

Использование SVD

- Ортогональная проблема Прокруста

$$\underset{B^T B = I}{\arg \min} \|A - B\|$$

- Приближение матрицей низкого ранга

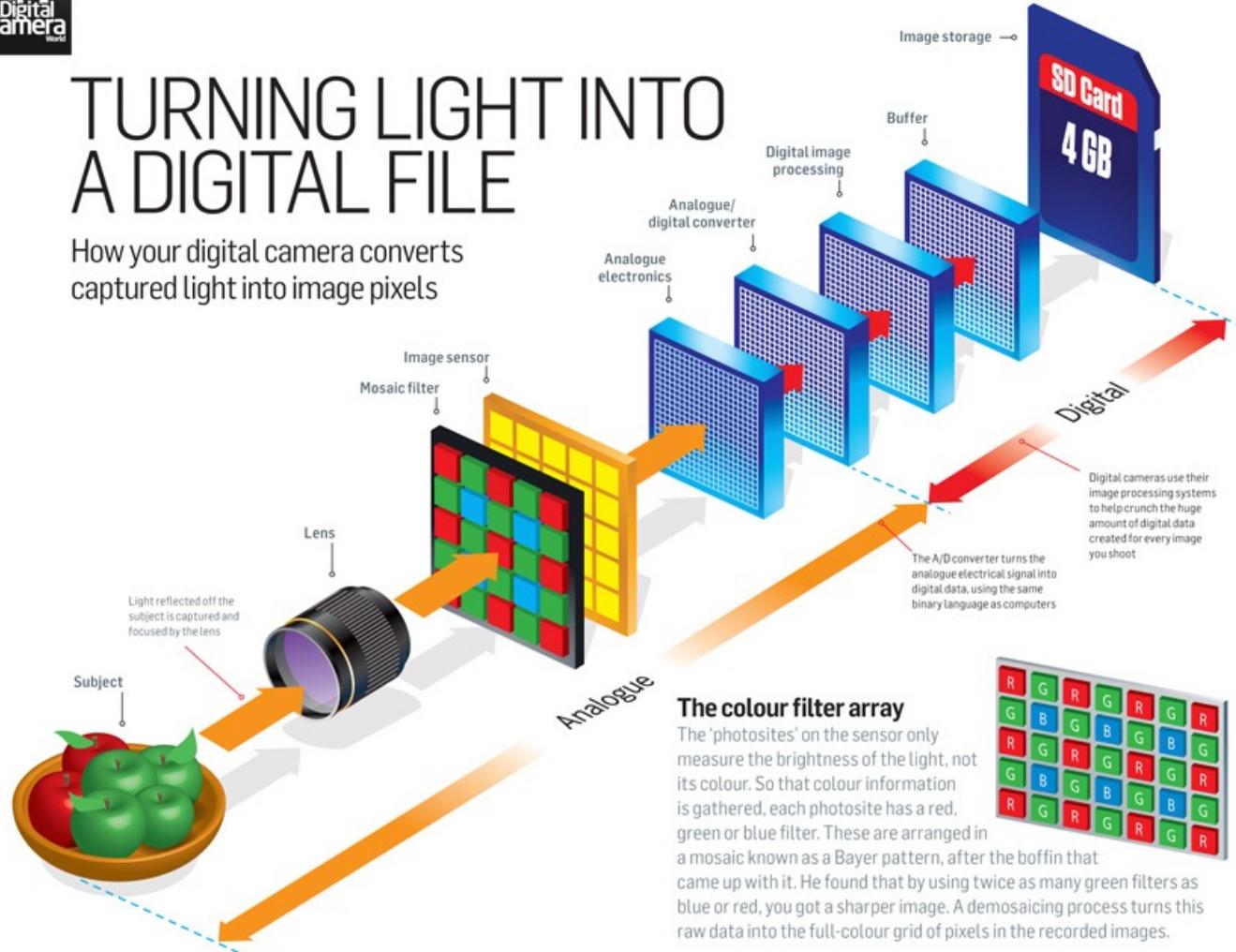
$$\underset{\text{rank}(B) = r < \text{rank}(A)}{\arg \min} \|A - B\|$$

Камера

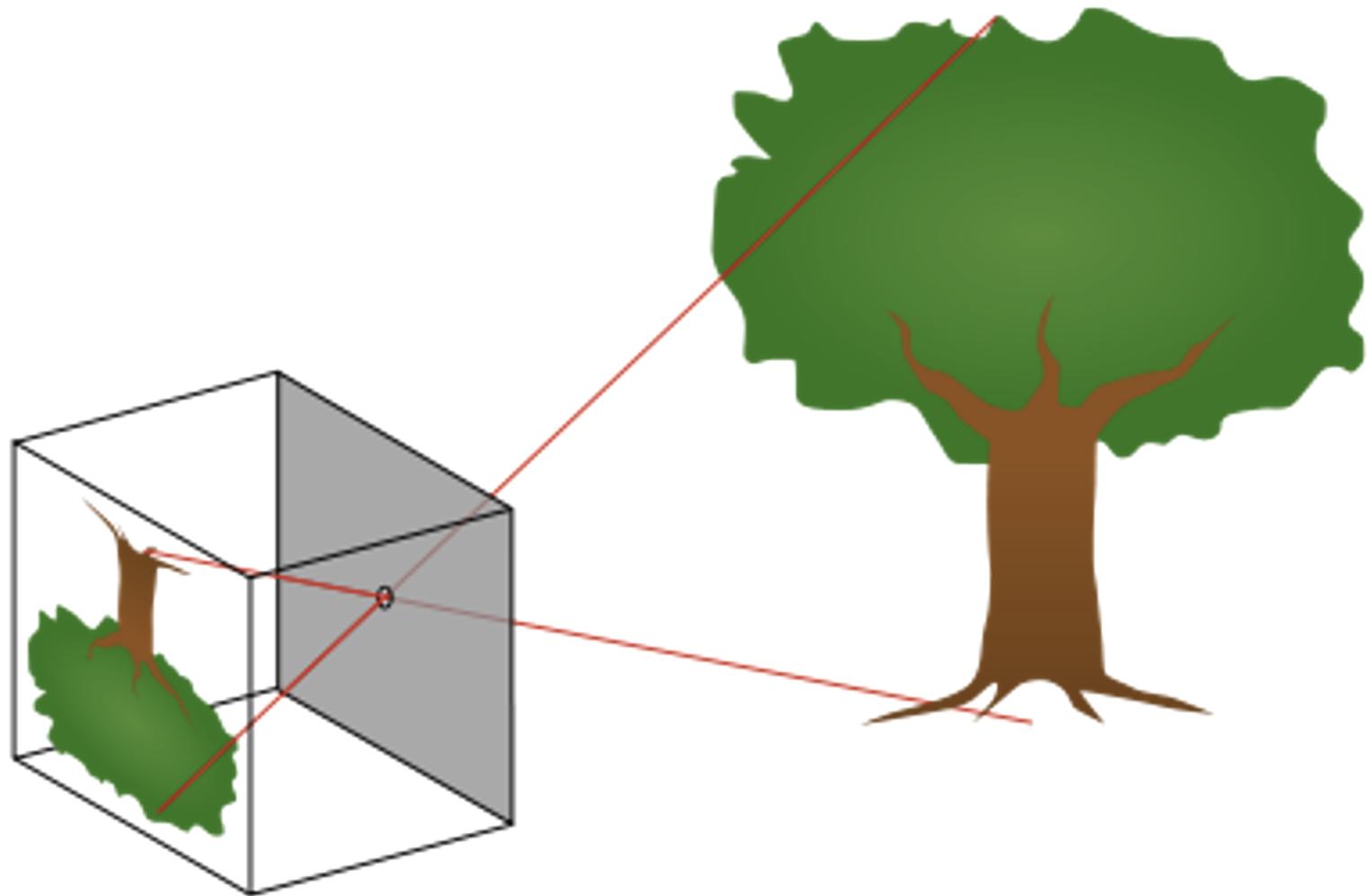


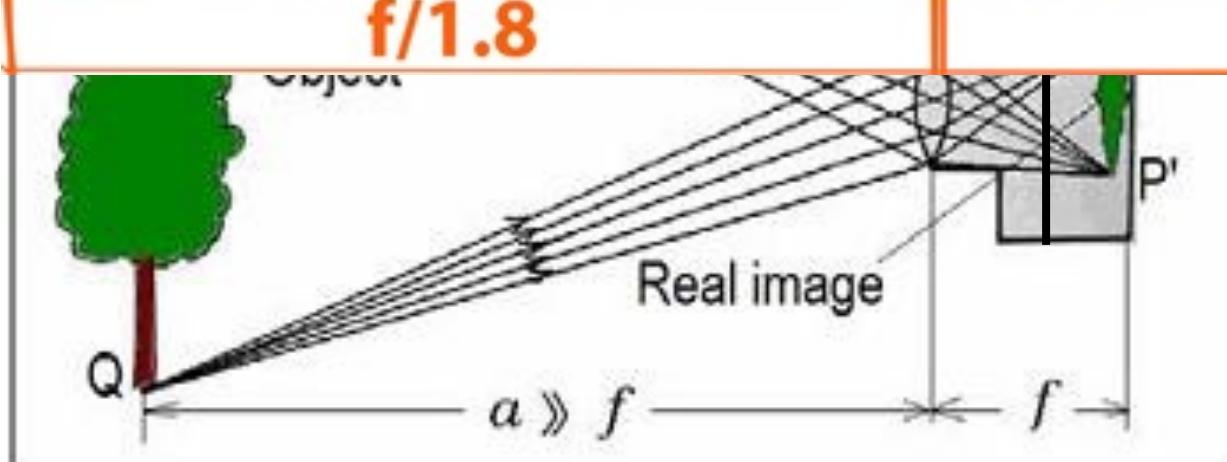
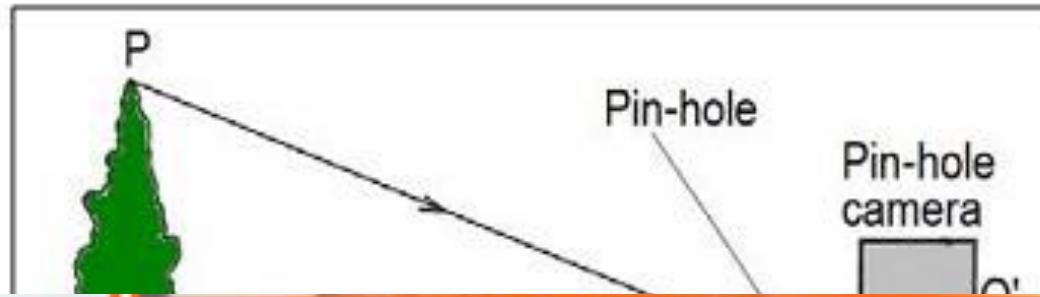
TURNING LIGHT INTO A DIGITAL FILE

How your digital camera converts captured light into image pixels

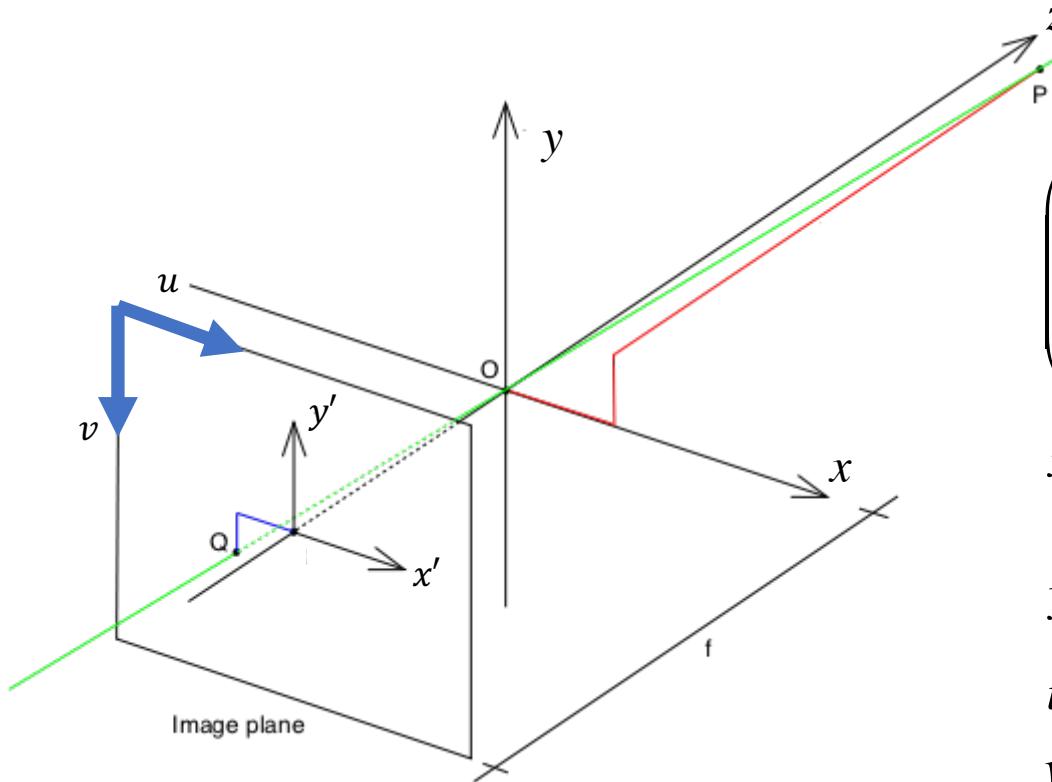


Камера-обскура (pinhole camera)





Pinhole camera model



$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{pmatrix} + t$$

$$x' = \frac{X}{Z}$$

$$y' = \frac{Y}{Z}$$

$$u = f_x x' + c_x$$

$$v = f_y y' + c_y$$

Оси x' и y' , вообще говоря, должны быть направлены в противоположных направлениях, потому что камера обскура формирует перевернутое изображение, но в обычной камере изображение переворачивается еще раз, чтобы скомпенсировать этот эффект

Проекция камеры-обскуры

- Прямые линии проектируются в прямые линии
- Параллельные прямые проектируются в пересекающиеся

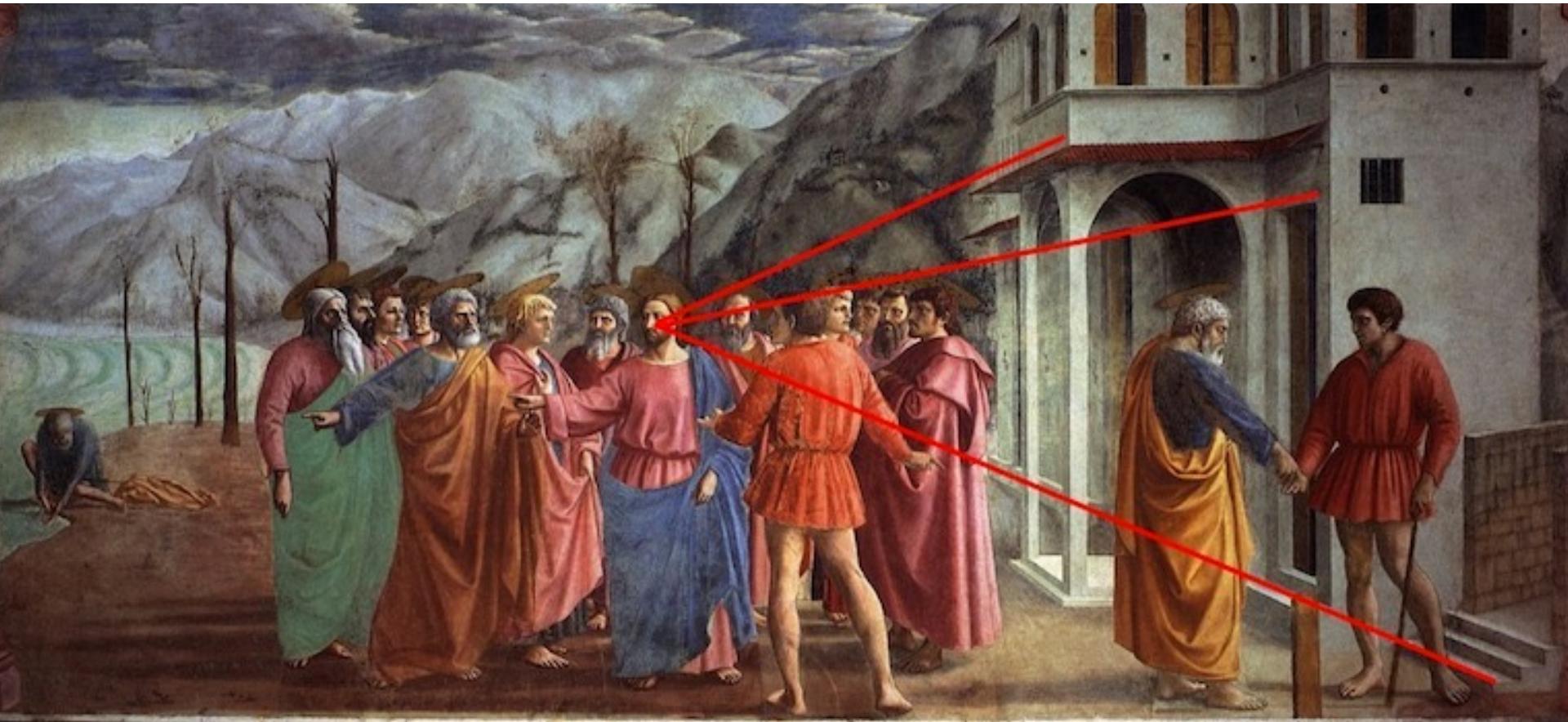


Возникновение проективной геометрии



Дуччо ди Буонинсенья
«Благовещение»
1308-1311

Возникновение проективной геометрии



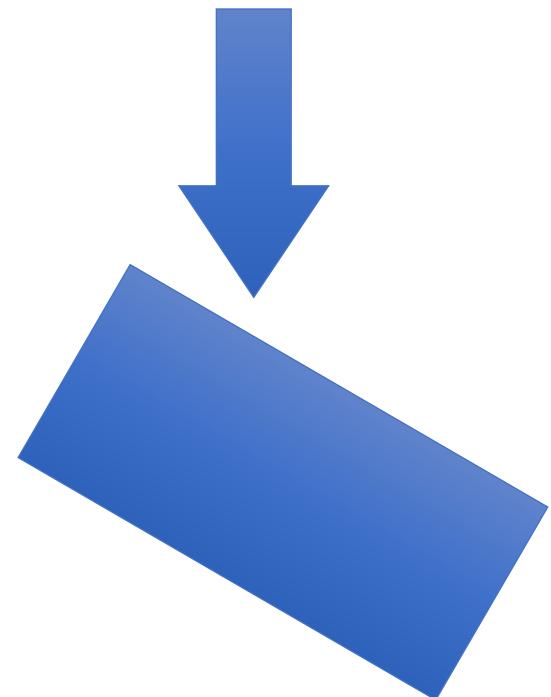
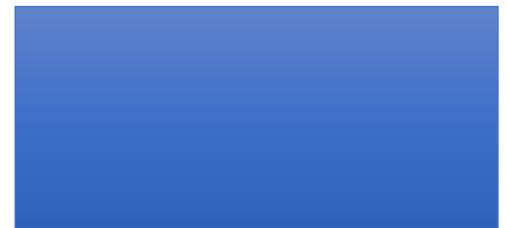
Томазо-ди-Джованни Мазаччо, «Уплата подати», 1427

Возникновение проективной геометрии

- Иоганн Кеплер и Жерар Дезарг (начало XVII века): бесконечно далекие точки, точка на бесконечности, прямая на бесконечности
- Жан-Виктор Понселе, Мишель Шаль (первая половина XIX века): проективное пространство
- Август Фердинанд Мебиус (середина XIX века): однородные координаты

Поворот в плоскости вокруг начала координат

$$X = \cos(\alpha)X_0 + \sin(\alpha)Y_0$$
$$Y = -\sin(\alpha)X_0 + \cos(\alpha)Y_0$$



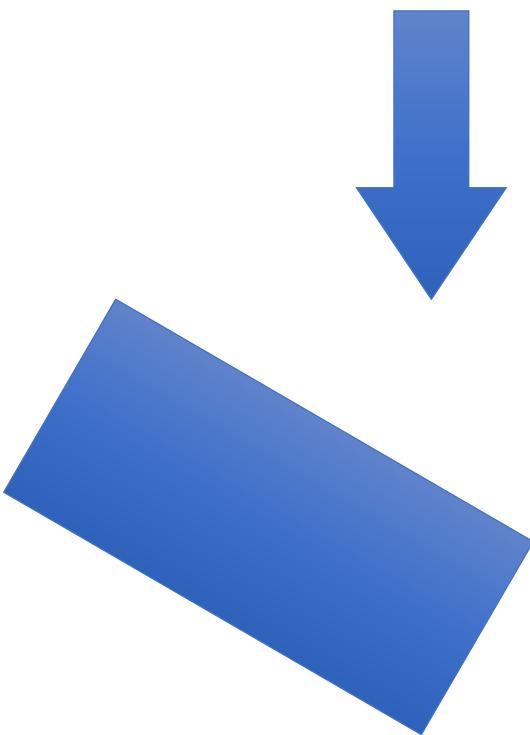
$$X = R_{11}X_0 + R_{12}Y_0$$
$$Y = R_{21}X_0 + R_{22}Y_0$$

Поворот и сдвиг в плоскости

$$X = R_{11}X_0 + R_{12}Y_0 + T_1$$

$$Y = R_{21}X_0 + R_{22}Y_0 + T_2$$

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{pmatrix} + \vec{T}$$



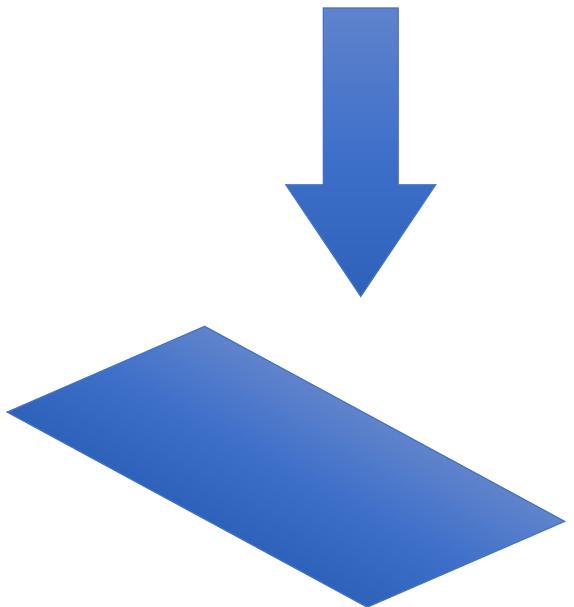
Афинное преобразование в плоскости

$$X = A_{11}X_0 + A_{12}Y_0 + T_1$$

$$Y = A_{21}X_0 + A_{22}Y_0 + T_2$$



$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{pmatrix} + \vec{T}$$



Поворот и сдвиг в трехмерном пространстве

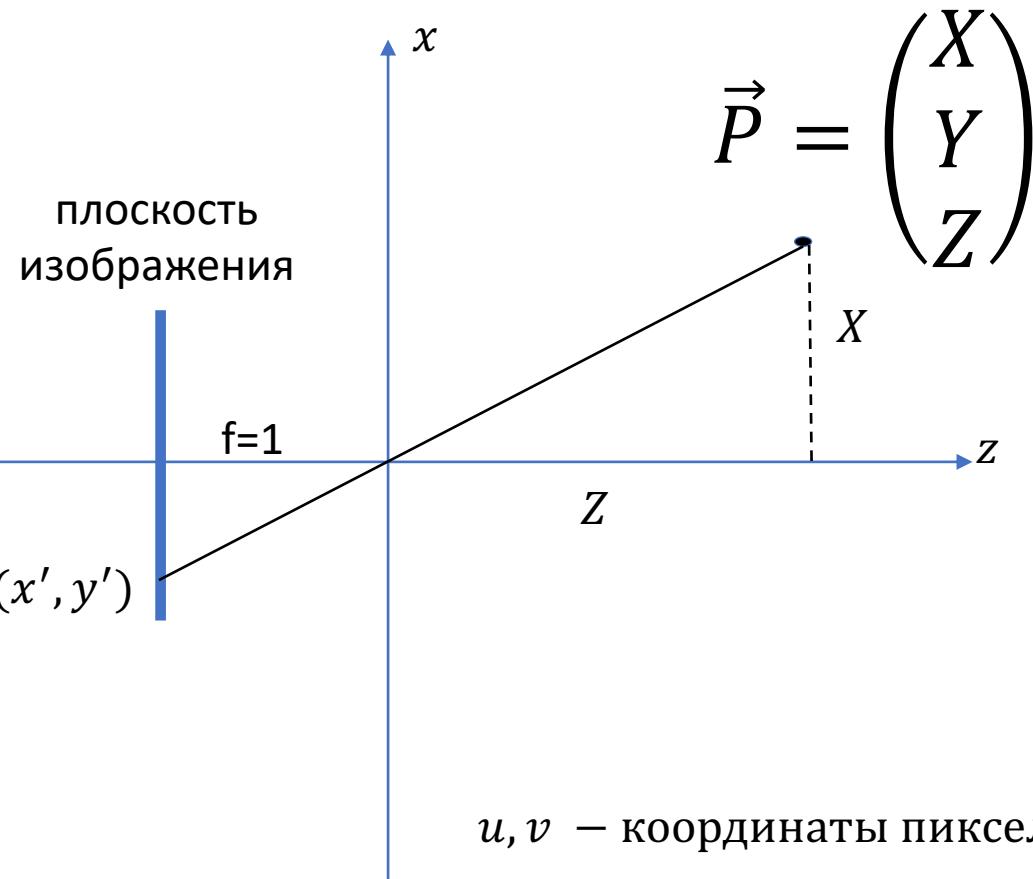
$$X = R_{11}X_0 + R_{12}Y_0 + R_{13}Z_0 + T_X$$

$$Y = R_{21}X_0 + R_{22}Y_0 + R_{23}Z_0 + T_y$$

$$Z = R_{31}X_0 + R_{32}Y_0 + R_{33}Z_0 + T_Z$$

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{pmatrix} + T$$

Модель камеры-обскуры



$$x' = \frac{X}{Z}$$

$$y' = \frac{Y}{Z}$$

$$u = f_x x' + c_x$$

$$v = f_y y' + c_y$$

Однородные координаты

Точка на проективной плоскости $p = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} \in P^2$

ставится в соответствие всем точкам из трехмерного пространства, проектирующимся в нее:

$$\vec{P} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = Z \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{R}^3$$

(X, Y, Z) называют однородными координатами точки p .

Однородные координаты

Уравнение прямой на плоскости

$$ax' + by' + c = 0$$

Можно записать в виде

$$p^T l = 0,$$

где $p = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{z} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$, $l = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

Задачи

1. Найти точку пересечения двух прямых, заданных векторами l_1 и l_2 в однородных координатах
2. Найти прямую, проходящую через две точки, заданные векторами p_1 и p_2 в однородных координатах
3. Камера 2 сдвинута относительно камеры 1 вдоль оси x на 10 единиц. Найти преобразования, переводящие координаты трехмерной точки, заданной в системе отсчета камеры 1 в систему отсчета камеры 2, и наоборот.
4. Камера 2 повернута и сдвинута относительно камеры 1. Поворот описывается матрицей R, сдвиг – вектором T. Найти преобразования, переводящие координаты трехмерной точки, заданной в системе отсчета камеры 1 в систему отсчета камеры 2, и наоборот.

Где пересекаются прямые линии

$$l_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, l_2 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ \tilde{c} \end{pmatrix}$$

Точка на бесконечности

Прямые линии

$$l_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \quad l_2 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ \tilde{c} \end{pmatrix}$$

пересекаются в точке

$$p = l_1 \times l_2 = \begin{pmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Прямая на бесконечности

Все точки на бесконечности лежат на одной прямой:

$$l_{\infty} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

Проективное пространство

- Состоит из множества прямых линий, проходящих через нулевую точку линейного пространства, или:
- Для линейного пространства V над полем K , проективное пространство $P(V)$ состоит из классов эквивалентности в $V \setminus \{0\}$, с соотношением эквивалентности, определяемым: $v_1 \sim v_2$ если есть ненулевое $a \in K$, такое, что $v_1 = av_2$.
- Включает в себя множество точек на бесконечности
- Если линейное пространство трехмерное, то проективное пространство называют проективной плоскостью \mathbf{P}^2
- \mathbf{P}^2 , за исключением точек на бесконечности, биективно плоскости