

Partie I : Etude d'un exemple

1. x et α sont des réels strictement positifs.

(a) On a : $\frac{1-e^t}{t} \underset{0+}{\sim} 1$, l'application $t \mapsto \frac{1-e^t}{t}$ est continue sur $]0; \alpha]$ et prolongeable par continuité en 0, donc intégrable sur $]0, \alpha]$.

(b) L'application $t \mapsto \frac{e^{-t}}{t}$ est continue sur $[x, +\infty[$ ($x > 0$). D'autre part $t^2 \frac{e^{-t}}{t} = te^t \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$, donc $\frac{e^{-t}}{t} = o_{t \rightarrow +\infty}(\frac{1}{t^2})$ et par suite $t \mapsto \frac{e^{-t}}{t}$ est $[x, +\infty[$ -intégrable.

2. Pour tout $x \in R_+^*$, on pose $\varphi(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt = \int_{]x, +\infty[} \frac{e^{-t}}{t} dt$.

a) Pour tout x et tout $t > x$, on a :

$$- \frac{e^{-t}}{t} > 0, \text{ donc } \varphi(x) > 0.$$

$$- \frac{1}{t} < \frac{1}{x} \Rightarrow \varphi(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt < \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x} dt = \frac{1}{x} e^{-x}$$

En conclusion : $0 < \varphi(x) < \frac{1}{x} e^{-x}$ pour tout $x > 0$.

b) Posons $F(x) = \int_1^x \frac{e^{-t}}{t} dt$ pour tout $x > 0$, alors F est une primitive de la fonction continue $t \mapsto \frac{e^{-t}}{t}$,

sur R_+^* . Pour $x > 0$, on a : (*) $\varphi(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt = \int_x^1 \frac{e^{-t}}{t} dt + \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt}_{\varphi(1)} = \varphi(1) - F(x)$, donc φ est

de classe C^1 sur R_+^* , avec :

$$\forall x > 0; \varphi'(x) = -\frac{e^{-x}}{x}.$$

c) Pour $x > 0$, $\ln(x)$ s'écrit : $\ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt$ et par la relation (*) de 2.b), on a :

$$\varphi(x) + \ln(x) = \int_x^1 \frac{e^{-t}}{t} dt + \varphi(1) + \int_1^x \frac{1}{t} dt = \varphi(1) - \int_x^1 \frac{1-e^{-t}}{t} dt.$$

Par 1.a) et passage à la limite lorsque x tend vers 0^+ , on obtient :

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} (\varphi(x) + \ln(x)) = \varphi(1) - \int_0^1 \frac{1-e^{-t}}{t} dt = C$$

d) Pour tout $x > 0$, on a :

$$\begin{aligned} \varphi(x) + \ln(x) &= \varphi(1) - \int_x^1 \frac{1-e^{-t}}{t} dt = \varphi(1) - \left(\int_0^1 \frac{1-e^{-t}}{t} dt - \int_0^x \frac{1-e^{-t}}{t} dt \right) \\ &= \varphi(1) - \underbrace{\int_0^1 \frac{1-e^{-t}}{t} dt}_{=C} + \int_0^x \frac{1-e^{-t}}{t} dt \\ &= C + \int_0^x \frac{1-e^{-t}}{t} dt \end{aligned}$$

Le développement en série entière de l'application $t \mapsto h(t) = \begin{cases} \frac{1-e^{-t}}{t} & \text{si } t \neq 0 \\ 1 & \text{si } t = 0 \end{cases}$, donne :

$h(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-t)^{k+1}}{k!} t^{k-1}$ pour tout t réel et par intégration sur le compact $[0, x]$, on obtient :

$$\varphi(x) + \ln(x) = C + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k!} \frac{x^k}{k}$$

3. Pour $x \in \mathbb{R}^*$, on pose $\psi(x) = \frac{1}{2}\varphi(|x|)$

(a) L'application ψ est paire, il suffit de vérifier l'intégrabilité sur $]0; +\infty[$. Or $|\psi(x)| = \psi(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) < \frac{e^{-x}}{2x}$

et $x \mapsto \frac{e^{-x}}{2x}$ intégrable sur $[1; +\infty[$, donc ψ est intégrable sur $[1; +\infty[$.

Au voisinage de 0^+ , on a, par 2.c) : $\varphi(x) \sim -\ln(x)$ et $x \mapsto -\ln(x)$ est $]0, 1]$ -intégrable. Ceci permet de conclure que ψ est intégrable sur $]0, +\infty[$, donc aussi sur $]-\infty; 0[$.

(b) Par : $\forall t > 0; |\psi(t)e^{-ixt}| = \psi(t) = \frac{e^{-t}}{2t}$ et 3.a) l'application $t \mapsto \psi(t)e^{-ixt}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

En échangeant t en $-t$ et via la parité de ψ , on déduit que $t \mapsto \psi(t)e^{-ixt}$ est intégrable sur $]-\infty, 0[$. On posera par définition $\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t)e^{-ixt} dt = \int_{-\infty}^0 \psi(t)e^{-ixt} dt + \int_0^{+\infty} \psi(t)e^{-ixt} dt$ et on a alors :

$$\begin{aligned} \hat{\psi}(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t)e^{-ixt} dt = \int_{-\infty}^0 \psi(t)e^{-ixt} dt + \int_0^{+\infty} \psi(t)e^{-ixt} dt \\ &= \int_0^{+\infty} \psi(-t)e^{ixt} dt + \int_0^{+\infty} \psi(t)e^{-ixt} dt \quad \text{chgt de variable } t \leftrightarrow -t \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{2}\varphi(t)(e^{-ixt} + e^{ixt}) dt \\ &= \int_0^{+\infty} \varphi(t) \cos(xt) dt \end{aligned}$$

(c) Caractère C^∞ de $\hat{\psi}$:

- L'application $g : (x, t) \mapsto \varphi(t) \cos(xt)$ est définie et de Classe C^∞ sur $]0; +\infty[\times \mathbb{R}$; avec :

$$\frac{\partial^k g}{\partial x^k}(x, t) = \varphi(t)(-t^k) \cos(xt + k\frac{\pi}{2}) \text{ pour tout } k \in \mathbb{N} \text{ et tout } (x, t) \in]0; +\infty[\times \mathbb{R}$$

- $\forall k \in \mathbb{N}, \forall (x, t) \in]0; +\infty[\times \mathbb{R}; \left| \frac{\partial^k g}{\partial x^k}(x, t) \right| \leq t^k \varphi(t)$ et $t \mapsto t^k \varphi(t)$ est intégrable sur $]0; +\infty[$ ($t^k \varphi(t) = o(\frac{1}{t^2})$)

Le théorème de dérivation sous le signe intégral permet de conclure que $\hat{\psi}$ est de classe C^∞ sur \mathbb{R} , avec $\hat{\psi}^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial^k g}{\partial x^k}(x, t) dt = \int_0^{+\infty} \varphi(t)(-t^k) \cos(xt + k\frac{\pi}{2}) dt$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $k \in \mathbb{N}$.

(d) On utilise une intégration par parties, en posant : $U(t) = \varphi(t)$ et $V(t) = \frac{1}{x} \sin(xt)$ qui sont de classe C^1 avec $\lim_{t \rightarrow +\infty} (U(t)V(t)) = 0$ car $|U(t)V(t)| \leq \frac{1}{xt} e^{-t}$ et $\lim_{t \rightarrow 0} U(t)V(t) = 0$ car φ est bornée, on obtient alors :

$$\hat{\psi}(x) = \int_0^{+\infty} \varphi(t) \cos(xt) dt = - \int_0^{+\infty} \varphi'(t) \frac{\sin(xt)}{x} dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} \frac{\sin(xt)}{x} dt \text{ car } \varphi'(t) = -\frac{e^{-t}}{t}.$$

Par 3.b) et la continuité sous le signe intégral, on a : $\hat{\psi}(0) = \int_0^{+\infty} \varphi(t) dt$.

4. L'expression $\hat{\psi}(x) = \frac{\arctan(x)}{x}$

(a) L'application $h : (x, t) \mapsto \frac{e^{-t}}{t} \sin(xt)$ est définie, continue sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$

Pour tout $a > 0$ et tout $(x, t) \in [a, +\infty[\times \mathbb{R}_+^*$, $|h(x, t)| \leq \frac{1}{a} e^{-t}$ qui est intégrable sur \mathbb{R}_+^* .

h est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$, avec $\left| \frac{\partial h}{\partial x}(x, t) \right| = e^{-t} \cos(xt) \leq e^{-t}$ qui est \mathbb{R}_+^* -intégrable.

Par le théorème de dérivation sous le signe intégral, $\Phi : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} \sin(xt) dt$ est de classe C^1 sur l'ouvert \mathbb{R}_+^* et $\Phi'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial h}{\partial x}(x, t) dt = \int_0^{+\infty} e^{-t} \cos(xt) dt$.

$$\begin{aligned} &= \Re \left(\int_0^{+\infty} e^{-t} e^{ixt} dt \right) \\ &= \Re \left(\int_0^{+\infty} e^{(ix-1)t} dt \right) \\ &= \frac{1}{x^2+1} \end{aligned}$$

car $\int_0^{+\infty} e^{(ix-1)t} dt = \frac{1}{x^2+1} + i \frac{x}{x^2+1}$ et x réel.

- (b) On a $\Phi(x) = x\hat{\psi}(x)$ et $\hat{\psi}$ est définie en 0, donc $\lim_{x \rightarrow 0} \Phi(x) = 0$. D'autre part $\Phi'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ pour tout $x > 0$, donc $\Phi(x) = \arctan(x)$ pour tout $x > 0$ et par suite : $\hat{\psi}(x) = \frac{1}{x} \arctan(x)$ pour tout $x > 0$.

Partie II : Quelques propriétés de la transformée de Fourier d'une fonction

1. Transformation de Fourier d'une fonction intégrable

- a) Soit f une fonction continue par morceaux et intégrable sur \mathbb{R} , on a alors :
 $\forall (x, t) \in \mathbb{R}^2 ; |f(t)e^{-ixt}| \leq |f(t)|$ et par suite, pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'application $t \mapsto f(t)e^{-ixt}$ est intégrable sur \mathbb{R} , avec $\left| \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-ixt} dt \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt$.
 Conclusion : \hat{f} est définie et bornée sur \mathbb{R} .
- (a) Si f est continue et intégrable sur \mathbb{R} , alors l'application $h : (x, t) \mapsto f(t)e^{-ixt}$ définie sur \mathbb{R}^2 vérifie :
 $\cdot h$ est continue sur \mathbb{R}^2
 $\forall (x, t) \in \mathbb{R}^2, |h(x, t)| \leq |f(t)|$ et f est \mathbb{R} -intégrable
 Le théorème de continuité sous le signe intégral s'applique, donc \hat{f} est continue sur \mathbb{R} .

2. Transformations

- (a) L'application $\varphi \mapsto \hat{\varphi}$ est linéaire (par linéarité de l'intégrale) sur l'espace des fonctions continues par morceaux et R -intégrables.
- (b) Pour tout $(x, t) \in \mathbb{R}^2$, on a : $|f(t-a)e^{-ixt}| \leq |f(t-a)|$ et comme $t \mapsto t-a$ est un C^1 -difféomorphisme de \mathbb{R} sur lui même, il en résulte que $t \mapsto f(t-a)$ est intégrable (car f est R -intégrable) sur \mathbb{R} et par suite $\hat{f}_a(x)$ est définie pour tout x réel., avec

$$\hat{f}_a(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-a)e^{-ixt} dt \stackrel{u=t-a}{=} \int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-ix(u+a)} du = e^{-ixa} \int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-ixu} du = e^{-ixa} \hat{f}(x)$$

Pour tout $a \neq 0$, l'application $t \mapsto at$ est un C^1 -difféomorphisme de \mathbb{R} sur lui même, comme précédemment, on déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\hat{a}f(x)$ est définie et

$$\begin{aligned} \hat{a}f(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(at)e^{-ixt} dt \stackrel{u=at}{=} \begin{cases} \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-ix(u/a)} du & \text{si } a > 0 \\ \frac{1}{a} \int_{+\infty}^{-\infty} f(u)e^{-ix(u/a)} du & \text{si } a < 0 \end{cases} \\ &= \frac{1}{|a|} \int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-i\frac{x}{a}u} du = \frac{1}{|a|} \hat{f}\left(\frac{x}{a}\right) \end{aligned}$$

- (c) Posons $g(t) = f(t)e^{iat}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, par $|g(t)e^{-ixt}| = |f(t)e^{iat}e^{-ixt}| \leq |f(t)|$ pour tout t et tout x et l'intégrabilité de f sur \mathbb{R} , on déduit que \hat{g} est définie sur \mathbb{R} et l'on a :

$$\hat{g}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{iat}e^{-ixt} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{iat}e^{-ixt} dt = \int_{-\infty}^{\infty} fte^{-it(-a+x)} dt = \hat{f}(x-a).$$

- (d) Si f est paire, alors : $\forall x \in \mathbb{R}, \hat{f}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-ixt} dt = \int_{-\infty}^0 f(t)e^{-ixt} dt + \int_0^{\infty} f(t)e^{-ixt} dt$. Or $\int_{-\infty}^0 f(t)e^{-ixt} dt \stackrel{u=-t}{=} \int_0^{\infty} f(-t)e^{ixt}(-dt) = \int_0^{\infty} f(t)e^{ixt} dt$, donc :

$$\hat{f}(x) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{ixt} dt + \int_0^{\infty} f(t)e^{-ixt} dt = 2 \int_0^{+\infty} f(t) \cos(xt) dt$$

De même si f est impaire, on a : $\hat{f}(x) = 2i \int_0^{+\infty} f(t) \sin(xt) dt$

- (e) Si f est réelle et paire (resp. impaire) par 2.d) l'application \hat{f} est paire (resp. impaire)

3. Dérivation

Ici $f \in C^1(\mathbb{R})$ telle que f et f' sont intégrables sur \mathbb{R} .

- (a) Soient x et y deux réels tels que $x > y$, alors : $|f(x) - f(y)| = \left| \int_y^x f'(t) dt \right| \leq \int_y^x |f'(t)| dt$. Par cette inégalité et l'intégrabilité de f' sur \mathbb{R} , on déduit que f vérifie le critère de Cauchy au voisinage de l'infini, et par suite $L = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$ existe dans \mathbb{R} .

Supposons $L \neq 0$, par exemple $L > 0$, il existe alors $C > 0$ tel que :

$\forall x \in \mathbb{R}, |x| \geq C \Rightarrow |f(x)| \geq \frac{L}{2} > 0$. En particulier : $\forall x \geq C; \int_C^x |f(t)| dt \geq \frac{L}{2}(x - C) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$ ce qui contredit l'intégrabilité de f sur \mathbb{R} . On conclut, donc que $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$

- (b) Soit $x \in \mathbb{R}$, on a : $\hat{f}'(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(t)e^{-ixt} dt$.

Une intégration par partie, en posant : $U(t) = f(t)$ et $V(t) = e^{-ixt}$ qui sont de classe C^1 sur \mathbb{R} et vérifient : $\lim_{\pm\infty} U(t)V(t) = 0$ pour tout x , donne :

$$\begin{aligned} \hat{f}'(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f'(t)e^{-ixt} dt = [U(t)V(t)]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} U(t)V'(t) dt \\ &= ix \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-ixt} dt \\ &= ix \hat{f}(x) \end{aligned}$$

Par $\hat{f}'(x) = ix \hat{f}(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, on déduit : $\forall x \neq 0, \left| \hat{f}(x) \right| = \left| \frac{\hat{f}'(x)}{ix} \right| = \frac{|\hat{f}'(x)|}{|x|}$ et comme \hat{f}' est bornée sur \mathbb{R} (question), il en résulte que : $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \hat{f}(x) = 0$.

- (c) On suppose $g : t \mapsto tf(t)$ est intégrable sur \mathbb{R} :

L'application $h : (x, t) \mapsto f(t)e^{-ixt}$ est C^1 sur \mathbb{R}^2 , avec $\frac{\partial h}{\partial x}(x, t) = -itf(t)e^{-ixt} = -ig(t)$, donc pour tout $(x, t) \in \mathbb{R}^2$; $\left| \frac{\partial h}{\partial x}(x, t) \right| \leq |g(t)|$ et $g \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et par suite le théorème de dérivation sous le signe intégral s'applique et l'on a : \hat{f} est C^1 sur \mathbb{R} , avec $\hat{f}'(x) = -i \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)e^{-ixt} dt = -i\hat{g}(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Partie III : Formule d'inversion

A- Un exemple :

On pose $h(t) = e^{-t^2}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ et on admet la formule : $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$.

1. L'application h est continue et intégrable sur \mathbb{R} car paire et $t^2 e^{-t^2} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$, donc \hat{h} est définie sur \mathbb{R} . De plus $t \mapsto th(t) = te^{-t^2}$ est continue et intégrable sur \mathbb{R} (car impaire et $t^2 th(t) = t^3 e^{-t^2} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$) et par

3.c) \hat{h} est de classe C^1 sur \mathbb{R} , avec :

$$\begin{aligned} \hat{h}'(x) &= -i \int_{-\infty}^{+\infty} th(t)e^{-ixt} dt = -i \int_{-\infty}^{+\infty} te^{-(t^2+ixt)} dt \\ &= -i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2}(2t + ix)e^{-(t^2+ixt)} dt + \frac{1}{2}i(ix) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(t^2+ixt)} dt \\ &= \left[e^{-(t^2+ixt)} \right]_{t=-\infty}^{t=+\infty} - \frac{1}{2}x \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} e^{-ixt} dt \\ &= -\frac{1}{2}x \hat{h}(x) \end{aligned}$$

Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\hat{h}'(x) + \frac{1}{2}x \hat{h}(x) = 0$ ie : \hat{h} est solution sur \mathbb{R} de l'équation différentielle (1) : $y' + \frac{1}{2}xy = 0$.

2. L'équation différentielle (1) est linéaire d'ordre un, sans second membre. la solution générale de (1) est donc de la forme : $y(x) = \lambda e^{\int \frac{1}{2}x dx} = \lambda e^{-\frac{x^2}{4}}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.

Comme \hat{h} est solution sur \mathbb{R} de l'équation différentielle (1), il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R}, \hat{h}(x) = \lambda e^{-\frac{x^2}{4}}$. Pour $x = 0$, on a : $\lambda = \hat{h}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$. d'où : $\forall x \in \mathbb{R}, \hat{h}(x) = \sqrt{\pi} e^{-\frac{x^2}{4}}$.

3. Si $h : t \mapsto e^{-t^2}$ et $\varepsilon > 0$, on a : $\sqrt{\varepsilon} h : t \mapsto e^{-(\sqrt{\varepsilon}t)^2} = e^{-\varepsilon t^2}$. Les hypothèses de II - 2.b) sont satisfaites, et donc $\sqrt{\varepsilon} \hat{h}(x) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \hat{h}\left(\frac{x}{\sqrt{\varepsilon}}\right) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \sqrt{\pi} e^{-\frac{1}{4}\left(\frac{x}{\sqrt{\varepsilon}}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \sqrt{\pi} e^{-\frac{x^2}{4\varepsilon}}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

B- Application à la formule d'inversion

Soit f une fonction continue, bornée, intégrable sur \mathbb{R} et telle que \hat{f} est intégrable sur \mathbb{R} . soit $(\varepsilon_n)_n$ une suite décroissante de réels strictement positifs et tendant vers 0

- a) Soit v une fonction continue et intégrable sur \mathbb{R} . posons pour $n \in \mathbb{N}$ et $y \in \mathbb{R}$: $v_n(y) = v(y)e^{-\varepsilon_n y^2}$, on a :

· $\forall n \in \mathbb{N}, \forall y \in \mathbb{R}, v_n$ est continue sur \mathbb{R} et (v_n) converge simplement vers v sur \mathbb{R}

· $\forall n \in \mathbb{N}, \forall y \in \mathbb{R}, |v_n(y)| = \left| v(y)e^{-\varepsilon_n y^2} \right| \leq |v(y)|$ et v est intégrable sur \mathbb{R} .

Le théorème de convergence dominée s'applique et on a bien la formule demandée.

b) Soit w une fonction continue et bornée sur \mathbb{R} .

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $y \in \mathbb{R}$, posons $w_n(y) = w(x + \varepsilon_n y)e^{-y^2}$, on a alors :

(w_n) est une suite de fonctions continues et converge simplement vers $y \mapsto w(x)e^{-y^2}$

$\forall n \in \mathbb{N}, \forall y \in \mathbb{R}, |w_n(y)| = |w(x + \varepsilon_n y)e^{-y^2}| \leq \|w\|_\infty e^{-y^2}$ et $y \mapsto \|w\|_\infty e^{-y^2}$ est intégrable sur \mathbb{R} .

Donc par le théorème de convergence dominée et la relation $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$, on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} w(x + \varepsilon_n y)e^{-y^2} dy = \int_{-\infty}^{+\infty} w(x)e^{-y^2} dy = w(x)\sqrt{\pi}.$$

2. Pour tous x, y et t réels, on a :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iy(t-x)} e^{-\varepsilon_n y^2} dy &= \hat{\sqrt{\varepsilon_n}} h(t-x) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_n}} \sqrt{\pi} e^{-\frac{(t-x)^2}{4\varepsilon_n}} \\ \left| f(t) \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_n}} h(t-x) \right| &\leq \|f\|_\infty \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_n}} \sqrt{\pi} e^{-\frac{(t-x)^2}{4\varepsilon_n}} \text{ et } t \mapsto \|f\|_\infty \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_n}} \sqrt{\pi} e^{-\frac{(t-x)^2}{4\varepsilon_n}} \text{ est intégrable sur } \mathbb{R} \text{ et puis} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_n}} \sqrt{\pi} e^{-\frac{(t-x)^2}{4\varepsilon_n}} dt &= \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_n}} \sqrt{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-\frac{(t-x)^2}{4\varepsilon_n}} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_n}} \sqrt{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-\left(\frac{t-x}{2\sqrt{\varepsilon_n}}\right)^2} dt \\ &\stackrel{s=\frac{t-x}{2\sqrt{\varepsilon_n}}}{=} 2\sqrt{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x + 2\sqrt{\varepsilon_n}s) e^{-s^2} ds \quad (\text{chgt de variable qui est un } C^1\text{-difféo}) \end{aligned}$$

D'où finalement :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iy(t-x)} e^{-\varepsilon_n y^2} dy \right) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_n}} \sqrt{\pi} e^{-\frac{(t-x)^2}{4\varepsilon_n}} dt = 2\sqrt{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x + 2\sqrt{\varepsilon_n}s) e^{-s^2} ds$$

3. x désigne un nombre réel et $\varepsilon > 0$.

a) Posons $g(y, t) = f(t)e^{ixy-\varepsilon y^2}e^{-iyt} = f(t)e^{-iy(t-x)}e^{-\varepsilon y^2}$ pour tout $(y, t) \in \mathbb{R}^2$.

Pour $p, q \in \mathbb{N}^*$, l'application g est continue sur le pavé $K = [-p; p] \times [-q; q]$ et le théorème de Fubini s'applique et on a alors la relation demandée.

b) Pour $q \in \mathbb{N}^*$, l'application $f_q : y \mapsto \int_{-q}^q f(t)e^{-iyt} dt$ est continue car $(y, t) \mapsto f(t)e^{-iyt}$ est continue sur $\mathbb{R} \times [-q; q]$ et que $(f_q)_q$ converge simplement vers \hat{f} .

D'autre part, pour tout $q \in \mathbb{N}^*$, la suite d'applications continues $(h_q : y \mapsto e^{ixy-\varepsilon y^2} f_q(y))_q$ converge simplement vers $h : y \mapsto e^{ixy-\varepsilon y^2} \hat{f}(y)$ et puisque \hat{f} est intégrable sur \mathbb{R} , il en résulte que h est intégrable (car $|h(y)| = e^{ixy-\varepsilon y^2} |\hat{f}(y)| \leq e^{-\varepsilon y^2} |\hat{f}(y)| \leq |\hat{f}(y)|$) et on a (via le th de convergence dominée) l'expression demandée.

c) Le même principe que précédemment, mais ici encore plus simple : La suite d'applications continues $(f_p : t \mapsto f(t) \int_{-p}^p e^{ixy-\varepsilon y^2} dy)_p$ converge simplement sur \mathbb{R} vers $t \mapsto f(t) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixy-\varepsilon y^2} dy$ et que $|f_p(t)| \leq |f(t)| \int_{-p}^p e^{-\varepsilon y^2} dy \leq |f(t)| \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\varepsilon y^2} dy = C^{te} |f(t)|$ et comme f est intégrable sur \mathbb{R} , encore par le th. de convergence dominée, l'identité demandée en résulte.

d) On applique à a) le c) et b) pour déduire d) :

$$\begin{aligned} \lim_q \left(\lim_p \int_{-p}^p e^{ixy-\varepsilon y^2} \left(\int_{-q}^q f(t)e^{-iyt} dt \right) dy \right) &= \lim_q \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixy-\varepsilon y^2} \left(\int_{-q}^q f(t)e^{-iyt} dt \right) dy \right) \\ &= \lim_q \int_{-q}^q f(t) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixy-iyt-\varepsilon y^2} dy \right) dt \\ &\stackrel{b)}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixy-iyt-\varepsilon y^2} dy \right) dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Or } \lim_q \left(\lim_p \int_{-p}^p e^{ixy-\varepsilon y^2} \left(\int_{-q}^q f(t)e^{-iyt} dt \right) dy \right) &= \lim_p \left(\lim_q \int_{-p}^p e^{ixy-\varepsilon y^2} \left(\int_{-q}^q f(t)e^{-iyt} dt \right) dy \right) \\ &= \lim_p \int_{-p}^p e^{ixy-\varepsilon y^2} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-iyt} dt \right) dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixy-\varepsilon y^2} \hat{f}(y) dy \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixy-iyt-\varepsilon y^2} dy \right) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixy-\varepsilon y^2} \hat{f}(y) dy.$$

4. Par 2., on a : $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iy(t-x)} e^{-\varepsilon_n y^2} dy \right) dt = 2\sqrt{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x + 2\sqrt{\varepsilon_n}s) e^{-s^2} ds$ et 3.d)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iy(t-x)} e^{-\varepsilon_n y^2} dy \right) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixy-\varepsilon_n y^2} \hat{f}(y) dy. \text{ Donc :}$$

$2\sqrt{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x + 2\sqrt{\varepsilon_n} s) e^{-s^2} ds = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixy - \varepsilon_n y^2} \hat{f}(y) dy$ et on fait tendre n vers $+\infty$, pour obtenir :
 $f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixy} \hat{f}(y) dy$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ (remarquer que la suite de fonctions sous le signe intégral vérifie les hypothèses du th. de convergence dominée).