt.title('Коэффициенты КИХ-фильтра')
plt.xlabel('Номер отсчета')
plt.ylabel('Амплитуда')
plt.grid(True)

plt.subplot(1,2,2)
plt.stem(response)
plt.title('Импульсная характеристика КИХ-фильтра')
plt.xlabel('Номер отсчета')
plt.ylabel('Амплитуда')
plt.grid(True)
plt.show()
```



Ответ фильтра на такой сигнал показывает, как фильтр реагирует на внезапное кратковременное изменение входного сигнала и предоставляет полную информацию о характеристиках фильтра. Ведь любой входной сигнал можно представить как сумму сдвинутых и масштабированных импульсов, а выходной сигнал фильтра в этом случае будет являться суммой соответствующих сдвинутых и масштабированных импульсных характеристик. Таким образом, зная импульсную характеристику цифрового фильтра, можно точно предсказать его поведение для любого входного сигнала.

## 1.2 Классификация цифровых фильтров

Цифровые фильтры классифицируются на основе своей импульсной характеристики на два основных типа: фильтры с конечной импульсной характеристикой (КИХ, FIR - Finite Impulse Response) и фильтры с бесконечной импульсной характеристикой (БИХ, IIR - Infinite Impulse Response).

**КИХ-фильтры** характеризуются конечной длительностью импульсной характеристики. Это означает, что ответ фильтра на единичный импульс ограничен определенным числом ненулевых значений.

Разностное уравнение для КИХ-фильтра имеет вид:

$$y(k) = b_0x(k) + b_1x(k-1) + \dots + b_mx(k-m) \quad (2)$$

То есть значение любого отсчета выходного сигнала определяется взвешенной суммой предыдущих  $m$  отсчетов, где коэффициенты  $b_i$  - это веса. Простейшим примером КИХ-фильтра является фильтр скользящего среднего (рисунок 2).

Формула (2) описывает *свертку* входного сигнала с импульсной характеристикой фильтра. Понятие *свертки* уже вводилось в лабораторной работе №3. Формулу (2) можно описать, используя формулу свертки:

$$y(k) = b * x = \sum_{i=0}^m b(i) \cdot x(k - i). \quad (3)$$

Важными свойствами КИХ-фильтров являются:

- **линейность**: линейная фазовая характеристика, что делает их идеальными для приложений, где важно сохранение формы сигнала;
- **устойчивость**: всегда устойчивы, поскольку их импульсная характеристика ограничена во времени;
- **симметрия**: могут быть симметричными или антисимметричными, что позволяет точно контролировать амплитудно-частотную характеристики.

КИХ-фильтры могут быть реализованы с использованием трех типов элементов:

- умножители на заданный коэффициент;
- сумматоры;
- блоки задержки.

Реализация КИХ-фильтров обычно требует больше вычислительных ресурсов по сравнению с БИХ-фильтрами из-за необходимости обработки большего числа коэффициентов. Поэтому важным критерием в проектировании цифровых устройств является размер импульсной характеристики фильтра (или порядок фильтра). От него напрямую зависит сложность системы и плотность ее вычислительных операций.

**БИХ-фильтры** характеризуются тем, что их импульсная характеристика теоретически продолжается бесконечно. Эти фильтры могут быть получены путем цифровой аппроксимации аналоговых фильтров. В отличие от КИХ-фильтров, БИХ-фильтры используют один или несколько своих выходов в качестве входа, то есть имеют обратную связь. Математически это означает то, что хотя бы один из коэффициентов  $a_j$  в формуле (1) ненулевой.

Основные особенности БИХ-фильтров:

- могут иметь как линейную, так и нелинейную фазовую характеристику;
- потенциально могут быть неустойчивыми, что требует тщательного проектирования и анализа;
- обеспечивают более крутые переходы между полосами пропускания и заграждения по сравнению с КИХ-фильтрами при использовании меньшего числа коэффициентов, что делает их более эффективными с точки зрения вычислительных ресурсов.

В качестве примеров БИХ-фильтров можно выделить *фильтры Баттерворта*, *фильтры Чебышева*, *фильтры Калмана*, *фильтры Бесселя*, *эллиптические фильтры*.

Простейшим примером БИХ-фильтра является аккумулятор (рисунок 3).

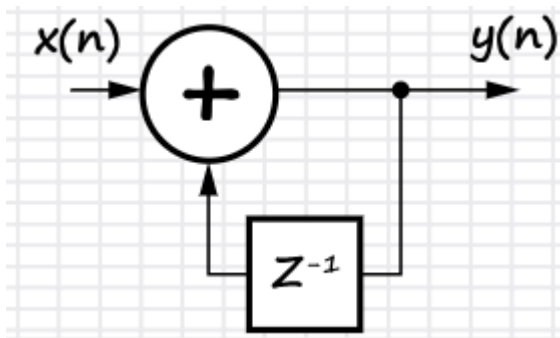


Рисунок 3 - Схема аккумулятора (БИХ-фильтр первого порядка)

### 1.3 Методы расчета цифровых фильтров

Под проектированием (или **синтезом**) цифрового фильтра понимается нахождение таких коэффициентов  $b_i$  и  $a_j$  разностного уравнения, при которых характеристики фильтра удовлетворяют заданным требованиям. Если речь идет о цифровой обработке сигналов, то данные требования связаны с частотными характеристиками фильтра: *амплитудно-частотная характеристика (АЧХ)* и *фазо-частотная характеристика (ФЧХ)*. Например, мы можем хотеть, чтобы фильтр одни частоты пропускал, а другие задерживал. Тогда требования задаются в виде желаемой АЧХ.

Например, для проектирования *фильтра низких частот (ФНЧ)* необходимо задать требования к следующим его параметрам:

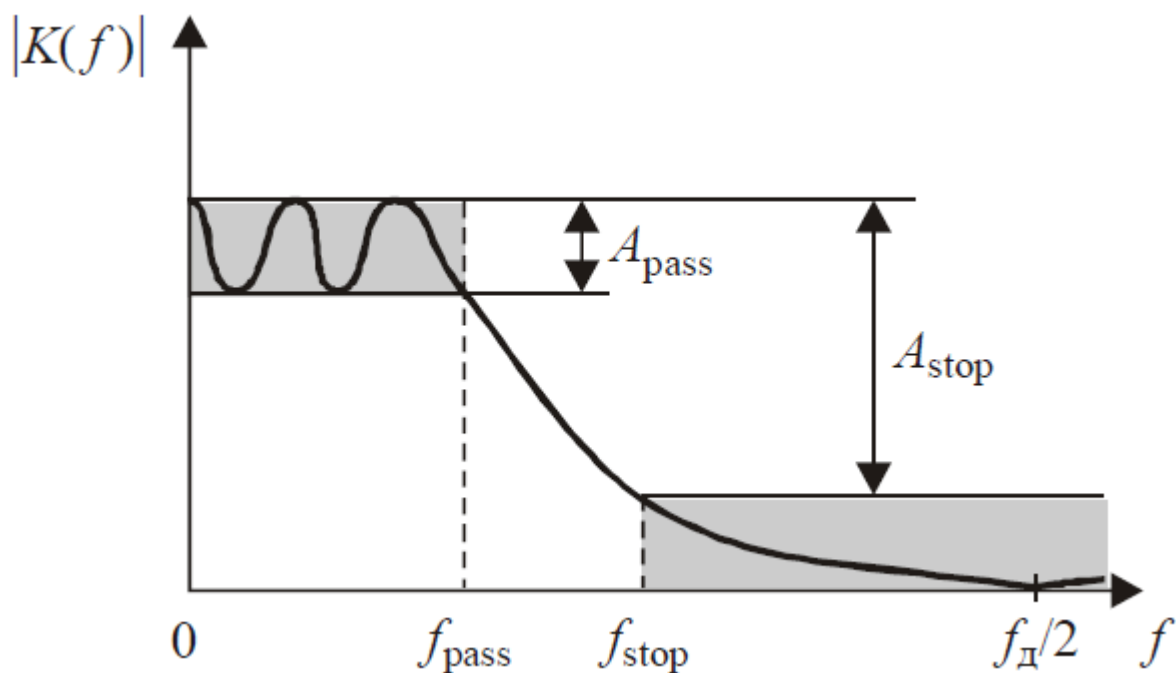


Рисунок 4 - Параметры, требуемые для проектирования ФНЧ

- $f_d$  - частота дискретизации;
- $f_{pass}$  - частота среза (граница полосы пропускания);
- $f_{stop}$  - частота запираания (граница полосы задерживания);
- $A_{pass}$  - допустимая неравномерность АЧХ в полосе пропускания (как правило задается в децибелах);
- $A_{stop}$  - требуемое подавление сигнала в полосе задерживания (как правило задается в децибелах).

Серые области на рисунке 4 демонстрируют допуски, в которые должна укладываться АЧХ фильтра в полосах пропускания и задерживания. Номинальное значение коэффициента передачи фильтра в полосе пропускания, как правило, равно единице (0 дБ).

На рисунке 5 показана схема классификации методов синтеза цифровых фильтров.

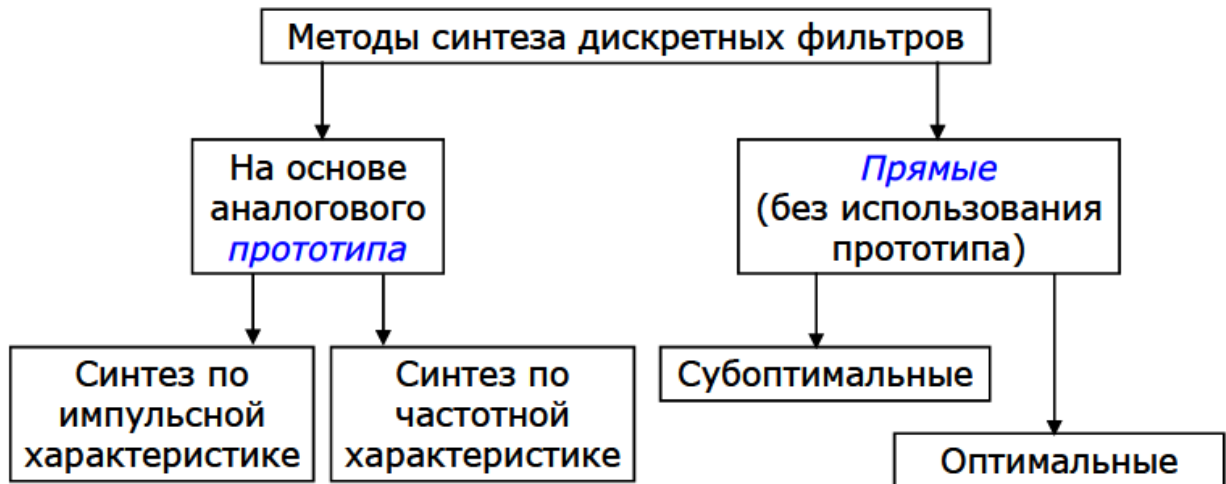


Рисунок 5 - Классификация методов синтеза цифровых фильтров

Главное разделение на две категории определяется тем, используется ли при расчете *аналоговый прототип*. Это физически реализуемая аналоговая цепь, на основе которой производится расчет дискретного фильтра, характеристики которого как-то связаны с характеристиками прототипа.

Данная лабораторная работа связана с использованием *прямых* методов синтеза цифровых фильтров. Эти методы можно разделить на несколько категорий:

- *оптимальные методы*, когда для достижения заданных характеристик фильтра используется математическая задача оптимизации;
- *субоптимальные методы*, не дающие в точности оптимального решения, но позволяющие значительно упростить вычисления по сравнению с оптимальными методами.

## 1.4 Оконный метод

Этот метод синтеза цифровых фильтров является субоптимальным. Его главная ценность в том, что он дает простую процедуру, пригодную для синтеза любых КИХ-фильтров. Каких-либо ограничений по типам частотных характеристик здесь нет. Идея оконного метода заключается в том, что мы получаем бесконечную импульсную характеристику идеального фильтра, из которой выделяется фрагмент конечной длительности с помощью *весовой функции*, которая часто называется *окном*. Простое усечение отсчетов импульсной характеристики соответствует использованию *прямоугольного окна*. Примеры наиболее часто используемых оконных функций изображены на рисунке 6.

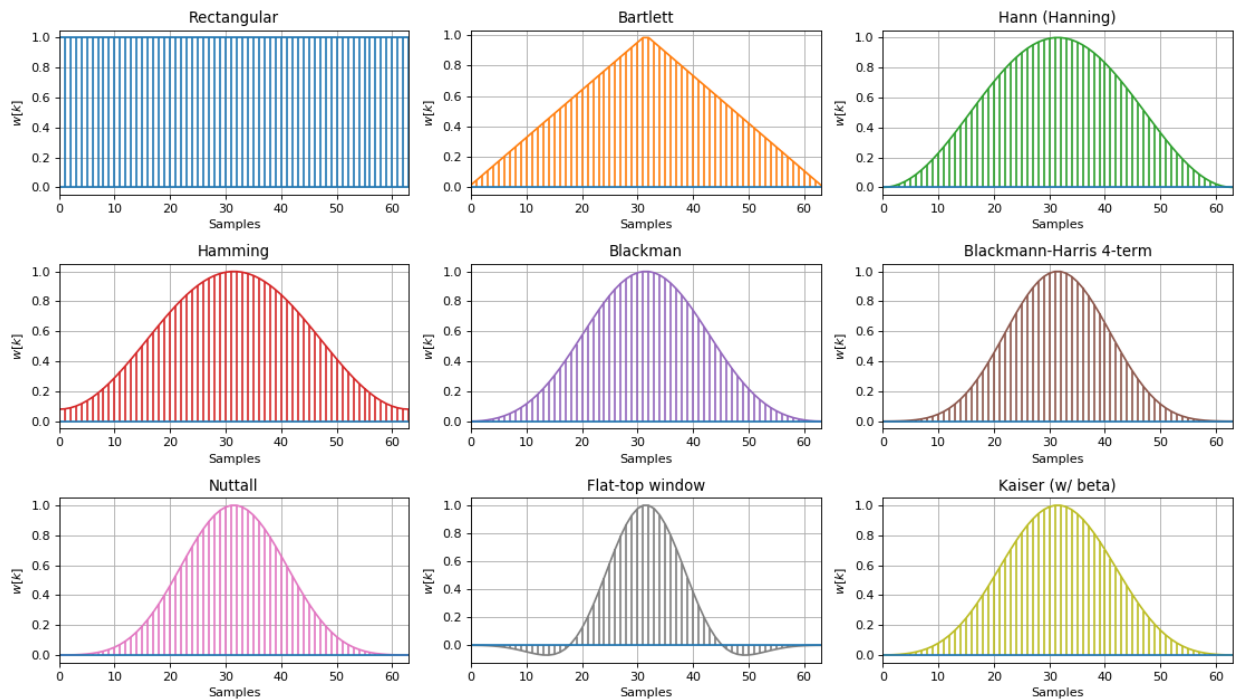


Рисунок 6 - Примеры оконных функций, используемых при синтезе цифровых фильтров оконным методом

```
In [2]: import numpy as np
from scipy.signal import firwin2, freqz, windows
import matplotlib.pyplot as plt

# Требования:
# спроектировать ФНЧ с частотой среза, равной 0.5*fн (fн - частота Найквиста), с частотой
# Порядка фильтра Nf = 20

# Параметры фильтра
Nf = 20 + 1 # Количество коэффициентов фильтра (порядок фильтра + 1)

# Для демонстрации эффекта использования оконных функций рассматриваются 2 примера:
# - с использованием прямоугольного окна
# - с использованием окна Хэмминга
window_types = ['boxcar', 'boxcar', 'hamming']
num_coefs = [1001, Nf, Nf]
titles = ['Идеальная АЧХ ФНЧ', 'АЧХ ФНЧ без "взвешивания"', 'АЧХ ФНЧ с окном Хэмминга']

for i in range(len(window_types)):

    # Создание FIR фильтра низких частот
    filter_coefs = firwin2(num_coefs[i], [0.0, 0.5, 1.0], [1.0, 1.0, 0.0], window=window_t

    # Анализ характеристик фильтра
    w, h = freqz(filter_coefs)

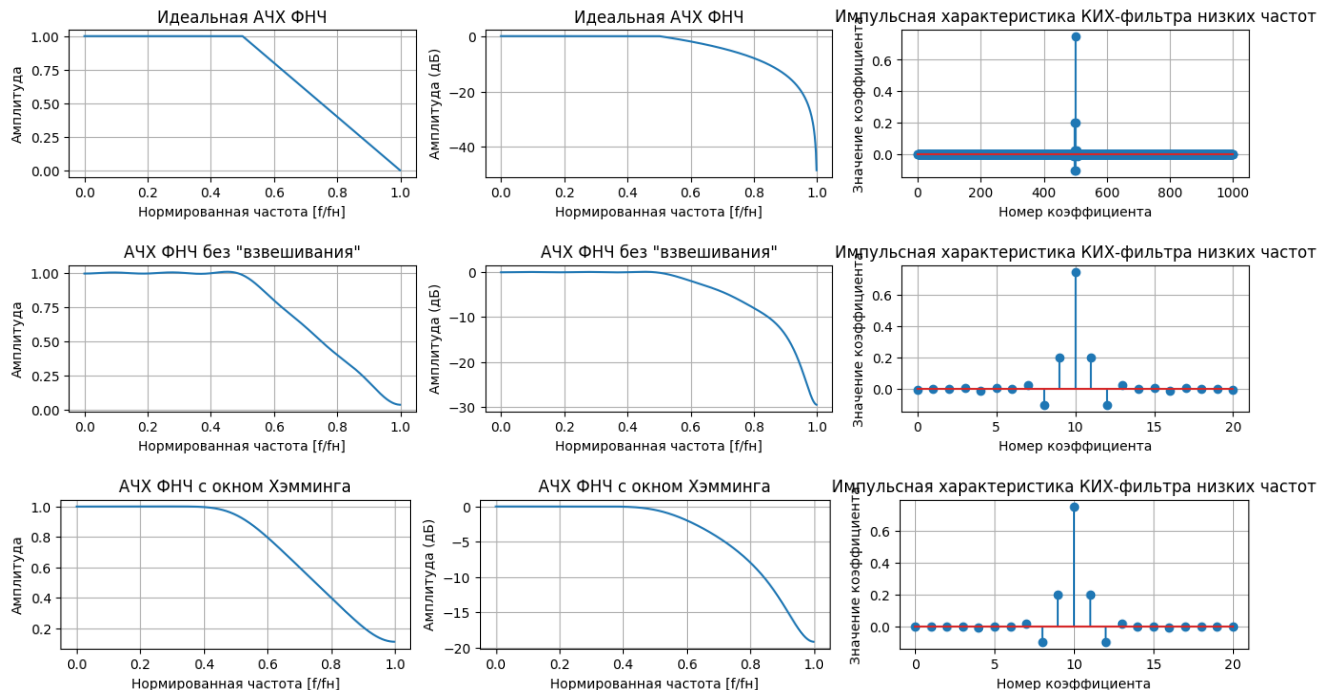
    # Визуализация амплитудной характеристики фильтра
    plt.figure(figsize=(16, 2))
    plt.subplot(1,3,1)
    plt.plot(w/np.pi, abs(h))
    plt.title(titles[i])
    plt.xlabel('Нормированная частота [f/fн]')
    plt.ylabel('Амплитуда')
    plt.grid(True)

    plt.subplot(1,3,2)
```

```
plt.plot(w/np.pi, 20 * np.log10(abs(h)))
plt.title(titles[i])
plt.xlabel('Нормированная частота [f/fн]')
plt.ylabel('Амплитуда (дБ)')
plt.grid(True)

# Визуализация импульсной характеристики фильтра
plt.subplot(1,3,3)
plt.stem(filter_coefs)
plt.title('Импульсная характеристика КИХ-фильтра низких частот')
plt.xlabel('Номер коэффициента')
plt.ylabel('Значение коэффициента')
plt.grid(True)

plt.show()
```



## 1.5 Частотно-избирательные фильтры

**Частотно-избирательные фильтры** — это фильтры, которые пропускают сигналы в определенном частотном диапазоне и подавляют сигналы вне этого диапазона.

Основные типы частотно-избирательных фильтров:

1. **Фильтры низких частот (ФНЧ):** пропускают сигналы с частотой ниже заданной граничной частоты и подавляют сигналы с частотой выше этой граничной частоты.
2. **Фильтры высоких частот (ФВЧ):** пропускают сигналы с частотой выше заданной граничной частоты и подавляют сигналы с частотой ниже этой граничной частоты.
3. **Полосовые фильтры:** пропускают сигналы в определенном диапазоне частот между двумя граничными частотами и подавляют сигналы за пределами этого диапазона.
4. **Режекторные (полосно-заграждающие) фильтры:** подавляют сигналы в определенном диапазоне частот между двумя граничными частотами и пропускают сигналы за пределами этого диапазона.



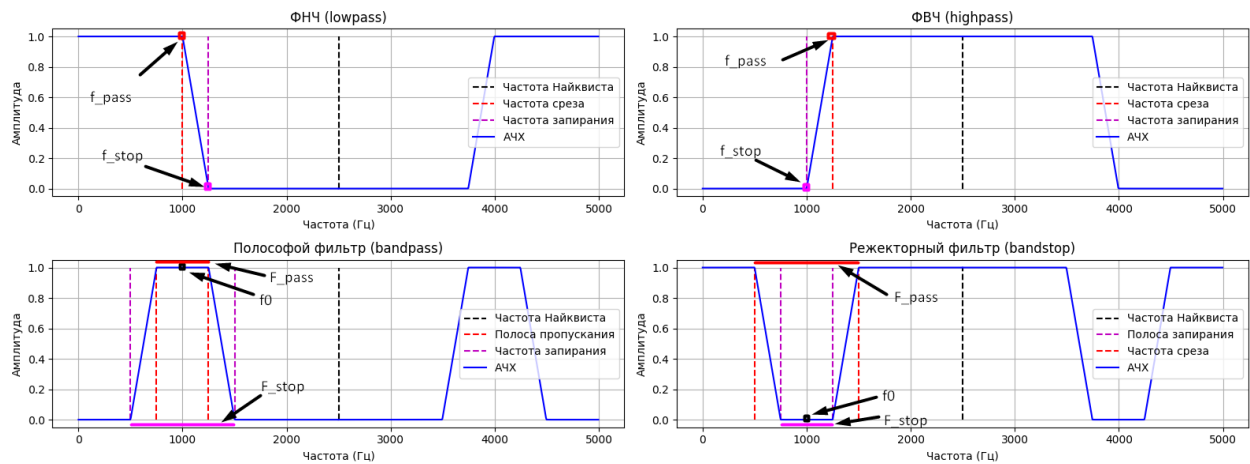


Рисунок 7 - Идеальные амплитудно-частотные характеристики частотно-избирательных фильтров

## 1.6 Дифференцирующий фильтр

**Дифференцирующий фильтр** используется для дифференцирования сигналов. Данная задача встречается:

- при построении линейных и угловых скоростей движения разнообразных объектов;
- при создании корректирующих устройств в системах автоматического управления, системах стабилизации положения космических аппаратов и т.д.

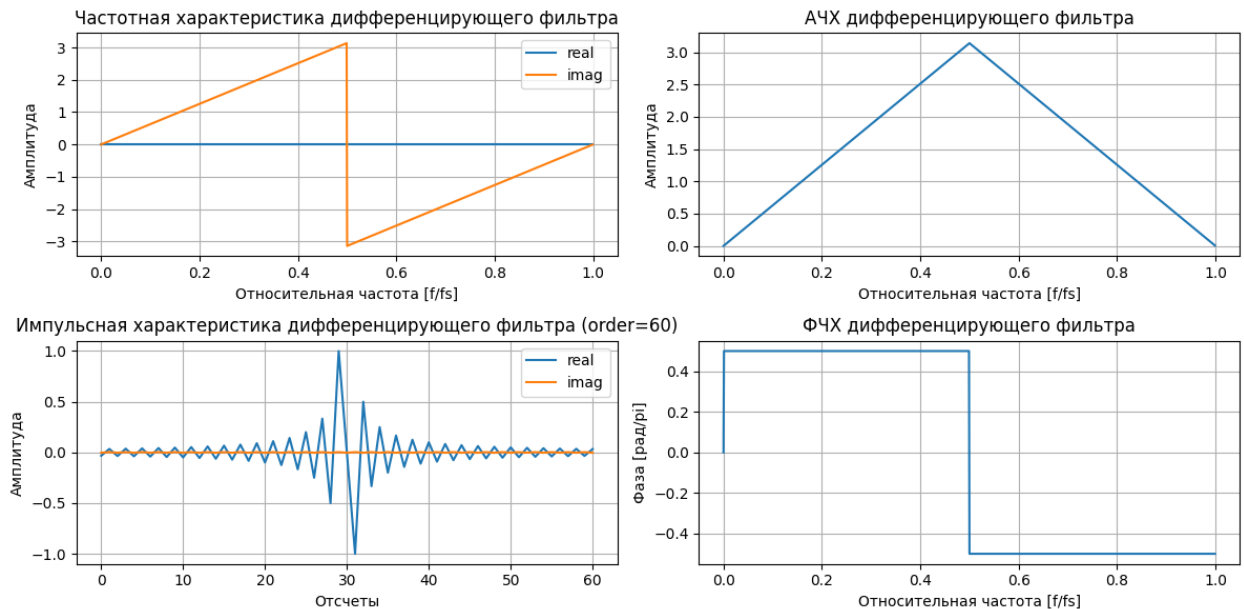
Основная идея дифференцирующего фильтра заключается в том, чтобы придать большее значение высокочастотным компонентам входного сигнала по сравнению с низкочастотными. В идеальном случае, дифференцирующий фильтр реализует операцию первой производной. Идеальный дифференцирующий фильтр обладает частотной передаточной функцией вида:

$$H(\omega) = j\omega = \omega e^{j\frac{\pi}{2}}, \quad (4)$$

где  $\omega = 2\pi f$  - круговая частота. При этом, АЧХ и ФЧХ дифференцирующего фильтра определяются соотношениями:

$$A(\omega) = |\omega|; \Phi(\omega) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2}, & \omega < 0 \\ 0, & \omega = 0 \\ \frac{\pi}{2}, & \omega > 0 \end{cases}. \quad (5)$$

На рисунке 8 изображены идеальные частотные характеристики и импульсная характеристика дифференцирующего фильтра.



!

Рисунок 8 - Идеальные частотные характеристики и импульсная характеристика дифференцирующего фильтра

## 1.7 Фильтр Гильберта

При модуляции и анализе сигналов огромное прикладное значение имеет *преобразование Гильберта*. Оно используется в задачах, когда необходимо выполнить так называемое *ортогональное дополнение* сигнала. Пусть имеется сигнал  $s(t)$ , **ортогональным дополнением сигнала**  $s(t)$  называется сигнал  $s_{\text{орт}}(t)$  такой, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \cdot s_{\text{орт}}(t) dt = 0. \quad (6)$$

Получение из этого соотношения сигнала  $s_{\text{орт}}(t)$  и есть суть преобразования Гильберта. Опустив сложный математический вывод, отметим, что преобразование Гильберта есть результат свертки сигнала  $s(t)$  с функцией  $h(t) = 1/(\pi t)$ .  $h(t)$  - ни что иное, как импульсная характеристика линейного фильтра, на выходе которого формируется ортогональное дополнение входного сигнала. Такой фильтр называется **фильтром Гильберта**. Частотная характеристика фильтра Гильберта описывается формулой:

$$H(\omega) = -j \cdot \text{sign}(\omega), \text{sign}(\omega) = \begin{cases} -1, \omega < 0 \\ 0, \omega = 0 \\ 1, \omega > 0 \end{cases}. \quad (7)$$

Импульсная характеристика фильтра Гильберта в дискретном виде описывается формулой:

$$h(k) = \frac{1}{\pi k} \cdot (1 - \cos(\pi k)). \quad (8)$$

Из формулы 8 видно, что при четном  $k$  импульсная характеристика фильтра Гильберта равна нулю, нечетном  $k$ :  $h(k) = 2/(\pi k)$ .

Практическим примером ортогонального дополнения сигнала является квадратурная демодуляция (рассматривалась в лабораторной работе №3). Входной сигнал может быть

дополнен квадратурной составляющей (мнимой частью комплексного сигнала), которая ортогональна его синфазной составляющей.

На рисунке 9 изображены идеальные частотные характеристики и импульсная характеристика фильтра Гильберта.

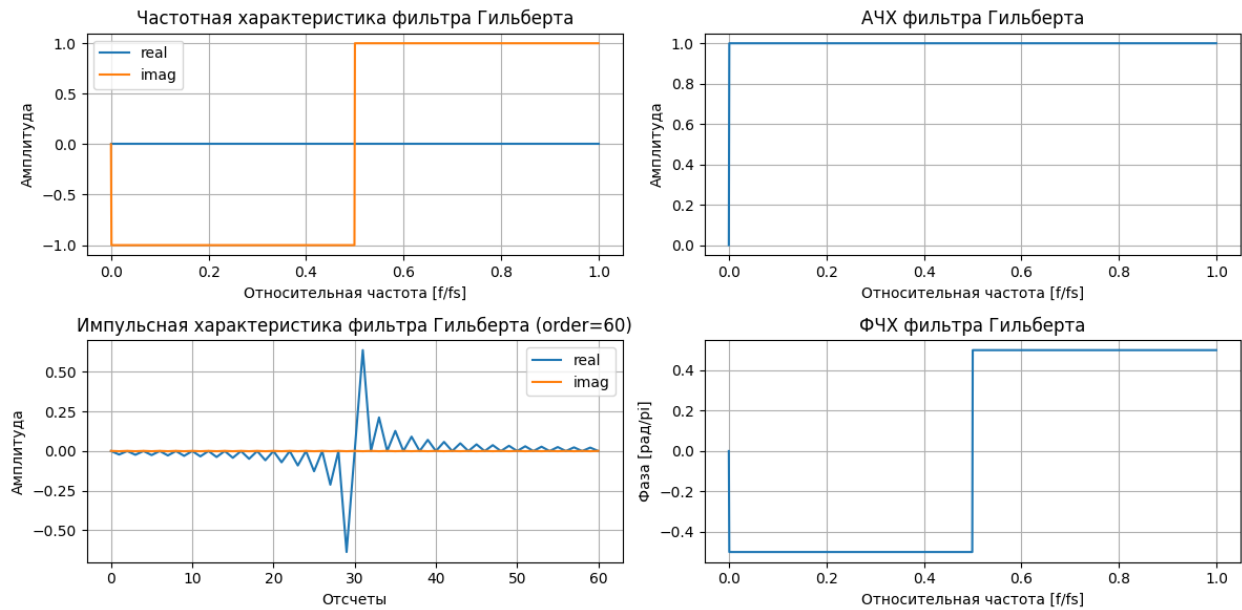


Рисунок 9 - Идеальные частотные характеристики и импульсная характеристика фильтра Гильберта

Для более подробного изучения теории о преобразовании Гильберта с выводом формул и пояснений можно обратиться к [источнику](#).

## 2. Основное задание

Таблица 1 - Варианты заданий

Номер по списку	Фильтр	$f_s$	$f_{pass}$	$f_{stop}$	$f_0$	$F_{pass}$	$F_{stop}$	Окно	Порядок фильтра	Доп. задание
1,9,17,25	ФНЧ	720 Гц	150 Гц	220 Гц	-	-	-	tukey	16	1
2,10,18,26	ФВЧ	720 Гц	220 Гц	150 Гц	-	-	-	hann	18	2
3,11,19,27	Полосовой	720 Гц	-	-	150 Гц	100 Гц	170 Гц	hamming	20	3
4,12,20,28	Режекторный	720 Гц	-	-	150 Гц	170 Гц	100 Гц	blackman	22	4
5,13,21,29	ФНЧ	900 Гц	200 Гц	250 Гц	-	-	-	bartlett	24	1
6,14,22,30	ФВЧ	900 Гц	250 Гц	200 Гц	-	-	-	kaiser	26	2
7,15,23,31	Полосовой	900 Гц	-	-	200 Гц	160 Гц	240 Гц	tukey	30	3
8,16,24,32	Режекторный	900 Гц	-	-	200 Гц	240 Гц	160 Гц	hamming	32	4

Номер по списку	Фильтр	$f_s$	$f_{pass}$	$f_{stop}$	$f_0$	$F_{pass}$	$F_{stop}$	Окно	Порядок фильтра	Доп. задание
		Гц			Гц	Гц	Гц			

2.1 Синтез частотно-избирательных КИХ-фильтров оконным методом

1. Сформировать идеальные частотные характеристики КИХ-фильтра, согласно параметрам по варианту. Количество отсчетов взять достаточно большим ( $N > 1000$ ). Ниже приведены примеры частотных характеристик ФНЧ.
2. Получить идеальную импульсную характеристику фильтра, применив ОБПФ к идеальной частотной характеристике фильтра.
3. Сделать "усечение" идеальной импульсной характеристики до размера, равного порядку фильтра + 1. Это необходимо сделать таким образом, чтобы в импульсной характеристике остались значимые отсчеты: нулевой отсчет,  $order/2$  отсчетов из отрицательной области и  $order/2$  отсчетов из положительной области (подобно тому, как мы это делали в лабораторной работе №2 в задании с комплексной гармонической вырезкой).
4. Построить частотные характеристики фильтра, соответствующие усеченной импульсной характеристике.
5. Применить оконную функцию к импульсной характеристике (взвешивание). Для этого усеченную импульсную характеристику необходимо поэлементно умножить на массив соответствующей оконной функции нужного размера. Изобразить на графике усеченную импульсную характеристику фильтра до и после взвешивания, а также саму оконную функцию.
6. Построить частотные характеристики фильтра, соответствующие усеченной взвешенной импульсной характеристике. Проанализировать результаты и сделать выводы.
7. Изучить возможности пакета `scipy.signal.firwin2` для задачи синтеза КИХ-фильтра оконным методом. Синтезировать фильтр, используя функцию `firwin2`.
8. Убедиться в идентичности результатов, полученных на этапах 6 и 7.

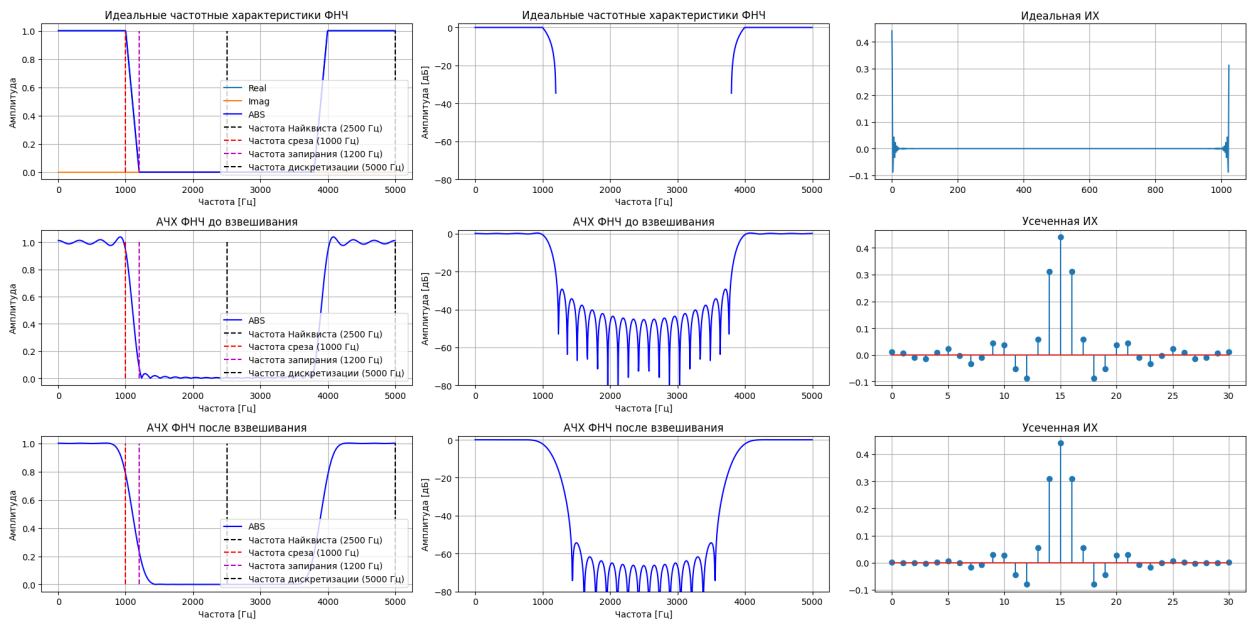


Рисунок 10 - Пример синтеза ФНЧ

2.2 Применение фильтра к сигналу

1. Сформировать сигнал, состоящий из двух гармоник разных амплитуд, как мы это делали в лабораторной работе №2. При этом, одна гармоника должна быть из области частот пропускания вашего КИХ-фильтра, а вторая - из области частот запираания.
2. Применить разработанный фильтр к сигналу во временной области (используя свертку, `np.convolve()`).
3. Построить графики сигнала во временной и в частотной областях до и после применения фильтра. Проанализировать результаты и сделать выводы.

### 3. Дополнительные задания

1. Синтезировать *дифференцирующий фильтр* оконным методом одним из способов из задания 2.1. Проверить работу фильтра, применив его к сигналу.
2. Синтезировать *фильтр Гильберта* оконным методом одним из способов из задания 2.1. Проверить работу фильтра, применив его к сигналу.
3. Написать функцию, реализующую алгоритм свертки. Добиться идентичности результатов с функцией `np.convolve()`.
4. В задании 2.2 выполнить фильтрацию в частотной области, используя БПФ, ОДПФ их свойства. Убедиться в идентичности результатов при фильтрации во временной и в частотной областях.

### 4. Контрольные вопросы

1. Что такое динамическая система?
2. Что такое цифровой фильтр? Что такое КИХ-фильтр? БИХ-фильтр? В чем их преимущества и недостатки?
3. Что такое импульсная характеристика фильтра?
4. Что такое синтез цифрового фильтра? Как классифицируются методы синтеза цифровых фильтров?
5. Что такое разностное уравнение?
6. Что такое порядок фильтра?
7. В чем суть оконного метода?
8. Какие вы знаете частотно избирательные фильтры?
9. Какие идеальные частотные характеристики у фильтра Гильберта? В чем его физический смысл?
10. Какие идеальные частотные характеристики у дифференцирующего фильтра? В чем его физический смысл?
11. Каким образом можно применить фильтр к сигналу?
12. На какие характеристики обращают внимание при проектировании цифровых фильтров? Как устанавливаются требования к этим характеристикам?