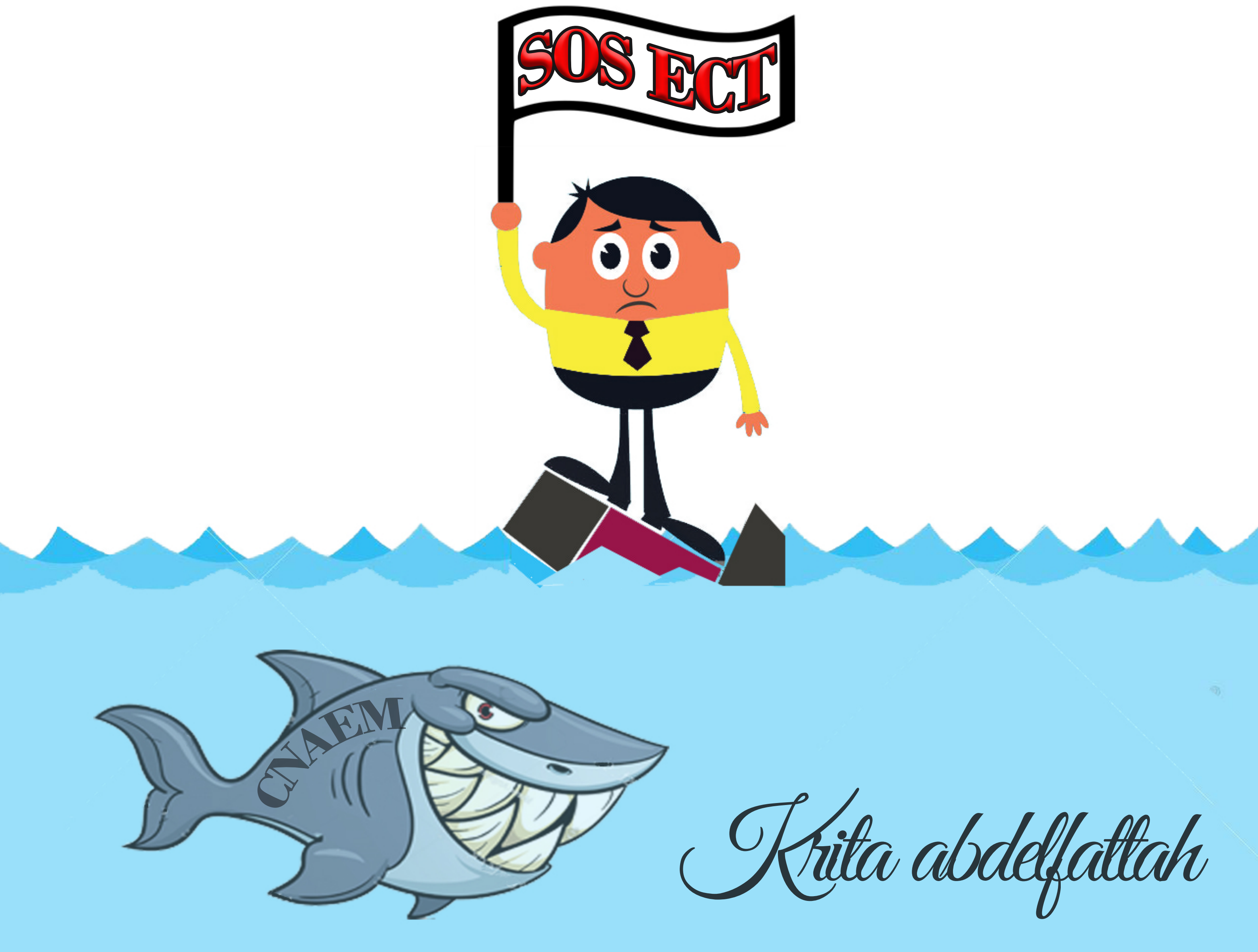
# Guide De Survie En Maths

## Pour l'ECT Laâyoune




Krita abdelfattah

**MÉTHODES ET ASTUCES À APPRENDRE PAR COEUR POUR AVOIR UNE EXCELLENTE NOTE À l'EPREUVE DE MATH**

*"God helps those who helps themselves".* Benjamin Franklin

⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆

## INTRODUCTION

*Les candidats de* **l'ECT de Lâayoune** *doivent absolument savoir répondre et surtout* ***rédiger*** *les réponses des questions suivantes puisqu'ils sont classiques et ils tomberont à coup sûr au* CNAEM ! *Ne les sousestimez pas. Ne faites pas* ***la grave erreur*** *de croire que vous connaissez la réponse juste parce que vous avez vu la réponse quelque part ou parce que vous avez rencontré cette question pendant les trimestres précedents (peut-être vous avez oublié la réponse !). En d'autre termes :*

*"The first principle is that you must not fool yourself and you are the easiest person to fool."*

*Le seul critère fiable pour savoir si vous connaissez la réponse c'est votre capacité à rédiger d'une façon claire et* ***rapide*** *la bonne réponse.N'oubliez pas que vous avez seulement 4 heures pour l'épreuve de Math (ce qui est largement suffisant pour avoir une excellente note) la qualité de votre rédaction est le facteur clé de votre note et pas vos brillantes idées que vous n'avez pas pu communiquées..*

Ce document se concentre essentiellement sur les techniques, les astuces et les méthodes utilisés au CNAEMs **précédents**.

**Conseils généraux :**

1. **Ayez confiance en vous-même :** Même si vous avez perdu beaucoup du temps, même si vous avez eu des mauvaises notes au math pendant les deux années, je vous garantie que vous pouvez avoir une excellente note si vous travaillez seulement les jours qui vous restent d'une façon intélligente, mais vous *devez commencer maintenant* et pas demain, maintenant est l'occasion de brillez. . Concentrer votre energie en ce qui est important(les questions classiques). Ensuite si vous avez du temps passez aux autres questions (les non classiques).


2. **Entrainez vous** à rédigez la bonne réponse d'une façon rapide (5 jusqu'à 10 min pas plus pour chaque question). Cela va vous permettre de gagnez du temps que vous pouvez utiliser pour d'autres questions.

3. **Il est recommendé** que vous apprenez ces techniques par coeur, j'ai dit les techniques et non pas l'exercice tel qu'il est, car il est fort probable que vous aurez du stress lors de l'examen. La mémorisation peut vous aider à alléger la situation. Prenez un stylo et une feuille et répéter ces techniques 3 ou 4 fois au moins, ensuite réviser les.
4. **Commencez** d'abord par préparer les CNAEM précédents. puis si vous voulez, préparez les concours de France ou le concours de l'ISCAE. Le CNAEM est le plus important !
5. **Préparez** au moins trois CNAEM.
6. **Préparez** les concours avec vos amis, commencez seuls puis discutez les sujets avec vos amis.
7. **Lors de l'examen,** commencer toujours par les questions que vous avez déja travaillés ou les questions faciles qui ne consomment pas beaucoup du temps, puis passez aux autres questions.
8. **Utiliser** les méthodes que vous avez au programme. Certains éleves utilise des techniques qui sont hors programme (par exemple le polynôme caractéristique pour déterminer les valeurs propres, le déterminant d'une matrice d'ordre 3 ou plus alors que ces techniques sont hors programmes).
9. **Méfier-vous** des questions clés dans un exercice, càd les questions dont le résulat est utilisable dans les questions suivantes. Prenez votre temps pour répondre à ce genre des questions, par exemple la question d'inversibilité d'une matrice est fréquemment utilisé dans les questions suivantes( par exemple pour montrer que la matrice est diagonalisable, calcul du puissance d'une matrice)
10. **Enfin ce qui compte** et ce qui est important n'est pas la Réussite ou l'Echec, mais plutôt l'effort et le temps que vous avez consacré pendant votre préparation. Vous ne pouvez pas controler ou devenir le résultat, mais vous pouvez controler l'effort et le temps de votre préparation.Si vous avez mis toute votre energie lors de la préparation, vous pouvez être fiers de ce que vous avez accompli

Maintement passons au choses plus pratiques car le CNAEM IS COMING.

# 1 Algèbre Linéaire

## 1.1 Inversibilité d'une matrice

**Question 1**

Montrer que la matrice M est inversible et calculer son inverse.(l'inverse n'est pas donné !)

Cette question comporte deux parties :

1. Justification de l'inversibilité
2. Calcul de l'inverse (ce qui est plus difficile)

C'est l'une des questions les plus fréquentes au CNAEM. Pour répondre à cette question, il faut considérer trois facteurs

✓ Les coefficients de la matrice : est-ce qu'ils sont connus ou non.
✓ La taille de la matrice (matrice d'ordre 2 ou d'ordre superieur)
✓ La nature de la matrice (diagonale,triangulaire,ni diagonale ni triangulaire)

Voici un petit résumé :

★ si la matrice est d'ordre 2, disant $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, alors

1. elle est inversible si $ad - bc \neq 0$ et dans ce cas $M^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ (permuter les élements diagonaux, ajouter le signe moins aux autres élements et diviser par le $ad - bc$).
2. Elle est non invesible si $ad - bc = 0$.

★ Si la matrice est diagonale ou triangulaire (superieure ou inférieure) alors elle est inversible ssi **tous** ses éléments diagonaux sont non nuls. Si **au moins** un élément diagonal est nul alors cette matrice est non inversible

— Si la matrice est diagonale et inversible, disant $M = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$, alors l'inverse est $\begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{c} \end{pmatrix}$ (utiliser la même méthode pour une matrice **diagonale** de taille plus grande que 3)

Exemple 1 *(CNAEM 2014)* :

soit $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que la matrice T est inversible et calculer la matrice inverse .

*Solution* :

Justifions d'abord l'inversibilité de T : puisque cette matrice est triangulaire et tous ses élements diagonaux sont non nuls alors elle est inversible (pas la peine de faire des calculs compliqués !).

Pour déterminer l'inverse, il y a deux méthodes :

- la méthode de Gauss
- la méthode du résolution d'un système linéaire.

après calcul on trouve que

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Si vous avez besoin d'une petite révision de la méthode de Gauss

cliquer ici(vidéo exo7) ou ici (khanacademy)

Exemple 2 *(CNAEM 2012)* :

Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que la matrice P est inversible et calculer la matrice inverse.

*Solution* :

Cette matrice n'est pas triangulaire ni diagonale,donc on va justifier l'inversibilité et calculer l'inverse en même temps en utilisant soit la méthode de Gauss, soit la méthode de résolution du système linéaire. Après calcul,on trouve que $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

Exemple 3 *(CNAEM 2015)* :

Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que la matrice P est inversible et calculer la matrice inverse.

*Solution* :

Cette matrice n'est pas triangulaire ni diagonale,donc on va justifier l'inversibilité et calculer l'inverse en même temps en utilisant soit la méthode de Gauss soit la méthode de résolution du système linéaire. Après calcul,on trouve que $P^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$

**Question 2**

Montrer que la matrice M est inversible et que sa matrice inverse est donné par une telle matrice .(l'inverse est donné !)

Cette question est similaire à la question précédente, la seule différence est que l'inverse est donné. Dans ce cas, **n'utilisez pas les techniques précédentes** sauf si la question vous demande d'utiliser une méthode spécifique. Il suffit de multiplier la matrice par l'inverse donné et montrez que le produit est égale à la matrice identité.

Exemple 4 *(CNAEM 2013)* :

soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que la matrice P est inversible et que sa matrice inverse est donnée par

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

.

*Solution* :
Par calcul(faites le calcul!) on trouve que

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

d'où la matrice P est inversible et son inverse est $P^{-1}$

**Question 3**

Calculer le produit matricielle blablabla et déduire que la matrice est inversible.

Cette question vous demande de **déduire** quelque chose, donc il faut utiliser un résultat précédent. Pour déterminer l'inverse dans ce cas. Il faut considérer les points suivants :

- Si $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ telles que $AB = I$ alors A et B sont inversibles et

$$A^{-1} = B \text{ et } B^{-1} = A$$

- Si $A, B, C \in M_n(\mathbb{R})$ telles que $ABC = I$ alors A,B et C sont inversibles et

$$A^{-1} = BC, \quad C^{-1} = AB \text{ et } B^{-1} = CA$$

Les deux premières égalités découlent immédiatement de la régle précédente. La preuve de la dernière égalité est la suivante :
  - $ABC = I \iff A^{-1}ABCC^{-1} = A^{-1}C^{-1}$
    (multiplier les deux cotés de l'égalité à gauche par $A^{-1}$ et à droite par $C^{-1}$)
    $\iff B = A^{-1}C^{-1}$
    $\iff B^{-1} = (A^{-1}C^{-1})^{-1} = ((C^{-1})^{-1}(B^{-1})^{-1}) = CA$

Exemple 5 *(CNAEM 2018)* :
Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$. Vérifier que $PQ = 3I$. En déduire que P est inversible et déterminer son inverse $P^{-1}$.
*Solution* :
Par calcul on trouve que $PQ = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = 3I$. On déduit que $\frac{1}{3}PQ = I$. (mettez toujours la matrice identité toute seule en un coté de l'égalité sans coefficient) d'où

$$P^{-1} = \frac{1}{3}Q = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Exemple 6 *(CNAEM 2017)* :
Soit $P = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & -2 \end{pmatrix}, Q = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -8 & 10 & 1 \\ 6 & -3 & -3 \end{pmatrix}$. Calculer $PQ$ et déduire que P est inversible et déterminer son inverse $P^{-1}$.

*Solution* :
D'abord si une question vous demande de calculer un produit matricielle puis vous demande de **déduire** l'inversibilité ou l'inverse alors **soyez presque sûr** que ce produit sera égale à l'identité ou un nombre fois l'identité (par exemple $3I, \frac{1}{2}I, 5I...$).

Par calcul on trouve que $PQ = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = I$. On déduit que $P^{-1} = Q$. d'où

$$P^{-1} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -8 & 10 & 1 \\ 6 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

Exemple 7 *(CNAEM 2015)* :
Soit $A = \begin{pmatrix} \frac{7}{2} & \frac{-3}{2} & -3 \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -3 \\ \frac{3}{2} & \frac{-3}{2} & -1 \end{pmatrix}$ Vérifier que $\frac{-1}{2}A(I-A) = I$.En déduire que la matrice $I - A$ est inversible et calculer son inverse.

*Solution* :
Pour vérifier $\frac{-1}{2}A(I-A) = I$ il suffit de calculer ce produit en utilisant l'expression et les coefficients de A. D'après cette égalité on déduit

$$(I-A)^{-1} = \frac{-1}{2}A = \frac{-1}{2}\begin{pmatrix} \frac{7}{2} & \frac{-3}{2} & -3 \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -3 \\ \frac{3}{2} & \frac{-3}{2} & -1 \end{pmatrix}$$

**Question 4**

Montrer (ou vérifier) que $P(A) = 0$ (P est un polynôme). Montrer que A est inversible et déterminer son inverse.

Rappelons quelques techniques des TD :

★ si vous avez une expression de la forme :

$$a_nA^n + a_{n-1}A^{n-1} + ... + a_0I = 0$$

où $a_0 \neq 0$ alors A est inversible et vous pouvez déterminer l'inverse en suivant les étapes suivantes :

1. Mettez la matrice identité en un coté de l'égalité (toute seule sans coefficients)
2. Factoriser par A.
3. L'inverse est la matrice (ou l'expression) à coté de A.

★ si vous avez une expression de la forme :

$$a_nA^n + a_{n-1}A^{n-1} + ... + A = a_0I$$

où $a_0 \neq 0$ diviser l'égalité par $a_0$ et commencer par la 2eme étape précédente.(la 1er étape est déja faite pour vous)

Voyons un exemple concret :

$\boxed{\text{Exemple 8}}$ *(CNAEM 2018)* :

Soit $A = \dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Vérifier que $A^2 - \frac{7}{5}A + \frac{2}{5}I = 0$. Montrer que A est inversible et déterminer son inverse $A^{-1}$

*Solution* :

Pour vérifier $A^2 - \frac{7}{5}A + \frac{2}{5}I = 0$ il suffit de calculer cette expression en utilisant les coefficients de A (calcul direct). D'après cette égalité on déduit :

- $A^2 - \frac{7}{5}A = -\frac{2}{5}I$( mettez l'identité en un coté de l'égalité)
- $-\frac{5}{2}(A^2 - \frac{7}{5}A) = I$ (mutliplier par $-\frac{2}{5}$ pour se débarassez de facteur de $I$)
- $-\frac{5}{2}(A - \frac{7}{5}I)A = I$ (factoriser par A)
- l'inverse est $-\frac{5}{2}(A - \frac{7}{5}I)$

Les deux questions suivantes ne sont pas fréquentes. En effet, elles ont apparu une seul fois aux CNAEMs précédents.

**Question 5**

Calculer le rang de la matrice M et déduire son inversibilité .

Le lien entre le rang et l'inversibilité d'une matrice est le suivant :

**Théorème** : Une matrice carrée est inversible ssi son rang est égale à sa taille. Si le rang d'une matrice est strictement inférieur à sa taille alors cette matrice est non inversible.
**Et voici un astuce** :
Le rang d'une matrice **non nulle** dont tous les lignes **ou** tous les colonnes sont identiques est égale à 1.

$\boxed{\text{Exemple 9}}$ *(CNAEM 2016)* :

Soit $M = \begin{pmatrix} a & a & a \\ b & b & b \\ c & c & c \end{pmatrix}$. Justifier que le rang $\leq 1$. La matrice M est-elle inversible ?

*Solution* :

Si $a = b = c = 0$ alors M sera la matrice nulle, d'où rang(M)=0 (le rang d'une matrice nulle est zéro) et M est non inversible (car nulle). Sinon, M est une matrice non nulle dont les colonnes sont identiques. On déduit que rang(M)=1. Puisque M est une matrice de taille 3 on déduit que rang(M)<taille(M) d'où M est non inversible.

**Question 6**

Montrer que la matrice P est inversible et calculer son inverse. (P une matrice avec des paramétres)

Dans ce cas la matrice P contient des coefficients inconnues. Pour répondre à cette question, on peut utiliser l'algorithme de Gauss. Voici un exemple :

$\boxed{\text{Exemple 10}}$ *(CNAEM 2016)* :

Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ -1 & 1 & b \\ 0 & -1 & c \end{pmatrix}$. telle que $s = a+b+c \neq 0$. Montrer que P est inversible et calculer son inverse.

*Solution* :

Appliquons l'algorithme de Pivot de Gauss a la matrice augmentée :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 0 & a & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & b & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & c & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 + L1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 0 & a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & a+b & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & c & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + L_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 0 & a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & a+b & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{\text{a+b+c}} & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 0 & a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & a+b & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{\text{s}} & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Nous avons abouti à **une forme échelonnée** avec trois pivots non nuls ($s \neq 0$), on déduit que cette matrice est inversible. Continuons notre travail pour obtenir une forme échelonnée réduite :

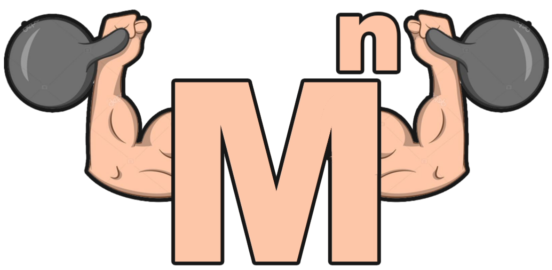
$$\xrightarrow{L_3 \leftarrow \frac{1}{s} L_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 0 & a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & a+b & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & \frac{1}{s} & \frac{1}{s} & \frac{1}{s} \end{array}\right) \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - (a+b) L_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 0 & a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 1 - \frac{a+b}{s} & 1 - \frac{a+b}{s} & -\frac{a+b}{s} \\ 0 & 0 & \boxed{1} & \frac{1}{s} & \frac{1}{s} & \frac{1}{s} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 - a L_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 0 & 0 & 1 - \frac{a}{s} & -\frac{a}{s} & -\frac{a}{s} \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 1 - \frac{a+b}{s} & 1 - \frac{a+b}{s} & -\frac{a+b}{s} \\ 0 & 0 & \boxed{1} & \frac{1}{s} & \frac{1}{s} & \frac{1}{s} \end{array}\right)$$

**L'inverse est** $\begin{pmatrix} 1 - \frac{a}{s} & -\frac{a}{s} & -\frac{a}{s} \\ 1 - \frac{a+b}{s} & 1 - \frac{a+b}{s} & -\frac{a+b}{s} \\ \frac{1}{s} & \frac{1}{s} & \frac{1}{s} \end{pmatrix}$

## 1.2 Puissance d'une matrice carrée

Le calcul de puissance d'une matrice est aussi l'une des questions fréquentes au CNAEM. La démarche à suivre dépends essentiellement de la nature de la matrice (diagonale, nilpotente, diagonalisable,quelconque) et les questions précédents. Les questions de l'exercice vous donnent des indications pour suivre une méthode particulière.



Voici un petit résumé :

★ **Si A est diagonale**, alors pour calculer $A^n$ it suffit de calculer les puissances des éléments diagonaux. En d'autre termes, si $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$ alors

$$A^n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^n & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^n \end{pmatrix}$$

★ **Si A est nilpotente** d'indice de nilpotence p (càd il existe un entier naturel p tel que $A^p = 0$ et $A^{p-1} \neq 0$) alors

- $\forall n \geq p, A^n = 0$ car $A^n = A^p \times A^{n-p} = 0 \times A^{n-p} = 0$
- $\forall n < p$, il faut calculer ces puissance par calcul direct (càd calculer $A^2, A^3, ..., A^{p-1}$)

★ **Si A est diagonalisable**, alors il existe une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que $A = PDP^{-1}$ et on peut montrer **par récurrence** que $A^n = PD^nP^{-1}$

★ **Si A** peut s'écrire sous la forme A=B+C ($B, C \in M_n(\mathbb{R})$) avec BC=CB alors on utiliser la binome de Newton

$$A^n = (B + C)^n = \Sigma_{k=0}^n \binom{n}{k} B^k C^{n-k}$$

★ **Si A est quelconque**, alors

1. On calcule $A, A^2, A^3, ..$ pour avoir une idée sur $A^n$
2. On fait une hypothèse en devinant une formule général de $A^n$
3. On prouve le résultat par récurrence.

★ ★ ★ ★ ★