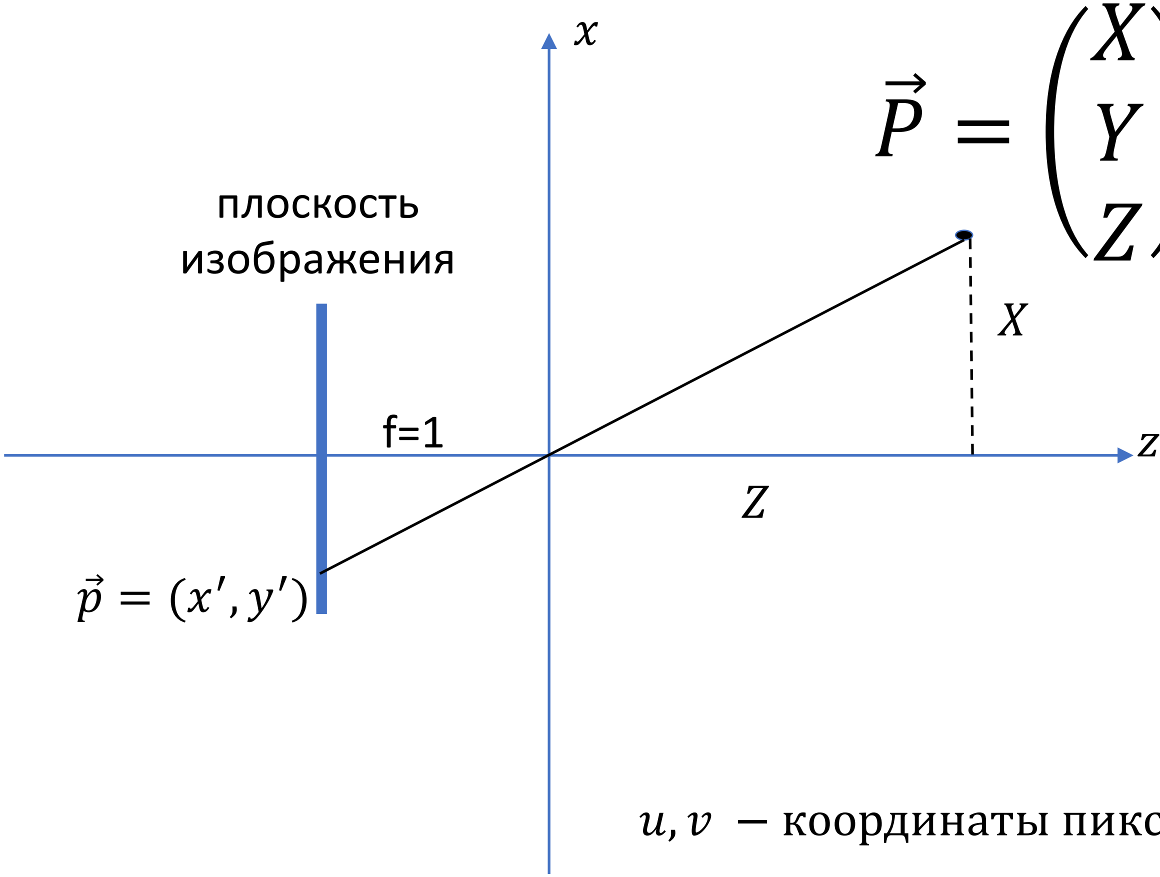
Модель камеры-обскуры

$$\vec{P} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$$



$$x' = \frac{X}{Z}$$

$$y' = \frac{Y}{Z}$$

$$u = f_x x' + c_x$$

$$v = f_y y' + c_y$$

u, v – координаты пикселей на изображении

Задачи

- Записать в однородных координатах прямую линию, проходящую через точки (0,0) и (1,1)
- Найти все точки пересечения прямых $y=0$ и $ax+by+c=0$
- Описать все прямые линии, проходящие через заданную точку p
- Привести пример прямой линии, не проходящей через точку p

В какую сторону вращается танцовщица?

Проекция параллельных прямых на плоскость

$$\vec{r}_1(t) = \begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 t \end{pmatrix} \quad \vec{r}_2(t) = \begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 t \end{pmatrix}$$

$$\vec{p}_1(t) = \begin{pmatrix} X_0 / Z_0 t \\ Y_0 / Z_0 t \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{p}_2(t) = \begin{pmatrix} X_1 / Z_1 t \\ Y_1 / Z_1 t \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$t \to \infty \Longrightarrow \vec{p}_1(t) = \vec{p}_2(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Проекция параллельных прямых на плоскость (однородные координаты)

$$\vec{r}_1' = \vec{r}_1 + \vec{z}_0 \qquad \vec{r}_2' = \vec{r}_2 + \vec{z}_0$$

$$\vec{p}_{1,2}' = \vec{r}_{1,2}' \qquad \vec{p}_{1,2} = \vec{r}_{1,2}$$

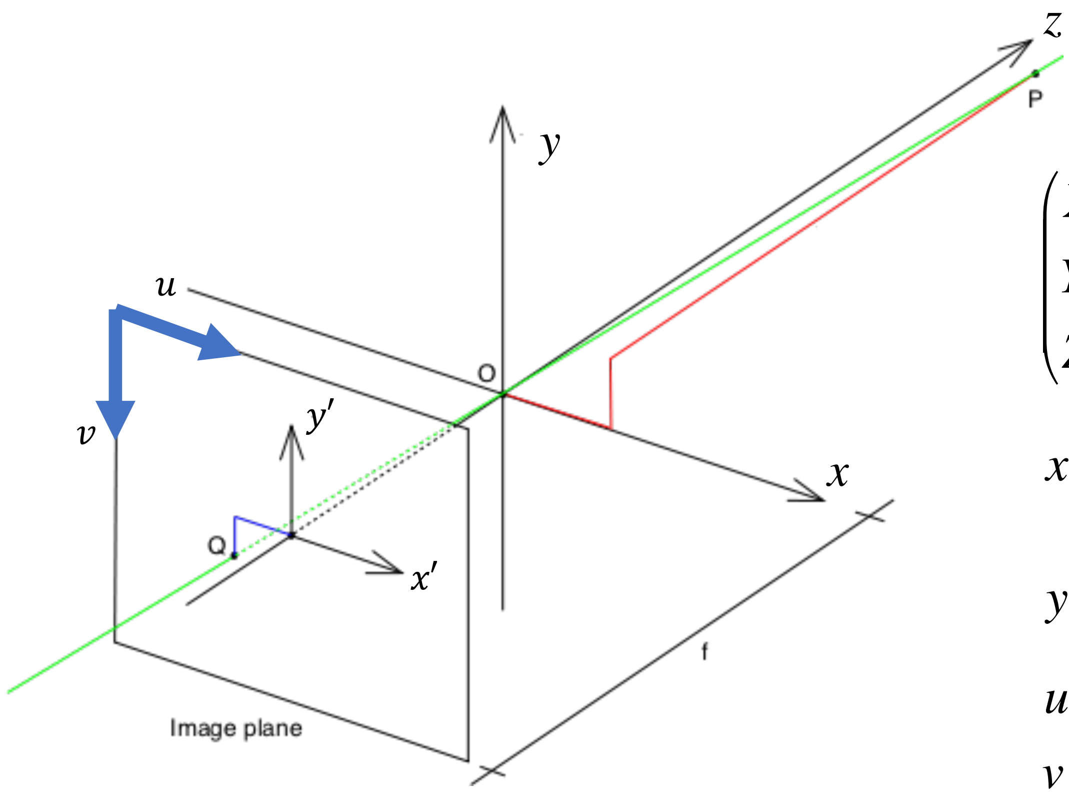
$$\vec{l}_1 = \vec{p}_1 \times \vec{p}_1' \qquad \vec{l}_2 = \vec{p}_2 \times \vec{p}_2'$$

$$\vec{l}_1 = \vec{p}_1 \times (\vec{p}_1 + \vec{z}_0) =$$
$$= \vec{p}_1 \times \vec{p}_1 + \vec{p}_1 \times \vec{z}_0 = \vec{p}_1 \times \vec{z}_0$$

$$\vec{l}_2 = \vec{p}_2 \times \vec{z}_0$$

$$\vec{l}_1 \times \vec{l}_2 \propto \vec{z}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Pinhole camera model



$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{pmatrix} + t$$

$$x' = \frac{X}{Z}$$

$$y' = \frac{Y}{Z}$$

$$u = f_x x' + c_x$$

$$v = f_y y' + c_y$$

Матрица проекции камеры

$$w\begin{pmatrix} u \\ v \\ 1 \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$P = K\left[R \mid T\right]$$

$$K = \begin{pmatrix} f_x & 0 & c_x \\ 0 & f_y & c_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Матрица проекции камеры

$$q = \underbrace{\begin{pmatrix} f_x & 0 & c_x \\ 0 & f_y & c_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{K}[R\,|\,T]\,Q$$

P

$$q \in P^2$$

$$Q \in P^3$$

Вычисление исчезающих точек

Прямая линия, проходящая через точку $A \in \boldsymbol{P}^3$ в направлении $D = \begin{pmatrix} d \\ 0 \end{pmatrix}, d \in R^3$, может быть записана как $\mathrm{Q}(t) = A + tD$.

Ее проекция на камеру с матрицей $P = K[I|0]$ будет $\mathrm{q}(t) = PQ(t) = a + tKd$, где $a = PA$

$$\lim_{t \to \infty} \mathrm{q}(t) = Kd$$

Линейные преобразования проективной плоскости

- Изометрическое

$$q' = \begin{pmatrix} R & T \\ 0^T & 1 \end{pmatrix} q$$

- Инварианты:
  - Длина
  - Углы
  - Площадь

Линейные преобразования проективной плоскости

- Подобие

$$q' = \begin{pmatrix} sR & T \\ 0^T & 1 \end{pmatrix} q$$

- Инварианты:
  - Отношение длин
  - Углы
  - Отношение площадей

Линейные преобразования проективной плоскости

- Афинное

$$q' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & T_x \\ a_{21} & a_{22} & T_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} q$$

- Инварианты:
    - Параллельность
    - Отношение длин отрезков на паралелльных прямых
    - Отношение площадей

Общее линейное преобразование

$$q' = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{pmatrix} q$$

Соотношение гомографии для координат пикселей

$$\begin{pmatrix} \tilde{u}w \\ \tilde{v}w \\ w \end{pmatrix} = H \begin{pmatrix} u \\ v \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{u} = \frac{h_{11}u + h_{12}v + h_{13}}{h_{31}u + h_{32}v + h_{33}}$$

$$\tilde{v} = \frac{h_{21}u + h_{22}v + h_{23}}{h_{31}u + h_{32}v + h_{33}}$$

Проективное преобразование (гомография)

- Обратимое отображение $H^I: P^2 \to P^2$, такое, что любые три точки x_1, x_2, x_3 лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда на одной прямой лежат их образы $H^I(x_1)$, $H^I(x_2)$, $H^I(x_3)$, называется гомографией.

Теорема о представлении гомографии

- Отображение $H^I: P^2 \to P^2$ является гомографией тогда и только тогда, когда существует обратимая матрица 3x3 H, такая, что для каждой точки из P^2, представляемой 3х-мерным вектором x, выполняется соотношение $H^I(x)=Hx$
- Доказать

Group	Matrix	Distortio
Projective 8 dof	$\begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{bmatrix}$	
Affine 6 dof	$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & t_x \\ a_{21} & a_{22} & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	
Similarity 4 dof	$\begin{bmatrix} sr_{11} & sr_{12} & t_x \\ sr_{21} & sr_{22} & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	
Euclidean 3 dof	$\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & t_x \\ r_{21} & r_{22} & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	

Производство кино

Создание цифровых людей

Свойства гомографии

$$\tilde{s} = H^I(s) \qquad s = \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix} \in I$$

- Суперпозиция двух гомографий -- гомография
- Гомографии образуют группу в P^2

$$s_1 = H_1^I(s),\ s_2 = H_2^I(s_1) \Rightarrow s_2 = (H_1 H_2)^I(s)$$

Исчезающие точки и линии (vanishing points & lines)

- Гомография H может отображать точки на бесконечности в точки на плоскости. Такие точки мы будем называть vanishing points.
- Все такие точки будут лежать на прямой линии, задаваемой $l_\infty = H^{-T}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$, которую мы будем называть исчезающей линией

Сохранение линии на бесконечности

- Гомография H отображает линию на бесконечности в линию на бесконечности тогда и только тогда, когда H – афинное преобразование

Нахождение гомографии

- Direct Linear Transformation

$$w_i \begin{pmatrix} \tilde{u}_i \\ \tilde{v}_i \\ 1 \end{pmatrix} = H \begin{pmatrix} u_i \\ v_i \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} \tilde{u}_i \\ \tilde{v}_i \\ 1 \end{pmatrix} \times H \begin{pmatrix} u_i \\ v_i \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

Отображение гомографии для плоских объектов

$$S_2 = RS_1 + T \qquad n_1^T S_1 = d_1 \qquad S_1, S_2 \in \Re^3$$

$$S_2 = RS_1 + T\frac{n_1^T S_1}{d}$$

$$q_1, q_2 \in P^2$$

$$S_2 = \left(R + \frac{Tn_1^T}{d}\right)S_1 \Rightarrow q_2 = \left(R + \frac{Tn_1^T}{d}\right)q_1$$

Когда между изображениями существует гомография?

- Плоская сцена
- Бесконечно удаленная сцена
- Поворот камеры с нулевой трансляцией